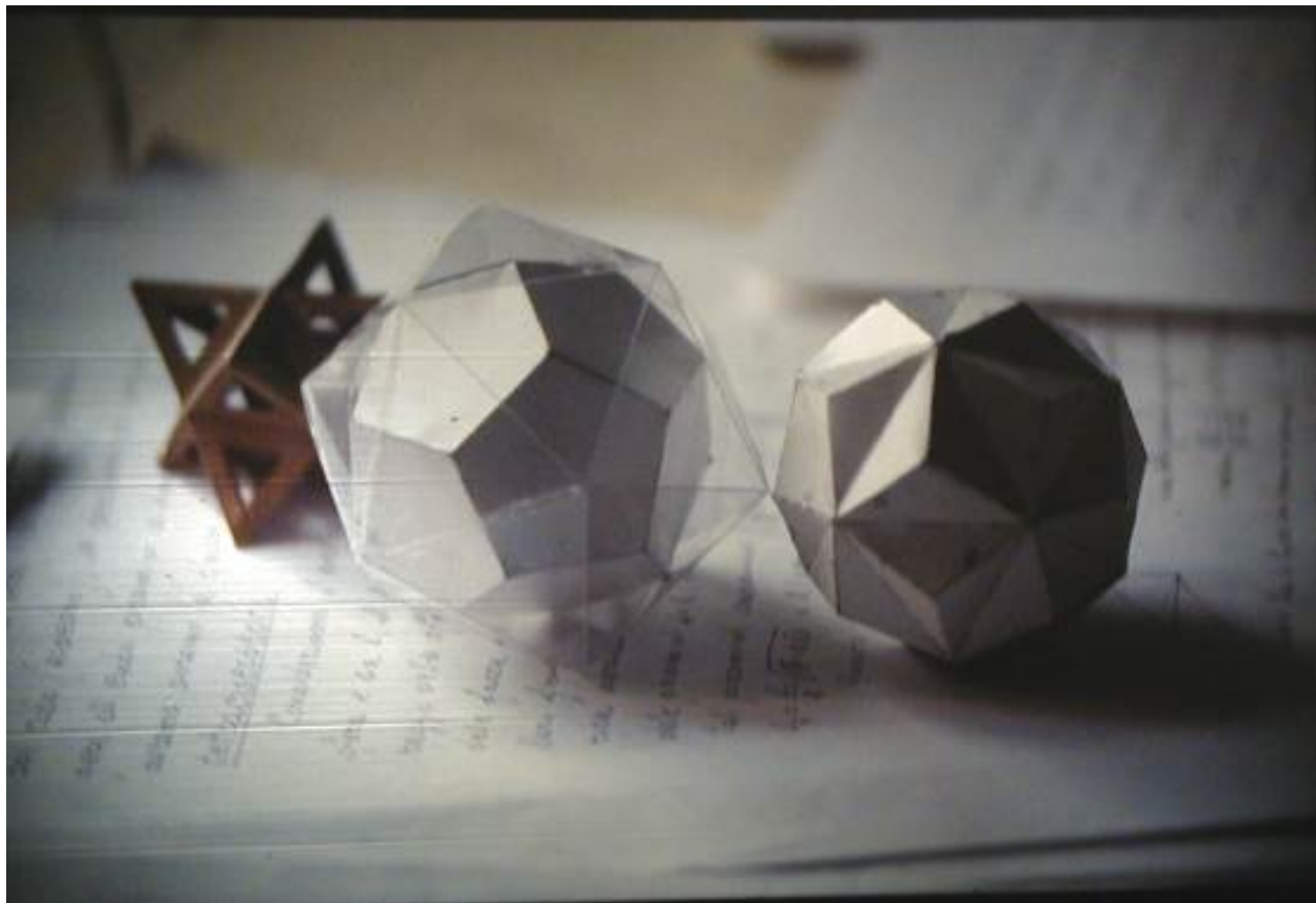
L'opera di Corrado Brogi

Questo sito contiene volumi manoscritti inediti dell'Ing.Corrado Brogi (Firenze 1920-1999)

Sito web a cura di Giovanni Brogi accessi dal 13/11/2000

Corrado Brogi

Volume I

La Matematica, La Geometria, L'Analisi per chi voglia ripartire da zero.

INDICE del volume I

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Indice: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Volume: 1 2 3 4 5 6 7

Corrado Brogi

Volume II

Calcolo Combinatorio, le Serie, le Coniche.

INDICE del volume II

Corrado Brogi

Volume III

Il campo tridimensionale, funzioni in più variabili, le equazioni differenziali.

INDICE del volume III

Corrado Brogi

Volume IV

La geometria descrittiva, la trigonometria sferica, solidi geometrici e cristallografia.

INDICE del volume IV

Elementi di Geometria Descrittiva

Cenni di Trigonometria Sferica

I Solidi Geometrici

La Simmetria Nei Cristalli

Indice Enciclopedico Pag. 0

WebMaster: Giovanni Brogi

Corrado Brogi

Volume V

Equazioni di 3° e 4° Grado, Le linee curve piane, Gli algoritmi per calcolarle

INDICE del volume V

Corrado Brogi

Volume VI

Geometria delle Masse, Statica, Scienza delle Costruzioni, I Cavi Sospesi, la Catenaria

INDICE del volume VI

Indice delle foto contenute nel VI volume sostituite con gli originali a colori

Corrado Brogi

Volume VII

La Matematica applicata, I campi Vettoriali, I fenomeni Fisici

INDICE del volume VII

La matematica applicata

Il problema di definire una "quantitá" implica la "qualificazione" per definire una unitá di confronto della stessa specie, implica la "misura" rispetto a tale unitá arbitraria, cioè nasce la teoria dei numeri, nasce il delicato problema della continuitá e della discontinuitá.

Un gregge puó essere definito dal numero dei capi (sará un numero intero, che implica discontinuitá). Ma puó essere anche definito dal peso di carne, (sará un numero frazionario di unitá arbitrarie che implica continuitá)
Abbiamo giá dato lo schema dei numeri: (V. vol I) ed abbiamo giá esposte le condizioni di numerabilitá

zioni di numerabilitá

Poiché i numeri reali possono rappresen=
tarsi su una retta, rispetto ad un segmen=
to preso arbitrariamente come unitario,
Avremo l'impostazione geometrica, ove
il segmento unitario diviene il simbolo
dell'unitá di quella quantitá qualificata

Abbiamo già trattato questi argomenti, compreso il simbolo algebrico.
Dobbiamo ora tornare sull'argomento. I numeri "ordinali," implicando una sequenza, hanno in se il concetto di tempo. ove l'intervallo di tempo può essere infinitamente piccolo, o infinitamente grande, Sarà sempre una quantità riferita ad una unità arbitraria.
Si noti come la sequenza (il succedersi) implichi, rispetto all' unità arbitraria, una velocità. (Possiamo assumere l'unità arbitraria sulla base della Velocità di quella certa sequenza, di quel certo fenomeno, però non sempre è possibile.)
Tal volta la velocità è meglio riguardarla come una frequenza: per esempio: attraverso un ponte passano

cento uomini ogni ora, oppure come una
portata : attraverso quell' orifizio pas=
sano tot. metri cubi al secondo.
Si noti come una grandezza continua,
o discontinua, riferita all'unità di

tempo: cicli al secondo, operazioni al secondo fatte da un computer, ecc. può riguardarsi sia come una velocità, sia come una portata, sia come una frequenza.
Ma il problema è ancora più comples= so. Torniamo agli uomini che attraversa= no un ponte: (100 uomini/ora), un uomo ogni 36 secondi.
Supponiamo di contarli in uscita, come fosse un traguardo.
Possono arrivare singolarmente, oppure affiancati (per due, per tre, per ...)
Quindi la frequenza media oraria non fornisce il dettaglio del fenomeno.
Occorre molta precisione nel definire le dimensioni da attribuire ai simboli algebrici, e sopratutto non attribuire arbitrariamente unità dimensionali.

Ogni unitá dimensionale deve essere riguardata nei vari aspetti: non si puó dire: "(velocitá = m/sec)" se non è specificata non solo la direzione della lunghezza, (campi vettoriali), ma la stessa definizione di

lunghezza e di tempo. Un esempio divertente è il romanzo: "Il giro del Mondo in 80 giorni" di G. Verne (1873).

Le dimensioni: "spazio" e "tempo", non sono indipendenti fra loro, anche le altre dimensioni, che chiamiamo fisiche, non sono indipendenti; occorre ripartire da cognizioni primitive.

Dall'"io", il "cogito ergo sum" cartesiano, a ciò che ci circonda, (o meglio: a ciò in cui siamo immersi), appare una specie di emissione dal centro: "io-osservatore" a tutto l'intorno, cioè in tutte le direzioni.

Che il concetto "direzione" fosse fondamentale l'abbiamo già esposto, ma nel procedere della conoscenza

ma nel procedere della conoscenza dall' "io" all'intorno di quell' "io", notia= mo che vi sono altri "io", a ciascuno dei quali corrisponde una direzione a partire da un "io" preso come osservatore, e che in ogni direzione da quell' io vi sono infiniti "io", più o meno lontani.

Il concetto di "spazio" e di "tempo" è già implicito, e nessun "io" è così privilegiato da poter essere preso come riferimento fondamentale.

Quindi, piaccia o non piaccia, <u>l'origine non è all'interno del nostro cosmo.</u>

La constatazione ci lascia perplessi. Vi sono, (si pensano), entità spirituali, che esulano dal nostro cosmo; non hanno infiniti o infinitesimi, non sono né spazio né tempo; ne percepiamo in noi l'esistenza, come forme di affetto difficili a spiegare. Il nostro pensiero vola alla ricerca di "un bello", la cui bellezza è già amore. Ma sono parole umane che limitano, la sensazione... È più in là!

Siamo, o cerchiamo di essere, consapevoli dei nostri limiti, accettiamo

pevoli dei nostri limiti, accettiamo i nostri "infinitesimi" ed il nostro inde=finitamente grande, che chiamiamo infi=nito.

Il segmento delimitato dalla localizzazione di due "io" puntiformi è sempre divisibile con infiniti

tagli, e comunque grande sia il segmento finito, al limite delle infinite divisioni, si ha l'eleatica definizione di punto.

-Che differenza c'è, sul segmento, fra taglio e punto?

-Il taglio è la separazione di due punti adiacenti (negli anni 40' scrivevo sul bipunto)

Occorre una "materializzazione" del punto per fare il differenziale. = (La più piccola entità di una dimensione fisica, oltre la quale non esiste più tale dimensione)

Per fare esempi semplici, dividiamo un volume con un fascio di piani paralleli, ogni elemento di volume è costituito da un'area finita per lo spessore, (che è la distanza fra i piani) Diminuendo lo spessore (misura lineare di lunghezza) arriveremo ad un limite "ds" = = differenziale spessore, ove l'area A molti=

plicata per "ds" da' il differenziale volume che indichiamo con $dV = A\,ds$.

"ds" è la più piccola misura lineare oltre la quale non v'è più spessore resta la superficie piana di area A priva di spessore.

Se l'area A la consideriamo rettangolare di base "b" ed altezza "h" e supponiamo di dividerla con segmenti paralleli a "b" distanti dh (differenziale altezza) l'elemento differenziale di area $dA = b \cdot dh$ ove per $dh = 0$ non si ha più area ma un segmento "b" che suppo= niamo lungo "l" ove "dl" sarà il differenziale delle lunghezze lineari che ritroviamo in ds, dh, dx, dy, dz, db, ecc.

Il simbolo: d(..) = differenziale ci rappresenta la variazione infinitesima di quella gran= dezza, la più piccola, oltre la quale sparisce la dimensione di quella grandezza.

Abbiamo già trattato e discusso il calcolo infinitesimale, negli altri volumi, abbiamo ri= petuto queste osservazioni per cercare, nella esperienza sul nostro cosmo, le differenziazio= ni iniziali.

ni iniziali.

Abbiamo visto che ogni origine posta nel nostro cosmo è arbitraria.

Consideriamo un qualsiasi "io" osservatore puntiforme che varii in un altro "io".

La prima variazione implica la determinazione

<u>di una direzione</u> e poi una variazione <u>di distanza</u>. Se indichiamo con "O" l'"io" osservatore e con "P" l'"io" variato, abbiamo che, sia "O" che "P", giacciono entrambi sulla stessa retta di verso $\overrightarrow{OP}$, e su di essa vi sono altri infiniti punti "io", non solo ma se l'origine è indefinitamente lontana vi sono per quella origine infinite rette parallele costituenti una direzionalità e tali rette coprono tutti i punti del nostro cosmo.

Solo la variazione di direzionalità implica la variazione di un punto indefinitamente lontano. Ma la variazione di direzionalità è <u>un angolo piano!</u> quindi dare come primitiva dimensione la dimensione angolare piana

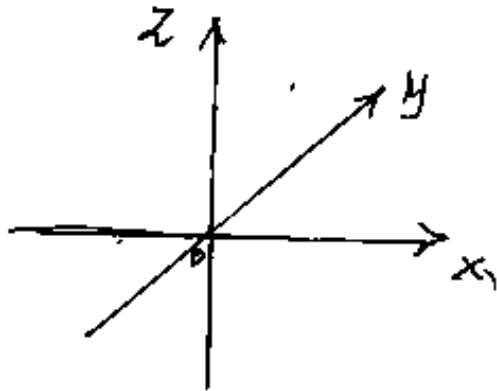
la dimensione angolare piana, appare fondata, ma non è definito su quale piano.

Si noti che la direzionalità data da un punto indefinitamente lontano fino a divenire improprio, è comune a tutti i punti del nostro cosmo.

Per esempio consideriamo il "nord" terrestre, circa la direzione della stella polare, (troppo vicina per parlare di direzionalità). Consideriamo invece la direzionalità di tutte le rette parallele alla retta che, in un certo istante, congiunge il polo terrestre col centro della stella polare; Una tale direzionalità non è più limitata al campo terrestre, può essere assunta nel Cosmo. Essa è la giacitura dei piani ortogonali fra cui il piano equatoriale terrestre, o quello passante per il centro del sole, o altro; qualunque sia il piano, su di esso esiste un punto intersezione con una delle rette normali da poter considerare "centro".

Fra tutti i raggi uscenti da tale centro, solo uno è la direzionalità.
Ogni raggio può proiettarsi sul piano e sulla retta di giacitura.
Il raggio della direzionalità, sul piano

ha proiezione nulla. Nel fascio di piani aventi per asse il raggio della direzionalità, consideriamo due piani ortogonali; avremo così tre piani ortogonali fra loro che dividono il cosmo in ottanti; chiamando con x, y, z le rette intersezione di tali piani, abbiamo un

z
y
x
o

sistema cartesiano ortogonale che noi considereremo in <u>coordinate polari</u>

Sia la z la direzionalità iniziale che determina il piano x; y (perpendicolare) se definiamo una delle due direzionalità x od y, nota la z, l'altra resta definita. Quindi, poiché nello spazio tridimensionale occorrono <u>tre</u> coordinate rispetto agli assi

occorrono tre coordinate rispetto agli assi di riferimento, per determinare un punto, esse non possono essere tutte angolari.

Avremo quindi i seguenti casi di coordinate:

1) x_P ; y_P ; z_P ; tutte e tre lineari (cartesiane).

2) $\widehat{POX}$; $\widehat{POY}$; $\overline{PO}$; (polari) la $\widehat{POZ} = \arccos\sqrt{1 - \cos^2\widehat{POX} - \cos^2\widehat{POY}}$.

3) Z_P ; R_P ; $\widehat{RX} = \alpha$; (cilindriche)

Le tre coordinate cartesiane sono possibili solo avendo definito le direzionalità: x, y, z. ed il punto origine "O", nonché le unità dimensionali nelle tre direzionalità.

Consideriamo nota una sola direzionalità ed una variazione angolare φ_{rad}, di tale direzionalità. Non essendo definito il piano di φ_{rad} da un "io" osservatore avremo il vertice di un cono indefinito, ampio $2\varphi_{rad}$, ed avente per asse la direzionalità iniziale.

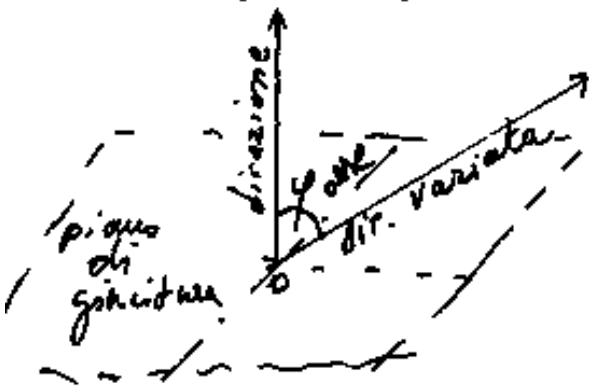
Chiameremo: angolo solido, lo spazio interno a tale cono.

Per $\varphi_{rad.} = \pi/2$ il cono degenera in un piano. Gli angoli solidi si misurano in stereoradianti e sono l'area della sfera di raggio unitario intercettata dal cono. L'area totale di tale sfera è: 4π (stereoradianti)

l'area totale di tale sfera è : 4π (stereoradianti)
il semispazio delimitato da un piano
quando $\varphi = \pi/2$ rad. è : 2π (stereoradianti)
e l'angolo solido del cono con al vertice 2φ
sarà : $2\pi(1-\cos\varphi)$ (stereoradianti).

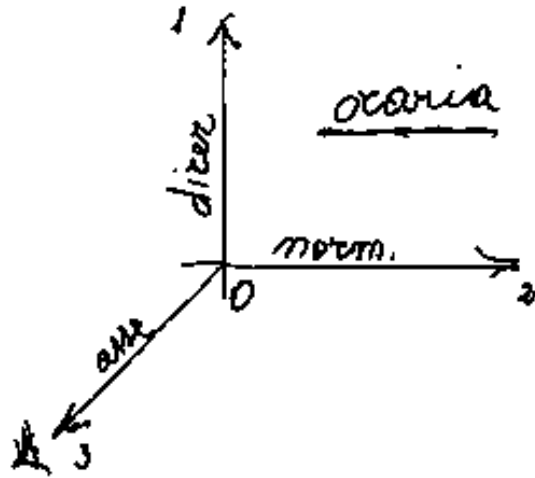
Il cambio di direzione da un punto finito "o" è un angolo. La semiretta, direzione originaria, ruota intorno ad una delle infinite rette del piano di giacitura.

La variazione di direzione implica il moto rotatorio, la perpendicolarità fra semiretta-direzione ed asse di rotazione, Ma soprattutto indica la prima unità fondamentale (non convenzionale), che è l'angolo giro.

L'angolo giro, ha un verso di rotazione e un tempo per compiersi. Per definire i versi di rotazione occorre attribuire un verso all'asse ed alla retta di giacitura del piano comune alla direzione ed al suo asse.

Nascono così due terne ortogonali

Nascono così due terne ortogonali dette oraria ed antioraria.

oraria

antioraria

di cui abbiamo giá trattato, peró vi è giá l'arbitrarietà dei versi e delle sequenze, da cui vorremmo uscire.

In campo finito, un piano ha due facce, come una pagina, un davanti, un dietro, un pari, un dispari, ecc, attribuiti convenzionalmente (arbitrariamente)

E, visto dall'infinito, cosa succede?

Se il punto indefinitamente lontano ci dá la direzionalitá (direzione e verso di tutte le rette parallele, o la giacitura dei piani ad esse normali,) è implicito che la direzione opposta è un punto indefinitamente lontano opposto al primo.

Ma se questo punto indefinitamente lontano, supera il limite, non puó essere un punto, perché un punto all'∞ non ha senso. esso diventa come l'infi.

non ha senso, esso diventa come l'infi:
nito stesso, non v'è più il segno + o -
come la tangente a 90°, i piani non
hanno più due facce, non esistono
"versi" sulle rette! La retta è come una
circonferenza di raggio infinito, gli estremi

si riuniscono.

Il nastro di Möbius è una superficie avente una sola faccia!

Abbiamo già trattato il concetto di limite e di calcolo infinitesimale; Lucio Lombardo Radice, nel suo libro: "L'infinito" (Itinerari filosofici e matematici d'un concetto di base) riporta e commenta il pensiero degli antichi, fino agli studiosi moderni, da Aristotele a Galileo, a Cantor, a Kant, a Russell. a Hilbert, ecc.

Mi sembra (sono un essere umano, so di sbagliare) che la parola "Infinito" e la parola "zero", sulle quali si sono dibattuti gli studiosi fra definirli o no numeri.

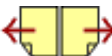
L'infinitesimo, preso come un quasi zero, l'infinito aggettivato in "attuale", in

l'infinito aggettivato in attuale, in "assoluto", in potenziale, catalogato coi transfiniti, ... ripeto mi sembra sia una presuntuosa involuzione di uomini che qualche milione di anni fa' non aveva specie sulla terra, .. e fra qualche milione di anni la sua specie terrestre sarà probabilmente estinta.

Come nessun uomo dovrebbe permettersi osservazioni su ciò che chiamiamo "Dio", perché al di fuori, al di sopra, di tutta l'intelligenza di tutta la generazione umana; è apprezzabile l'uomo primitivo che, non avendone mai sentito parlare, sente in se l'esigenza di comunicare, e piazzato un palo in terra fà il primo totem.

Tornando alla matematica, credo che lo "zero" e l'infinito siano due limiti. Se prendiamo una grandezza finita: N e la dividiamo per infinito: $\frac{N}{\infty} = 0$ è ovvio che otteniamo lo zero, perché se ottenessimo una particella infinitesima potremo continuare a dividerla, ciò vorrebbe dire che prima non avevamo fatto <u>infinite</u> sezioni, ma solo un numero molto grande.

molto grande.

Ecco perché se proiettiamo un segmento su un'altro di diversa grandezza notiamo che a ciascun "punto" del proiettato corrisponde uno ed un sol punto della proiezione, cioè entrambi (di diversa lunghezza) hanno lo stesso infinito numero di punti.

Abbiamo già fatto l'esempio di 1/3 trasformato nella serie: $3 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \frac{1}{10^n} \right)$ con "n" tendente all'infinito, e finchè "n" non diventa infinito il nostro numero $0,333\bar{3}\dots$ non sarà esattamente 1/3.

Il differenziale sarà una specie di bipunto dimensionalmente qualificato.

Consideriamo $d\varphi$ = differenziale delle misure angolari. L'arco a distanza "R" sarà:

$$da = R \cdot d\varphi$$

Ma per $R = \infty$, l'arco diventa finito e rettilineo.

Assumiamo come prima unità fondamentale "l'angolo giro", che, chiameremo anche: ciclo. E' implicita la direzione della retta di giacitura del piano contenente l'angolo e passante per il vertice dell'angolo stesso. Consideriamo, nel piano, un raggio: $\overline{OA}$

origine, ed un raggio mobile che compie il ciclo, sia "T" il periodo, cioè il tempo impiegato a compiere un ciclo; avremo

$\frac{1}{T} = \nu$ = frequenza misura i cicli percorsi nel l'unità di tempo, cioè quante volte nell'unità

di tempo il raggio mobile si trova nella stessa posizione.

La frequenza ν è una velocità angolare per angoli misurati in angoli giro.

Se misuriamo gli angoli in radianti la velocità angolare si indica con ω ed avremo: $\omega = 2\pi\nu$ (rad/sec)

Se misuriamo gli angoli in gradi avremo

$$\omega_g = 360^\circ \cdot \nu = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \omega .$$

Si noti che, nei dimensionamenti ora proposti, non figurano misure di lunghezza.

Si noti che, sia l'azione del ruotare (che noi abbiamo chiamato Momento), sia la velocità angolare, sono vettori, rappresentabili secondo l'asse di rotazione ma anche componibili o scomponibili secondo assi diversi

secondo assi diversi.

Poiché abbiamo visto che <u>la densità della materia</u>, cioè la massa per unità di volume, è il <u>quadrato di una frequenza</u>, cerchiamo di capire <u>il quadrato di una frequenza</u>.

Le composizioni e scomposizioni dei vettori fre=
quenza ci danno la somma o la differenza
o la ripartizione di frequenze.
Per quadrato di una frequenza è da
intendersi la frequenza di una frequenza,
è una frequenza spaziale.
Il concetto di frequenza deve essere ap=
profondito; ha in sé l'unità di misura
del tempo, non solo perché gli uomini hanno
scelto come unità di tempo certe frequenze
astronomiche, ma perché ne connette, col pendo=
lo, le misure lineari, le azioni ponderomotrici,
ed in genere tutta la fenomenologia fisica.
Abbiamo già trattato il problema del pendolo, si
noti che, avendo preso il ciclo, come angolo
giro, come unità, esso è divisibile per
le potenze di due moltiplicate per 1, 3, 5;

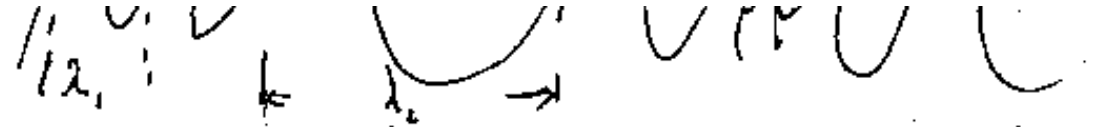
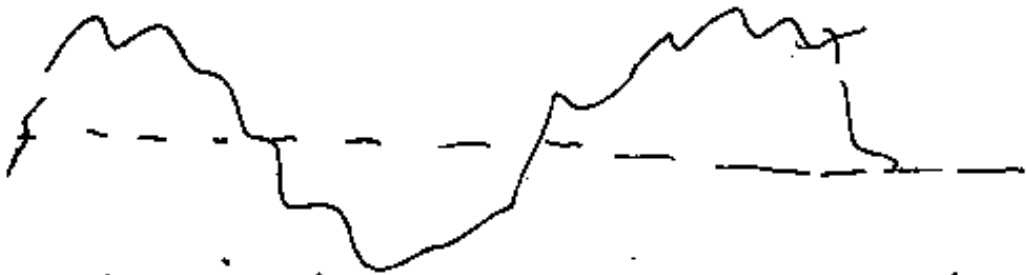
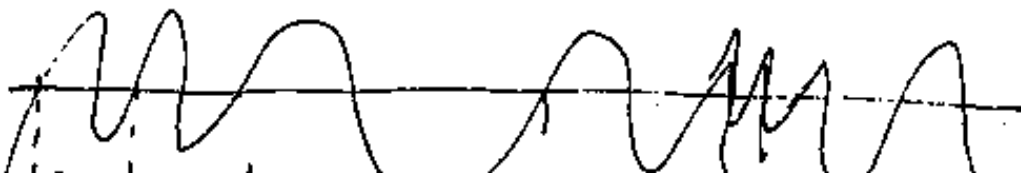
le potenze di due moltiplicate per 1, 3, 5;
ma non è divisibile per 7, per 9, per 11. ecc. –
Data una frequenza detta fondamentale
i multipli interi di essa sono dette:
"armoniche". Abbiamo visto che la frequenza
è l'inverso del periodo: $\left(\nu = \frac{1}{T}\right)$ e che la
misura del tempo si è convenzionalmente riferita

ai movimenti della terra, cioè ad apparenti frequenze astronomiche. Frequenza uno vuol dire: un ciclo nell'unità di tempo; l'eclittica in un anno, il giro della terra sul suo asse in un giorno. La frequenza di un "anno" non è la 365ª armonica della frequenza "giorno" perché 365,25... non è intero ogni 4 anni occorre aggiungere il bisestile ... e neppure ciò è esatto.

In fisica, le frequenze delle vibrazioni elastiche, e le frequenze delle vibrazioni elettro-magnetiche sono fondamentali.

Ma nelle frequenze sono opportune molte precisazioni.

Noi abbiamo fatto vedere la sinusoide tracciata da un pendolo che si muove perpendicolarmente al piano di oscillazione, da cui la definizione

di lunghezza d'onda λ. Abbiamo visto la corrispondenza fra velocità angolare ω e la sinusoide di ampiezza A
$A = R\cos(\omega t + \varphi)$ ove R è l'ampiezza massima, t è il tempo, φ = fase è l'inizio

della sinusoide che può essere spostata dell'angolo "φ" rispetto all'origine dei tempi. Ma tuttociò ancora non basta, perché la frequenza può essere modulata e la modulazione può avvenire in ampiezza ove la linea media della sinusoide che abbiamo vista tracciare dal nostro pendolo, presenta delle increspature

che sono appunto le modulazioni in ampiezza; Ma la modulazione dell'onda portante può anche avvenire in frequenza, cioè la frequenza oscilla intorno ad un valore detto base o fondamentale, come si vede ciò comporta

λ_1 λ_2 una variazione della lunghezza d'onda.

Una terza modulazione è detta di fase in cui la sinusoide è come se avesse cambiato origine istante per istante.
(φ = variabile)

Le Frequenze

Le frequenze invadono tutti i campi della fisica. Distinguiamo frequenze nel tempo da frequenze percentuali:

In cinematica: i moti armonici (v. Vol. V)

moto armonico semplice: $f_{(t)} = a(\cos(\omega t + \varphi_0))$

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{cost.}$ = velocità angolare (rad/sec)

φ = angolo percorso al tempo t = $\varphi = (\omega t + \varphi_0)$

φ_0 = angolo percorso al tempo zero. = fase

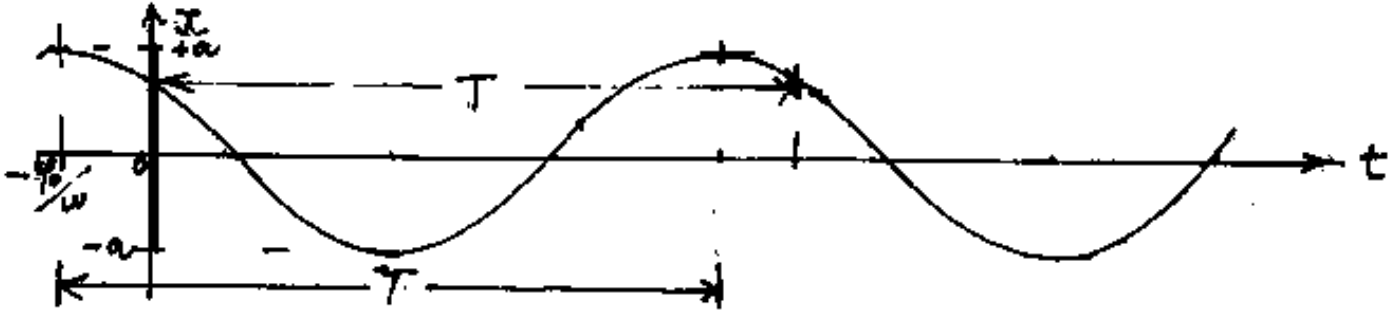
Poiché: $\text{sen}(90° - \varphi) = \cos\varphi$; l'espressione può essere espressa in seno.

a = ampiezza del moto armonico.

$\therefore x = f_{(t)} = a(\cos(\omega t + \varphi_0))$ è detta elongazione.

Se poniamo in ascisse i tempi ed in ordinate l'elongazione, tenuto conto che l'elongazione è nulla quando $(\omega t + \varphi_0) = \frac{\pi}{2}$ oppure $= \frac{3}{2}\pi$; cioè un ciclo completo è $2\pi_{(\text{rad})}$ ed il tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è detto periodo di

ed il tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è detto <u>periodo di oscillazione</u>; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ = <u>pulsazione</u> (che è la velocità angolare media in un ciclo in rad/ciclo)

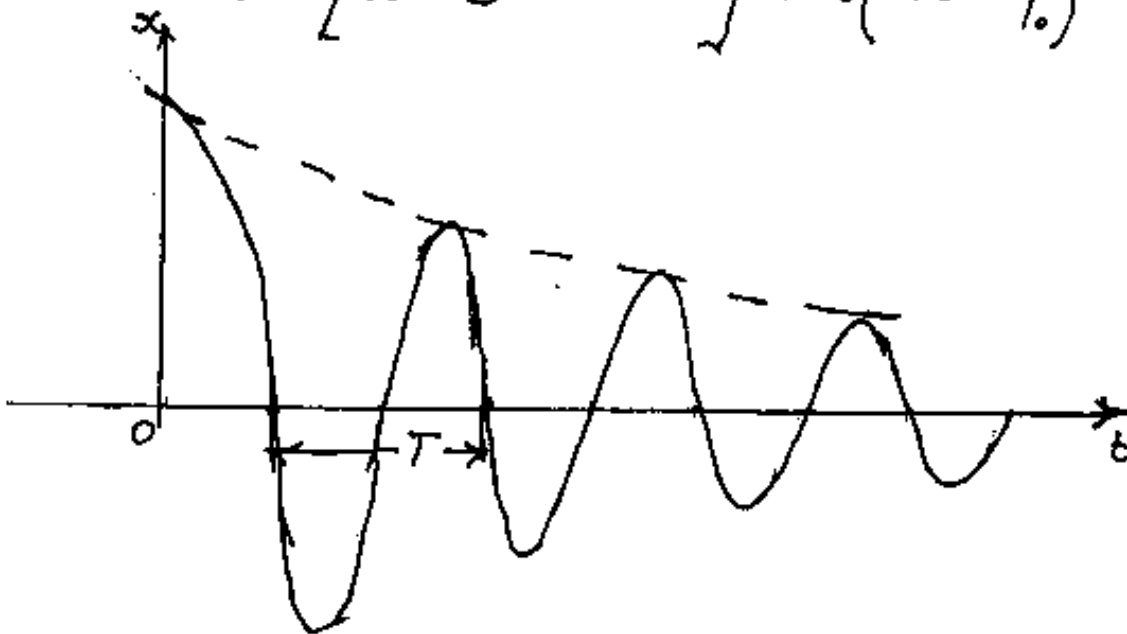
$\nu = \frac{1}{T}$ = <u>frequenza di oscillazione</u>.

L'oscillazione intorno ad "O" è fra +a e −a.
Il moto armonico semplice, si chiama anche moto pendolare, perché corrisponde alle piccole oscillazioni di un pendolo.

Moto armonico smorzato

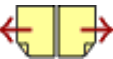
Se il fenomeno oscillatorio, mantiene costante il periodo T, e quindi la frequenza ν, e la velocità angolare $\omega = 2\pi\nu$, ma diminuisce l'ampiezza (con funzione esponenziale) nel tempo avremo:

$$x = \left[a \cdot e^{-\lambda(\omega t + \varphi_0)}\right] \cos(\omega t + \varphi_0)$$

x

O T t

Mentre i tempi possono computarsi in periodi T, cioè l'accrescimento dei tempi t diventa una progressione aritmetica di ragione T; la diminuzione dell'elongazione è in progressione geometrica di ragione: ($e^{-2\chi\pi} = \frac{1}{e^{2\pi\chi}}$)

$2\chi\pi = \ln \frac{x_{n-1}}{x_n}$ = <u>decremento logaritmico</u>

χ (chi) $= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_{n-1}}{x_n}$ = <u>coefficiente di smorzamento</u>

$$(1 - e^{-2\pi\lambda}) = \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1}} = \text{fattore di smorzamento}$$

La sinusoide ad ampiezza costante abbiamo visto che è possibile ottenerla con un pendolo a punta scrivente ancorato su un carrello che scorre perpendicolarmente al piano del pendolo e con velocitá costante tale da percorrere nel tempo T la lunghezza $(2\pi a)$ ove a è l'ampiezza della elongazione. Se R è la lunghezza del pendolo $a = R \operatorname{sen}(\alpha)$ ove α è l'angolo massimo del pendolo rispetto alla verticale di riposo. (col pendolo in assenza di attriti)

Se poniamo sul carrello, nel piano del pendolo, una circonferenza di raggio "a" e la facciamo percorrere, con velocitá costante, da un punto che, istante per istante, proietta se stesso normalmente

sul piano di scorrimento del carrello, la
proiezione coprirà esattamente la si-
nusoide tracciata dal pendolo.
Ma, se ferma restando la velocità
angolare del raggio "a", facciamo "a"
variabile, anziché una circonferenza

otterremo una spirale, ed in particolare, se la spirale è quella logaritmica, il cui raggio variabile "$a^* = a \cdot e^{-\chi(\omega t + \varphi_0)}$", con $\chi > 0$ ed $\omega > 0$. Otteniamo la proiezione della sinusoide smorzata, relativa al moto armonico smorzato di cui sopra.

Nel I Volume abbiamo trattato la spirale logaritmica con "e" ad esponente positivo, cioè percorsa in verso opposto al moto armonico smorzato. Nel I volume trattando il moto armonico si è passati alle Curve di Lissajous (V.)

MISURA dei TEMPI

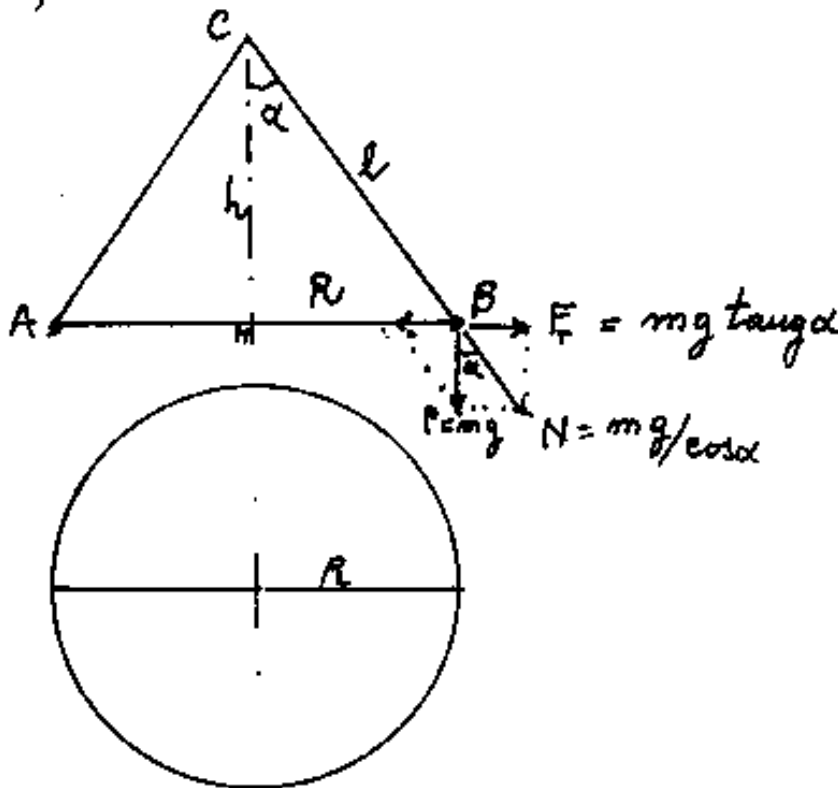
Consideriamo un peso attaccato ad un filo, in campo gravitazionale abbiamo, se fermo, un filo a piombo.

Ancorato l'altro estremo del filo, possiamo far oscillare il peso in un piano,

segue le leggi del pendolo, avremo un moto pendolare smorzato in ampiezza per effetto degli attriti.

Se invece al peso imprimiamo un moto circolare, il filo sarà la genera= trice di un cono, la velocità angolare

sará costante, vogliamo dimostrare che <u>il periodo dipende solo dall'altezza del cono</u> ed è indipendente dalla lunghezza del filo. Cioè il periodo dipende solo dalla distanza del vertice del cono dal piano della circonferenza descritta dal peso.

C, α, l, h, A, M, R, B, $F_T = mg \tan\alpha$, $P = mg$, $N = mg/\cos\alpha$, R

m = massa

P = peso = mg

g = accelerazione di gravitá

N = sforzo normale nel filo

F_T = forza centrifuga

V_T = velocitá tangenziale

$\omega = V_T/R$ = velocitá angolare

l = lunghezza del filo, h = altezza del cono, R = raggio cerchio.

Scomponiamo il peso secondo la direzione del

... orizzontale $F = mg \tan\alpha$

filo è secondo una orizzontale $F_c = mg\,tg\,\alpha$ che dovrà essere equilibrata dalla forza centrifuga data dalla accelerazione centripeta :

$$m V_T \omega = m g\, tg(\alpha)$$

$$R\omega^2 = \frac{V_T^2}{R} = g\frac{R}{h} \quad ; \quad \boxed{\omega^2 = g/h}$$

$$\omega^2 = g/h$$

la velocità angolare: $\omega = \sqrt{g/h} = 2\pi\nu$ (rad/sec)

la frequenza: $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/h} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (cicli/sec)

il periodo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$ (sec/ciclo)

come ci eravamo proposti di dimostrare.

uguagliando le definizioni delle cosiddette forze

$$\frac{m \cdot m}{l^2} = \frac{m\,l}{T^2}$$

γ = densità $= \frac{m}{l^3} = \frac{1}{T^2} = \nu^2$ = quadrato di frequenze

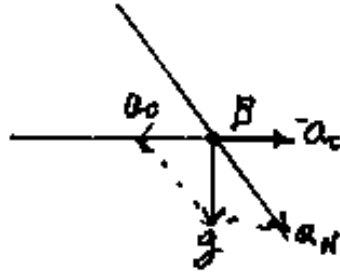
densità $= \gamma = \frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{h}$

densità $= \gamma = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2$

$g = h\,\omega^2$ = accelerazione di gravità

$g = h\omega^2$ = accelerazione di gravità

quindi l'accelerazione di gravità è analoga ad una accelerazione centripeta: $a_c = V_t \cdot \omega = R \cdot \omega^2$

ove il raggio è l'altezza del nostro cono moltiplicata per tang(α), l'accelerazione che tende il filo: $a_N = l\omega^2$

Notiamo che:

$$g : h = a_N : l = a_c : R$$

cioé il peso P della massa ruotante $mg = P$

$$P : h = N : l = F_c : R$$

ove: N = sforzo normale nel filo.

F_c = Forza centrifuga

L'accelerazione centrifuga uguaglia l'accelerazione di gravitá quando $\alpha = \pi/4 = 45°$ cioè quando $h = R$ ed $l = h\sqrt{2}$.

Ma v'è qualcosa di piú sottile, che la nostra abitudine a considerare gli angoli in radianti, ci rende difficile apprezzare:

2π rad = 1 ciclo. = 1 angolo giro.

É molto piú "pulito" misurare gli angoli in cicli piuttosto che in radianti, ove l'angolo in radianti, non è un angolo, ma l'arco sotteso di raggio unitario

Noi abbiamo giá fissato come prima unitá

Noi abbiamo già fissato come prima unità fondamentale, l'angolo giro o ciclo. Qui occorrono precisazioni, perchè l'angolo giro è un angolo piano, cioè tutte le direzioni uscenti da un punto e giacenti in un piano, mentre il ciclo

può essere considerato il percorso di un
raggio che torna su se stesso all'origine,
ma il ciclo può non avere riferimenti
spaziali angolari, infatti un qualsiasi
fenomeno che si ripete può essere preso come
un ciclo. Ogni vibrazione è un ciclo.

Se consideriamo i cicli dell'angolo solido,
dobbiamo considerare una sfera dal
cui centro escono raggi in tutte le direzio-
ni. Consideriamo il raggio unitario
in modo che l'area della superficie
sferica intercettata ci dia la misura
dell'angolo solido in stereoradianti.

Consideriamo un raggio origine
e consideriamo il suo punto di inter-
sezione con la superficie sferica, suppo-
niamo che il punto si dilati circolarmente
sulla superficie sferica. il raggio diventa

sulla superficie sferica, il raggio diventa
l'asse di un settore sferico che continuando
a crescere diventa una semisfera, poi
una sfera intera, che si chiude sul rag=
gio opposto a quello origine, e continuando
ripercorre inversamente tutte le posizioni

fino a tornare al raggio origine, il fenomeno ha compiuto un ciclo.

Potremmo considerare contemporanea=mente le varie direzioni uscenti da un punto e far variare i raggi da zero ad un massimo ove, giunti al massimo, si staccano dal centro e diminuiscono fino a tornare nulli.

Vedremo meglio il comportamento di centri emissivi di frequenze di vario genere, particolarmente importanti le frequenze elettro-magnetiche, l'emissività degli elementi come il radio o l'uranio ed il confronto con la luce o le onde radio. Completamente diverse le vibrazioni elasti=che dei suoni.

Ciò che appassiona è che le varie fre=quenze mantenendo costante il loro

queure, mantenendo costante il loro periodo, si muovono nello spazio con velocità diverse dipendenti dal mezzo di trasmissione, ma il periodo appare variato per un osservatore in moto relativo rispetto all'emittente,

(Effetto Doppler) effetto che viene utilizzato in astronomia per studiare lo spostamento verso il rosso della luce proveniente da galassie lontane.

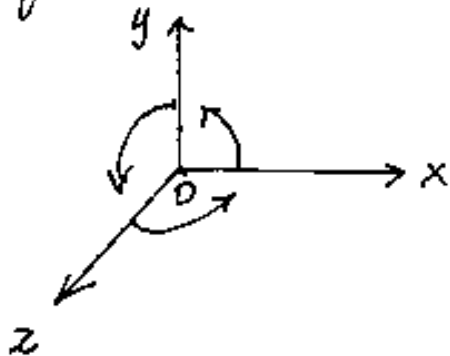
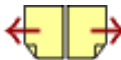
Per trattare meglio questi argomenti, dobbiamo dare alcuni cenni sui campi vettoriali, sul calcolo vettoriale, anche se riteniamo che in una più moderna impostazione scientifica il calcolo vettoriale, nato per aver negato la unitá angolare, sia superato.

Le frequenze percentuali ammettono la distribuzione di frequenze. Un contenitore contiene il 3% di palline bianche, il 70% rosse il 27% verdi, la frequenza percentuale massima è detta "moda" (vedi vol II).

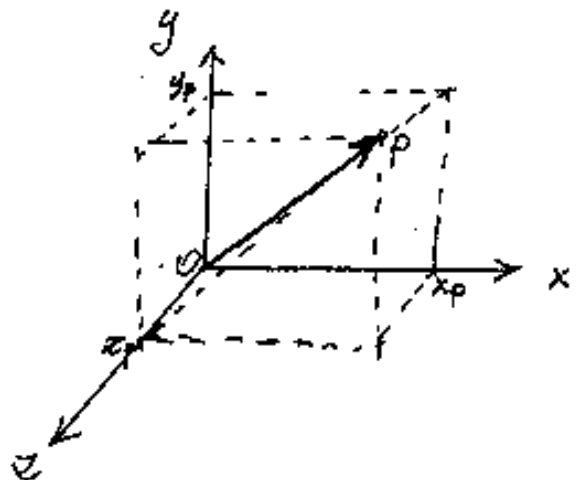
è detta moda (vedi vol II).

La frequenza di un evento è considerata probabilità a posteriori (vedi vol II).

I vettori in campo tridimensionale

Trattandosi di grandezze la cui definizione dipende dall'orientamento, è necessario riferirsi ad un sistema di assi cartesiani coordinati che saranno in ogni caso ortogonali (e ne vedremo il motivo). Sceglieremo una terna antioraria (0, x, y, z) ove dal punto O origine l'asse x orientato determina la direzionalità di tutte le rette parallele ad x sulle quali saranno misurate grandezze lineari chiamate ascisse.

Quindi se facciamo ruotare l'asse x intorno al punto O di $\pi/2$ e la sua rotazione vista dalla punta di z è antioraria il semiasse positivo delle x si sovrappone al semiasse positivo delle y. Facciamo ora ruotare y intorno ad O restando su un piano

facciamo ora rutare Y intorno ad O restando su un piano normale a X se guardando dalla punta di x la ruotazione di y la vediamo antioraria il semiasse positivo di y si sovrapporrà al semiasse positivo z. Infine se facciamo ruotare z intorno ad O restando su un piano perpendicolare ad y e dalla punta di y vediamo z ruotare antiorario, il semiasse positivo z tornerà a sovrapporsi all'iniziale semiasse positivo x.

In una siffatta terna di assi consideriamo il punto $P \equiv (x_P, y_P, z_P)$ e consideriamo orientato il segmento $\overrightarrow{OP}$ da O a P.

$\overrightarrow{OP}$ è detto <u>vettore geometrico</u> e si indica con $(P-O)$ vettore che abbiamo già visto. Poniamo $(P-O) = \vec{V}$

Le coordinate di P (proiezioni del modulo di $\vec{V}$) sono semplici segmenti e sono dette <u>le componenti di $\vec{V}$</u> e sono <u>grandezze scalari</u>. Se, ricordando il coefficiente immaginario i (che abbia ruotato di $\pi/2$ segmenti di un ipotetico asse reale) consideriamo <u>$\vec{i}$ = il versore dell'asse x</u> cioè il <u>vettore unitario che determina la direzionalità x</u> analogamente: <u>$\vec{j}$ = il versore dell'asse y</u>, e <u>$\vec{K}$ = il versore dell'asse z</u>; avremo che le componenti di $\vec{V}$ (scalari)

moltiplicate per i rispettivi versori diventano i <u>Vettori componenti di $\vec{V}$</u> e quindi:

$$\boxed{\vec{V} = \vec{i}\,X_p + \vec{j}\,Y_p + \vec{K}\,Z_p}$$

ove: $\left|\sqrt{X_p^2 + Y_p^2 + Z_p^2}\right| = |V|$ = <u>modulo del vettore $\vec{V}$</u>

ed: $\dfrac{X_p}{|V|} = \cos\alpha$; $\dfrac{Y_p}{|V|} = \cos\beta$; $\dfrac{Z_p}{|V|} = \cos\gamma$ = coseni direttori

$$\boxed{\vec{V} = |V|\left(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{K}\cos\gamma\right)}$$

Operazioni sui vettori

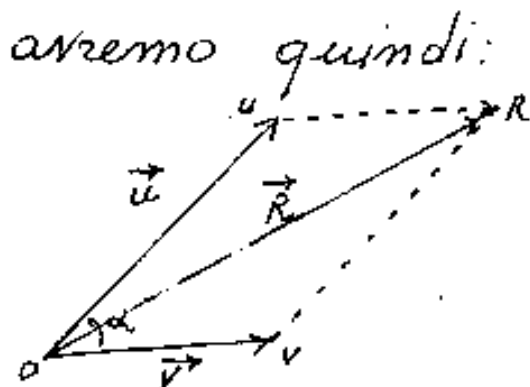
Il prodotto di un numero per un vettore è un vettore (inteso sommato a se stesso tante volte quant'è il numero)

Somma e differenza di due vettori

Graficamente un vettore può rappresentarsi con un segmento orientato la cui lunghezza rappresenta, in una certa scala, l'intensità: cui 1 = (dimensione del vettore)

Consideriamo quindi due vettori i cui versi positivi deviano dell'angolo α. e siano $\vec{U}$ e $\vec{V}$ trattandosi di due soli vettori, in qualunque posizione siano nello spazio essi definiscono una giacitura e quindi possiamo ridurci a sistemi piani. (Se fossero le cosiddette forze non potremmo riferirci ad

un piano perché le loro rette di azione potrebbero essere sghembe e quindi generare dei momenti)

Noi riferiremo i nostri due vettori $\vec{U}$ e $\vec{V}$ ad un sistema piano per cui possono essere disegnati su uno stesso foglio (cosa impossibile per rette sghembe).

avremo quindi:

<u>la regola del parallelogramma:</u>

Poiche' un vettore può spostarsi parallelamente a se stesso $(V-O)=(R-U)=\vec{v}$ per cui: $(U-O)=\vec{u}=(R-V)$ possiamo scrivere: $\vec{u}+\vec{v}=(U-O)+(R-U)=(R-O)=\vec{R}$

od anche $\vec{v}+\vec{u}=(V-O)+(R-V)=(R-O)=\vec{R}$

<u>La somma di vettori gode della proprietá commutativa.</u>

L'angolo $O\hat{U}R=(180°-\alpha)$

$$|OR| = |R| = \left|\sqrt{|u|^2+|v|^2-2|u||v|\cos(180°-\alpha)}\right|$$

$$\boxed{|R| = \left|\sqrt{|u|^2+|v|^2+2|u||v|\cos\alpha}\right|}$$

La somma di due vettori uscenti da o è il vettore uscente da o diagonale del parallelogramma che ha per lati i vettori dati.

Se i due vettori nello spazio tridimensionale

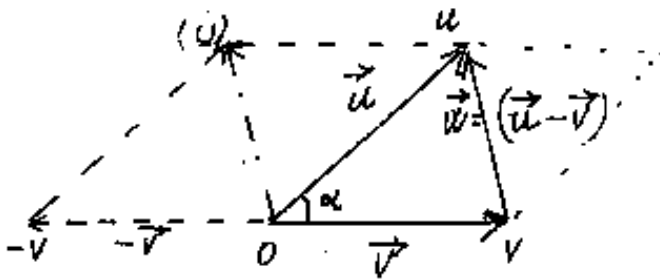
. Se i due vettori nello spazio tridimensionale sono espressi da $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$$\vec{V} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$

$$\vec{U} + \vec{V} = \vec{W} = (a + a_1)\vec{i} + (b + b_1)\vec{j} + (c + c_1)\vec{k}$$

Il vettore somma ha per componenti la somma delle componenti omonime dei vettori addendi.

Differenza di due vettori

Poiché per invertire il segno di un vettore, basta prenderlo di verso opposto (vedi figura)

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (u, -v) =$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} = (u - v)$$

Il vettore differenza di di due vettori uscenti da O è la diagonale del parallelogramma che ha per lati i vettori ed esce dalla punta del vettore diminutore diretta verso la punta del vettore diminuendo.

$$\overrightarrow{vu} = \vec{w} = (\vec{u} - \vec{v}) = (u - v)$$

$$|w| = \left|\sqrt{|u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\alpha}\right.$$

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\vec{v} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} = (a - a_1)\vec{i} + (b - b_1)\vec{j} + (c - c_1)\vec{k}$$

Il vettore differenza di due vettori ha per componenti la differenza delle componenti omonime

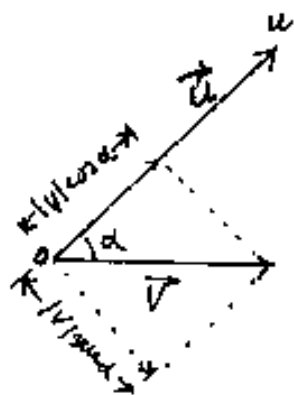
del diminuendo e del diminutore.

Indice Enciclopedico Indice Pag. 35

Prodotto scalare fra due vettori (X)

(In notazione americana si indica con un punto (·) ($\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$))
(The Scalar, Dot, or Inner Product of Two Vectors V_1 and V_2)

Si abbiano due vettori $\vec{u}$ e $\vec{V}$ moltiplicarli fra loro scalarmente significa eseguire il prodotto del modulo del primo vettore per la proiezione del modulo del secondo vettore sul primo o viceversa. ed il risultato è uno scalare. (Il prodotto scalare si simboleggia: X) (In notazione europea e si legge u scalare V)

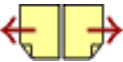
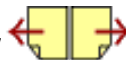
$$\vec{u} \times \vec{V} = |u| \cdot |V| \cos\alpha$$

Sia per esempio $(u - o) = \vec{u}$ lo spostamento di una barca a vela quando la direzione e l'intensità del vento è $\vec{V}$ avremo che solo il componente di $\vec{V}$ che ha per modulo: $|V|\cos\alpha$ è la parte attiva, l'altro non è influente.

Il prodotto scalare di due vettori è lo scalare

prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso fra i due vettori.

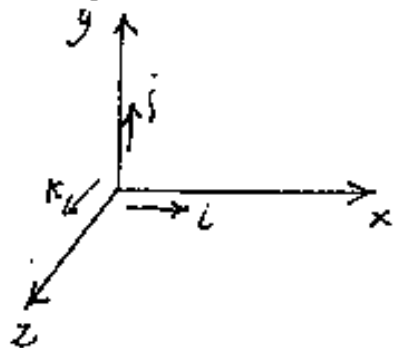
Chiameremo flusso di un vettore $\vec{v}$ l'integrale

$$\varphi = \int \vec{v} \times dA$$

ricordando che le aree elementari dA sono vettori elementari la cui direzionalità è determinata dalle rette di giacitura.

Facciamo ora il prodotto scalare dei versori:

i, j, k tenendo conto che l'angolo retto $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

e che: $\cos(0) = 1$

y, j, x, i, z, k

$$\vec{i} \times \vec{i} = 1 \qquad \vec{j} \times \vec{i} = 0 \qquad \vec{K} \times \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = 0 \qquad \vec{j} \times \vec{j} = 1 \qquad \vec{K} \times \vec{j} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{K} = 0 \qquad \vec{j} \times \vec{K} = 0 \qquad \vec{K} \times \vec{K} = 1$$

Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa.

da notare che questo "i" pur avendo le proprietà operazionali (rotore di $\pi/2$) ugual ad $\sqrt{-1}$ è da esso ben distinto infatti $i^2 = i \times i = +1$ e non (-1) (Hamilton)

<u>Esempio di prodotto scalare</u>:

$$\vec{U} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{K}$$

$$\vec{V} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{K}$$

$$\vec{U} \times \vec{V} = \overset{(2)(1)}{2} \cdot \overset{+(-3)(4)}{-12} \; \overset{+(4)(-5)}{-20}$$

$$\underline{\vec{U} \times \vec{V} = -30}$$

(essendo nulli $\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{i} = 0 \\ \vec{i} \times \vec{K} = \vec{K} \times \vec{i} = 0 \\ \vec{j} \times \vec{K} = \vec{K} \times \vec{j} = 0 \end{cases}$)

Condizione di perpendicolarità di due vettori

Condizione di perpendicolarità di due vettori è che sia nullo il loro prodotto scalare

se ai precedenti vettori : $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{K}$

$\vec{V} = \lambda\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{K}$

poniamo il $\vec{V}$ dipendente da un parametro λ

avremo : $\vec{u} \times \vec{V} = 2\lambda - 32$ per $\lambda = 16$ i due vettori sono perpendicolari.

Prodotto vettoriale fra due vettori ($\wedge$)

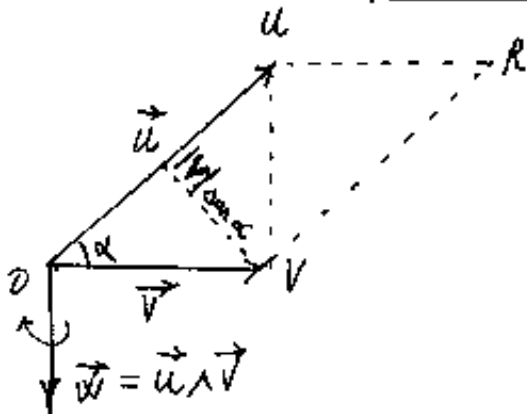
(In notazione americana si indica con una croce ($\times$) ($\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$)
(The Vector or Cross Product of Vectors V_1 and V_2)

Il simbolo del prodotto vettoriale è: $\wedge$; (in notazione europea)

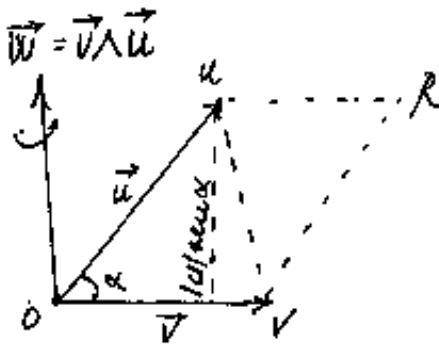
Il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore che ha per modulo il prodotto dei moduli per il seno dell'angolo formato dai vettori; per direzione una retta perpendicolare al piano dei vettori e di verso tale che il primo vettore, il secondo vettore ed il vettore prodotto, nell'ordine, formino una terna antioraria. Cioè il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa perché invertendo i fattori cambia verso il vettore prodotto.

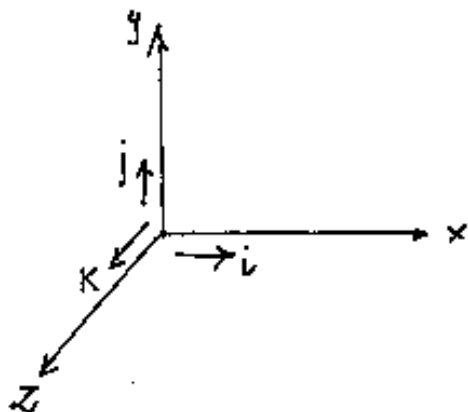
(si legge: U vettor V)

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{W}$$

$$|W| = |U||V| \operatorname{sen}\alpha$$

Si noti che $|W| = |U||V| \operatorname{sen}\alpha$ è il doppio dell'area del triangolo: UOV quindi il modulo di $\vec{W}$ cioè $|W|$ è l'area del parallelogramma: OURV.

$\vec{W} = \vec{u} \wedge \vec{V}$

$\vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{U}$

cioè $|V|$ sen α è l'altezza relativa ad $\overline{OU}$, mentre $|U|$ sen α è l'altezza relativa ad $\overline{OV}$; cioè $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ è il momento di $\vec{U}$ rispetto a $\vec{V}$ mentre $\vec{V} \wedge \vec{U}$ è il momento di $\vec{V}$ rispetto ad $\vec{U}$.

Facciamo il prodotto vettoriale dei versori tenendo presente che sen(0) = 0 ; sen(π/2) = 1

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=0 \qquad \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{K} \qquad \vec{K}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{K} \qquad \vec{j}\wedge\vec{j}=0 \qquad \vec{K}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$$

$$\vec{i}\wedge\vec{K}=-\vec{j} \qquad \vec{j}\wedge\vec{K}=\vec{i} \qquad \vec{K}\wedge\vec{K}=0$$

possiamo ora calcolare il prodotto vettoriale dei nostri due vettori: $\vec{u}=(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{K})$

$$\vec{V}=(\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{K})$$

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{K})\wedge(\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{K})$$ (sviluppando ordinatamente da sinistra.)

si ha: $(2)(1)(0)+(2)(4)(\vec{K})+(2)(-5)(-\vec{j})$
$(-3)(1)(-\vec{K})+(-3)(4)0+(-3)(-5)\vec{i}$
$(4)(1)(\vec{j})+(4)(4)(-\vec{i})+(4)(-5)0 =$

oppure come determinante:

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & +4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$(-16+15)\vec{i}+(10+4)\vec{j}+(8+3)\vec{K} =$$

$$\underline{\vec{U}\wedge\vec{V}=-\vec{i}+14\vec{j}+11\vec{K}}$$

Condizioni di parallelismo di due vettori è

Condizioni di parallelismo di due vettori è che sia nullo il loro prodotto vettoriale

I due vettori avranno coefficienti proporzionali,

$\vec{u} = (2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{K})$ $\quad \vec{V} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \vartheta\vec{K}$ $\quad$ avremo:

$2\lambda(0) + 2\mu\vec{K} + 2\vartheta(-\vec{j})$ $\quad (-3\vartheta - 4\mu)\vec{i} = 0$ $\quad \vartheta = -\frac{4}{3}\mu$ $\quad \frac{8}{3}\mu + 4\lambda = 0$

$-3\lambda(-\vec{K}) + (-3)\mu(0) + (-3)\vartheta\vec{i}$ $\quad (-2\vartheta + 4\lambda)\vec{j} = 0$

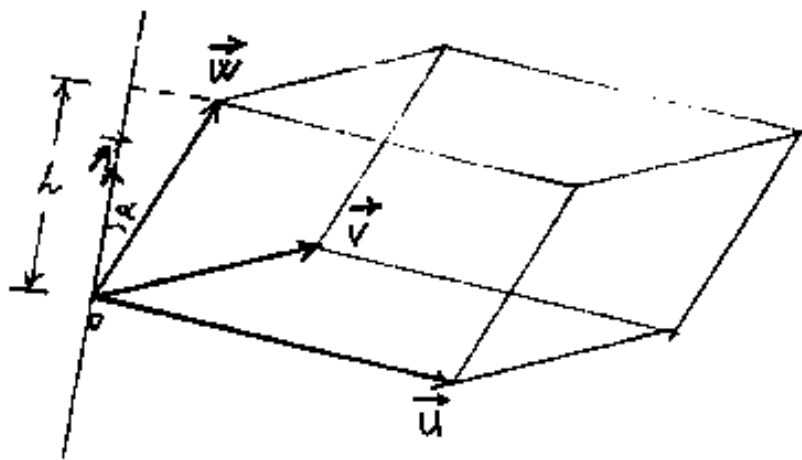
$4\lambda\vec{j} + 4\mu(-i) + 4\vartheta(0)$ $\quad (+3\lambda + 2\mu)\vec{K} = 0$ $\quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu$ $\quad . \quad -8\mu + 8\mu = 0$

$\mu = 3$; $\lambda = +2$; $\vartheta = +4$ $\quad \vec{V} = 2i - 3j + 4K$ identifica $\vec{u}$

attribuendo qualsiasi valore arbitrario a μ si ottengono $\vec{V}$ paralleli a $\vec{u}$

Prodotto misto di tre vettori

$$(\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w}) = \text{scalare}$$

Dimostriamo che il prodotto misto è il volume del parallelepipedo che ha per spigoli i tre vettori.

Infatti: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{A}$ il prodotto vettoriale $\vec{u}$ vettor $\vec{v}$ è un vettore $\vec{A}$ perpendicolare al piano di $\vec{u}\ \vec{v}$ ed ha per modulo l'area del parallelogramma di $\vec{u}$; $\vec{v}$. che è la base del solido. Sostituendo $\vec{A}$ nel prodotto misto si ha il prodotto scalare: $\vec{A} \times \vec{W} = |A| \cdot |W| \cos\alpha$ ove $|W| \cos\alpha = h$ = altezza del solido per cui

Area base (A) per altezza h = volume.

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \times \vec{W} = \text{volume}$$

$$= \vec{A} \times \vec{W} =$$

$$= |A| \cdot |W| \cos\alpha =$$

$$= |A| \cdot |\vec{W}| \cos\alpha =$$

$$= A\,h = \text{volume}$$

ove se: $\vec{U} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{K}$

$\vec{V} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{K}$

$\vec{W} = a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{K}$

si ha: $Ah = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\vec{U} \wedge \vec{V} \times \vec{W} = 0$ è la condizione di complanarità.

Per piano di vettori si intende il piano a cui essi sono paralleli

E' anche interessante costruire il cubetto coi versori unitari:

$\vec{i} \wedge \vec{j} \times \vec{K} = 1$ $\quad\quad$ $\vec{i} \wedge \vec{K} \times \vec{j} = -1$

$\vec{j} \wedge \vec{K} \times \vec{i} = 1$ $\quad\quad$ $\vec{j} \wedge \vec{i} \times \vec{K} = -1$

$\vec{K} \wedge \vec{i} \times \vec{j} = 1$ $\quad\quad$ $\vec{K} \wedge \vec{j} \times \vec{i} = -1$

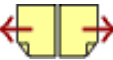
Nell'eseguire le operazioni abbiamo fatto precedere il prodotto vettoriale che si trova più a sinistra, ed il risultato lo abbiamo moltiplicato scalarmente.

$(\vec{i} \wedge \vec{j}) = +\vec{K} \rightarrow \vec{K} \times \vec{K} = 1$ $\quad\quad$ $(\vec{i} \wedge \vec{K}) = -\vec{j} \rightarrow -\vec{j} \times \vec{j} = -1$

Se avessimo fatto precedere il prodotto scalare avremmo avuto (nella 1ª uguaglianza) $(\vec{j} \times \vec{K}) = 0$ e quindi: $\vec{i} \wedge 0$ (non ha senso) perchè per fare il prodotto vettoriale entrambi i fattori debbono essere vettori per cui il prodotto vettoriale deve in ogni caso precedere il prodotto scalare.

E' ora possibile esprimere il teorema

È ora possibile esaminare il teorema dello scambio dei simboli $\wedge$ e $\times$. (si veda la prima e seconda equazione.)

$$\vec{i} \wedge \vec{j} \times \vec{K} = \vec{i} \times \vec{j} \wedge \vec{K} = 1 \quad \text{infatti} \quad \vec{i} \times (\vec{j} \wedge \vec{K}) = (\vec{j} \wedge \vec{K}) \times \vec{i} = 1$$

Doppio prodotto vettoriale

Il doppio prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa, e pertanto dovremo mettere delle parentesi: per indicare i vettori complanari

1) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} \cdot \vec{v} - \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$

2) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$

Sappiamo che $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è un vettore ortogonale al piano di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (abbiamo già detto in che senso si può parlare di complanarità di vettori); qualunque sia la direzione di $\vec{w}$ il piano comune a $\vec{w}$ ed $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ avrà rette di giacitura perpendicolari a $\vec{w}$ cioè nel piano di $\vec{u}$ e $\vec{v}$. perciò il risultato della 1) espressione è un vettore complanare ad $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mentre della 2) è complanare con $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

$\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$; $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$; $\vec{w} = a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k}$

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (b_1 c_2 - b_2 c_1)\vec{i} + (a_2 c_1 - a_1 c_2)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$

$$\left[(b_1c_2-b_2c_1)\vec{i}+(a_2c_1-a_1c_2)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\right]\wedge\vec{W}=$$

$$=(+a_3b_1c_2-b_3b_2c_1)\vec{k}-(b_1c_2c_3-b_2c_1c_3)\vec{j}+(a_2c_1c_3-a_1c_2c_3)\vec{i}$$

$$-(a_3a_2c_1-a_3a_1c_2)\vec{k}+(a_1a_3b_2-a_2a_3b_1)\vec{j}-(a_1b_2b_3-a_2b_1b_3)\vec{i}=$$

che può essere scritta:

$$=(b_1b_3+c_1c_3)(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})-(b_2b_3+c_2c_3)(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})=$$

cioè: $$\boxed{\left[(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}\right]=(\vec{u}\times\vec{w})\cdot\vec{v}-(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u}}$$

analogamente si dimostra la seconda.

Identità vettoriali

Analogamente possono dimostrarsi le seguenti formule ove il prodotto scalare precede il prodotto di uno scalare per un vettore

$$(\vec{u})^2 = (\vec{u} \times \vec{u}) = |u|^2 \cos\alpha .$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v})^2 = (\vec{u})^2 (\vec{v})^2 - (\vec{u} \times \vec{v})^2$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z}) = \vec{u} \times \vec{w} \wedge \vec{z} \cdot \vec{v} - \vec{v} \times \vec{w} \wedge \vec{z} \cdot \vec{u}$$

(Questa relazione se consideriamo i vettori unitari ed $\vec{w} = \vec{u}$, diventa la formula fondamentale di trigonometria sferica)

$$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = 0$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{z} = \vec{z} \times \vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{z} \times \vec{w} \wedge \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{z} \times \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{A} \wedge \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} (\vec{u} \times \vec{A}) & (\vec{u} \times \vec{B}) & (\vec{u} \times \vec{C}) \\ (\vec{v} \times \vec{A}) & (\vec{v} \times \vec{B}) & (\vec{v} \times \vec{C}) \\ (\vec{w} \times \vec{A}) & (\vec{w} \times \vec{B}) & (\vec{w} \times \vec{C}) \end{vmatrix}$$

Queste relazioni possono permettere la costruzione di certe equazioni vettoriali: per es.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{z} = \vec{u} \times \vec{z} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{v} \times \vec{z} \cdot \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \times \vec{z} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}$$

dati: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ permette di assegnare un vettore $\vec{x}$ tale che

$$\vec{u} \times \vec{x} = \alpha \;;\quad \vec{v} \times \vec{x} = \beta \;;\quad \vec{w} \times \vec{x} = \gamma$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{x} = \alpha\, \vec{u} \wedge \vec{w} + \beta\, \vec{w} \wedge \vec{u} + \gamma\, \vec{u} \wedge \vec{v}$$

(ecc.)

Equazioni vettoriali di curve notevoli

Ricordiamo come l'operatore algebrico:

$$e^{i\varphi} = (\cos\varphi + (\operatorname{sen}\varphi)\, i) \qquad \text{(vedi Vol II pag 45 - 52)}$$

moltiplicato per un modulo $|V|$ determini un vettore cioè il segmento reale $|V|$ viene orientato dell'angolo φ rispetto all'asse reale. Se questo operatore moltiplica un vettore lo fa ruotare dell'angolo φ.

per esempio: $\vec{u} = (\cos\varphi)\,\vec{i} + (\operatorname{sen}(\varphi))\,\vec{j}$

$$\vec{u} = (\cos\varphi + (\operatorname{sen}\varphi) i)\,\vec{i}$$

abbiamo con ciò distinto "i" operatore capace di far ruotare i segmenti o i vettori di $\pi/2$ e da "$\vec{i}$" vettore sull'asse X di modulo unitario. ove $(i)(\vec{i}) = (\vec{j})$.

cioè: $((\cos\varphi) + (\operatorname{sen}\varphi) i)$ è l'operatore che fa ruotare $\vec{i}$ fino a sovrapporsi ad $\vec{u}$ avremmo potuto scrivere: $\vec{u} = e^{i\varphi} \cdot \vec{i}$

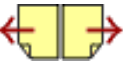
P sia l'estremo del vettore $(P-O)$. avremo: $\{0 \le n \le +\infty)$

P sia l'estremo del vettore ([illegible]

$P = (O + u\vec{u})$ (equazione vettoriale) della retta per O parallela ad $\vec{u}$.

$P = (O + \rho e^{i\varphi}\,\vec{i})$ (con φ variabile da 0 a 2π) = equazione vettoriale del cerchio di centro O e raggio ρ

$P = (O + a\cos\varphi\,\vec{u} + b\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{v})$ (i δ) = equazione vettoriale dell'ellisse di centro O di semiassi a, b paralleli ad $\vec{u}, \vec{v}$.

$P = (O + am\vec{u} + bm^2\vec{v})$ equazione di una parabola passante per O, la retta tangente in O è parallela al vettore $\vec{u}$, i diametri sono paralleli a $\vec{v}$

Se consideriamo l'equazione:

$$P = O + r\varphi\vec{u} + ri\vec{u} - rie^{-i\varphi}\vec{u}$$

si ha l'equazione di una cicloide generata da un cerchio di raggio r che rotola sulla retta per O parallela ad $\vec{u}$.

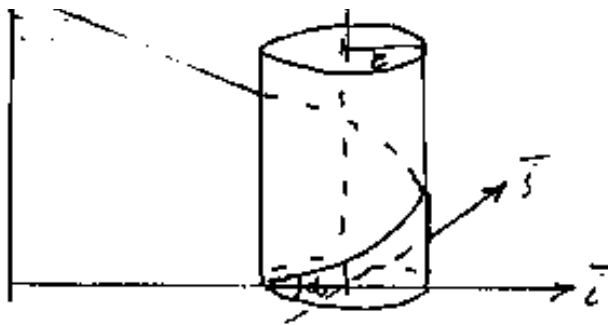
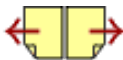
$$P = O + (R+r)e^{i\varphi}\vec{u} - b\,e^{i\left(\frac{R+r}{r}\right)\varphi}\vec{u}$$

= equazione vettoriale di una epicicloide generata da un punto connesso col cerchio di raggio r e distante b dal suo centro, cerchio che rotola sulla circonferenza fissa di raggio R ($\vec{u}$ = vettore unitario costante).

Cambiando segno ad R e b diventa ipocicloide.

$$P = O + re^{i\varphi}\vec{i} + r\varphi\,tg(\alpha)\,\vec{K}$$

E' l'equazione di un'elica cilindrica tracciata su un cilindro circolare retto di centro O e raggio r. $(90°-\alpha)$ è l'angolo costante che le tangenti formano con vettore $\vec{K}$ (direzionalità $\vec{K}$). unitario.

K

Analisi vettoriale

Le coordinate di un punto P siano funzioni di uno scalare t ; $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ o più sinteticamente : $P = P(t)$.

Un vettore geometrico $\vec{V} = (Q - P)$ ove P e Q o solo uno dei due punti sia funzione di t, possiamo dire che il vettore $\vec{V}$ è funzione di t : $\vec{V} = \vec{V}(t)$; naturalmente saranno funzione di t le componenti di $\vec{V}$ rispetto a qualunque versore $\vec{u}$ indipendente da t. Ciò vale non solo per il segmento orientato (Q-P) che resta vincolato alla retta direzione da P a Q, ma vale per qualsiasi vettore rappresentato da (Q-P) nella direzionalità del suo campo di azione.

Cerchiamo ora di definire la derivata di un punto e di un vettore. Analogamente a quanto si fa

per le funzioni:

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P_t}{h} \quad ; \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{V}(t+h) - \vec{V}(t)}{h}$$

valgono per queste derivate le stesse proprietà delle derivate di uno scalare.

In particolare:

$$\frac{d(\vec{V}_1 \pm \vec{V}_2 \pm \dots)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \pm \frac{d\vec{V}_2}{dt} \pm \dots \dots$$

$$\frac{d\, n\vec{V}}{dt} = \frac{dn}{dt}\cdot\vec{V} + n\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times \frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \frac{d\vec{V}_2}{dt}$$

quadro delle derivate

Il punto $P \equiv (x, y, z)$ se considerato estremo del vettore geometrico $(P-O)$ avremo:

$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Se X, Y, Z sono le componenti del vettore:

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dX}{dt}\vec{i} + \frac{dY}{dt}\vec{j} + \frac{dZ}{dt}\vec{k}$$

Da queste espressioni risulta:

<u>le componenti della derivata di un punto sono</u>

le derivate delle sue coordinate

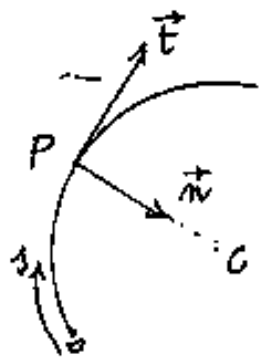
le derivate delle sue coordinate

Le componenti della derivata di un vettore so-
no le derivate delle sue componenti

Se consideriamo che il Punto P appartenga ad

<u>una linea</u> (luogo geometrico), fissata una origine ed un verso per gli archi s della linea, la derivata:

$$\boxed{\frac{dP}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}} = \vec{t}$$

ove il versore $\vec{t}$ è tangente in ogni punto alla linea.

cioè: $\boxed{\frac{dP}{ds} = \vec{t}}$

$$\boxed{\vec{t} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}}$$

si noti che le componenti di $\vec{t}$ sono i coseni direttori della retta tangente in P alla linea col verso degli archi s crescenti.

Facciamo ora la derivata seconda:

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{t}(s+h) - \vec{t}(s)}{h}$$

la variazione in P di $\vec{t}$, le due tangenti determinano il piano osculatore alla linea in P, e su questo piano dovrà essere il vettore derivata seconda.

Ma $\vec{t}$ è un versore per cui $(\vec{t})^2 = \vec{t} \times \vec{t} = 1$

derivando l'espressione $\frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{t} + \vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$

cioè: $2\left(\vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds}\right) = 0$ $\boxed{\vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = 0}$

ma l'essere il prodotto scalare = 0 significa che i due vettori sono ortogonali $\boxed{\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{n}\left(\frac{1}{\rho}\right)}$ $\vec{n}$ è quindi il versore della normale ed il verso è diretto verso

il centro di curvatura C,

Il modulo di $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$; $|n| = 1$ è $\frac{1}{\rho}$ rappresenta la curvatura.

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n} = \frac{d^2x}{ds^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\vec{k}$$

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

ove ρ è il raggio di flessione della linea nel punto P.

I versori $\vec{t}$ ed $\vec{n}$ sono complanari, perpendicolarmente ad essi in P definiamo un terzo versore $\vec{b}$ che chiameremo binormale $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$

la terna di versori in P, individua il triedro principale relativo alla linea del punto P.

La derivata di $\vec{b}$ $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\tau}$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\tau}$$

ove τ è un numero reale ed è il raggio di torsione

$\frac{1}{\tau}$ è la torsione se $\frac{d\vec{b}}{ds} = 0$ la torsione è nulla

e la linea è piana.

Le tre formule:

$\dfrac{d\vec{t}}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\cdot\vec{n}$	sono dette: <u>formule di Frenet</u>
$\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{1}{\tau}\vec{n}$	
$\dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\dfrac{1}{\rho}\vec{t} - \dfrac{1}{\tau}\vec{b}$	

esprimono le derivate della terna di versori in P: $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ per mezzo dei versori <u>stessi e dei raggi di flessione e torsione</u>

se ξ, η, ζ sono i coseni direttori della binormale

$$\xi = \rho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)$$

$$\eta = \rho\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)$$

$$\zeta = \rho\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)$$

$$\zeta = \rho \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \right)$$

Il Gradiente

Sia $U(P)$ una funzione scalare di $P \equiv (x, y, z)$ derivabile, e sia $\vec{V}$ un vettore pure funzione di P nello stesso spazio. ($\vec{V} = \vec{V}(P)$) che per la presenza di $\vec{V}$ è un campo vettoriale.

Consideriamo il vettore infinitesimo (differenziale di P)

$$dP = \vec{i} \cdot dx + \vec{j}\, dy + \vec{k}\, dz$$

e moltiplichiamolo scalarmente per $\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

$$\boxed{\vec{V} \times dP = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}$$

se questa espressione è un differenziale esatto esiste una funzione: $U_{(P)}$ tale che $\boxed{dU = \vec{V} \times dP}$ ed in tal caso:

$$\boxed{X = \frac{\partial U}{\partial x} \;;\; Y = \frac{\partial U}{\partial y} \;;\; Z = \frac{\partial U}{\partial z}}$$

si dice allora che $\vec{V}$ è il gradiente di U

Si dice allora che <u>$\vec{V}$ è il gradiente di $\mathcal{U}$</u>

e si scrive

$$\boxed{\vec{V} = \text{grad}\, \mathcal{U}}$$

mentre $\mathcal{U}$ è detto <u>il potenziale di $\vec{V}$</u>

<u>Le superficie</u> <u>$\mathcal{U} = \text{cost.}$</u> sono dette <u>equipotenziali</u>

$$\boxed{\text{grad}\, \mathcal{U} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{dy}\vec{j} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}\vec{K}}$$

in ogni punto P di una superficie equipotenziale il vettore $\vec{V} = \text{grad}\,\mathcal{U}$ essendo $\vec{V} \times dP = d\mathcal{U} = 0$ ($\mathcal{U} = \text{cost}$) qualunque sia lo spostamento dP su tale superficie grad $\mathcal{U}$ è perpendicolare a tale superficie intorno di P.

Si noti che $\vec{V} = \text{grad}\,\mathcal{U}$ è diretto secondo $\mathcal{U}$ crescenti e che $\vec{V}$ ha gli stessi coseni direttori della normale alla superficie ad $\mathcal{U} = \text{cost}$.

Se consideriamo un vettore unitario $\vec{u} = \frac{(P-O)}{s}$

ove: $|(P-O)| = s|\vec{u}| = \overline{OP} = s$

$$\frac{d\mathcal{U}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

Il trinomio al secondo membro è la somma dei prodotti delle componenti di $\vec{V} = \text{grad}\,\mathcal{U}$ per i coseni direttori della retta di $\vec{u}$ sulla quale è misurato s: perciò

$$\boxed{\frac{d\mathcal{U}}{ds} = \text{grad}\,\mathcal{U} \times \vec{u}}$$

Cioè la derivata del potenziale rispetto ad s è il prodotto scalare del gradiente di U per il versore di s.

$$dU = (\text{grad}\, U \times \vec{u})\, ds$$

Cioè si dice gradiente l'accrescimento per unità di lunghezza

(un accrescimento per unità di tempo è una velocità)

Integrali di vettori

Sia $\vec{V}_{(t)} = X_{(t)}\vec{i} + Y_{(t)}\vec{j} + Z_{(t)}\vec{k}$ ove t è una variabile e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tre versori indipendenti da t.

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{V}\,dt = \vec{i}\int_{t_0}^{t_1} X_{(t)}dt + \vec{j}\int_{t_0}^{t_1} Y_{(t)}dt + \vec{k}\int_{t_0}^{t_1} Z_{(t)}dt$$

se l'estremo superiore t è variabile

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{V}$$

Se il vettore $\vec{V}$ funzione dei punti di campo qualsiasi ennedimensionale l'integrale vettore $\vec{J}$ che ha per componenti gli integrali estesi al campo C delle componenti di $\vec{V}$ si dice: integrale del vettore $\vec{V}$ relativo a C e si scrive:

$$\vec{J} = \int_C \vec{V}\,dc$$

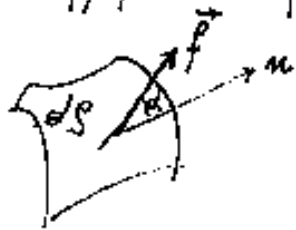
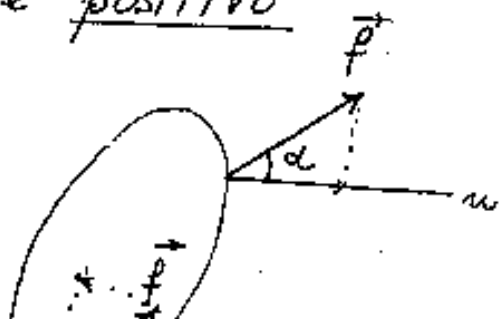
In questo il fattore finito $\vec{V}$ può avere dimensio

ni diverse dal fattore differenziale c.

Flusso di un vettore

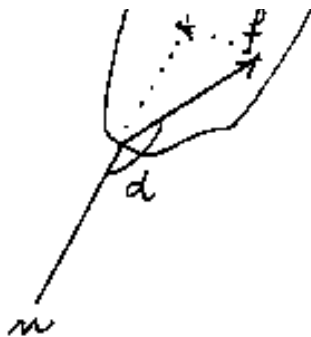
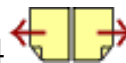
Abbiamo appena accennato al flusso di un vettore nel trattare il prodotto scalare. Abbiamo visto che un'area può essere rappresentata da un vettore perpendicolare cioè avente la direzione della giacitura:

Se consideriamo <u>un involucro chiuso</u>, esaminando le singole aree elementari dS avremo $d\varphi = \vec{f} \times d\vec{S}$ cioè:

$d\varphi = |f| \cdot \cos\alpha \, |dS|$ ma distingueremo: <u>il flusso entrante</u> cioè diretto verso l'interno che assumeremo, per convenzione, <u>negativo</u>. <u>Il flusso uscente</u> cioè diretto verso l'esterno della superficie chiusa lo assumeremo come <u>positivo</u>

con ciò resta valida la formula: $f \cdot \cos\alpha \cdot dS = d\varphi$ se consideriamo la normale alla superficie diretta verso

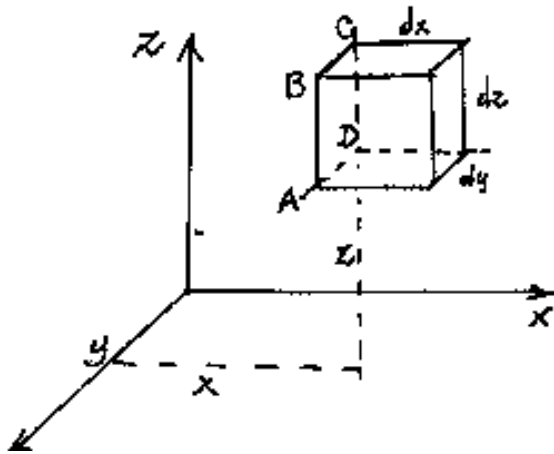
f

α

n

alla superficie diretta verso
l'esterno, per $\vec{f}$ entrante
il $\cos\alpha$ è nel II° quadrante cioè negativo.

Divergenza

Consideriamo una superficie chiusa qualsiasi e suddividiamo lo spazio in cubetti elementari la somma dei flussi <u>uscenti</u> dai cubetti è il flusso uscente dalla superficie chiusa, infatti i flussi che attraversano i cubetti sono computati una volta come negativi (<u>entranti</u>) una volta come positivi (<u>uscenti</u>) cioè vengono computati solo i flussi generati all'interno dei cubetti, o assorbiti dai cubetti.

<u>Si chiama divergenza di un vettore il rapporto fra il flusso uscente ed il volume da cui esce.</u> $\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)$

Consideriamo uno dei cubetti elementari in cui abbiamo diviso lo spazio racchiuso dalla nostra superficie chiusa e siano x, y, z le coordinate che individuano il vertice D del cubetto da cui si dipartono gli spigoli dx, dy, dz nel verso degli

y ... assi.

Siano f_x, f_y, f_z, le componenti del vettore secon-
do i tre assi che supponiamo funzioni continue e
derivabili delle coordinate.

Il flusso entrante dalla faccia ABCD del cubetto
è: $-f_x\,dy\,dz$ il flusso uscente dalla faccia opposta

la cui area è ancora $dy\,dz$, ma la componente del vettore secondo x sarà variata, perché è variata l'ascissa quindi il flusso uscente sarà:

$$+\left(f_x + \frac{\partial f_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz$$

complessivamente il flusso secondo x nel cubetto sarà: $-f_x\,dy\,dz \;+ f_x\,dy\,dz + \frac{\partial f_x}{\partial x}dx\,dy\,dz$

cioè: essendo: $dx\,dx\,dy = dV$ = volume elementare ripetendo il discorso per le altre componenti f_y ed f_z complessivamente otteniamo:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) dV$$

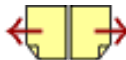
$$\frac{d\varphi}{dV} = \boxed{\operatorname{div}.\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}}$$

poiché il flusso da una superficie chiusa è la somma dei flussi dei singoli cubetti:

$$\oint_S f\cos\alpha\, dS = \int_V d\varphi$$

cioè:

$$\oint_S f \cos\alpha \, dS = \int_V \mathrm{div}(\vec{f}) \, dV = \int_S \vec{f} \times d\vec{S}$$

È questo il teorema della divergenza il quale esprime che l'integrale della divergenza di un vettore esteso ad un solido è uguale al flusso del vettore attraverso la superficie del solido. (Trasforma un integrale di superficie in integrale di volume (spesso più facile)) Il teorema della divergenza è detto anche Teorema di Green

Linee e tubi di flusso di un vettore

Sono linee di flusso di un vettore quelle linee che punto per punto sono tangenti al vettore stesso.

Se un certo insieme di linee di flusso è recintabile trasversalmente questo insieme si dirà tubo di flusso

Il tubo di flusso non può essere attraversato dal flusso del vettore; perché in ogni punto, ogni sua linea è tangente al vettore stesso.

Ogni cubetto all'interno del tubo di flusso avrà il flusso entrante uguale al flusso uscente cioè avrà $d\varphi = 0$ e quindi anche $\frac{d\varphi}{dV} = \operatorname{div} \vec{f} = 0$

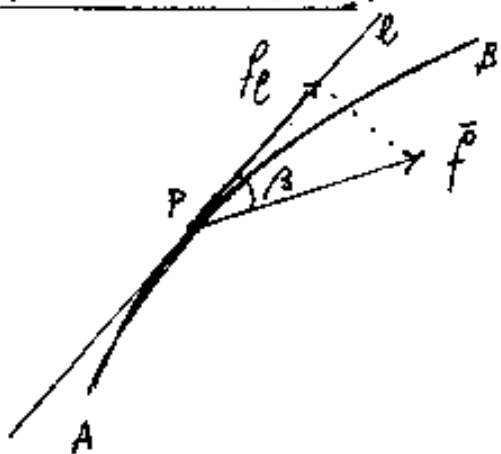
Il flusso nel tubo di flusso è costante questo genere di campi è detto solenoidale

Inversamente un campo solenoidale ha divergenza nulla.

La funzione di quel campo ammette potenziale (vedi criterio di Schwarz) Il tubo di flusso e le linee

(vedi criterio di Schwarz) Il tubo di flusso e le linee di flusso inducono a considerare superfici sempre in ogni punto perpendicolari al vettore e quindi alle linee di flusso; tali superfici sono dette di livello o equipotenziali

Circuitazione di un vettore

Integrale lineare o integrale lungo una linea di un vettore. - Il rotore o vorticale dif -

Consideriamo una linea AB nel campo del vettore $\vec{f}$ proiettiamo il vettore $\vec{f}$ sulla tangente alla linea ed indichiamo con $\vec{f_l}$ la sua proiezione: $\vec{f_l} = \vec{f} \cos\beta$. Definiamo integrale del vettore $\vec{f}$ in $\widehat{AB} = l$, l'integrale:

$$\int_{AB} \vec{f_l}\, dl = \int_{AB} \vec{f} \cos\beta\, dl$$

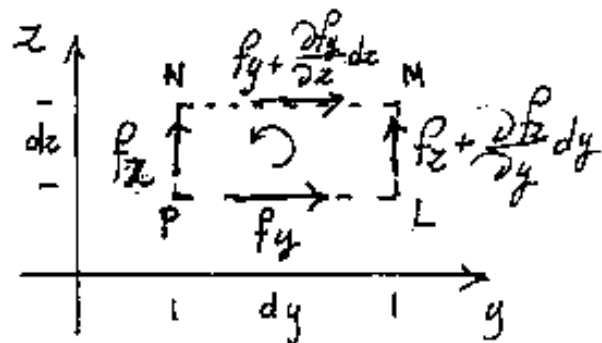
(e se la linea è orientata) si può scrivere: $= \int_A^B \vec{f} \times d\vec{l} = \int_A^B f \cos\beta\, dl$

cioè il risultato è uno scalare.

Abbiamo già trattato gli integrali curvilinei. (Vol V)

Consideriamo ora nel campo del vettore una linea chiusa che delimiti un'area, dividiamo

questa area in rettangoli, se il vettore lungo l
ha un integrale lineare in un verso l'integrale $\oint_{AB} \bar{F} \times dl$
detto circuitazione equivale alla somma
delle circuitazioni dei rettangoli perché i
tratti interni sono percorsi due volte ed in senso
opposto quando si esamini due rettangoli adiacenti.

consideriamo quindi un rettangolo supponiamo sul piano zy del campo vettoriale, e sia il punto P della linea AB l'origine dei lati in direzione y e direzione z ed i lati siano dy e dz

Siano f_z ed f_y le componenti del vettore sugli assi passanti per P avremo le variazioni in figura delle componenti del vettore. Assumiamo come verso positivo di circuitazione (l'integrale lineare del vettore) quello antiorario indicato in figura ed avremo: (detto "l" il perimetro del rettangolo) $\int_{P_{zy}LMN} f_z \, dl =$

$$= +f_y \cdot dy + \left(f_z + \frac{\partial f_z}{\partial y} dy\right) dz + \left(-\left(f_y + \frac{\partial f_y}{\partial z} dz\right) dy\right) + \left(-f_z dz\right) =$$

avremo l'espressione:

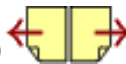
$$\oint_{P_{yz}LMN} \vec{f} \, dl = \frac{\partial f_z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial f_y}{\partial z} dy dz$$

Perciò l'integrale di circuitazione sul piano zy

$$\oint_{f_{(yz)}\, AMN} \vec{f_e}\, dl = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) dy\, dz = \oint_{zy} f_{zy} \cos\beta_{zy}\, dl_{zy}$$

Definiamo rotore di $\vec{f}$ il vettore perpendicolare all'area circuitata da $\vec{f}$ e lo indicheremo

$$\vec{C} = (\mathrm{rot}\, \vec{f}) \qquad \text{(vorticale di } f\text{)}$$

ed avrà per modulo il valore della circuitazione diviso per l'area circuitata

nel caso considerato l'asse x è perpendicolare al rettangolo: PLMN perciò:

$$\vec{C}_x = \left(\frac{\partial \vec{f}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial z} \right)$$ e analogamente:

$$\vec{C}_y = \left(\frac{\partial \vec{f}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{f}_z}{\partial x} \right)$$

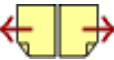
$$\vec{C}_z = \left(\frac{\partial \vec{f}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial y} \right)$$

che saranno le componenti secondo gli assi del vettore $\vec{C} = \text{rot}\,\vec{f}$

Se la circuitazione di $\vec{f}$ è zero anche $\text{rot}(\vec{f}) = C$ = zero ed il campo si dice irrotazionale cioè che il campo ammette potenziale, è solenoidale

Se esiste una funzione U tale che:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = f_z \; ; \; \frac{\partial U}{\partial y} = f_y \; ; \; \frac{\partial U}{\partial z} = f_x$$

$\partial^2 U \quad \partial^2 U \quad - \partial f_z \; - \partial f_y$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial z} \quad \text{da cui } \vec{C}_{(x)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z} \quad \text{" " } \vec{C}_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \quad \text{" " } \vec{C}_y = 0$$

La chiameremo funzione potenziale, (Vedi Vol III)

Teorema di Stokes

Dimostriamo, prima di tutto, che la definizione del vettore vorticale o rotore (in inglese Curl = ricciolo) (in tedesco Wirbel = vortice) permette di trasformare un integrale lineare in un integrale di superficie.

$$\oint_{l} f\cos\beta\, dl = \oint_{yz} f_{yz}\cos\beta_{yz}\, dl_{yz} + \oint_{xz} f_{zx}\cos\beta_{zx}\, dl_{zx} + \oint_{xy} f_{xy}\cos\beta_{xy}\, dl_{xy}$$

Cioè abbiamo scomposto la circuitazione sui tre piani di riferimento xy; yz; zx. sapendo che la circuitazione di un vettore lungo una linea è la somma delle circuitazioni delle proiezioni del vettore.

Abbiamo già visto che: $\oint_{zy} f_{zy}\cos\beta_{zy}\, dl_{zy} = \underline{C_x\, dz\, dy}$

cioè:

$$\oint f\cos\beta\, dl = \boxed{C_x\, dS_{zy} + C_y\, dS_{zx} + C_z\, dS_{xy}}$$

$$\oint_l f \cos\beta \, dl = \left| C_x \, dS_{zy} + C_y \, dS_{zx} + C_z \, dS_{xy} \right|$$

ove dS_{xy} ; dS_{xz} ; dS_{zy} ; sono le proiezioni di dS.

Notiamo che le componenti di sono normali alle rispettive aree che li moltiplicano cioè il secondo membro è la somma dei flussi delle componenti di C

Cioè sono il flusso di C su dS

$$\vec{C}\cos\alpha\, dS = \vec{C} \times dS = \vec{C}_x\, dS_{yz} + \vec{C}_y\, dS_{zx} + \vec{C}_z\, dS_{xy}$$

ed anche

$$\oint_l \vec{f}\cos\beta\, dl = \oint \vec{f} \times dl = C \times dS = rot\,\vec{f} \times dl$$

estendendo il risultato a superfici finite delimitate da una linea L (l delimitava la superficie infinitesima dS) avremo:

$$\oint_L \vec{f} \times d\vec{L} = \int_S (\overrightarrow{rot(f)}) \times d\vec{S}$$

circuitazione di f intorno L = flusso di rot(f) attraverso S

E' questo il teorema di Stokes che trasforma un integrale di linea in un integrale di superficie.

<u>La circuitazione di un vettore $\vec{f}$ equivale il flusso del suo rotore attraverso l'area circuitata.</u>

<u>Il vorticale è un vettore a distribuzione solenoidale</u> (facciamo la divergenza di rot f)

solenoidale. (facciamo la divergenza di rot f)

$$div\, rot\, \vec{f} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}$$

sostituendo i valori di C_x, C_y, C_z si ha:

$$div\, rot\, f = \frac{\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)}{\partial x} + \frac{\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}}{\partial y} + \frac{\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}}{\partial z}$$

$$div\, rot(f) = \frac{\partial^2 f_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\boxed{div\, rot(f) = 0}$$ sempre!

si può anche definire il vorticale "$\vec{c}$" di un vettore "$\vec{f}$", come un vettore a distribuzione solenoidale il cui flusso attraverso una certa superficie equivale la circuitazione di $\vec{f}$ lungo la linea che delimita la superficie stessa

Il Potenziale

Consideriamo due punti A e B in un campo vettoriale ed uniamo A con B con due diverse linee l_1 ed l_2 calcolando l'integrale lineare del vettore f lungo l_1 oppure lungo l_2 si hanno due casi e cioè i valori di tali integrali possono essere uguali o diversi. Se sono uguali, poiché nella circuitazione una delle due linee avrebbe verso opposto $\overset{l_1}{\widehat{AB}}$ $\overset{l_2}{\widehat{BA}}$ vuol dire che la circuitazione sarebbe nulla. Inversamente

presa una linea chiusa di un campo vettoriale, lungo la quale sia nulla la circuitazione e presi su tale linea due punti qualsiasi A e B l'integrale lineare da A a B è uguale per i due tratti in cui è stata divisa la linea.

Essendo nulla la circuitazione il campo è quindi irrotazionale: ($rot(f) = 0$), o come si dice solenoidale e l'integrale di $\vec{f}$ lungo una linea aperta $\widetilde{AB}$ è indipendente dal percorso della linea e dipende solo dai limiti A e B.

Affinché ciò si verifichi deve essere $C = 0$

$C_x = 0$; $C_y = 0$; $C_z = 0$ cioè:

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0$$

che sono le condizioni che l'espressione:

$$f(x)\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz = dU$$

sia un differenziale esatto.

Abbiamo già ipotizzato l'esistenza della funzione potenziale U; Tal volta si usa porre $U = -V$ ove il segno negativo di V implica che nella direzione del vettore assunta come positiva il Potenziale diminuisca.

Se esiste il potenziale avremo che:

$$f_l = -\frac{dV}{dl} \; ; \; f_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \; ; \; f_y = \frac{-\partial V}{\partial y} \; ; \; f_z = \frac{-\partial V}{\partial z}$$

cioè <u>Le derivate parziali secondo una direzione della funzione potenziale sono le proiezioni del vettore campo secondo quella direzione</u>. (però di segno opposto). <u>Si può dire sono le componenti del vettore campo</u>

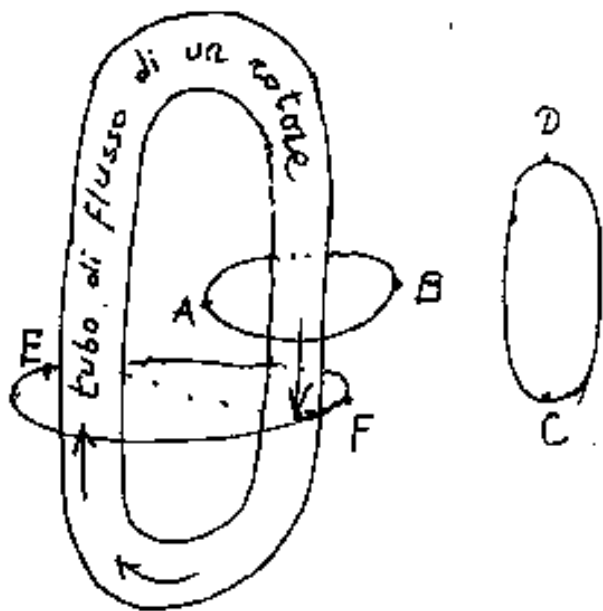
<u>Ne segue che per avere il valore totale del vettore campo in un punto basta prendere, (cambiata di segno) la derivata del potenziale in quel punto rispetto alla normale alla superficie di livello o equipotenziale passante per esso.</u>

Le derivate di $-V$ rispetto alle tangenti la superficie di livello sono nulle $\frac{-\partial V}{\partial t} = 0$

od anche: $\frac{dV}{dt} = 0$ infatti su tali

superfici V ē una costante.

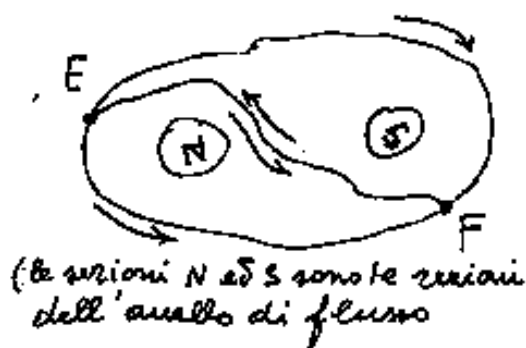
Il potenziale policiclico

Abbiamo visto che il rotore o vorticale di un vettore $\vec{f}$ è un vettore che genera un campo solenoidale, cioè i tubi di flusso del rotore sono a flusso costante il che vuol dire che in ogni sezione il flusso uscente è uguale a quello entrante (infatti: div rot $f = 0$) ma affinché ciò si verifichi occorre che i tubi di flusso si richiudano su se stessi, (magari $\pm\infty$ può essere il ricongiungimento)

Consideriamo un tubo di flusso di un rotore in campo finito, e consideriamo tre linee chiuse:

AB concatenata con l'anello di flusso; CD esterna all'anello di flusso EF

all'anello di giuso EF

racchiudente l'anello di flusso. Supponiamo nullo il rotore in tutto il campo esterno al tubo di flusso, avremo che la circuitazione di rot(f) lungo AB è pari al flusso di rot f nel tubo mentre è nulla la circuitazione di rot f lungo CD. Anche lungo

la linea EF la circuitazione di rot(f) è nulla perchè attraverso la superficie delimitata dalla linea EF il tubo di flusso passa due volte e con versi opposti, per cui matematicamente si annullano. Se consideriamo due punti E ed F di tale linea e li riuniamo con una linea che attraversa l'anello di flusso, avremo che lungo tale linea l'integrale lineare di rot(f) è identicamente nullo: mentre

$$\int_E^F rot(f) \times dl = 0$$

. Mentre gli integrali lineari $\int_E^F rot(f) \times dl$ che passano per linee che non attraversano l'anello, essendo il campo solenoidale, saranno diversi da zero ed uguali fra loro, affinchè sia nulla la circuitazione esterna.

E

N

S

F

(le sezioni N ed S sono le sezioni dell'anello di flusso

Il Vallauri (cfr. Dal Monte - V. Zerbini C. Cania - Corso di Elettrotecnica - ed Di Giorgio - Torino) dice: "Lungo la linea AB invece la circuitazione è uguale al flusso del vorticale,

AB invece la circuitazione è uguale al flusso del vorticale, per cui non si può parlare di potenziale nel senso precedentemente definito. In questo caso ad ogni giro la circuitazione varia di una quantità uguale al flusso del vorticale, e si può definire una funzione simile al potenziale sopra definito, detta Potenziale Policiclico.» (che utilizzerà per i campi magnetici)

Alcune osservazioni sul simbolismo

Mentre in analisi bastano le lettere per indicare quantità qualificate ed il simbolismo è pressoché unificato, (Vedi vol I) In analisi vettoriale i simboli possono e sono molto spesso essere molto diversi.

Per indicare che una certa lettera dell'alfabeto rappresenta un vettore (per esempio: u)

I francesi la sopralineano con una freccetta $\vec{u}$

alcuni testi sottolineano $\underline{u}$

altri scrivono in grassetto **u**

i tedeschi usano il gotico $\mathfrak{u}$

per indicare il modulo in genere usano la stessa lettera non evidenziata cioè senza sopralineature o sottolineature, non in grassetto non in gotico, altri aggiungono due barrette $|u|$ = modulo di $\vec{u}$, altri scrivono mod $\vec{u}$.

In genere i versori (vettori unitari $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ oppure $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ che abbiamo già visto) si scrivono con lettere minuscole.

Purtroppo è molto facile dimenticarsi di evidenziare.

Purtroppo è molto facile dimenticarsi di evidenziare, e la scrittura del simbolismo vettoriale diventa fastidiosa. Per non dire (come abbiamo già esposto) che la notazione di prodotto vettoriale (∧), in america è × come il prodotto scalare in notazione europea; ed il prodotto scalare (×) in notazione americana è (·) come il prodotto ordinario in europea. –
(Riteniamo che, i simboli dovrebbero essere unificati)

Riepilogo delle correlazioni fra gli operatori vettoriali.

Sia: $\vec{f} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ il vettore del campo

$\bar{f} = \text{grad}.\,U$ U = lo scalare potenziale se esiste il campo è detto Solenoidale o irrotazionale

$\text{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ l'operatore gradiente

trasforma uno scalare in un vettore, ove le sue derivate rispetto agli assi sono le componenti del vettore (proporzionali ai coseni direttori della direzionalità di $\vec{f}$) $\frac{\partial U}{\partial x} = X$; $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$; $\frac{\partial U}{\partial z} = Z$.

$$\varphi = \int_S \vec{f} \times d\vec{S}$$

$\left(\vec{f} = \frac{d\varphi}{dS}\right)$

φ è il flusso (scalare) del vettore $\vec{f}$ attraverso la superficie $\vec{S}$ orientata (punto per punto).

se la superficie è chiusa: La derivata del flusso rispetto al volume V (scalare) attraversato:

$$\frac{d\varphi}{dV} = div.\vec{f}$$

è lo scalare divergenza di $\vec{f}$

$$div(\vec{f}) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial f(y)}{\partial y} + \frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

cioè: l'operatore divergenza trasforma il vettore $\vec{f}$ in uno scalare che è il flusso per unità di volume

Condizione necessaria, ma non sufficiente affinché sia $\vec{f} = \text{cost}$ è che $\text{div}\, \vec{f} = 0$

$$\int_V \text{div}(\vec{f})\, dV = \int_S \vec{f} \times d\vec{S}$$

è il teorema della divergenza o di Green

trasforma un integrale di superficie in integrale di volume

$$\text{rot}(\vec{f}) = \left(\frac{\partial f_{(z)}}{\partial y} - \frac{\partial f_{(y)}}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_{(x)}}{\partial z} - \frac{\partial f_{(z)}}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_{(y)}}{\partial x} - \frac{\partial f_{(x)}}{\partial y}\right)\vec{K} = \vec{C}$$

l'operatore rotore trasforma un vettore $\vec{f}$ in un altro vettore $\vec{C}$ detto vorticale o rotore di $\vec{f}$.

Questo vettore ha distribuzione soleinoidale per cui: $\text{div}\, \text{rot}(\vec{f}) = 0$

Dicesi circuitazione di $\vec{f}$ su una linea chiusa l'integrale $\oint_l \vec{f} \times dl$ prodotto del vettore $\vec{f}$ per gli elementi di linea. Si ha l'uguaglianza:

$$\int_L \vec{f} \times d\vec{l} = \int_S \text{rot}(\vec{f}) \times d\vec{S}$$

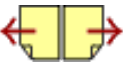
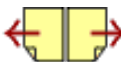
Teorema di Stokes che trasforma un integrale di linea in integrale di superficie.

Quando: $\text{rot}\, \vec{f} = 0$ il campo è irrotazionale ossia

Quando: $\boxed{\text{rot}\,\vec{f} = 0}$ il campo è irrotazionale ossia solenoidale.

Anziché scrivere: $\int_S \vec{f} \times d\vec{S}$ = (meglio) $\int_S \vec{f} \times \vec{n}\, dS$

$$\int \text{rot}\,\vec{f} \times d\vec{S} = \int \text{rot}\,\vec{f} \times \vec{n}\, dS$$

ove $\vec{n}$ è il versore della normale alla superficie

Sia $\vec{f}$ funzione del punto P cioè: $\vec{f} = \vec{f}(P)$.
diamo a P due spostamenti infinitesimi distinti, (differenziali) d_1P, d_2P; a ciascuno dei quali corrispondono le variazioni: $d_1\vec{f}$ e $d_2\vec{f}$, esiste un unico vettore $\vec{C} = \text{rot}\,\vec{f}$ tale che:

$$\text{rot}(\vec{f}) \times d_1P \wedge d_2P = d_1\vec{f} \times d_2P - d_2\vec{f} \times dP$$

$$\text{rot}(m\vec{f}) = m\,\text{rot}\,\vec{f} + \text{grad}\,m \wedge \vec{f}$$ con $m = m(P)$.

$$\text{rot}\,\text{grad}(m) = 0$$

$$\text{rot}(P-O) = 0 \qquad \text{rot}\{\vec{a} \wedge (P-O)\} = 2\vec{a}$$

L'operatore di Laplace

Si indica ordinariamente con Δ ma è anche usato ∇^2 (nabla) od anche ∇ o Δ^2 è uno scalare di uso frequente: uguagliato a zero è l'equazione di Laplace

$$\Delta(u) = \text{div}\,\text{grad}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$ ... l'operatore.

Laplace $\Delta(u) = \operatorname{div}\operatorname{grad}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ l'operatore

è quindi una trasformazione da scalare a scalare passando per il vettore. $\operatorname{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{K}$ ove grad(u) è perpendicolare alle superfici equipotenziali cioè a $u = \text{cost}$. Se grad(u) è lo spostamento di un corpo continuo, div(grad(u)) è il coefficiente di dilatazione cubica.

$$\operatorname{grad}\cdot\operatorname{div}(\vec{u}) - \operatorname{rot}^2\vec{u} = \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2}\right) = \Delta(\vec{u})$$

(attenzione qui $\vec{u}$ è vettore)

Altre formule interessanti:

$$\operatorname{div}(P-O) = 3$$

infatti le componenti di $(P-O)$ sono x, y, z

$$\operatorname{div}(P-O) = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} = 3$$

Se indichiamo:

$\vec{E}$ = campo elettrico

$\vec{J}$ = campo di corrente elettrica $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i)$; ($\sigma$ = conduttività)

$\vec{D}$ = campo dielettrico $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ (ε = costante dielettrica)

$\vec{H}$ = campo magnetico $\vec{B} = \mu \vec{H}$ (μ = permeabilità magnetica)

$\vec{B}$ = campo induzione magnetica abbiamo: (t = tempo)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

equazioni di Maxwell

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ove (ρ = densità di carica elettrica)

moltiplicando per $\vec{E}$ scalarmente la I^ equaz. di Maxwell:

$$\vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{E} \times \vec{J} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

sottraendovi la II^ eq. di Maxwell moltiplicata per $\vec{H}$

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{J}\vec{E} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ integrando

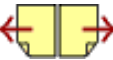
$$\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{J}\vec{E} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ integrando.

ma: $$\vec{E} \times \mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{H} \times \mathrm{rot}\,\vec{E} = \mathrm{div}(\vec{E} \wedge \vec{H})$$

$$\vec{P}_i = \int_S (\vec{E} \wedge \vec{H})\, n\, dS$$ = Vettore di Poynting

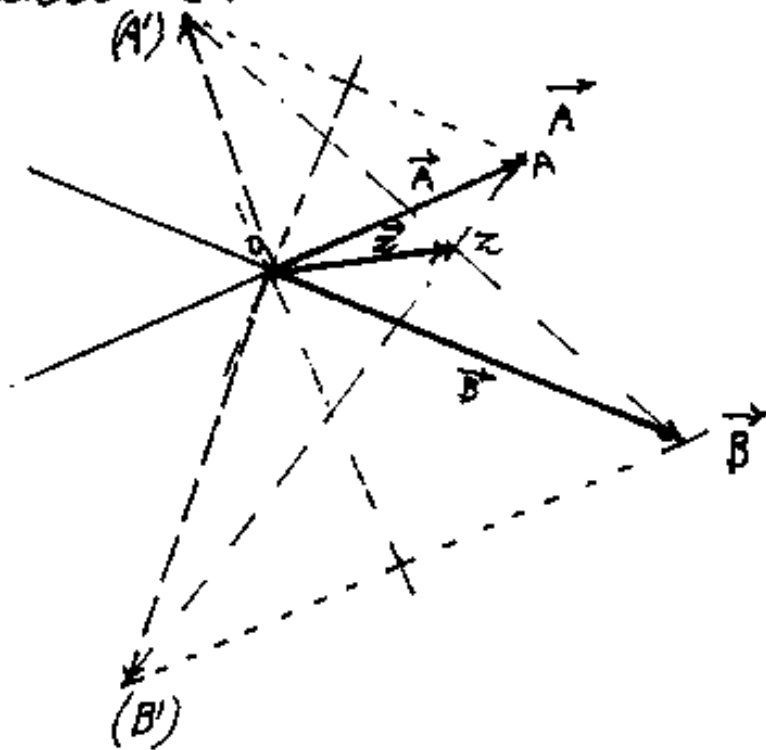
avremo il bilancio energetico:

$$\int_V \vec{E}_i J\, dV = \int_V \frac{\vec{J}^2}{\sigma} dV + \frac{d}{dt}\int \frac{\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2}{2} dV + \int_S (\vec{E} \wedge \vec{H})\, n\, dS$$

(campo impresso) = Potenza dissipata per effetto Joule + energia elettromagnetica immagazzinata + potenza irradiata attraverso S

Un metodo per trovare il vettore reciproco della somma di due reciproci

Dati graficamente i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ trovare graficamente il vettore:

$$\vec{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}}$$

Soluzione:

Siano: $\overrightarrow{OA} = \vec{A}$ ed $\overrightarrow{OB} = \vec{B}$ i vettori dati, rappresentati uscenti dal punto comune O.

Le rette di azione, facciano da specchio all'altro vettore, per cui $\overline{O(B')}$ è l'immagine speculare di $\vec{B}$, ed $\overline{O(A')}$ è l'immagine speculare di $\vec{A}$

$\overline{O(A')}$ è l'immagine speculare di $\vec{A}$; unito: A con (B') e B con (A') otteniamo il punto comune z ove: $\overrightarrow{OZ} = \vec{Z} = \dfrac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}}$ valido come modulo e come direzione (argomento) rispetto a qualsiasi sistema di assi di riferimento.

Facciamo la dimostrazione:

Dimostrazione

E' noto che dato il vettore $\vec{A}$ è possibile mediante una polarità trovare il vettore $\frac{1}{\vec{A}}$, con le solite notazioni, sia infatti $\vec{A} = a + jb$;

$$\frac{1}{\vec{A}} = \frac{1}{(a+jb)} = \frac{a-jb}{a^2+b^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

posto: $m = \frac{a}{a^2+b^2}$; $n = \frac{b}{a^2+b^2}$; $\boxed{\frac{1}{\vec{A}} = (m - jn)}$

Il modulo del vettore $\vec{A} = |A| = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)$

Il modulo del vettore $\frac{1}{\vec{A}} = \left|\frac{1}{A}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2}$

$$\left|\frac{1}{A}\right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \text{inverso del modulo di } \vec{A}$$

L'argomento principale del vettore $\vec{A} = \varphi = \operatorname{arctg}(b/a)$

L'argomento principale del vettore $\frac{1}{\vec{A}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b}{a^2+b^2} \Big/ \frac{a}{a^2+b^2}\right)$

cioè: $\operatorname{arctg}\left(\frac{-b}{a}\right)$

Ciò indica che i vettori si trovano da banda opposta rispetto all'asse cartesiano assunto per

le grandezze reali, e formano con esso angoli explementari.

Abbiamo già esposta una costruzione grafi= ca del reciproco di un segmento (V. Vol I pag 49), ma per questa dimostrazione useremo un'altro teorema di geometria elementare, facilmen= te dimostrabile. Cioè dato un punto P

esterno ad un cerchio di raggio R, tracciamo le tangenti, e costriamo il punto P' comune alla retta per i punti di tangenza ed al diametro per P; se C = Centro del cerchio: $\overline{PC} : \overline{TC} = \overline{TC} : \overline{P'C}$

$\overline{PC} : R = R : \overline{P'C}$

$\overline{PC} \cdot \overline{P'C} = R^2$

$\overline{PC} = R^2 \cdot \frac{1}{\overline{P'C}}$

e se poniamo $R = 1$

$$\boxed{\overline{PC} = \frac{1}{\overline{P'C}}}$$

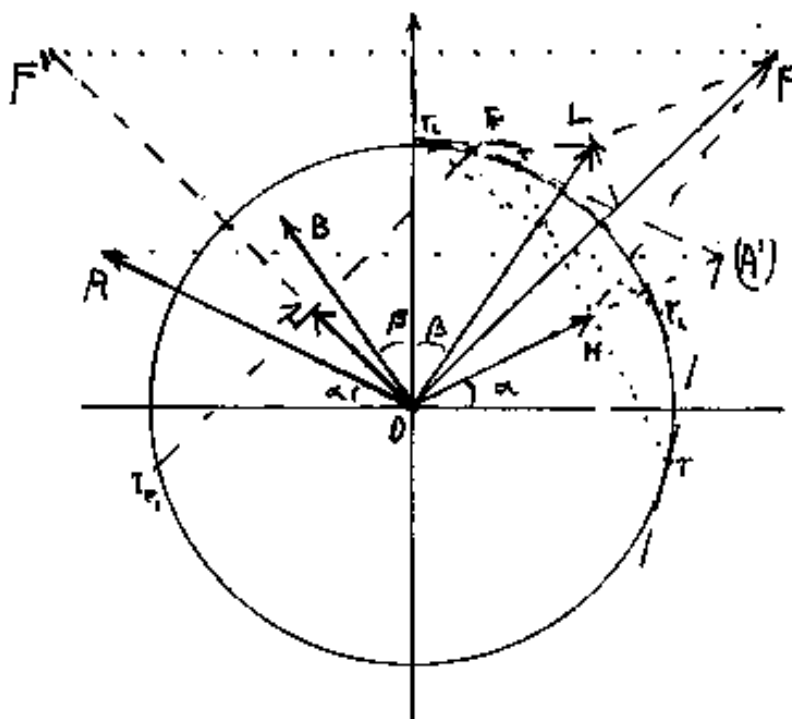
Qualora si conosca la scala del modulo di $\vec{A}$ cioè il segmento unitario da porre $R = 1$,

è possibile trovare il vettore $\frac{1}{\vec{A}}$, infatti: sia: $\vec{A} = \overrightarrow{OA}$ di argomento φ rispetto ad x. sia (A') simmetrico di A rispetto ad X, da (A') le tangenti in $T_1 T_2$ al

[illegible]

cerchio di centro O e raggio unitario, sia H il punto comune ad $\overline{O(A')}$ e $\overline{T_1T_2}$ avremo:

$$\vec{H} = \overrightarrow{OH} = \frac{1}{\overrightarrow{OA'}} = \frac{1}{\vec{A'}}$$

Notiamo che è stato necessario conoscere il segmento unitario "R" (modulo della scala grafica)

Costruiti col procedimento dimostrato i vettori:

$$\frac{1}{\vec{A}} = (H-O)$$

$$\frac{1}{\vec{B}} = (L-O)$$

si compongono con la regola del parallelogramma e si trova il vettore: $\frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}} = (F-O)$

invertendo il quale si trova: $\vec{Z} = (Z-O) = \frac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}}$

supponendo di aver eseguito i vari procedimenti d'inversione con raggio R diverso da 1 avremmo ottenuto:

$$(H-O) = R^2/\vec{A} \quad ; \quad (L-O) = R^2/\vec{B} \quad ; \quad (F-O) = \frac{R^2}{\vec{A}} + \frac{R^2}{\vec{B}} \; ;$$

$$(Z-O) = \frac{R^2}{\frac{R^2}{\vec{A}} + \frac{R^2}{\vec{B}}} = \frac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}} = \vec{Z}$$

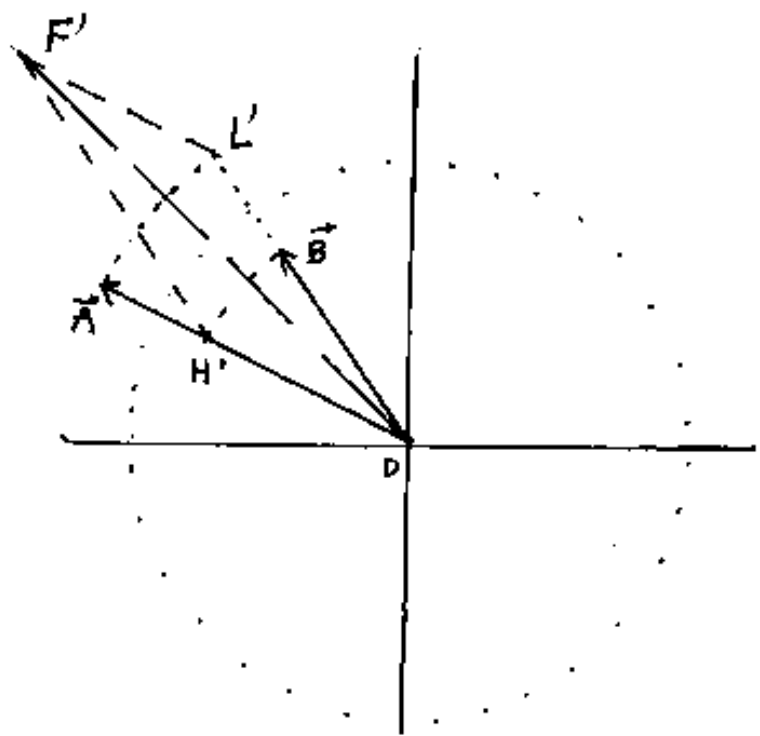
con ciò resta dimostrato che il risultato è
lo stesso ed è indipendente dalla misura
del raggio del cerchio col quale si opera.
Quindi il raggio del cerchio possiamo sceglierlo
arbitrariamente.

Se come raggio del cerchio assumiamo
quello per il quale il modulo di un vettore

risulta pari al modulo dell'altro vettore invertito mediante questo cerchio e viceversa, se cioè il raggio sia medio proporzionale fra il prodotto dei moduli:

$$|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| = \rho^2 = K \quad (K = \text{potenza d'inversione})$$

$$|\vec{A}| = K/|\vec{B}| \quad ; \quad |\vec{B}| = K/|\vec{A}|$$

F'
L'
$\vec{B}$
$\vec{A}$
H'
O

Vediamo subito che, essendo la direzione $\overrightarrow{OF'}$ identica a quella di Z, considerando $\overrightarrow{OF'}$ come somma dei vettori: (L'-O) ed (H'-O) ove: (L'-O) ha lo stesso modulo di $\vec{A}$ e l'argomento di $\vec{B}$ ed (H'-O) ha lo stesso modulo di $\vec{B}$ e l'argomento di $\vec{A}$, con ciò resta determinata la direzione (cioè l'argomento) di:

$$\vec{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}}$$

$\vec{A}$ $\vec{B}$

D'altra parte il vettore (F' - O) ha per modulo lo stesso modulo di $\vec{A} + \vec{B}$ cioè:

$$\overline{OF'} = \frac{\rho^2}{|\vec{A}|} + \frac{\rho^2}{|\vec{B}|} = \rho^2\left(\frac{1}{|\vec{A}|} + \frac{1}{|\vec{B}|}\right) = \rho^2\frac{1}{|\vec{Z}|}$$

essendo: $\rho^2 = |\vec{A}|\,|\vec{B}|$ possiamo scrivere

$$\overline{OF'} \cdot |Z| = \rho^2 = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$$

$$\overline{OF'}/|B| = \frac{|A|}{|Z|}$$

$$|Z| : |A| = |B| : \overline{OF'}$$

rappresentiamo ora graficamente tale proporzione, dopo aver costruito $\overrightarrow{OF'}$, riportiamo sul prolungamento di $\overline{OA}$ il punto "G", tale che:

$$\overline{OG} = \overline{OF'}$$

riportiamo su OF' il punto "E" tale che:

$$\overline{OE} = \overline{OB}$$

unito "G" con "E", si traccia per "A" la parallela a $\overline{GE}$ fino all'incontro con $\overline{OF'}$ in "Z".

Avremo:

$$\overline{OZ} : \overline{OA} = \overline{OE} : \overline{OG}$$

ma: $\overline{OA} = |\vec{A}|$; $\overline{OE} = |\vec{B}|$; $\overline{OG} = \overline{OF'}$;

quindi:

quindi: $\overline{OZ} : |\vec{A}| = |\vec{B}| : \overline{OF'}$

perciò il segmento $\overline{OZ}$ rappresenta il modulo di z, cioè: $\overline{OZ} = |\vec{Z}|$, e la proporzione può anche scriversi:

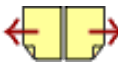
$$|\vec{Z}| : |\vec{B}| = |\vec{A}| : \overline{F'O}$$

Alle stesse conclusioni si giunge riportando $\overline{OF'}$ in "C" sul prolungamento di $\overline{OB}$, che unito con D è parallelo a $\overline{BZ}$.

I vettori e le frequenze

Il concetto di vettore è rappresentativo di un agente che produce un fluire più o meno intenso secondo una determinata direzione (direzionalità dell'insieme di rette parallele ciascuna delle quali avente la direzione prefissata). Però, se questo va bene per i campi gravitazionali, elettrici, magnetici, ecc. con vettori variabili, punto per punto, rimane più difficile "vedere" il fluire del vettore momento, eppure un momento agente in qualsiasi punto del piano, lo fa ruotare intorno al baricentro, ne abbiamo già parlato.

Però il problema è molto più complesso, e dovremmo, prima di tutto fare una tipizzazione dei vettori: ricordiamo che i primi vettori

ne dei vettori; ricordiamo che i primi Vettori
erano quegli enti speciali capaci di portare
in "P" il punto "O", si scriveva il vettore geometri=
co: (P-O) che si leggeva appunto: (P-O) il vettore era
il "veicolo", parole che derivano dal latino:
vectŏr ōris m. (veho) attivo = portatore. La necessità
di definire, a certe dimensioni fisiche, la dire=
zione, portò ai vettori ("grandezze vettoriali")

Dalla uguaglianza dei triangoli $M\hat{O}B$ ed $O\hat{L}'F'$ si ha che l'angolo $M\hat{O}B = O\hat{L'}F' = (\pi - CL'F') = (\pi - B\hat{O}A)$, allora prolungando il lato $\overline{BO}$ oltre l'origine O in "S" si ha: $M\hat{O}B = (\pi - B\hat{O}A) = (\pi - MOS)$ cioè: $M\hat{O}S = B\hat{O}A$ il che vuol dire che il vettore $\overline{OB}$ è parallelo al segmento $\overline{MA}$ la normale per "O" a queste parallele incontra $\overline{MA}$ nel punto mediano ($M\hat{O}A$ è isoscele) per cui "M" è l'immagine speculare di "A" riflessa da $\overline{OB} = |\vec{B}|$ e la retta che unisce M con B passa per z. La stessa dimostrazione può essere fatta per "N" immagine di "B" riflessa da $\overline{OA} = |\vec{A}|$, ove la retta che unisce "N" con "A" passa per z.

Resta così dimostrata la costruzione del vettore reciproco della somma dei reciproci valido come modulo e argomento rispetto a qualsiasi sistema di riferimento ed esposto nella

stessa scala e con gli stessi riferimenti dei vettori noti $\vec{A}$ e $\vec{B}$ (cioè indipendente dai segmenti unitari necessari per costruire i reciproci)

$$\vec{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}}$$

$$\frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{\vec{A}} + \frac{1}{\vec{B}}$$

Le grandezze fisiche, che non necessitavano di una direzione furono dette "scalari".
Peró il vettore geometrico: (P-O) ha un preciso punto di applicazione ed un retta di azione giacente su $\overline{PO}$, col verso da "O" a "P" (era piú simile a ció che fu chiamato "forza") Abbiamo giá espresso il nostro pensiero in proposito. Mentre il momento non ha un punto di applicazione, la sua azione vale per tutti i punti del piano, e l'insieme delle rette normali al piano hanno la direzione del momento (direzionalitá delle rette di giacitura di quel piano). É ovvio che il prodotto scalare, ed il prodotto vettoriale, possono portare incongruenze, quando non siano ben definite le caratteristice dei due fattori Vettoriali.
Ma noi, come ci siamo proposti, vogliamo ripartire da zero.

[illegible]

In questa parte vogliamo applicare la matematica alla fenomenologia che ci circonda, cercando, per quanto possibile, di evitare <u>le arbitrarietà</u>, che, troppo spesso, hanno falsato il fenomeno impedendone la conoscenza.

La prima unità dimensionale che abbiamo accettato è "l'angolo giro" o "ciclo", ne abbiamo evidenziato le differenze. Ne consegue il concetto di frequenza, se introduciamo il tempo, o il movimento, che implicitamente ci dà il tempo. Se consideriamo l'angolo giro nel tempo zero esso ci dà contemporaneamente tutte le direzioni uscenti da ciascun punto del piano e perpendicolari alla retta normale al piano per quel punto (rette di giacitura, assi,) La direzione del vettore momento è l'asse dell'angolo giro.

Il fluire nel verso e nella direzione del vettore momento ci dà il moto di traslazione lineare, mentre il ruotare dell'angolo giro ci dà il moto di rotazione.

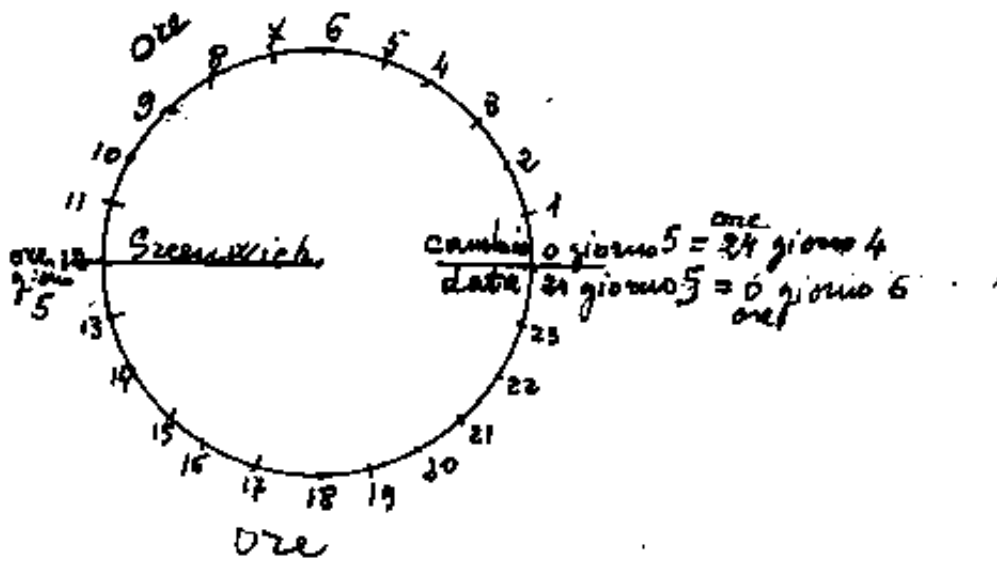
In campo finito il moto di un corpo è sempre riducibile ad una traslazione

è sempre riducibile ad una traslazione
ed una ruotazione, ove la retta della trasla=
zione può essere diversa dall'asse di rotazione.
Queste due rette possono essere individuate
dalla posizione iniziale e finale; ma pos=
sono anche individuarsi istante per istante

La grandezza "tempo" è implicita nella parola "Variazione" poiché ogni variazio=ne ammette un "prima" ed un "dopo", in ciò un tempo, (ne abbiamo già fatto cenno) perciò nel nostro studio entriamo nel campo te=tra-dimensionale, ove la quarta dimensio=ne è il tempo. Al nostro sistema di riferi=mento, manca l'origine: "O", che può essere l'osservatore, l'"io" puntiforme di cui abbia=mo già parlato; le tre direzioni ortogonali uscenti da "O" sono definite da tre punti indefinitamente lontani: X; Y; Z; per cui le tre direzioni non mutano al variare del=l'origine "O" = (l'io puntiforme) le distanze da O, com'è consuetudine in geometria analitica, si indicano con: x, y, z; (e variano al variare di "O") Per il tempo, subentra la non facile defini=

zione di "Contemporaneità", problema affrontato nella relatività Galileiana ed Einsteiniana.
Consideriamo due uomini che si danno la mano, il contatto fra le due mani è contemporaneo, però i due uomini si trovano da banda opposta al meridiano di cambiamento di data, che attraversa il

contatto, in questo caso, sembrerebbe, che la "contemporaneità" differisca di 24 ore; ma ciò dipende dall'aver riferito la misura del tempo ai movimenti della terra.
Guardando la terra ed i suoi meridiani individuati dall'ora di Greenwich, dal

ore 7 8 6 5 4 3 2 1 9 10 11 ore 12 giorno 5 Greenwich
cambio data: ore 0 giorno 5 = ore 24 giorno 4; 24 giorno 5 = 0 ore giorno 6
13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 ore

Nord, vediamo come a fianco, e l'istante che fissa le ore 12 di Greenwich si vedono le ore degli altri meridiani.
Lo stesso discorso può farsi sull'eclittica divisa in dodici mesi, e la stretta di mano differirebbe di un anno.
Se l'istante in cui si è focalizzata l'ora sui meridiani terrestri è unico per tutto il

sui meridiani terrestri è unico per tutto il
cosmo avremmo definito la contemporaneità.
Poiché le immagini si muovono con la velocità
della luce, un osservatore che si allontani
da un orologio con la velocità della luce,
dicono !!!, vedrebbe sempre la stessa ora.
(il flusso di luce non entrerebbe nel suo occhio, se non si ferma)

A parte il fatto che la velocitá della luce non è velocitá limite, ma esistono, nel reattore nucleare, particelle che si muovono a velocitá superiore a quella della luce, consentendo l'autofotografia (effetto Cerenkov). Che il cosiddetto vuoto è un assurdo perché all'atto stesso che pronunciamo la parola "nel" lo riempiamo di quel qualcosa. Che nei vari mezzi materiali, la velocitá delle singole onde elettromagnetiche che determinano lo spettro dei colori, differiscono fra loro; (il rapporto fra le velocitá nei due mezzi è l'indice di rifrazione relativo) Tuttoció ridimensiona le teorie Einstaniane, e le conseguenze che se ne deduceva.

Facciamo un'altro esempio: supponiamo che l'orologio abbia emesso un suono,

(battuto un colpo, ma un suono non è mai istantaneo) e che l'osservatore si allontani con la velocità del suono, per risentirlo deve averlo superato e si deve fermare per quel tempo che necessita al suono altrimenti lo sente distorto. (Si noti come osservando una corsa automobilistica dal bordo di una strada

la velocitá della macchina in arrivo compri=
me le frequenze elastiche del suono che la
precede diminuendone la lunghezza d'onda
e si sente un suono piú acuto di quello
reale. Non appena la macchina c'é passa=
ta davanti il suono che lei emette viene
verso di noi in senso opposto e la velocitá
della macchina addizionandosi a quella
del suono ne allunga la lunghezza
d'onda e si sente un suono piú grave
del reale. La variazione da piú acuto
a piú grave si ha proprio quando la
macchina ci passa davanti.

Per recepire una frequenza occorrono alcune
lunghezze d'onda, in genere non basta una sola,
cioé occorre un piccolo intervallo di tempo. Occorre
un quoto di energia, ció vale per tutte le fre=
quenze sia ottiche sia acustiche; quindi

queure sia ottiche, sia acustiche; quindi una immagine è un quoto di energia, come l'osservatore acustico ha dovuto sorpassare il suono e, per poterlo udire, ha dovuto fermarsi; la stessa cosa deve fare l'osservatore ottico. Si può vedere la stessa immagine per molto tempo solo se c'è una sorgente luminosa che continua ad illuminarla.

Quindi per un quoto di energia occorre un intervallo di tempo.

Non intendiamo, almeno per ora, entrare nel merito della teoria di Planck sulla distribuzione a gradini (quanti di energia) in oscillatori, ove ogni gradino avrebbe il valore "$h\nu$", con "h" = costante di Planck, (già valutata $6{,}55 \cdot 10^{-27}$ erg·sec; oggi: $6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Joule·sec) "ν" = frequenza dell'oscillatore. (valore energia: $nh\nu$) con n = numero dei gradini. E la conseguente distribuzione nell'ipotetico "Corpo nero".

Per intervallo di tempo possiamo considerare quanto abbiamo già esposto sul pendolo circolare, cioè l'altezza "h" del cono descritto dal filo che è indipendente dalla lunghezza del filo e dal peso applicato:

$$\omega^2 = g/h \quad ; \quad \frac{T}{2\pi} = \sqrt{h/g} \quad ; \quad T = 2\pi \sqrt{h/g}$$

ω = velocità angolare = rad/ ... T = periodo = sec/..

ω = velocità angolare = rad/sec   T = periodo = sec/ciclo

E qui notevole la definizione di potenza che moltiplicata per un intervallo di tempo dá un quoto di energia.

In elettrotecnica la potenza di un Watt, moltiplicata per un secondo dá un Joule.

Ma: (Watt) = (Volt)·(Amper) = (Volt)(Coulomb)/(sec)

perciò: $\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}}$ = Volt = Energia dell'unità di carica

Amper = Coulomb/sec. = portata di cariche.
detta comunemente intensità di corrente.
L'energia potenziale è un lavoro o quoto di energia vincolata che per estrinsecarsi impiega un certo tempo. La potenza di un quoto di energia potenziale è il rapporto fra il quantitativo di energia accumulata ed il tempo necessario a svincolarsi, o trasformarsi.
Quindi la potenza è un elemento caratteristico dei congegni che ne permettono la trasformazione. (in genere motori o generatori).
Per rilevare la potenza di un quoto di energia potenziale (cioè un quantitativo limitato che si esaurisce liberandosi) possiamo pensare ad un recipiente cilindrico pieno di acqua, a seconda che sul fondo vi sia un piccolo foro, o addirittura il fondo si apra di colpo, il tempo per svuotare

si apra di colpo, il tempo per svuotare
il contenitore cilindrico: $t = \frac{A}{F}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ è il tempo
che divide l'energia potenziale gravitazio-
nale: $E = \frac{P_s h^2 A}{2}$, ove γ_s = peso specifico del fluido
h = altezza dell'acqua, A = Area della sezione
cilindrica, F = area del foro, g = accelerazione di gravità.

si vedé meglio se pensiamo di dover sollevare 75 Kg all'altezza di un metro, con un motore della potenza di un cavallo (un CV = cavallo vapore = 75 Kgm/sec; nei paesi di lingua inglese si usa: HP = Horse-Power = 746 Watt = 76,04 Kgm/sec) il nostro motore impiegherà un secondo a sollevare 75 Kg all'altezza di un metro. Se lo stesso lavoro volessimo utilizzare un comune motore da rasoio elettrico ≃ 7,5 Watt = 0,765 Kgm/sec impiegheremmo ≃100 sec teorici perché la coppia deve essere demoltiplicata con sistemi di ingranaggi che per attrito assorbirebbero quasi l'intera potenza del motorino.

Occorre fare diverse osservazioni:

1) Nel recipiente da vuotare, la spinta ad uscire diminuisce con l'altezza del livello del liquido, mentre la spinta dei motori,

(coppia sull'albero) rimane costante perché l'energia viene assorbita all'esterno.

2) Analogo il problema dell'energia elastica un elastico per sollevare un peso si allunga di una certa lunghezza dipendente dal peso e dallo stato dell'elastico. cioè l'elastico inizia a sollevare il peso

quando ha accumulato in se l'energia elastica sufficiente a produrre una azione che equilibra il peso. Tale azione cresce al crescere della deformazione e, come termine di comodo, è stata chiamata forza.

Supponiamo di avere un elastico che al più può sostenere 1 Kg e con esso di voler sollevare i 75 Kg all'altezza di un metro, ciò è possibile con una leva in cui il rapporto dei bracci sia minore di $\frac{1}{75}$ e di disporre di un elastico così lungo che sia capace di accumulare l'energia di 75 Kg più quella necessaria alla iniziale deformazione per produrre l'azione equilibrante, che viene restituita se il peso, una volta sollevato, non è più sostenuto dall'elastico. Ma tutti i corpi sono elastici, sia quello che sosteneva il peso in basso, sia quello

quello che sosteneva il peso in basso, sia quello che sosterrà il peso in alto. Supponiamo che gli attacchi al peso siano puntiformi (carico concentrato) l'energia elastica accumulata per il sostegno $\frac{Ph}{2}$ ove h è lo spostamento del punto di sostegno (deformazione elastica)

Se la strutturo è astiforme sappiamo che:

$$h = \Delta l = \frac{Nl}{EA} = \boxed{h = \frac{P}{EA/l}}$$

; poste le caratteristiche dell'asta: $\left(\frac{EA}{l}\right) = 2W$ = rigidezza a sforzo normale

$$\boxed{h = \frac{P}{2W}}$$

quindi l'energia elastica accumulata da P:

Lavoro elastico = $\boxed{\mathcal{L} = \frac{Ph}{2} = \frac{P^2}{2W}}$

Noi cerchiamo di "vedere" come "nasce" in un corpo l'azione equilibratrice.

Un corpo, sotto l'azione di un peso, si deforma finché la deformazione ha accumulato una energia interna potenziale capace di equilibrare il peso stesso. $\mathcal{L} = \frac{P^2 l}{2EA}$;

la variazione infinitesima: $d\Delta l = \left(\frac{l}{EA}\right) dP$; $d\mathcal{L} = \left(\frac{l}{EA}\right) P\,dP$

ove integrando ritroviamo: $\mathcal{L} = \frac{P^2 l}{2EA}$ da cui:

$$P = \sqrt{\mathcal{L}\frac{2EA}{l}} = \sqrt{2\mathcal{L}W}$$

Quindi l'azione disponibile è la radice quadrata di 2 volte il prodotto fra l'energia elastica potenziale e la rigidezza a sforzo normale, ciò vale per le strutture astiformi trascurando le contrazioni trasversali.

Per i fluidi: $pv = RT$ (Boyle) ove la pressione p moltiplicata per un'area dà una azione.

Le Forze

Cerchiamo di fissare i capisaldi della discussione su ciò che comunemente viene chiamata forza. ("Azione sui vincoli di energia potenziale elastica")

1) La forza F applicata ad un corpo lo trasla sulla sua retta di azione, e lo ruota se la sua retta di azione non passa per il baricentro del corpo.

2) Il moto implica un rapporto spazio/tempo

$$\frac{F}{m} = a = \text{accelerazione} \left(\frac{\text{lunghezza}}{(\text{tempo})} \cdot \frac{1}{\text{tempo}} \right)$$

ove m è la massa del corpo.

ma:

$$\boxed{F = \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}}$$

Nel punto 1) abbiamo applicato ad un corpo un qualcosa chiamato "forza", senza sapere cos'è.

La domanda è:

"Cosa avete applicato?"

– Un qualcosa che fa muovere il corpo.

– un qualcosa che fa muovere il corpo.

Pensiamo di aver legato il corpo con una fune, all'altro estremo della fune, vi sarà un qualcosa che tira la fune stessa.

Questo qualcosa può essere un uomo, un cavallo, una macchina; può essere il vento su una vela, può essere l'azione attrattiva

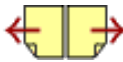
(o repulsiva) di entità capaci di tali azioni.
Da tutto ciò emerge che "le forze" in se non esistono, esistono invece elementi capaci di compiere azioni, molto impropriamente chiamate forze.

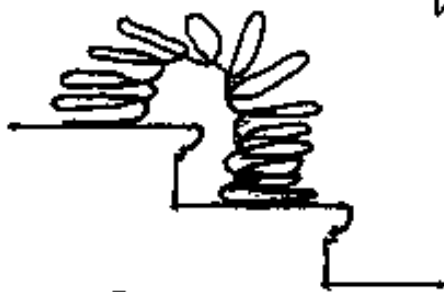
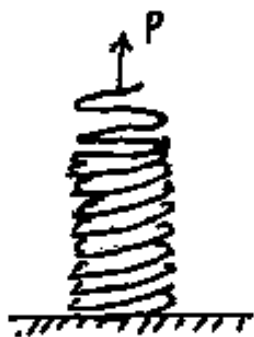
Sono chiamate forze, sia quelle azioni che provocano il movimento di un corpo, sia quelle azioni che impediscono il movimento di un corpo.

Si pensi al tiro alla fune, che resta ferma se le azioni delle due parti concorrenti si equivalgono.

Ma la fune (poco o molto) si è deformata. non solo, ma l'azione, per trasmettersi attraverso un corpo elastico, impiega un certo tempo.

Un corpo di massa "m" in moto, con velocità

Un corpo di massa "m", in moto, con velocità "V" dispone dell'energia cinetica $E_c = \frac{1}{2} m V^2$, e, per la legge d'inerzia, mantiene il suo stato di quiete o di moto, se non intervengono azioni dall'esterno. (l'attrito con l'aria è già una azione dall'esterno, altra azione la gravità)

La trasmissione delle azioni dette forze.

Consideriamo quelle molle elicoidali, con rigidezza molto bassa, e sono un gioco per bambini, perché messe le spire estreme su due gradini consecutivi, lasciata la molla discende tutta la scala, gradino per gradino.

Ma il fatto più interessante è porre, tale molla, in verticale appoggiata su un piano, se cerchiamo di sollevarla prendendo la spira più alta notiamo che finché la nostra azione non é pari al peso della molla, solo poche spire si muovono quelle che poggiano sul piano restano inalterate .... Ma allora, (in questo caso) l'azione di sollevamento interessa solo le spire che col proprio peso bilanciano l'azione.

P

col proprio peso bilanciano l'azione.

Attenzione però a non lasciarsi ingannare da deduzioni troppo semplicistiche.

L'azione esterna P si attenua scendendo lungo la molla; noteremo che anche i passi fra le spire sono più deformati quelli vicino a P.

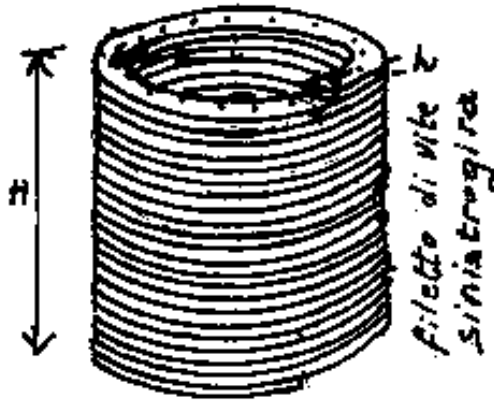
Se consideriamo la molla con le spire estre=
me poggiate sui due gradini consecutivi,
notiamo che per portare la spira superiore
ribaltata allo stesso livello di quella inferio=
re (già appoggiata), prima solleviamo la spira su=
periore ruotandola intorno ad un ideale asse
orizzontale, quando l'angolo di rotazione
ha raggiunto 180° = π rad., cioè si è ribaltata,
esistono spire intermedie ruotate di an=
goli maggiori di zero e minori di 180°, queste
spire elasticamente sono richiamate da en=
trambi le parti di molla. Ma, se nel muove=
re la spira superiore, abbiamo attribuito un
certo quoto di energia cinetica, queste spire
intermedie si muoveranno nel verso di mo=
to che gli abbiamo trasmesso, richiamando
elasticamente altre spire e loro adagiando=
si sulla seconda parte di molla. Se la

si sulla seconda parte di molla. Se la seconda parte di molla è sul gradino inferiore, interviene anche il peso delle spire, il moto si accelera tanto che le ultime spire della prima parte, per elasticità sa= rebbero richiamate a ribaltare sulla seconda

parte di molla, ma l'energia cinetica di cui dispongono, le fá continuare la rotazione fino a 360° e fa anche inclinare la molla nel verso del moto. Quando le ultime spire hanno subito il doppio ribaltamento si trovano sopra un gradino ancora più basso, e, per gravitá vanno su di esso, richiamando le spire adiacenti, ed il moto continua fino al fondo scala, e tal volta fanno ancora un passo o due sul pavimento piano di fondo scala, per esaurire in attriti l'energia cinetica accumulata.

Abbiamo scelto questo "gioco", perché ci sembra che le azioni energetiche (forze) dovute all'energia cinetica, all'energia elastica, all'energia gravitazionale, rendano l'idea, in modo abbastanza si-

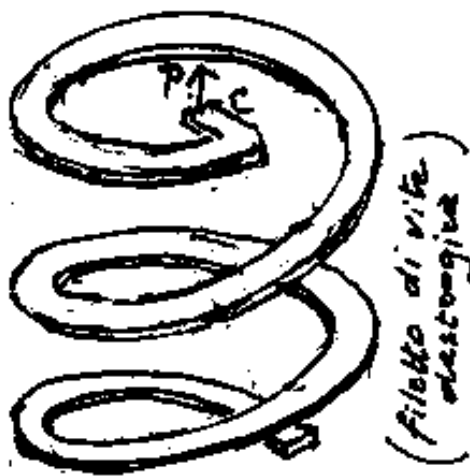
tendano l'idea, in modo abbastanza significativo, di cosa intendiamo per *forze*.
Nel fare calcoli pratici sulle molle elicoidali, è bene ricordare che le eliche possono essere:
destrogire = orarie = sinistrorse. oppure: sinistrogire = antiorarie = destrorse.

Consideriamo una molla elicoidale cilindrica, di sezione rettangolare: "b","h", e raggio "r" medio,

"n" è il numero delle spire,

$n \cdot h = H$ è l'altezza del cilindro con spire a contatto.

Se γ è il peso specifico,

$2r\pi bh\gamma \cong$ peso di una spira.

(per h piccolo). Se la spira più alta ha l'estremo collegato con l'asse del cilindro, sollevando

con intensità P in C, si ha un momento torcente nella spira pari a $P \cdot r = M_t$, l'azione di P, da cosa è equilibrata?

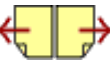
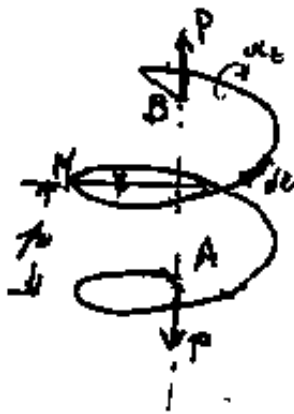
Per il calcolo delle eliche vedi:

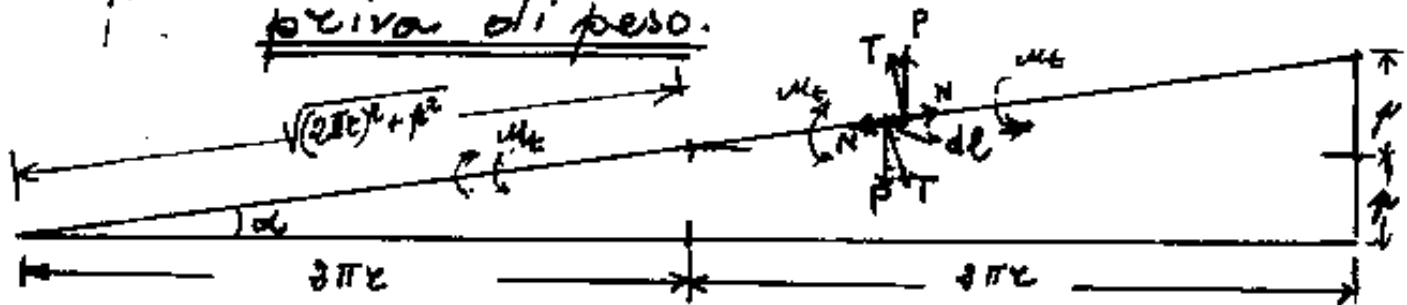
"O. Belluzzi - Scienza delle Costruzioni - Vol II pag 535 e seg."

che riporta anche le formule per le travi elicoidali pubblicate da O. Zanaboni sulla rivista il "Cemento

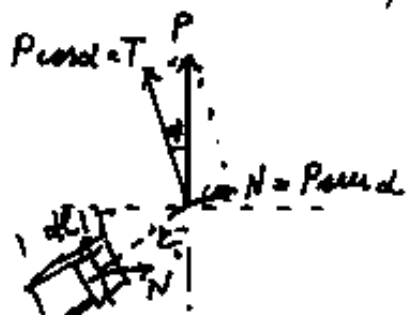
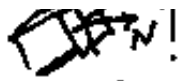
pubblicate da O. Zanaboni sulla rivista "il Cemento Armato" 1939 - n° 2.

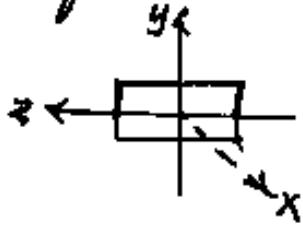
Noi cercheremo di chiarirci le idee con semplici ragionamenti.

Sappiamo che sviluppando il cilindro su cui giace l'elica si ha un triangolo rettangolo, l'altezza è il n° dei passi, la base il n° delle circonferenze e l'ipotenusa la lunghezza della curva elicoidale. (avvolgete un triangolo rettangolo)

L'azione di P è un taglio per sezioni verti=
cali, se l è la distanza dell'elementino dl
dall'estremo, su tale elementino agirà l'azione
verticale di P diminuita del peso delle spire per
una lunghezza "l", ma diminuita anche dalla
azione elastica di richiamo.

<u>Sviluppiamo in piano le due spire in figura ove l'elica è sollecitata solo agli estremi ed è considerata priva di peso.</u>

$\sqrt{(2\pi r)^2+p^2}$ ... $2\pi r$ ... $2\pi r$

$T = P\cos\alpha$; $N = +P\operatorname{sen}\alpha$; $M_t = -Pr\cos\alpha$; (svitamento vite destrogira)

ove "α" è la pendenza degli elementi "dl" dell'elica.

$P\operatorname{sen}\alpha = T$ ... $N = P\operatorname{sen}\alpha$

Su un piano verticale passan=
te per la retta di P, (asse del
cilindro dell'elica) scomponia=

N! ... clinato dell'elica) scomponia=
mo P secondo le direzioni variate di (α) e (90° − α)
la normale a tale piano incontra il centro
faccia delle sezioni normali all'elica, cioè la sezio=
ne ove si verificano T ed N paralleli a quelli otte=
nuti dalla scomposizione di P, e notiamo che
$T \cdot r = M_t$, provoca il momento torcente nella

sezione, mentre $N \cdot r$ provoca un momento flettente ruotante sulla retta di T.

Se con x, y, z; indichiamo gli assi della sezione normale dell'elica (variabili da sezione a sezione) ove "x" è la normale alla sezione, cioè retta di N; "y" è la retta di T; e "z" normale ad xy coincide col raggio di quella sezione. Perciò avremo:

$\mathcal{M}_x = rP\cos\alpha$ = momento torcente $= (\mathcal{M}_0)$

$\mathcal{M}_y = rP\operatorname{sen}\alpha$ = momento flettente (per molle tese tende le fibre interne)

$\mathcal{M}_z = 0$

Il fatto che allungando la molla per effetto di P si veda ridurre il raggio in contrasto con $\mathcal{M}_y$, e che apparirebbe inflettere l'elica tendendo le fibre interne; e la freccia verso l'alto che farebbe ritenere tese le fibre inferiori e quindi non nullo $\mathcal{M}_z$.

non nullo M_t.

In effetti lo sforzo normale che, per molle tese, tende ad allungarne lo sviluppo, ha Δl così piccoli che sono trascurabili rispetto alle deformazioni dovute ai momenti, pure trascurabili sono le deformazioni dovute al taglio.

Tenuto conto che M_x (=M_t) ed M_y sono costanti

in tutte le sezioni dell'elica, (che abbiamo con=
siderato priva di peso e di altre azioni escluso P)
avremo che ogni elemento "dl" di elica è soggetto
alle stesse sollecitazioni sulle sezioni estreme.
Ogni elemento "dl" inclinato, (se la molla elicoi=
dale destrogira è tesa) è soggetto, sulle sezioni
che lo delimitano, ad un momento torcente
tale che gira come lo svitamento della vite
destrogira; perciò l'elemento "dl", adiacente
la sezione più alta, tenderà ad alzarsi; e
l'elemento dl, adiacente la sezione più bas=
so, tenderà ad abbassarsi. Abbiamo cercato
di riprodurre in figura il ra=
gionamento, ove i versi di M_t sono
quelli che gli elementi adiacenti trasmettono a
dl. Cioè l'allungamento del cilindro eli=
coidale è dovuto alla torsione, no alla
la flessione (N e T trascurabili). Per N tra=

di flessione [illegible]

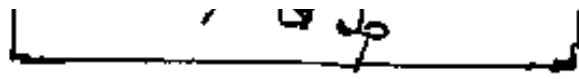
scurabile facendo una trazione tale, da portare l'elica cilindrica alla stessa lunghezza "l" dell'elica, si ottiene un solido alto l, che per effetto di cM_t, le sezioni terminali hanno ruotato l'una rispetto

all'altro, di tanti "giri", quante erano le spire dell'elica.

Ciò vuol dire che, tenendo fissa una estremità dell'elica, e sollevando, (con P), l'altra metà, si ha un immagazzinamento dell'energia elastica; se pensiamo di aver applicato "P" gradualmente (per evitare energia cinetica) il lavoro $L_e = \frac{Ph}{2}$, con "h" = spostamento degli estremi dell'elica.

Sappiamo che la lunghezza di una spira di raggio r e passo p, è data: $l_s = \sqrt{(2\pi r)^2 + p^2}$.

Se q è il fattore torsione (dipendente solo dalla forma della sezione) l'angolo di rotazione relativa fra due sezioni, distanti l in un solido prismatico è dato da:

$$\boxed{\theta = q\,\frac{M_t\, l}{G\, J_p}}$$

Il lavoro elastico $L_e = q\frac{M_t^2\, l}{2 G J_p}$.

uguagliando i lavori:

$$q\frac{(P t)^2\, l}{2 G J_p} = \frac{P h}{2}$$

cioè: $\frac{P}{h} = \frac{G J_p}{q l t^2}$ = costante della molla.

Energia - Lavoro - "forze"

Il "Lavoro" è quell'azione che trasforma un quoto di energia potenziale in un altro quoto di energia potenziale.

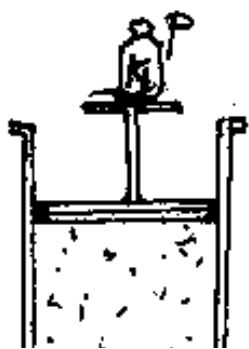
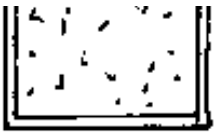
L'energia non si crea, né si distrugge, ma può trasformarsi in forme diverse, per esempio: termica, meccanica, gravitazionale, elastica, elettrica, atomica, chimica, cinetica, ecc.

Per sollevare un peso "P" all'altezza "h" è stato speso il lavoro: $\mathcal{L} = Ph$ ove Ph è anche l'energia potenziale gravitazionale ove $F = mg = P$ è l'azione che si deve esercitare per conservare l'energia potenziale, ed evitare che il peso ricada.

Ma in ogni punto dell'altezza "h" è stata necessaria l'azione statica $F = P$, però è .

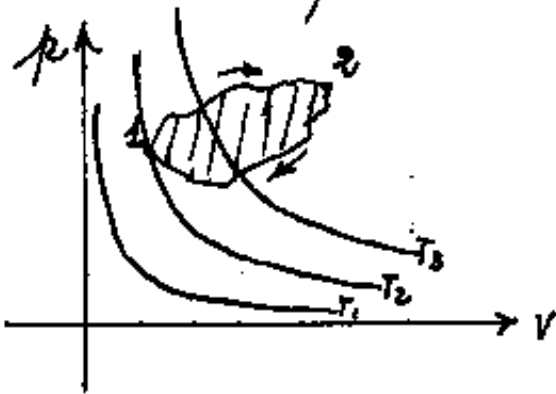
occorso qualcosa di più cioè lo "sposta=
mento" cioè il lavoro che avrà attinto
ad altra forma energetica, l'incremento
di energia potenziale gravitazionale: "Ph".
Può essere un motore elettrico, può essere un motore
termico, può essere lavoro umano, in ogni caso una parte

dell'energia spesa, si disperde in calore, e solo una parte compie il lavoro "Ph"; cioè ogni motore ha un rendimento minore del 100 %.
Partendo da unità convenzionali si sono confrontate varie unità energetiche:
Joule = Watt·sec ; Cal = Kilocaloria ; Kg.m ; KWh ;
R = costante dei gas, riferita alla grammomolecola.

	Joule	Cal	Kgm.	KWh	R
Joule	1	$2,38 \cdot 10^{-4}$	0,10203	$2,7778 \cdot 10^{-7}$	$1,2029 \cdot 10^{-8}$
Cal	4186	1	427	$1,162 \cdot 10^{-3}$	503,5
Kgm.	9,801	$2,342 \cdot 10^{-3}$	1	$2,722 \cdot 10^{-}$[illegible]	1,179
KWh	3600	860	$3,67 \cdot 10^{5}$	1	$4,33 \cdot 10^{5}$
R	8,309	$1,986 \cdot 10^{-3}$	$8,48 \cdot 10^{-1}$	$2,309 \cdot 10^{-6}$	1

consideriamo un fluido entro un cilindro chiuso da un pistone che sostiene un peso: P.

che sostiene un peso P.

Se A è l'area del pistone $P/A = p$ = pressione del fluido, v = volume (dell'unità di massa) vale la legge di Boyle : $pV = RT$ con T = temperatura assoluta.

Somministrando calore in genere si provoca

una dilatazione del fluido che farà sollevare P di "dh"; $A(dh) = (dV)$ è l'incremento di volume, $P(dh) = pA(dh) = p(dV)$ il lavoro compiuto. Però se riportiamo, su due assi cartesiani i valori di p. e di v, ove (essendo costante R) pv, sono isoterme che insistono su iperboli equilatere.

Sono isobare, le trasformazioni a p=cost; isocore a V=cost.; adiabatiche o isoentropiche quando non v'è scambio di calore (energia termica) con l'esterno. isodinamica quando l'energia interna U rimane costante, cioè il calore Q dato dall'esterno equivale al lavoro L compiuto all'esterno, se A è il rapporto: $Q = AL$.

Il fluido può passare dalla situazione nel punto 1 alla situazione nel punto 2 in

punto 1 alla situazione nel punto 2 in infiniti modi diversi ed in altrettanti diversi da 2 può tornare in 1. L'area della zona delimitata da $\vec{12}$ e $\vec{21}$ è il lavoro compiuto cioè essendo tornato in 1 non può aver restituito tutto Q cioè il differenziale calore non è un differenziale esatto.

Abbiamo scelto l'esempio di un fluido per cercare di determinare l'energia interna che, in questo caso è indicata con U e dipende solo dalla temperatura.
Ma a quella temperatura, la pressione del fluido, per il volume è ancora energia che moltiplicata per l'equivalente termico A diventa espresso in unitá di calore.
Si ha così il calore totale o entalpia $= I$

con : $\boxed{I = U + ApV}$

Consideriamo gli scambi di energia termica (calorie) impropriamente chiamate quantità di calore (Q).

$$\boxed{dQ = dI - AVdp}$$

$$\boxed{dQ = dU + Apdv}$$

differenziando I si ha:

differenziando I si ha:

$$dI = dU + A\,d(pv)$$

$$dI = dU + A(p\,dv + v\,dp)$$

Avremo: per le <u>isobare</u>: $Q = I_2 - I_1$; $(dp = 0)$

" " <u>isocore</u>: $dQ = dU$; $(dv = 0)$

" " <u>adiabatiche</u>: $A\mathcal{L} = (U_1 - U_2)$; (lavoro esterno $= A\cdot\mathcal{L}$)

" " <u>isodinamiche</u>: $Q = A\cdot\mathcal{L}$. ; (I° principio)

Scale termometriche

Lo stato termico di un corpo è determinato dalla sua temperatura, ed un corpo più caldo cede energia termica (calore) ad un corpo più freddo e non inversamente (secondo principio della termodinamica, o principio dell'impossibilità). (Il primo principio detto anche dell'equivalenza determina il rapporto fra lavoro meccanico ed energia termica (Q)= quantità di calore; nonché la costituzione dell'energia interna.

Per quanto concerne la "misura" della temperatura, anziché scegliere una unità di confronto, (come per le altre grandezze fisiche), fu scelta: "una scala delle temperature". Cercando di fissare due stati termici inequivocabili e dividendo quel salto termico in un certo numero di parti.

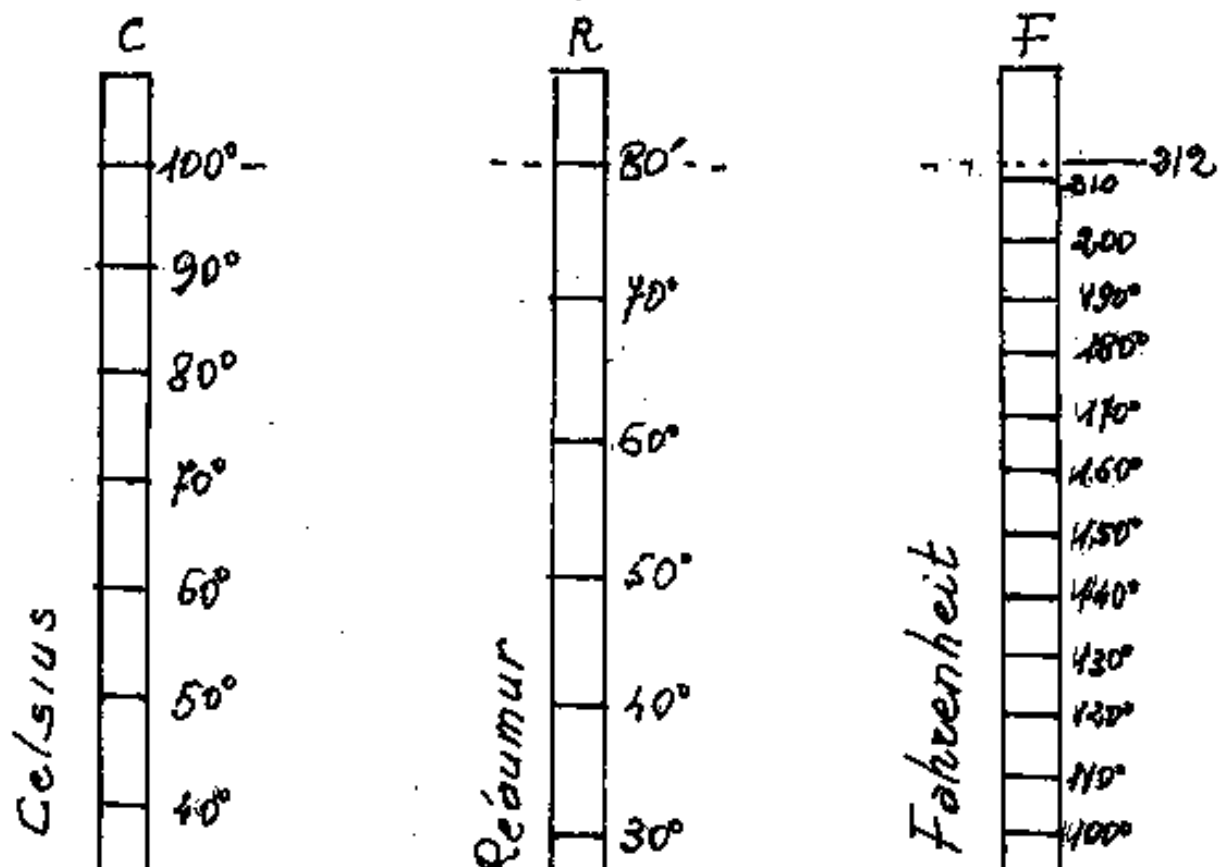
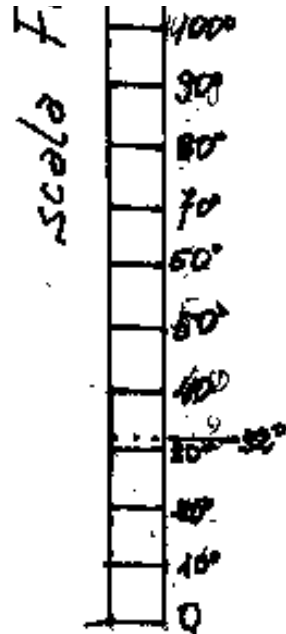
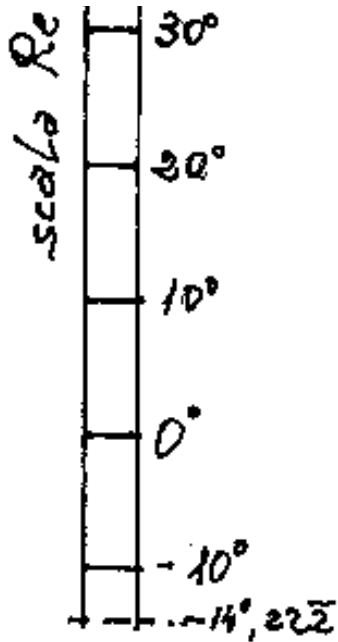
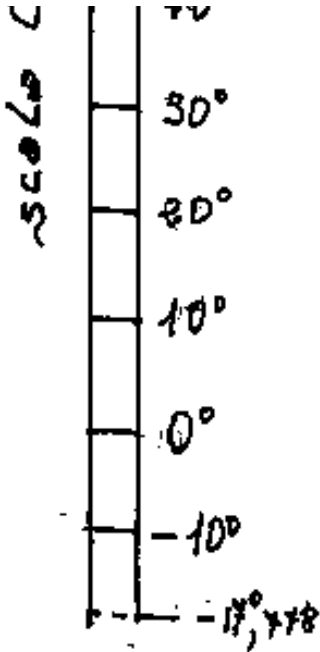
salto termico in un certo numero di parti.
Nacquero così la scala "Celsius" ove lo zero
è il punto termico del ghiaccio fondente, e l'ebol=
lizione dell'acqua assunto come cento gradi
con intervallo diviso in cento parti.
La scala "Réaumur" che ha lo zero coinci=
dente con la "celsius" ma l'ebollizione è

fissata ad 80° gradi e l'intervallo diviso in 80 parti.
La scala "Fahrenheit" pone invece 32° la temperatura del ghiaccio fondente, e 212 la temperatura di ebollizione del-l'acqua: l'intervallo (212° − 32°) = 180° lo divide in 180 parti. $\left(\frac{C}{100} = \frac{R}{80} = \frac{F-32}{180}\right)$

Riportiamo il confronto delle tre scale.

C — Celsius: 100°, 90°, 80°, 70°, 60°, 50°, 40°

R — Réaumur: 80°, 70°, 60°, 50°, 40°, 30°

F — Fahrenheit: 212, 210, 200, 190°, 180°, 170°, 160°, 150°, 140°, 130°, 120°, 110°, 100°

Però i cosiddetti punti fissi della temperatura in effetti debbono essere precisati con una molteplicità di altre condizioni, per esempio l'acqua in montagna bolle prima che al mare. Cioè la pressione influenza il punto di ebollizione. Intendendo per ebollizione il passaggio dallo stato liquido allo stato gassoso, si ha "evaporazione" per salto termico con la temperatura esterna, inoltre l'acqua distillata e la stessa forma del recipiente possono influenzare. Per la pressione è convenuto che sia di una atmosfera fisica cioè: 1,0333 Kg/cm^2.

Poiché sperimentalmente è accertato che un solido per passare allo stato liquido, mantiene costante la temperatura assorbendo una quantità di energia termica (calore di liquefazione); inversamente lo cede per

liquefazione); inversamente lo cede per solidificarsi. Analogamente un liquido per passare allo stato gassoso assorbe a temperatura costante il calore di vaporizzazione. Da ciò la scelta per le scale termometriche; da ciò la caloria,

come misura della quantità di calore, (energia termica) per far passare la temperatura di un Kg d'acqua distillata da 14°,5 a 15°,5 gradi Celsius. (cioè l'aumento di un grado Celsius) questa è detta più precisamente Kilocaloria: (Kcal = Cal); chiamano caloria una quantità di energia termica mille volte più piccola, (in disuso). detta piccola caloria. (cal)

Il secondo principio della termodinamica nella forma del postulato di Kelvin dice: "È impossibile che l'unico risultato di una trasformazione termica sia quello di convertire in lavoro il calore sottratto ad una unica sorgente".

Il che vuol dire che il calore prodotto da una sorgente, solo in parte, si trasforma in lavoro, la restante parte

trasforma in lavoro, la restante parte sarà assorbita da un'altra sorgente. (Occorre un salto termico, come occorre una differenza di potenziale in campo elettrico)

Questo implica un rendimento:

$$\varepsilon = \frac{AL}{Q}$$

Il termometro a gas

Torniamo al nostro cilindro chiuso da un pistone che sostiene il peso P, ove il fluido sia un gas (perfetto); fermo restando P e la pressione esterna, il gas ha trasformazioni isobare, se "V" è il volume del gas alla temperatura t°c. e "V_0" il volume a 0°C, se il volume specifico è sufficientemente grande (gas perfetto) V/V_0 è praticamente funzione solo della temperatura, indipendentemente dalla natura e massa del gas. Con ciò abbiamo definito un apparecchio che opportunamente tarato sui volumi determina la temperatura (V_0 = cost.)

$$\frac{d(V/V_0)}{dt} = \alpha \qquad \text{da cui: } (\alpha = \text{cost}) \quad \frac{V}{V_0} = \text{cost} + \alpha t$$

ma quando $V = V_0$ la cost. = 1 perciò:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad \text{(Legge di Gay Lussac)}$$

se consideriamo i volumi V_1 e V_2 occupati (a p = cost)

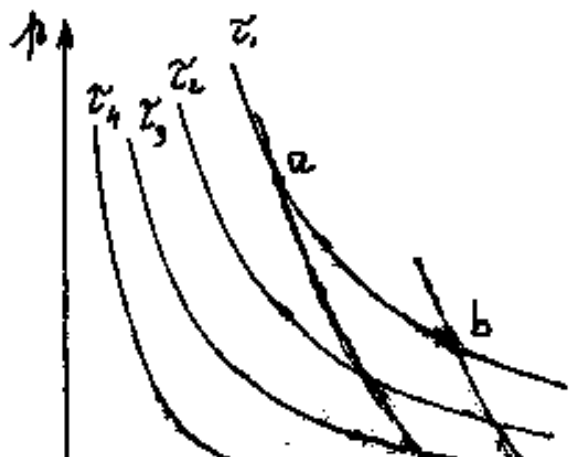
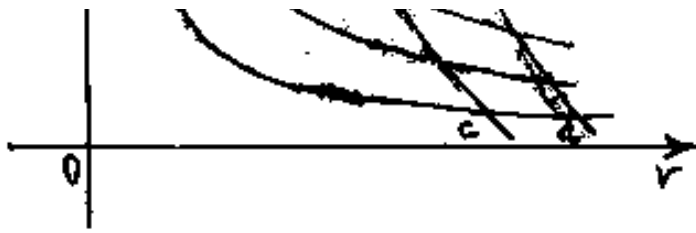
[illegible] i volumi V_1 e V_2 occupati (a p cost)
alle temperature t_1 e t_2 : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1} = \frac{1/\alpha + t_2}{1/\alpha + t_1}$
ma V rappresentava una temperatura, nel rapporto si è eliminato V_0 potremo: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$
cioè: $\boxed{T = \frac{1}{\alpha} + t.}$, ma t variava fra 0° e 100° C.
Sperimentalmente $\frac{1}{\alpha} \cong 273$ perciò i punti fissi della temperatura Celsius diventano 273 e 373 in questa nuova temperatura detta <u>assoluta</u>.

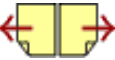
Se Q_1 è il calore fornito e Q_2 il calore ceduto: $Q_1 - Q_2 = A\mathcal{L}$, perciò:

$$\varepsilon = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = (\text{rendimento})$$

Se le temperature delle sorgenti con le quali viene scambiato il calore, hanno temperature τ_1 e τ_2, e $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$; $\frac{Q_1}{\tau_1} = \frac{Q_2}{\tau_2}$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1}}$$

Il ciclo di Carnot.

Dati quattro punti a, b, c, d; ove:
$\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$; sono isoterme
$\widehat{ac}$, $\widehat{bd}$; adiabatiche
Il percorso chiuso,

fra due isoterme e due adiabatiche è detto: "Ciclo di Carnot".

Se il fluido agisce fra le temperature τ_1 e τ_2 e scambia calore lungo le isoterme, l'area delimitata dal ciclo è ancora il lavoro esterno, ed il rendimento $\varepsilon = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1}$.

Scala termodinamica della temperatura

Detta anche scala Kelvin dovuta a W. Thomson, (Lord Kelvin) (Si indicherà con la T maiuscola)

Consideriamo, (come si è già accennato) che le isoterme del ciclo di Carnot siano tali

$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{K\tau_1'}{K\tau_2'}$ $\Rightarrow$ $\tau_1 = K\tau_1'$ indefinita dal solo rapporto K; se poniamo la differenza 100 fra la τ del ghiaccio fondente e la τ dell'ebollizione (alla pressione di una atmosfera) la nuda scala risulta determinata.

Consideriamo che gli intervalli delle isoterme siano:

$$\tau_1 - \tau_2 = \tau_2 - \tau_3 = \tau_3 - \tau_4 = \cdots\cdots$$

Consideriamo una serie di macchine termiche funzionanti secondo i cicli di Carnot fra due isoterme consecutive, cioè la I macchina

... isoterme consecutive, cioè la I macchina riceve il calore Q_1 alla temperatura τ_1 e cede alla seconda macchina il calore Q_2 alla temperatura τ_2, la II macchina che funziona fra τ_2 e τ_3 preso Q_2 cede Q_3 alla terza macchina alla temperatura τ_3 .... e così via.

Ma dalla condizione:

$$\frac{Q_1}{\tau_1} = \frac{Q_2}{\tau_2} = \frac{Q_3}{\tau_3} = \dots$$

si ha che i lavori compiuti dai cicli delle singole macchine, sono uguali

$$Q_1 \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1} = Q_2 \frac{\tau_2 - \tau_3}{\tau_2} = Q_3 \frac{\tau_3 - \tau_4}{\tau_3} = \dots$$

e se il ciclo di una macchina fosse fra le temperature τ_1 e τ_0

$$AL = Q_1 - Q_0 = Q_1 \frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_1}$$

Se fosse $\tau_0 = 0$; $AL = Q_1$, contro il secondo principio nel postulato di Lord Kelvin che si avrebbe come unico risultato della trasformazione la produzione di Lavoro sottraendo calore ad una unica sorgente.

Ciò implica che nella scala termodinamica esiste un τ_0 = (uno zero assoluto) che non si può raggiungere e tantomeno oltrepassare.

La scala termodinamica e la scala

La scala termodinamica e la scala
assoluta del termometro a gas coincidono
avendo in comune l'intervallo fra 0° e 100° Celsius
diviso in cento parti ed il limite inferiore
a -273 °C per lo zero assoluto. Ove il gas
deve essere un "ideale" gas perfetto.

Campi magnetici

Consideriamo una comune calamita, e riflettiamo un momento domandandoci: "Cos'è che passa attraverso l'aria, tanto da generare una azione di sollevamento o attrazione di pezzetti di ferro?"

Se interponiamo un foglio di carta (anche impermeabile) l'azione passa ugualmente. Anche se interponiamo una lastra di plastica l'azione passa ugualmente, quindi l'azione magnetica passa attraverso qualsiasi materiale cosiddetto isolante (stoffa ed altro).

Per i metalli si distinguono in due tipi: quelli che vengono attratti, (e sono detti ferromagnetici) come il ferro, la ghisa, l'acciaio, il nichel .. ecc. L'altro tipo di metalli (detti non ferro magnetici) che non vengono

attratti: L'azione magnetica passa attraverso tutti. Se interponiamo una lastra di rame, o di alluminio, o di qualsiasi metallo non ferro-magnetico, l'azione della calamita passa. Se interponiamo metalli feriomagnetici essi stessi si magnetizzano e agiscono come nuove calamite, facendo una catena.

Se prendiamo due calamite astiformi (come l'ago delle bussole) e le poniamo su una lastra di sughero a galleggiare sull'acqua notiamo che un loro estremo andrà verso il nord terrestre, segnamo con una $N_{(+)}$ l'estremo che si dirigeva verso nord (e con una $S_{(-)}$ l'altro estremo che si dirigeva verso Sud.)

Vogliamo ora vedere l'azione mutua fra le due calamite. Il N di una attrae molto vivacemente il S dell'altra, (poli opposti si attraggono), mentre i N fra loro, ed i S fra loro si respingono. (poli omonimi si respingono).

Ma allora l'azione non è soltanto attrattiva è anche repulsiva.

Le azioni attrattive - repulsive sono dette: <u>forze pondero-motrici</u> esse si verificano:

<u>fra masse</u> (si conoscono solo le attrattive);

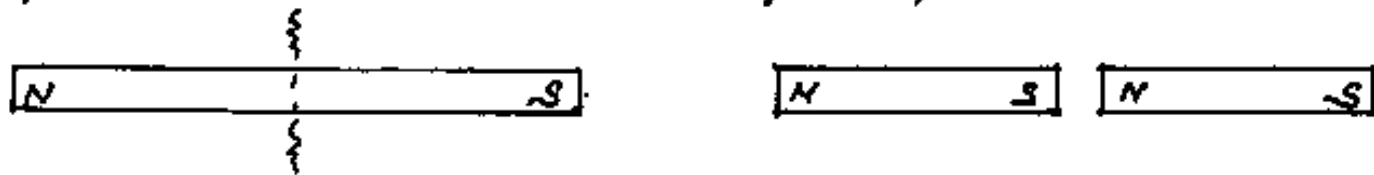
fra masse (si conoscono solo le attrattive);

fra cariche elettriche positive e negative;

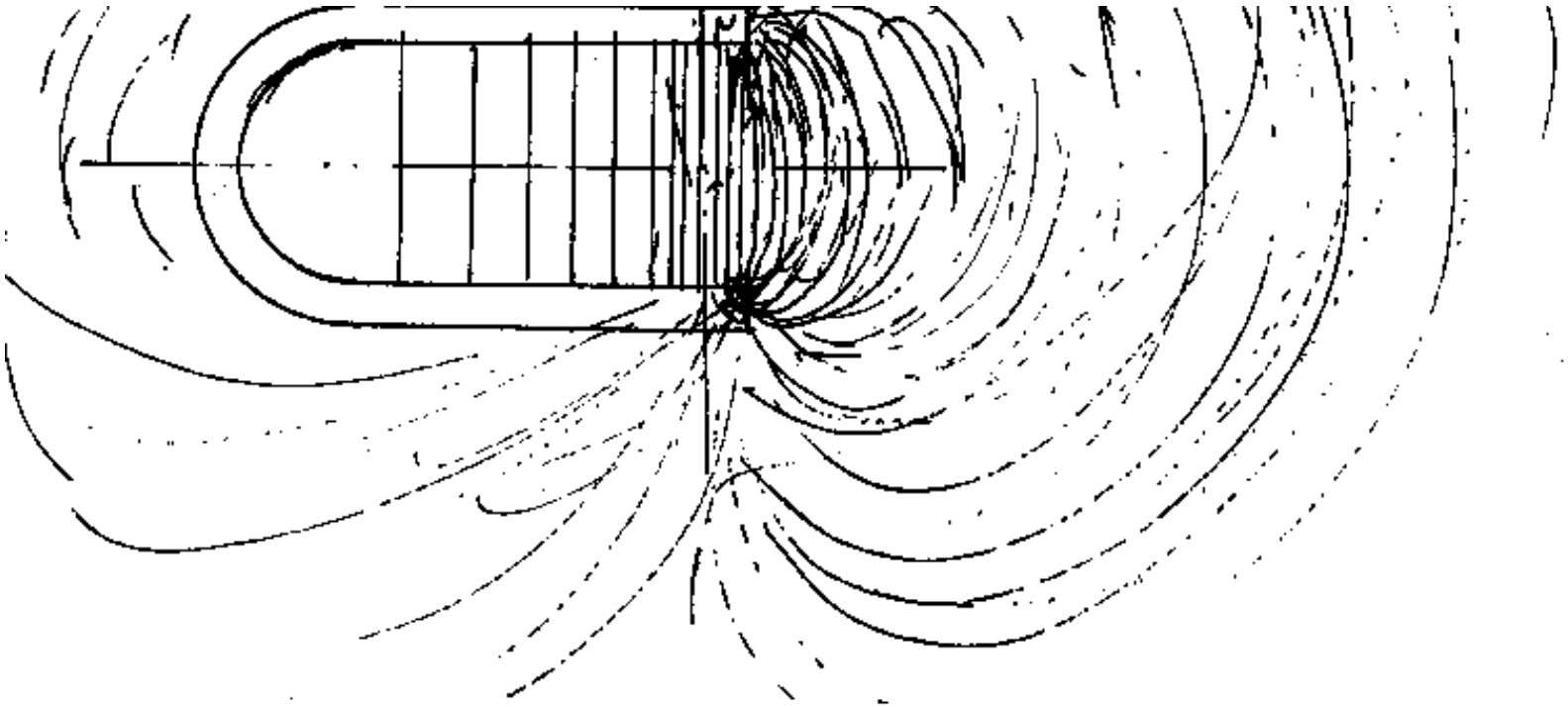
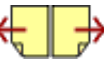
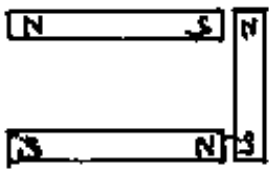
fra poli magnetici.

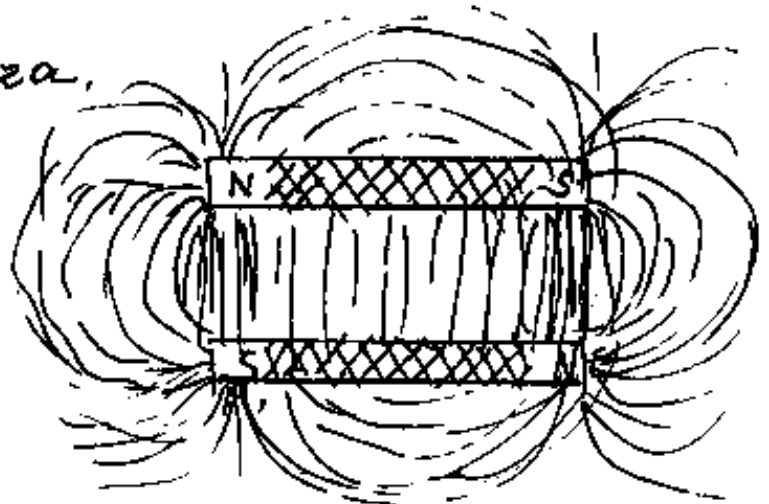
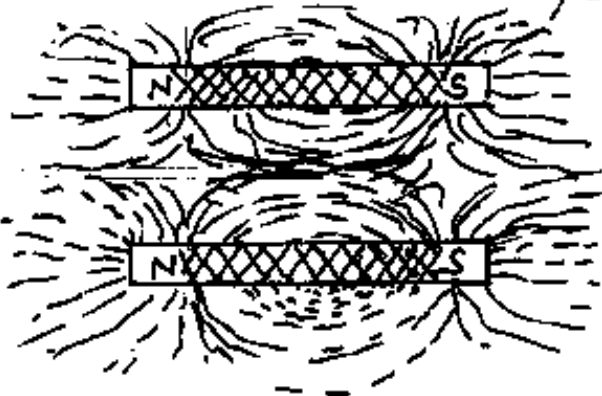
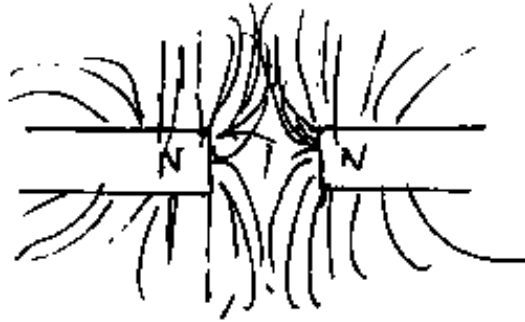
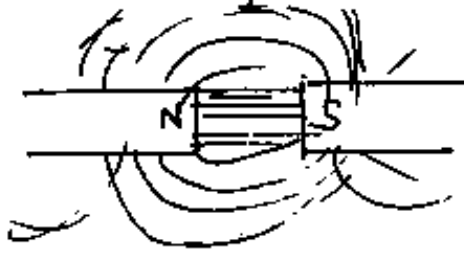
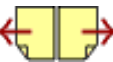
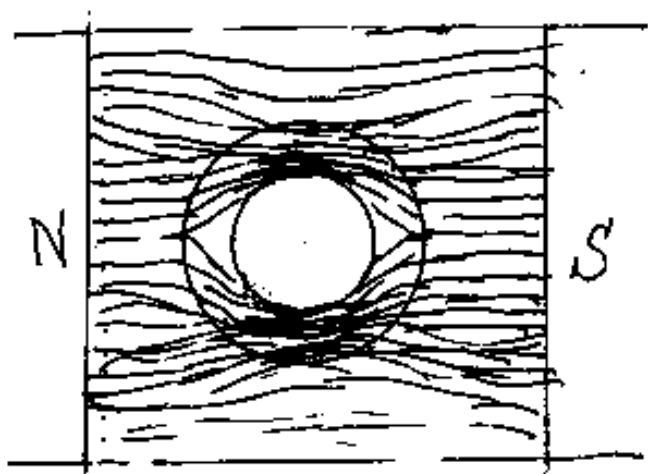
Se cerchiamo di "separare" i poli magnetici (come si separano le cariche elettriche ±)

dividendo in due una calamita astiforme, si ottengono due nuove calamite astiformi (esperienza della calamita tagliata)

N S N S N S

Cioè continuando a dividere fino a livello subatomico avremo dei magnetini elementari N-S detti magnetini di Barkhausen (dal nome del fisico tedesco 1881-1956). Questi magnetini nel ferro (e gli altri ferromagnetici) sarebbero disposti casualmente in tutte le direzioni come si trovavano all'atto della fusione (materiali non magnetizzati), ma strusciando, sempre nello stesso verso, uno stesso polo di una calamita (per esempio su un comune ago da cucire non magnetico) su materiali ferromagnetici, dopo pochi passaggi risulteranno magnetizzati e funzioneranno da calamite

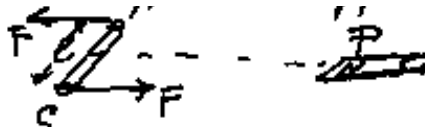
mo da calamite.
Volendo "vedere" questo flusso di azioni attrattive - repulsive emesse da una cala= mita (naturale o artificiale), basta spandere su un cartone della limatura di ferro, e quindi appoggiare il cartone su una calamita,

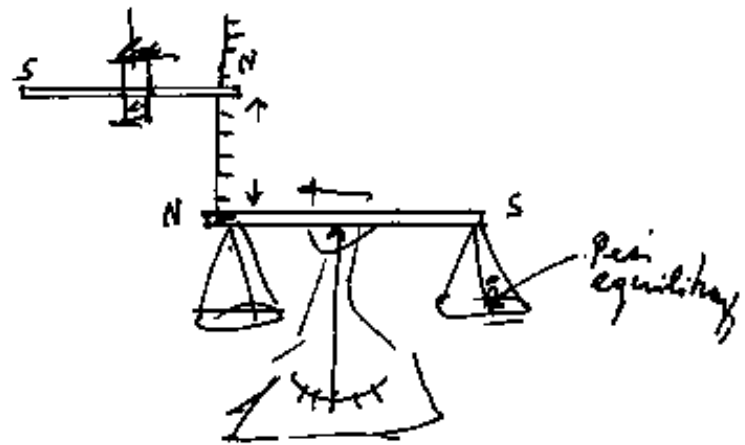
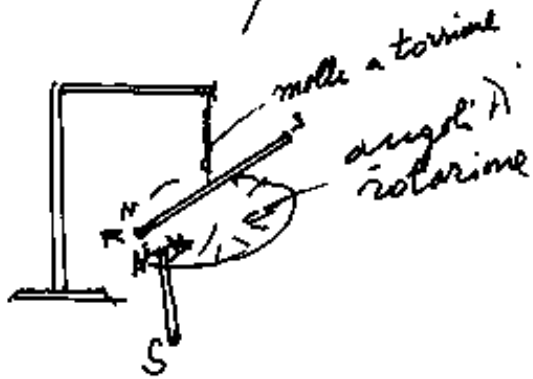
i singoli elementi di limatura diverranno tante micro-calamite astiformi e ciascuna di esse cercherà di unire il proprio N con l'S di un elemento vicino (o il S col N), si formerano così delle lunghe file di elementini NSNSNS.. che sono dette linee di forza del campo magnetico. Saranno più dense ove il campo magnetico è più intenso. (Amper propose di rappresentare l'intensità del campo magnetico con la densità delle linee di forza) L'attrito della limatura di ferro sul piano di cartone, limita le linee di forza, ma se con un lapis, o bro, o bacchettina, diamo dei piccoli colpetti al cartone, la vibrazione fa diminuire l'attrito e le linee di forza saranno molto più nitide.

In figura abbiamo disegnato approssimativamente le linee di forza di un magnete permanente ad U. Un magnete ad U può ottenersi affiancando, con polarità opposte i due magneti astiformi e collegando gli estremi opposti con un terzo magnete astiforme o curvo: i poli opposti a contatto staranno saldamente uniti.

Ma se noi affianchiamo i nostri due magneti astiformi con i poli omonimi affiancati e con la limatura di ferro cerchiamo di visualizzare le linee di forza.

Possiamo notare le azioni attrattive e

Possiamo notare le azioni attrattive e repulsive espresse dall'andamento delle linee di forza:

Se fra i poli N-S affacciati, di una potente calamita (o magnete permanente) introduciamo un pezzo di ferro dolce, le linee di forza che inizialmente rettilinee congiungevano i due poli, deviano, preferendo passare attraverso il ferro dolce anziché attraverso l'aria, anche se il percorso diventa più lungo. Interponendo un anello cilindrico di ferro dolce, si nota che all'interno dell'anello non passa alcuna linea di forza, cioè il ferro dolce opportunamente disposto può fare da schermo ai campi magnetici.

N S

La forza con cui due poli magnetici di intensità m. ed m. si attraggono o si respingono se

sità m_1 ed m_2 si attraggono o si respingono, segue la legge di Coulomb: $F = K\frac{(m_1)(m_2)}{d^2}$, ma dipende anche dal mezzo interposto attraverso il quale fluiscono le linee di forza, perciò detta μ la permeabilità magnetica ed assunto un sistema di misure per cui sia $K = 1$, avremo:

$$F = \frac{1}{\mu}\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Per misurare le forze pondero-motrici il Coulomb, usó la bilancia di torsione, (data la notevole sensibilitá), peró é possibile "pesare" solo forze repulsive, perché l'azione contrastante dei pesi o della molla non é equilibrabile per forze attrattive che finirebbero per unirsi.

molla a torsione
angolo di rotazione
N
S
N
S
N
S
Pesi equilibratori

D'altra parte sappiamo che gli elementi magnetici sono sempre bipolari N-S cioé "dipoli" (due poli) e sappiamo che la intensitá é "m" uguale nei due poli, quindi un polo P disposto affacciato al dipolo provocherá una

F ... S F ... coppia di forze (una attrattiva e una repulsiva) nel dipolo e se il dipolo è lungo l, diremo: "momento magnetico il prodotto: (m.l) ove m è l'intensità di ciascun polo del dipolo.

Si noti che la permeabilità magnetica di una sostanza è data dal rapporto fra l'intensità

del campo magnetico in quella sostanza e l'intensitá del campo magnetico nel cosiddetto vuoto cioè praticamente nell'aria.

L'esempio dell'anello di ferro dolce in cui si infittiscono le linee del campo magnetico ci dice che la permeabilitá magnetica nel ferro è molto maggiore di quella dell'aria.

Se indichiamo con I la intensitá di polarizzazione di un corpo immerso in un campo magnetico di intensitá H avremo:

$$I = x H$$

ove x è la suscettivitá magnetica di volume del corpo di densitá $\delta = \frac{massa}{volume}$

la suscettivitá di massa (o momento magnetico per unitá di massa $\chi = \frac{x}{\delta}$.

abbiamo tre tipi di materiali

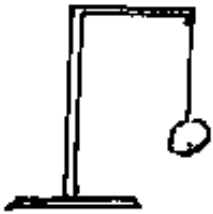
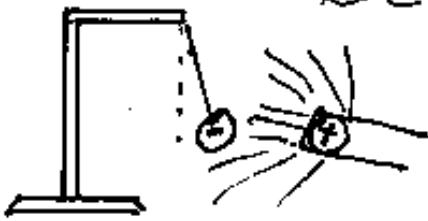
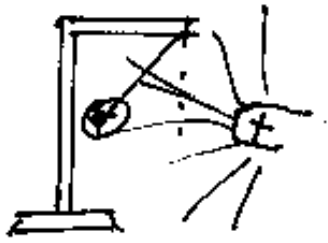
ferromagnetici $x > 0$ molto grande (ferro nichel ecc)

ferromagnetici $\chi > 0$ molto grande (ferro nichel ecc)

paramagnetici $\chi > 0$ molto piccolo (certi sali di ferro)

diamagnetici $\chi < 0$ molto piccolo (bismuto ed altri)

che presentano caratteristiche opposte.

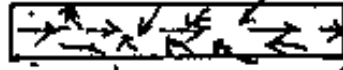
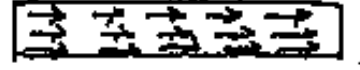
I materiali <u>diamagnetici</u>, per induzione, si magnetizzano dello stesso segno del polo inducente (per esempio il bismuto)
Lasciamo per un attimo il magnetismo per fare un parallelo con l'induzione elettrostatica.

Consideriamo una pallina di materia, sospesa ad un filo isolante e scarica elettricamente.

Se a tale pallina avviciniamo un corpo carico elettricamente (per esempio di cariche positive) <u>per induzione</u> la pallina si carica di segno opposto (nel caso negativo) e verrà attratta verso il polo inducente. Ma se verrà a <u>toccare</u> il

cente. Ma se verrà a toccare il polo inducente, la pallina si caricherà dello stesso segno del polo e sarà respinta dal corpo inducente.

Poiché le polarità delle cariche elettriche sono separabili, notiamo che strofinando due corpi, uno si caricherà positivamente

(quello che nello strofinio ha perduto elettroni periferici.) L'altro si caricherá negativamente perché avrá una eccedenza di elettroni "fregati" (é il caso di dirlo) al primo
I fisici ancora raccontano che strofinando con un panno di lana, una lastra di vetro si ha elettricitá *positiva* o vetrosa, mentre strofinando con un panno di lana una lastra di ambra si ha elettricitá *negativa* o resinosa; ma spesso si dimenticano di dire che nel primo caso la lana asportando elettroni al vetro si é caricata negativamente, mentre nel secondo caso lo straccio di lana risulterá positivo perché ha ceduto all'ambra una parte dei suoi elettroni. (I miliardi di elettroni ceduti od acquisiti non provocano sensibili variazioni di massa dei corpi)

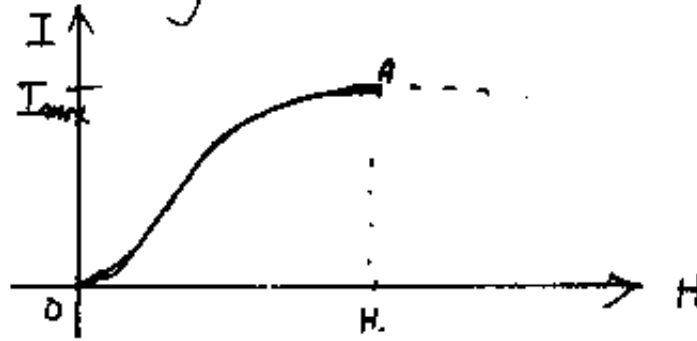
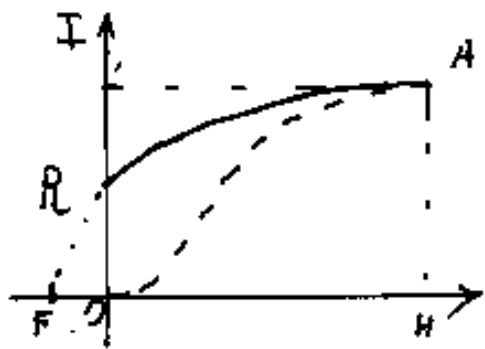
dei corpi)

Tornando al magnetismo ove N e S non sono separabili e, pur attraendosi, finiscono per disporsi ai capi opposti della barra magnetizzata. Si ha che la barra può essere:

smagnetizzata — parzialmente magn. — satura

Sappiamo che un campo magnetico H può essere generato elettricamente e che l'intensità di H è proporzionale alla intensità di corrente, punto per punto, cioè possiamo variare H.

Supponiamo di porre un corpo di suscettività magnetica χ, ma completamente smagnetizzato, cioè sia nulla la sua intensità di magnetizzazione $I = 0$ nel nostro campo magnetico variabile H ed inizialmente sia $H = 0$.

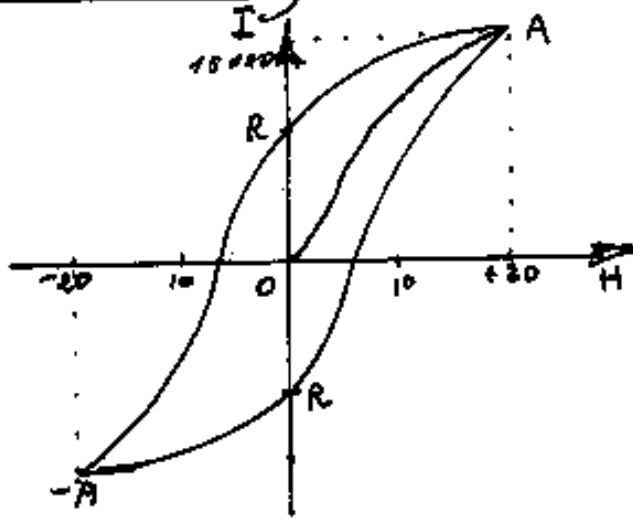
Presi due assi cartesiani, poniamo in ascisse l'intensità del campo H; ed in ordinate l'intensità di magnetizzazione I del corpo posto nel campo. Al crescere di H notiamo l'accrescersi della intensità di magnetizzazione I del corpo, fino a raggiungere la saturazione oltre

la quale è inutile aumentare H , Imax è
la saturazione magnetica

Se facciamo ora diminuire il campo H fino a ridurlo a zero la smagnetizzazione del corpo segue una linea diversa e quando H è tornato a zero, il corpo presenta la magnetizzazione residua R

Tale magnetizzazione residua può essere vinta da una debole forza contraria che viene chiamata:

<u>forza coercitiva</u> OF la cui intensità può essere presa come <u>misura della stabilità della magnetizzazione</u>.

Ciclo d'isteresi

Consideriamo ora un filo di acciaio in un campo magnetico variabile +H, -H,

ove $+H$ e $-H$ sono le intensità di campo sufficienti a provocare la saturazione della magnetizzazione nei due sensi.

il ciclo si ripete indefinitamente, è detto ciclo di isteresi ove $\overline{OR}$ è il magnetismo residuo.

Connessioni fra forme energetiche.

Dicesi potenziale in un punto di un campo elettrico, il lavoro necessario per portare la carica positiva unitaria da quel punto fino all'infinito, o praticamente fuori dal campo.

Questa definizione connette l'energia elettrica con l'energia meccanica; consideriamo il campo generato da Q cariche elettriche negative, ed in prossimità delle Q una carica elettrica positiva unitaria, nel punto "A", che sarebbe vivamente attratta dalle Q, se non fosse impedito avvicinarsi, anzi venga allontanata fino a "B". Via via che la carica viene allontanata, l'attrazione, (forza attrattiva) diminuisce, ma lo spostamento di una "forza" è un lavoro, della

spostamento di una forza e un carico, dalla
stesso natura del sollevamento di un peso.
Il lavoro compiuto sarà la differenza di
potenziale : $(V_A - V_B)$. Se il potenziale è
misurato in Volt, la carica positiva unitaria
in Coulomb ed il Lavoro in Joule, avremo:
Volt = Joule/coulomb (che abbiamo trovato per altra via).

Ma allora, punto per punto, avremo il nostro potenziale, e vi saranno superfici equi= potenziali, ove la carica elettrico può spostarsi senza dover compiere o ricevere lavoro.
La nostra d.d.p è fra due punti di un campo spaziale geometrico elettrizzato dalle cariche Q. Ma la ddp, anziché fra punti spaziali geometrici, si verifica anche fra materiali, si hanno così i potenziali elettrochimici dei vari elementi. Nasce così la serie elettrochimica degli elementi.
Poiché testi diversi trattano con diversa impo= stazione questo argomento, giungendo (circa) agli stessi valori assoluti, ma con segno opposto; noi preferiamo riportare quanto esposto dal Bruni: "Giuseppe Bruni" - "Chimica Generale e Inorganica - con appendice di

Generale e Inorganica, – con appendice di elementi di chimica organica a cura di M.A. Rollier" – Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini – Milano 1945. (che spiega il perché dei segni)

utilizzando i seguenti simboli:

E = differenza di potenziale fra un metallo e la soluzione di un suo sale. (in Volt)

R = costante dei gas (in 8,313 Volt-coulomb)

T = temperatura assoluta

n = valenza dello ione che si considera

F = valore unitario della legge di Faraday (96.500 coulomb)

P = pressione elettrolitica di soluzione

p = pressione osmotica.

Nernst propose la formula:

$$E = \frac{RT}{nF} \ln\left(\frac{P}{p}\right)$$

ove trasformando i logaritmi naturali in decimali: ln = log / 0,43429448

e considerando la temperatura °C = 25 per cui

T = (273 + 25) = 298 °K. ,

avremo:

$$E = \frac{(8,313) \cdot 298}{(0,43429448)\, n\, (96.500)} \log\left(\frac{P}{p}\right)$$

$(0,43429448)\ n\ (96.500)$

$$E = \frac{0,0591}{n} \log\left(\frac{P}{p}\right)$$

Porre: $\left(\frac{P}{p}\right)$ come $\left(\frac{p}{P}\right)$ il logaritmo cambia solo il segno.

Il Bruni avverte che P/p non può essere misurato direttamente, ma viene ricavato dalla formula, determinando sperimentalmente E.

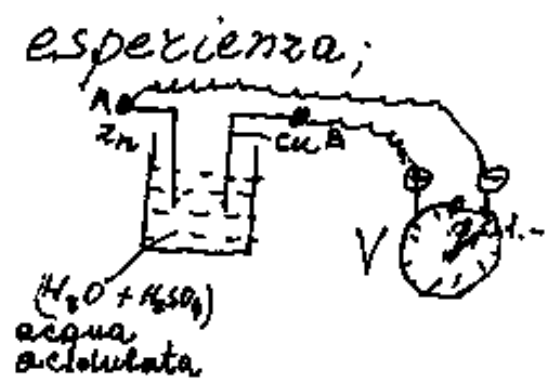
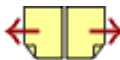
Il potenziale è riferito all'elettrodo ad idrogeno, per cui H_2 il cui ione H^+ avrà il potenziale uguale a zero. Alla temperatura di 25 °C cioè: T = 298 °K, avremo la seguente serie elettrochimica degli ioni:

Elemento	Ione	Potenziale a 25 °C	Elemento	Ione	Potenziale a 25 °C	Elemento	Ione	Potenziale a 25 °C
Rb	Rb^+	+ 2,9	Fe	Fe^{++}	+0,51	Sb	Sb^{3+}	– 0,10
K	K^+	+ 2,9	Cd	Cd^{++}	+0,40	Bi	Bi^{3+}	– 0,23
Ba	Ba^{++}	+ 2,9	Tl	Tl^+	+0,33	As	As^{3+}	– 0,30
Na	Na^+	+2,7	Co	Co^{++}	+ 0,29	Cu	Cu^{++}	– 0,35
Mg	Mg^{++}	+2,4	Ni	Ni^{++}	+ 0,25	Hg	Hg^{++}	– 0,86
Al	Al^{3+}	+1,7	Sn	Sn^{++}	+ 0,16	Ag	Ag^+	– 0,81
Mn	Mn^{++}	+1,1	Pb	Pb^{++}	+ 0,13	Pt	Pt^{4+}	– 0,86
Zn	Zn^{++}	+0,76	H_2	H^+	0,00	Au	Au^+	– 1,5
Cr	Cr^{++}	+0,56						

Elementi che vanno in soluzione come anioni

Elemento	Ione	Potenziale a 25 °C	Elemento	Ione	Potenziale a 25 °C	Elemento	Ione	Potenziale a 25 °C

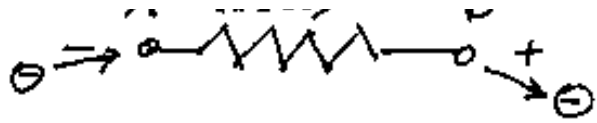
Elemento	Ione	Potenziale	Elemento	Ione	Potenziale	Elemento	Ione	Potenziale
S	S^{--}	+ 0,51	I_2	I^-	− 0,58	Cl_2	Cl^-	− 1,36
O_2	OH^-	− 0,4	Br_2	Br^-	− 1,08	F_2	F^-	− 2,8

Consideriamo gli elementi della pila classica, cioè Rame e Zinco e facciamo una

esperienza; Immergiamo in una vaschetta contenente acqua acidulata una laminetta di rame ed una di zinco, dalla parte emergente A e B colleghiamo un voltmetro V, si noterá che il voltmetro segna circa un volt.

Si nota che il polo positivo è il rame ed il polo negativo lo zinco ($Zn^{++} = +0{,}76$; $Cu^{++} = -0{,}35$ $0{,}76 - (-0{,}35) = 1{,}11$ Volt.)

Cerchiamo di capire i segni.

Sappiamo che gli atomi, nei metalli, possono considerarsi composti da nuclei con cariche positive stabili, e da elettroni con cariche negative, mobili, nel senso che possono scambiarsi di posto con gli atomi adiacenti.

Quindi un conduttore $\overline{AB}$ che riceve elettroni (cariche negative) in A le ricede in B, in effetti quindi la

⊖ → o—⋀⋀⋀—o + → ⊖ in effetti quindi la corrente elettronica va da A a B; è stato però convenuto che la corrente elettrica vada dal polo positivo al negativo.

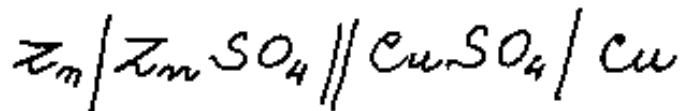
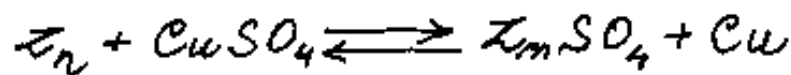
I segni ⊕ e ⊖ delle cariche elettriche derivano dalla triboelettricità, cioè l'elettricità

prodotta per strofinio con un panno di lana su un vetro fu chiamata positiva o vetrosa su una resina fu chiamata negativa o resinosa (abbiamo già detto come ciò avviene).

La pila bimetallica ($Zn - Cu$) è detta pila Daniell si indica con la notazione:

$$Zn \,|\, ZnSO_4 \,||\, CuSO_4 \,|\, Cu$$

è reversibile:

$$Zn + CuSO_4 \rightleftarrows ZnSO_4 + Cu$$

la sua forza elettromotrice: (fem)

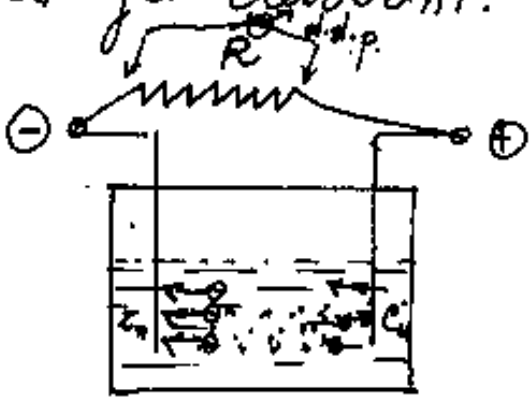
$$E = E_1 - E_2 = \frac{RT}{nF}\left(\ln\left(\frac{P_1}{p_1}\right) - \ln\left(\frac{P_2}{p_2}\right)\right)$$

(essendo n uguale.)

$$= \frac{RT}{nF}\left[\ln(P_1 p_2) - \ln(P_2 p_1)\right]$$

$$\boxed{E = \frac{RT}{nF}\ln\left(\frac{P_1 p_2}{P_2 p_1}\right)}$$

Abbiamo introdotto un nuovo concetto: F.e.m. che è la spinta (in questo caso chimica) a far muovere gli elettroni.

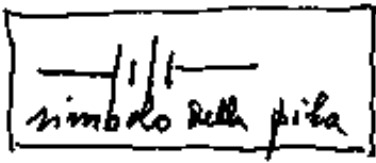
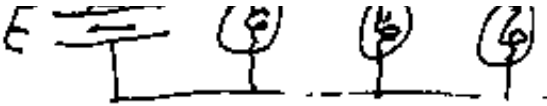
vere gli elettroni.

Gli elettroni che nell'elettrolita vanno da Cu^{++} (−0,35) a Z^{++} (+0,76) incontrano una certa resistenza interna che indichiamo con ρ, se esternamente chiudiamo il circuito con una Resistenza R, il flusso di elettroni

ritorna al Cu con la stessa intensitá I di corrente elettrica. (la resistenza totale sará: $(\rho+R)$)

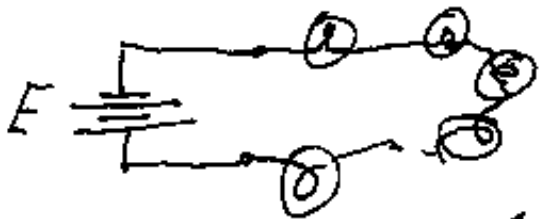
Poiché per la legge di Hohm $(V=IR)$ estesa all'intero circuito diventa:

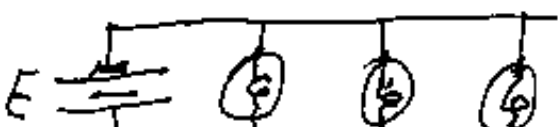
$$E = I(\rho+R) = I\rho + IR$$

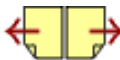
E (forza elettromotrice) $=$ (ρI) Caduta di Potenziale interna $+$ (IR) (d.d.p) differenza di potenziale ai capi della resistenza di utilizzazione

simbolo della pila

É ovvio, se con una comune pila accendiamo una lampadina la corrente: $I = \frac{E}{(\rho+r)}$

se cerchiamo di accendere piú lampadine dipende da come le inseriamo

E

in serie la resistenza é $n \cdot r = R$ per cui diminuisce I e le lampadine si accendono sempre meno, mentre la caduta di potenziale interna diminuisce

E

in parallelo: $R = \frac{1}{\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+\dots\frac{1}{r}} = R = \frac{r}{n}$

E — la resistenza R diminuisce al= l'aumentare del n° di lampadine n, quindi la corrente I aumenta fino a far sì che la caduta di potenziale interno: ρI sia tale da impegnare pressochè interamente E (f.e.m.) mentre tende a zero d.d.p. e le lampadine non si accendono più.

Inversamente con un generatore esterno, applicato ad una soluzione possiamo avere la separazione dei componenti la soluzione. Si ha così l'elettrolisi che scinde l'acqua H_2O in H_2 ed O.
La galvanoplastica per depositare metalli su stampi conduttori fino a foggiare oggetti, statue ecc.
La galvanostegia per ricoprire un metallo. (per es. nichelatura, cromatura, ecc)
Oppure per ricaricare batterie.
Sono questi scambi di energia elettro-chimica.
Un conduttore percorso da corrente genera un campo magnetico $H = \frac{I}{2\pi r}$ (Legge di Biot e Savart) ove r è il raggio o distanza dall'asse I.

Poiché lo spazio in cui si svolge H può avere permeabilità magnetiche diverse (μ = permeabilità magnetica) introduciamo il vettore: induzione

magnetica: $B = \mu H$; $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$

Il flusso induzione magnetica = $\phi = \int B \times dS$ ove S = area della superficie attraversata dal flusso.

Introduciamo ora il vettore intensità di corrente $G = \frac{dI}{dS_e}$ ove S_e = area normale alla direzione del moto delle cariche elettriche, cioè

$$G \times dS = dI = G \cdot dS \cos\alpha = G\, dS_e$$

$$(S_e) = (S \cos\alpha).$$

$$\boxed{I = \int G \times dS}$$

(alcuni autori simbolizzano $J \equiv G$, $I = \int J \times dS$)

Nei dielettrici, (isolanti) le cariche elettriche negative, (elettroni), rimangono legate al nucleo di appartenenza; dispongono però di un possibile spostamento.

L'esperienza delle bottiglie di Leida (condensatori), La definizione di Condensatore elettrico è: "Apparecchio costituito da due lamine metalliche separate da un dielettrico" nelle bottiglie di Leida il dielettrico è il vetro delle bottiglie, ma può essere aria, carta, mica ecc.

Se uniamo le due lamine ai poli di un generatore (Pila), noteremo un breve passaggio di corrente (fase di carica), tolta la pila il condensatore rimane carico ed: ha ai capi

il condensatore rimane carico ed ha ai capi una tensione dipendente dallo stato di carica (Q coulomb) e dalla capacità del condensatore (C farad), tensione (V volt)

$$\boxed{Q = CV}$$

Smontando il condensatore carico, cioè separando

le lamine metalliche dal dielettrico e corto=
circuitando fra loro le lamine metalliche in
modo da annullare ogni differenza di
potenziale (v), rimontiamo il condensatore
reinserendo il dielettrico, le lamine metalli=
che presentano una d.d.p "V", ciò vuol
dire che il dielettrico era elettrizzato e
cortocircuitando ora le lamine metalliche
il condensatore restituisce la corrente di carica
residua.

È come se gli elettroni del dielettrico, spostati
dal generatore, tornano al loro posto.

Questo moto di elettroni (nei due sensi) si
dice <u>corrente di spostamento.</u>

Indicando con "D" il vettore spostamento o
induzione dielettrica, dalla $dQ = C\,dV$
ove: $|dV| = K\,ds$ avremo: dQ ... $K\,ds$

ove: $|dV| = K\,ds$ avremo: $\frac{dQ}{dS} = \frac{C K\, ds}{dS}$

posto: $D = \frac{dQ}{dS}$: ed anche: $C\frac{ds}{dS} = \varepsilon$

$$\vec{D} = \vec{K}\varepsilon$$

ove ε = costante dielettrica dell'isolante interposto.

$$C = \varepsilon\frac{dS}{ds} \qquad C = \varepsilon\frac{S}{s}$$

ove S = area superfici affacciate; s = spessore dielettrico
(C = capacità, espressa in Farad = Coulomb/volt)

In serie C_1 C_2 ... C_n = $C = 1/\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\dots\frac{1}{C_n}\right)$.

In parallelo C_1, C_2, ... C_n = $C = (C_1 + C_2 + C_n)$

La costante dielettrica ε (Farad/metro), per i vari materiali, ammette il limite:

$$\varepsilon_0 = 8{,}859 \cdot 10^{-12}\ (F/m)$$ (nell'ipotetico vuoto dielettrico perfetto). Tale valore è molto vicino a quello dell'aria, i valori $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ sono relativi a tale valore (posto $\varepsilon_0 = 1$)

Valori di ε_r

Materiale	ε_r	Materiale	ε_r	Materiale	ε_r
Aria	1,0006	Ebanite	2,7÷2,9	Olio per trasformat.	2,2
Bachelite	5,7÷7	Gommolacca	3÷3,7	Paraffina	2,3
Carta per cavi	3,2÷3,8	Guttaperca	3÷3,6	Porcellana	2,5
Cartone pressato	3	Mica	5,7÷6,5	Quarzo	4,5
Carta	2-2,5	Olio di Paraffina	2,5	Vetro	5÷7,6

Il Farad è una unità molto grande, per cui in radiotecnica si usa il picofarad = 10^{-12} farad e per il calcolo delle capacità:

e per il calcolo delle capacità:

$$C\ (\text{in picofarad}) = 0{,}08859 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S\ (\text{in cm}^2)}{s\ (\text{in cm})}$$

Un'altra caratteristica dei dielettrici (isolanti) è la <u>rigidità dielettrica</u> che è il valore della tensione capace di perforare lo spessore unitario di dielettrico.

Si hanno così i fulmini, l'arco voltaico, e le altre scariche elettriche che bruciano l'isolante.
Per alcuni materiali, in condizioni ordinarie di pressione, temperatura, umidità, ecc. approssimativamente il valore della rigidità dielettrica è:

aria	30 KV/cm
oliominerale	120 KV/cm
Porcellana	200 KV/cm
Mica	500 KV/cm
Carta	60 KV/cm.

—

Anche i conduttori hanno caratteristiche dipendenti dai materiali.
Infatti se indichiamo con "I" (Amper) l'intensità di corrente elettrica, (ove Amper = coulomb/sec), per la legge di Ohm abbiamo: $I = V/$ cioè I è dirett

di Ohm abbiamo: $I = V/R$ cioè I è diret=
tamente proporzionale a "V" (tensione) ed
inversamente proporzionale a "R" (resistenza).
In un conduttore lungo "l" con sezione di
area "A" avremo:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

cioè la
resistenza è direttamente proporzionale
alla lunghezza, inversamente proporzionale

all'area della sezione e dipende da un coefficiente "ρ" detto resistività del materiale

Al passaggio della corrente, in generale, il conduttore si riscalda ed i valori di ρ variano anche notevolmente con la temperatura.

Per le linee che trasportano energia elettrica il riscaldamento dei conduttori e la dispersione in calore è una perdita da limitare il più possibile, mentre le resistenze utilizzate per riscaldamento, (fornelli, stufe, scaldabagni, ecc) il problema è l'opposto.

Sappiamo che la potenza $\left(Watt = \frac{Joule}{sec}\right) \Rightarrow (W = I\,V)$ che $(V = I R)$ per cui $\boxed{W = I^2 R}$; $Watt = (2,38 \cdot 10^{-4}) \frac{Cal}{sec}$ .. $(860\ Cal) = (1\ KWh)$ Quindi se vogliamo bollire un litro d'acqua in un quarto d'ora, occorrono 400 Cal/ora cioè $\simeq 465\ W$, che $V = 220$; $W = VI$; $I = 465/220 = 2{,}114$ amper

[illegible] ; $I = 465/220 = 2{,}114$ amper

cioé: $\frac{465}{2{,}114^2} = 104$ ohm di resistenza. Ma questa resistenza non deve raggiungere la temperatura di fusione del metallo cioè la sezione deve essere abbastanza ampia da non fondere ma abbastanza piccola da superare la temperatura di 100° di ebollizione dell'acqua.

L'esempio connette l'energia termica con l'energia elettrica.

Sia ρ_0 la resistività a 0°C di temperatura ed esprimiamola in $(\mu\Omega \cdot cm)$

alla temperatura t avremo: $\rho_t = (1 + \alpha_0 t)\rho_0$ ove α_0 è il coeff. di variazione a partire da zero.

per il rame si ha: $\rho_0 = \frac{1,6}{100}$ in $\left(\frac{\Omega\, mm^2}{m}\right)$ a 0°C

a 20°C → (cu) $\rho_{20} = \frac{1,73}{100}\left(\frac{\Omega\, mm^2}{m}\right)$; a 75°C $\rho_{75} = \frac{2,11}{100}\ \frac{\Omega\, mm^2}{m}$

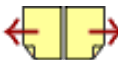
(esprimendo la lunghezza in metri e la sezione in millimetri quadri)

Materiale	ρ_0	α_0 $\left(\frac{1}{1000}\right)$ di	peso specifico γ (gr/cm³) (Kg/dm³)	coeff. dilat. termica (medio) (mm/dam) (t_0)	temperatura di fusione t	NOTE
Rame elettrolitico	1,6	4,26	8,9	0,17	1083	
Alluminio	2,65	4,36	2,7	0,24	659	dipendono dalle leï materiali o da particolari —
Ferro	10,00	50,-	7,8	0,12	1530	
Bronzo fosforoso	1,7÷2,00	4,–	8,9	0,18	–	
Ottone	8,5	1,–	8,6	0,18	900÷1000	
Nichelina	40	0,1	–	–	1230	
Nichelcromo	106	0,1	8,4	0,14	1410	
Manganina	35÷50	$\frac{1}{100}(2÷5)$	8,3	0,14	–	

Manganina	33÷50	$\frac{1}{1000}$(2÷5)	8,3	0,14	–	alcuni valori d… composizione dei… condizioni pa…
Costantana	49	$\frac{1}{1000}$(2)	8,4	0,18	1270	
Tugsteno	5,05	4,2	19,5	0,034	3370	
mercurio	94,076	0,089	13,6	–	–38,09	
Aldrey	2,96	–	2,7	0,23	–	
Ghisa	80	7,5	–	–	–	
Piombo	19,5	4,2	11,3	0,29	327	
Argento	1,5	4,–	10,6	0,18	960	

Per i calcoli si ricerca (se possibile) un <u>regime stazionario</u>, cioè il numero di calorie

prodotto dalla energia elettrica nel conduttore ed il numero di calorie disperso nell'ambiente.
Abbiamo già vista la legge di Joule: $W = (I^2 R)(\text{coeff})$
il coeff. per ridurre $W = \text{Joule}/\text{sec} = \text{cal}/\text{ora}$.
Per la dispersione delle calorie nell'ambiente si procede come per gli impianti di riscaldamento, cioè considerando i tre tipi di trasmissione del calore:

conduzione

convezione

irradiamento

La conduzione avviene per contatto fra le parti dello stesso materiale o fra materiali diversi a diversa temperatura
La convezione è un caso particolare della conduzione ed avviene nello scambio fra un solido ed un fluido (generalmente gas) ove le particelle che per contatto avrebbero raggiunto

o raggiungerebbero la temperatura del solido trasmittente si spostano (o si fanno spostare con ventilazione → <u>convezione forzata</u>) per fatto naturale → <u>convezione naturale</u>) lasciando il posto a particelle più fredde

L'irradiamento invece oltre che dal salto termico, dipende anche dalla forma della superficie; ricordando che l'energia termica sono onde-elettromagnetiche con lunghezza d'onda di oltre 8000 Å (ottomila Amstrong) raggi infrarossi ed oltre. La trasmissione ne segue le leggi.

Cioè il quantitativo di Calorie trasmesso è proporzionale al salto termico. $(T_1 - T_2)$ è proporzionale alla superfice comune (area e forma) e dipende dai coefficienti di trasmissione, determinati sperimentalmente, fra i diversi materiali.

Ogni materiale ha una sua capacità termica, cioè ad un certa temperatura ha accumulato un certo numero di calorie, cioè

immagazzina energia termica interna. Ma
questa energia termica, che tende ad aumenta=
re la temperatura, ha effetti collaterali
quali la dilatazione termica, che, se
impedita, si trasforma in energia interna
potenziale elastica. Quindi se consideria=
mo un coefficiente che per Kg di materiale

esprime il numero di calorie necessario ad aumentare di un grado la temperatura, avremo due diversi coefficienti detti <u>calore specifico a pressione costante C_p</u>, e <u>calore specifico a volume costante C_v</u> —

Quindi richiamandoci a quanto esposto al capitolo <u>Energia - Lavoro - forze</u>, l'energia interna

$$U = C\,(T_2 - T_1)$$

$$\boxed{dU = C\,(dT)}$$

ordinariamente si considera il calore specifico C per i vari materiali

Materiale	calore specifico (Cal)/(Kg·°C)	Materiale	calore specifico (Cal)/(Kg·°C)
Acciaio	0,12	Pietre	0,2
Alluminio	0,27÷0,23	Piombo	0,031
Amianto	0,195	Platino	0,032
Argento	0,056÷0,07	Porcellana	0,256
Calcestruzzo	0,21	Rame	0,093÷0,156
Carta	0,32	Stagno	0,057
Ebanite	0,34	Sughero	0,49
Ferro	0,08÷0,16	terra	0,3÷0,4

Notiamo che a volume costante non si ha lavoro esterno e tutto il calore somministrato $Q = C_v(T_2 - T_1)$ entra nel gas per cui

Ferro	0,08 ÷ 0,169	Terra	0,3 ÷ 0,4
Gesso	0,2	Vetro	0,2
legno	0,57 ÷ 0,65	Zinco	0,094 ÷ 0,12
Manganina	0,097	Acqua	1
Mattoni ≃	0,2	Petrolio	0,5

cui $dU = C_v (dT)$

a pressione costante il gas compie lavoro esterno per cui il calore somministrato $dQ = C_v\, dT + A p\, dV$, se consideriamo il calore totale(I): $dQ = dI - A\, v\, dp$

$$dQ = C_p\, dT - A\, v\, dp$$

$$C_p\, dT = C_v\, dT + A R\, dT$$

da cui $$C_p = C_v + AR$$

Poiché: C_p, C_v, R, sono determinabili sperimentalmente è possibile dedurre A od $\frac{1}{A}$ cioé l'equivalente meccanico del calore, ed è questa la strada seguita da Mayer per determinare: $\frac{1}{A} = 4186 \frac{\text{Joule}}{\text{Caloria}} = 427 \frac{\text{Kgm.}}{\text{Caloria}}$.

ed anche: 1 KWh = 860 calorie = 3600 Joule

Con ciò si correlazionano le unitá energetiche elettriche, meccaniche, termiche.

La connessione diretta fra energia chimica = (energia dei materiali) e l'energia termica è il potere calorifero dei combustibili, che è il numero di calorie (grandi calorie) per Kg di materiale

Materiale	cal/Kg	Materiale	cal/Kg	Materiale	Cal/Kg
Carbonio puro	8140	Benzina	11 000	Metano	8 900
Carbone di legna	[illegible]	Petrolio	10 800	Gas illuminante	[illegible]

Carbone di legna	7000 - 8000	Petrolio	10 800	Gas illuminante	(3.500 ÷ 5000)
Torba	3500	Olio Diesel	9.800	Gas d'acqua	2500 ÷ 2700
Lignite	4000 ÷ 5000	Alcool metilico	5.400	Gas misto	1200 ÷ 1300
Litantrace	7500 ÷ 8600	Alcool etilico	7000	Gas d'aria	800 ÷ 1000
Antracite	8000 ÷ 8500	Benzolo	10.000	Gas d'alto forno	750 ÷ 900
Coke	7100				

Il potere calorifero di un combustibile si distin=
gue in superiore o inferiore a seconda che per

l'idrogeno si assuma il calore specifico di 34.460 calorie o 29006 calorie, cioè se si riferisce anche al calore dell'acqua di condensa o non si considera (come normalmente avviene) il calore di vaporizzazione dell'acqua, non recuperato in condensa.

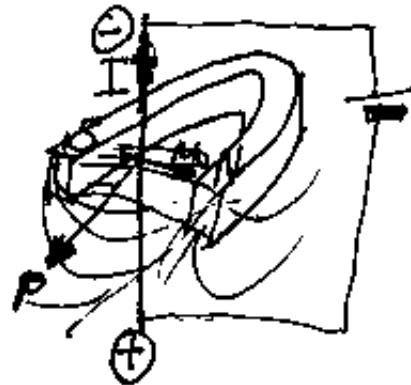
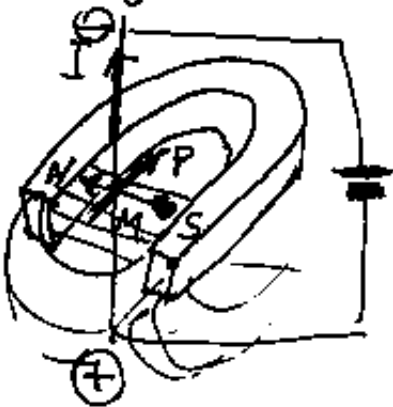
Poiché la combustione è una ossidazione ogni reazione chimica può essere esoterma o endoterma a seconda che produce o assorbe calore.

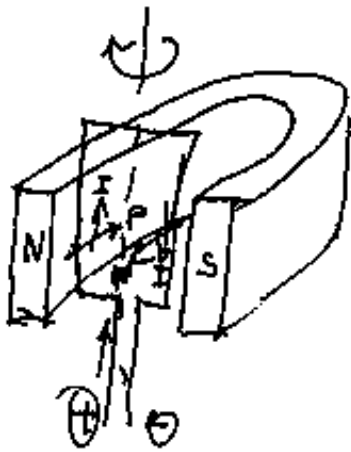
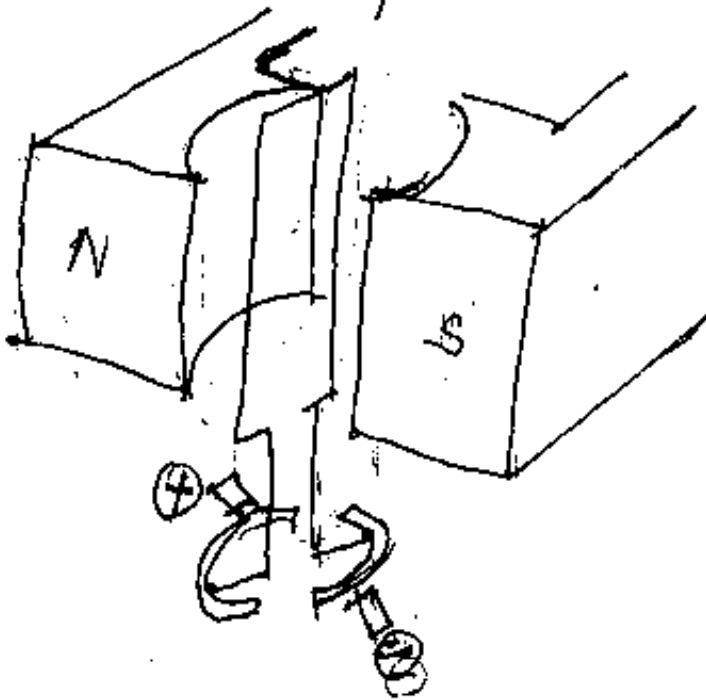
L'esplosione è una combustione (ossidazione) veloce, ciò permette una connessione fra energia chimica ed energia meccanica.

Consideriamo ora le tre dita della mano sinistra e della mano destra, nell'ordine: Pollice - Indice - Medio; disposti come tre assi cartesiani ortogonali; per la mano sinistra si ha una terna oraria; per la

sinistra si ha una terna oraria, per la
mano destra si ha una terna antioraria.
La direzione del Pollice (P come peso - forza)
indica la direzione della forza che genera
lo spostamento. La direzione dell'Indice
(I come intensità di corrente) indica la direzione

della corrente elettrica dal polo ⊕ (positivo) al polo ⊖ negativo.
Il Medio (M come magnetico) indica la direzione delle linee di forza del campo da Sud verso Nord.

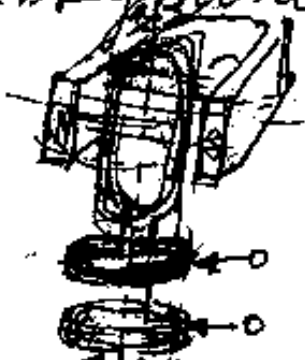
Ciò premesso, sia dato un campo magnetico per esempio fra i poli di un magnete a ferro di cavallo, e, perpendicolarmente alle linee di forza vi sia un conduttore percorso da corrente nei versi in figura notiamo che in entrambi i casi sono le direzioni delle dita della mano sinistra.
Se togliamo le pile e facciamo l'azione meccanica per spostare il conduttore, la corrente si genera nel conduttore è di verso opposto a quella in

conduttore e di verso opposto a quella in figura (valgono le direzioni delle dita della mano destra). (Alcuni testi danno significati diversi)

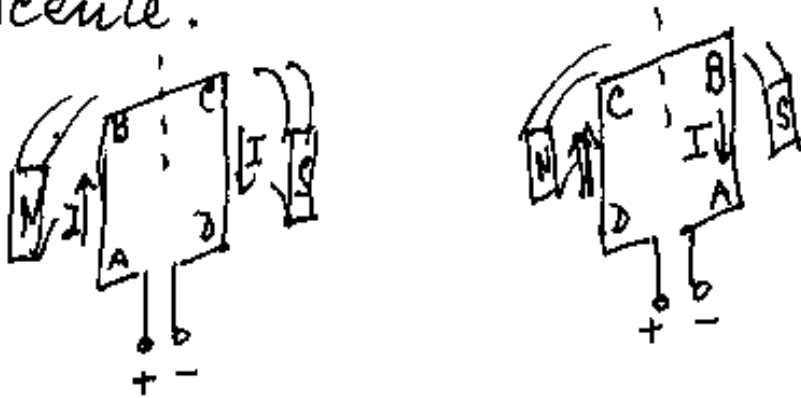
Questo semplice esperimento è la base degli apparecchi di misura, base dei motori elettrici, base dei generatori di elettricità.

Se poniamo una spira nel campo magnetico essa tenderà a ruotare fino ad essere attraversata dalle linee del campo.
quindi per provocare l'altro mezzo giro dovremo invertire la polarità del generatore.

Miglioriamo il campo dando al magnete delle <u>espansioni polari</u> tali da generare uno spazio cilindrico in cui ruota la spira e poniamo alla spira due contatti striscianti a semicerchio in modo che ad ogni mezzo giro cambi polarità. Ma per migliorare la permeabilità magnetica porremo coassiale al campo un cilindretto ferromagnetico su cui ...

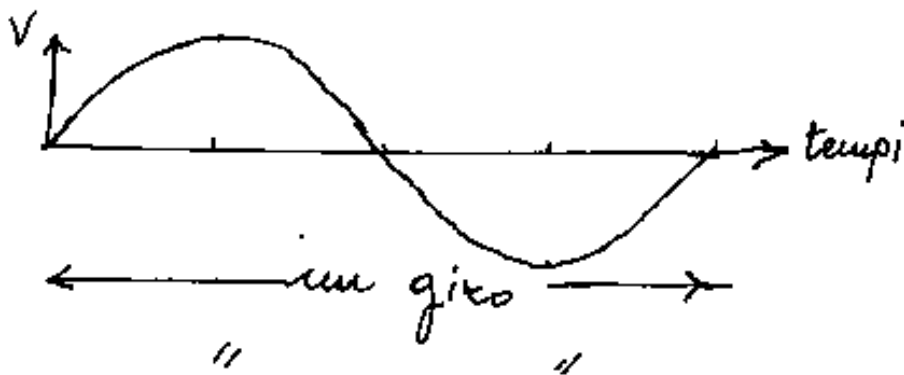
cilindretto ferromagnetico su cui avvolgiamo diverse spire che vanno a due contatti striscianti (spazzole) e sono attivi quando le spire tagliano perpendicolarmente le linee del campo. Faremo diversi avvolgimenti via via spostati i cui estremi andranno al collettore dei contatti

abbiamo così costruito una macchina per corrente continua (Dinamo) che può funzionare sia come motore, (cioè trasforma-re energia elettrica in meccanica) sia come generatore (cioè trasformare energia mec-canica in elettrica). (corrente continua)

Consideriamo ora che il rotore della nostra macchina non abbia tanti avvolgimenti sfalzati di un piccolo angolo ciascuno dei quali va due lamette del collettore, ma sia un unico avvolgimento parallelo come la spira disegnata e gli estremi vadano a due anelli interi ciascuno col suo contatto strisciante.

Facciamo meccanicamente ruotare la spira, partendo da posizio

ruotare la spira, partendo da posizione neutra. Via via che ruota i conduttori arriveranno a tagliare perpendicolarmente le linee del campo dando il massimo di tensione, poi torna a zero dopo mezzo giro ed inizia a generare tensione di segno opposto, col massimo quando

il gruppo di conduttori che tagliavano perpendi=colarmente presso un polo con verso entrante le tagliano ora presso l'altro polo con verso uscente.

cioè nel gruppo di conduttori AB si vede che la cor=rente va prima da A verso B poi da B verso A

Il diagramma della corrente o della tensio=ne ha un andamento sinusoidale.

Diremo "frequenza" il numero dei giri (o cicli) nell'unità di tempo (1 ciclo/secondo) = (1 Herz)
Il tempo impiegato a compiere un ciclo si chiama periodo (La corrente domestica è data

chiama periodo (La corrente domestica è data
a 50 periodi al secondo (50 Hertz = 50 cicli/sec) il
che, vuol dire, che in un secondo l'intensità
di corrente (nei due versi) raggiunge 100 massimi
Quindi una lampadina in un secondo rag=
giunge 100 massimi di intensità luminosa
intervallati da punti zero intensità.

Noi vediamo le cose quando sono sufficientemente illuminate, non le vediamo al buio perciò utilizzando un effetto detto <u>streoboscopico</u> sapendo la frequenza della sorgente illuminante è possibile misurare, per esempio la velocità di rotazione di un disco.

La nostra luce elettrica dá 100 massimi al secondo $\overset{max+}{(+50)} + \overset{max-}{(50)}$, perciò considerando i dischi fonografici $(78\ giri/_{1'})$; $(45\ giri/_{1'})$; $(33\ giri/_{1'})$ volendo verificare la velocità avremo che

$n\left(giri/_{1'}\right) = \frac{n}{60}\left(giri/_{sec}\right)$ perciò l'angolo percorso in un secondo sarà $\alpha^\circ = \frac{n\,360}{60} = (6n)^\circ$

ma noi abbiamo un massimo di luce ogni $\frac{1}{100}$ di sec, cioè l'angolo percorso dal disco in $\frac{1}{100}$ di sec sarà $\frac{\alpha^\circ}{100} = \left(\frac{6}{100}n\right)^\circ = (3n)^\circ$

$\overline{}$ 100 [illegible] $\frac{\alpha}{100} = \left(\frac{6}{100} n\right) = \left(\frac{3n}{50}\right)^{\circ}$,

Se dividiamo $\frac{360°}{\alpha°/100}$ avremo $\frac{18000}{3n} = \frac{6000}{n}$

per $n = 78$ giri/1' $\frac{6000}{78} = 76,923 \simeq 77$ parti di giro

$n = 45$ giri/1' $\frac{6000}{45} = 133,33 \simeq 133$ parti

$n = 35$ giri/1' $\frac{6000}{35} = 171,41$
- per 171 parti – $\frac{6000}{171} = 35,08$ giri/1'
- per 172 parti – $\frac{6000}{172} = 34,88$ giri/1'

Il cerchio va diviso in un numero intero di parti, in modo che nel tempo calcolato una linetta di divisione vada a sovrapporsi esatta-mente sulla posizione della linea adiacente, che a sua volta è andata nella posizione di quella accanto, e poiché le divisioni sono tutte uguali se noi le recepiamo solo ai massimi di luce le vediamo sempre nella stessa posizione ed il disco ci appare fermo invece vediamo via via le linee adiacenti (che non possiamo distinguere. Se le divisioni sono su due circonferenze concentriche una inferiore ed una superiore al n° di giri noi vediamo le linee delle due circonferenze che ruotano in verso opposto. Anziché le linette, conviene dividere la circonferenza in zone bianche e nere in modo che si sovrappongono le zone bianche e le

modo che si sovrappongono le zone bianche e le zone nere, poiché la luce non si verifica solo ai max, ma è graduale, con variazione sinusoidale. (In figura solo alcune delle 77 suddivisioni di una circonferenza di 10 cm. di diametro esterno, e si vede ferma a circa 78 giri/1')

Sappiamo che le grandezze sinusoidali

$$a = A_m \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} + \alpha\right)$$

ove la velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\left(\frac{rad}{sec}\right)$

$\omega = 2\pi f$ oppure: $f = \frac{1}{T}$

$$a = A_m \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

ove α (spesso indicata con φ) è la fase.

La fase può considerarsi la variazione nell'origine dei tempi: $\omega\tau = \alpha$; $\tau = \frac{\alpha T}{2\pi} = \frac{\alpha}{\omega}$;

A_m è l'ampiezza massima della pulsazione

Se si hanno due grandezze sinusoidali di uguale periodo T ma di diversa pulsazione

$$b = B_m(\omega t + \beta)$$

$(\alpha - \beta)$ è la variazione di fase: $(\alpha - \beta) = \varphi$ e se $\varphi \neq 0$ si dice che le due grandezze <u>sono sfasate</u>

Ciò premesso, (valido in generale), tornia=

mo all'elettricità e confrontiamo la corrente alternata con la continua:
L'Amper = coulomb/sec = V/R = Volt/ohm, è costante in continua, varia da zero ad un [massimo] in alternata.

$$L'Amper\ medio = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} Amper\ max\ (\omega t)\ dt.$$

Abbiamo mediato in un semiperiodo,

L'amper medio è quindi quella unità di corrente, (coulomb/sec) che, nello spazio di tempo di un semiperiodo, fa passare, attraverso una sezione in corrente continua, lo stesso numero di Coulomb, che, per la stessa sezione, nel tempo dello stesso semiperiodo, passerebbero in alternata.

$$\frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} A_{max}\,sen(\omega t)\,dt = \frac{A_{max}}{T/2}\int_0^{T/2} sen\left(\frac{\pi}{T/2}t\right)dt = \frac{A_{max}}{\pi}\Big[\cos\omega t\Big]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$A_{media} = \frac{A_{max}}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{T/2}t\right)\right]_0^{T/2} = \frac{A_{max}}{\pi}(\cos\pi + \cos 0)$$

$$A_{media} = \frac{2}{\pi}A_{max}$$

$$\boxed{A_{media} = 0{,}6366 1977\ A_{max}}$$

Poiché vale: $V = IR$ (ohm)

anche il

$$\boxed{Volt_{medio} = 0{,}3661977\ Volt_{max}}$$

Dicesi valore efficace di una grandezza sinusoidale, il valore medio quadratico di un periodo: (in tal modo il segno sparisce nel quadr...

un periodo: (in tal modo il segno sparisce col quadrato)

$$A_{efficace} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T A_{max}^2 (sen^2(\omega t)) dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{-\frac{1}{\omega} sen(\omega t)\cos(\omega t) + t}{2}\right]_0^T} = \sqrt{\frac{T A_{max}^2}{2}} = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{A_{efficace} = 0{,}70710678\ A_{max}.}$$

Il rapporto fra valore efficace e valore medio (in un semiperiodo)

$$\frac{A_{efficace}}{A_{medio}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) A_{max}/\sqrt{2}}{A_{max}\ 2/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}1107207.$$

Tale rapporto relativo ad un semiperiodo si chiama: **"fattore forma" = 1,11**

Operazioni Aritmetiche Sulle grandezze sinusoidali

(aventi la stessa frequenza)

Somma: (e Sottrazione)

$$A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + B_M \operatorname{sen}(\omega t + \beta) = C_M \operatorname{sen}(\omega t + \gamma)$$

Infatti sviluppando si ha:

$$A_M \operatorname{sen}\omega t \cos\alpha + A_M \cos\omega t \operatorname{sen}\alpha + B_M \operatorname{sen}\omega t + \cos\beta + B_M \cos\omega t \operatorname{sen}\beta$$

$$(A_M \cos\alpha + B_M \cos\beta) \operatorname{sen}\omega t + (A_M \operatorname{sen}\alpha + B_M \operatorname{sen}\beta) \cos\omega t =$$

$$= C_M \operatorname{sen}(\omega t) \cos\gamma + C_M \cos\omega t \operatorname{sen}\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{A_M \cos\alpha + B_M \cos\beta}{\ } \quad ; \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{A_M \operatorname{sen}\alpha + B_M \operatorname{sen}\beta}{\ }$$

$$\cos\gamma = \frac{A_M \cos\alpha + B_M \cos\beta}{C_M} \quad ; \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{A_M \operatorname{sen}\alpha + B_M \operatorname{sen}\beta}{C_M}$$

elevando a quadrato e sommando : $\cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma = 1$

$$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 + 2 A_M B_M \cos(\alpha - \beta)}$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{A_M \operatorname{sen}\alpha + B_M \operatorname{sen}\beta}{A_M \cos\alpha + B_M \cos\beta}.$$

Prodotto:

per uno scalare "n": (si moltiplica il coefficiente o modulo)

$$nc = n\,C_M\,sen(\omega t + \gamma)$$

Prodotto fra due grandezze sinusoidali della stessa frequenza:

$$\left(A_M\,sen\,(\omega t+\alpha)\right)\left(B_M\,sen\,(\omega t+\beta)\right) = c = \frac{A_M B_M}{2}\Big[$$

Infatti ricordando che per le formule di prostaferesi (vol I) $\cos(p) - \cos q = -2\,sen\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$ cioè:

$$sen\left(\frac{p+q}{2}\right)sen\left(\frac{p-q}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\cos(p)-\cos(q)\right) = -\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\left(\frac{p+q}{2}\right)+\left(\frac{p-q}{2}\right)\right] - \cos\left[\left(\frac{p+q}{2}\right)-\left(\frac{p-q}{2}\right)\right]\right.$$

$$A_M(sen\,\omega t+\alpha)\,B_M\left(sen(\omega t+\beta)\right) =$$

$$= \mp\left(\frac{A_M B_M}{2}\right)\left[\cos\left[(\omega t+\beta) + (\omega t+\alpha)\right] - \cos\left[(\omega t+\beta)-(\omega t+\alpha)\right]\right]$$

$$= \left(A_M B_M\right)\cdot\frac{\mp 1}{2}\left[\cos\left(2\omega t + (\alpha+\beta)\right) - \cos\left(\beta-\alpha\right)\right]$$

$$= \frac{A_{MB}}{2}\left(\cos(\beta-\alpha) - \cos\left(2\omega t + (\alpha+\beta)\right)\right)$$

Ciò è importante perché si applica per calcolare la potenza delle correnti alternate : Watt = (Volt)(Amper)

<u>E bisogna fare attenzione ai segni delle fasi.</u> $(\cos(-\alpha) = \cos(+\alpha))$

Derivata di una grandezza sinusoidale

$$D_M = \frac{d(A_M \operatorname{sen}(\omega t+\alpha))}{dt} = \omega A_M \cos(\omega t+\alpha) =$$

$$D_M = \omega A_M \operatorname{sen}(\omega t+\alpha+\pi/2) = \omega A_M \operatorname{sen}(\omega t+\alpha_1)$$

$$\boxed{D_M = \omega A_M}$$

La derivata di una grandezza sinusoidale A_M è ancora una grandezza sinusoidale della stessa frequenza, di modulo ω volte A_M e sfasata di $\pi/2$ rispetto ad essa.

Variabili dimensionali (sinusoidali)

una grandezza sinusoidale, ha come variabile indipendente il tempo "t", poiché l'angolo $(\omega t+\varphi)$ essendo costante la frequenza "f" anche la velocità angolare: $\omega = 2\pi f$ ove: $f = (cicli/sec)$; $\omega = (rad/sec)$; sono costanti con φ.

ove: $f = (\text{cicli/sec})$; $\omega = (\text{rad/sec})$; sono costanti con φ.

Il modulo (A_M), della variabile dipendente a, può avere dimensioni diverse, per esempio (Amper; Volt; Watt; ecc) fuori del campo geometrico, siamo in coordinate dello spazio ennedimensionale, che solo convenzionalmente possiamo rappresentare

nello spazio geometrico. (In generale l'asse x = ascisse diventa l'asse tempi, mentre l'asse $y = f_{(x)}$ = ordinate diventa rappresentativo di una delle grandezze citate: (intensità di corrente; tensione; potenza elettrica; ecc).

In campo vettoriale, le direzioni, x, y, z, sono individuate dai versori: $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$;

Le nostre rappresentazioni grafiche, sono piane, quindi, visioni spaziali tridimensionali è possibile eseguirle con la fotografia (prospettiva) o con l'assonometria. Riusciamo anche a dare la visione tetradimensionale col Cinematografo cioè sequenze di fotogrammi che si susseguono nel tempo, e ci danno la sensazione del movimento. Ciò permette anche di giocare sulla variabile tempo; infatti ponendo una cinepresa (in posizione fissa) e

facendole scattare un fotogramma a intervalli piuttosto lunghi di tempo, proiettando la pellicola ai normali 18 ÷ 24 fotogrammi/sec si può vedere un fenomeno in breve. (Per esempio lo sbocciare di un fiore, il formarsi di un cristallo, le luci di un'alba). Inversamente si può rallentare un fenomeno (per es. il tuffo di un atleta).

Rappresentazione Simbolica

Ma quanto detto sui fenomeni ottici, non possiamo estenderlo alle grandezze sinusoidali che ci interessano perché i "Vettori" rappresentativi di queste non sono vettori fisici.

Ricordando quanto esposto sui numeri immaginari complessi.

Siano le ascisse un asse reale, e siano le ordinate un'asse fuori del campo geometrico tridimensionale (asse immaginario) ove il coefficiente immaginario lo indichiamo con "j" per distinguerlo da "i" che viene usato come intensità di corrente.

y (immag.)

$I \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}$

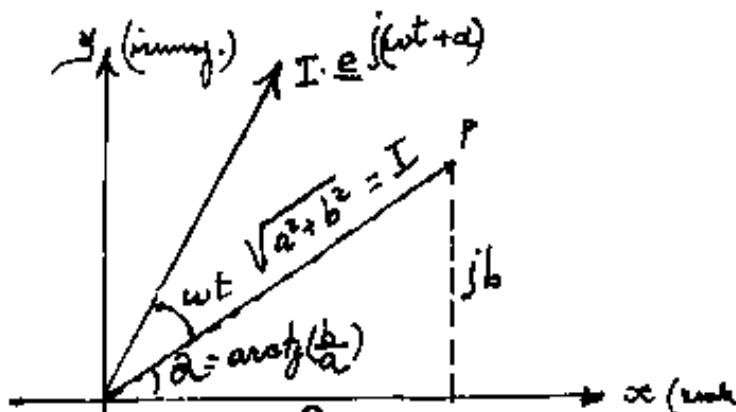
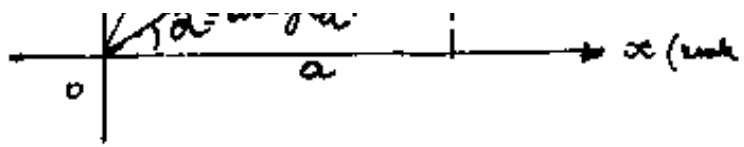
$\sqrt{a^2+b^2} = I$

P

ωt

jb

$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

x (reale)

Indicheremo con $\dot{I}$ il vettore rappresentato dal segmento $\overline{OP} = |I|$

segmento $OP = |I|$

con $|I|$ = modulo.

Le tre espressioni rappresentative di $\dot{I}$, sono:

$\dot{I} = (a + jb)$ *forma binomia*

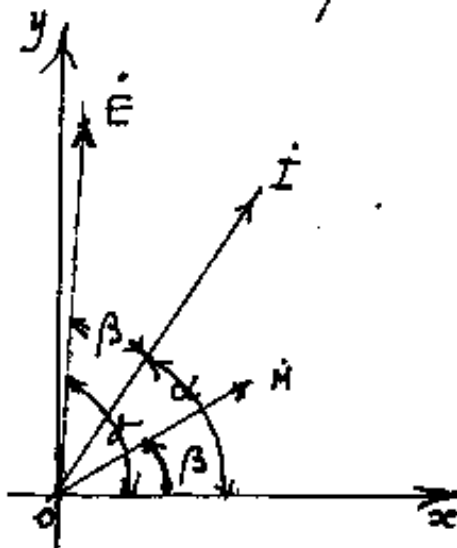
Per evidenziare che il vettore ruota intorno ad O con velocità angolare costante ω

$\dot{I} = I\,(\cos(\omega t + \alpha) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha))$ *forma trigonometrica*

$\dot{I} = I\,e^{j(\omega t + \alpha)}$ *forma esponenziale*

Possiamo comprendere la fase α scrivendo:

$$\dot{I} = (a + jb)(e^{j\omega t})$$

Prodotto del vettore ruotante $\dot{I}$ per un numero complesso (vettore fisso) $\dot{M} = (m + jn)$

$$\dot{E} = \dot{M}\dot{I}$$

$$\dot{E} = (m + jn)\cdot(a + jb)\,e^{j\omega t}$$

$$\dot{E} = [(ma - nb) + j(na + mb)]\,e^{j\omega t}$$

Si nota: $|E| = |I| \cdot |M|$

$$|E| = \sqrt{(ma - nb)^2 + (na + mb)^2} = \sqrt{(m^2 + n^2)(a^2 + b^2)}$$

sia γ la fase di E;

$$\tan\gamma = \frac{(na + mb)}{(ma - nb)}$$

dividendo ambo i termini della frazione per $(m \cdot a)$

si ha $$\tan\gamma = \frac{\frac{n}{m} + \frac{b}{a}}{1 - \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{tg(\beta) + tg(\alpha)}{1 - tg(\beta)\cdot tg(\alpha)} = tg(\alpha + \beta)$$

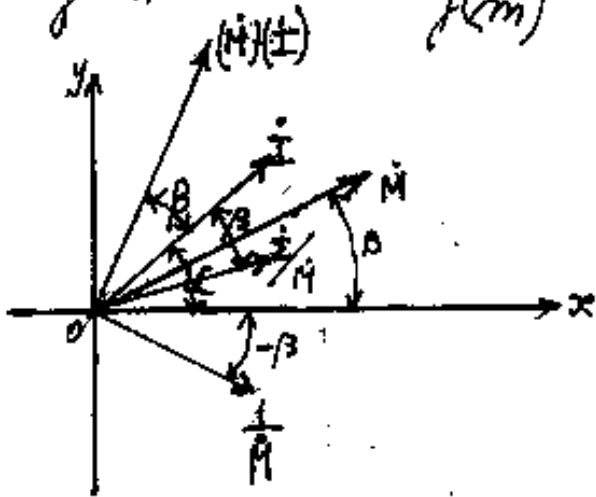
quindi la fase di $\dot{E}$ è la somma della fase "α"

di $\dot{I}$ e dell'argomento β di $\dot{M}$, mentre il modulo di $\dot{E}$ è il prodotto dei moduli di $\dot{I}$ ed $\dot{M}$.

($\dot{M}$ è fisso, ha solo l'argomento $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{m}\right)$ non ha la fase, non dipendendo da t.

Se l'operatore compesso $\dot{M}$, anziché moltiplicare, divide il vettore $\dot{I}$, noi considereremo il prodotto dell'operatore $\frac{1}{\dot{M}}$, avvalendoci di quanto già ricavato

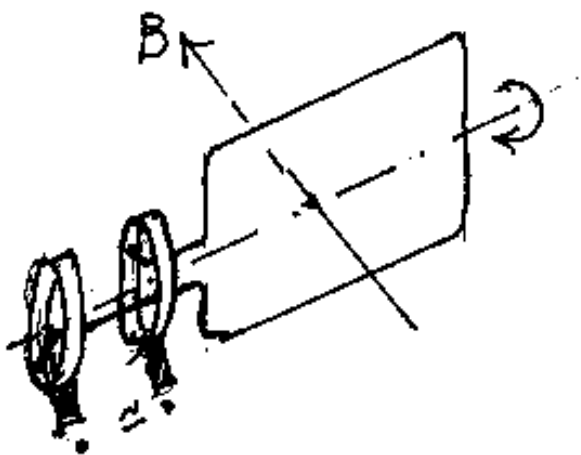
$$\frac{1}{\dot{M}} = \frac{1}{(m+n\dot{j})} = \frac{(m-n\dot{j})}{(m^2+n^2)} = \frac{1}{|M^2|}(m-n\dot{j})$$

$\frac{1}{\dot{M}} \Rightarrow$ è un vettore che ha per modulo $\frac{1}{|M|}$ e per argomento $-tg\left(\frac{n}{m}\right) = -\beta$.

Si deduce quindi che il rapporto fra un vettore e l'operatore complesso $\dot{M}$ è un nuovo vettore che ha per modulo il rapporto dei moduli e per fase la differenza fra la fase α e l'argomento di $(\dot{M})$ $(\gamma_1) = (\alpha - \beta)$

Abbiamo visto come le correnti alternate sono generate da spire che ruotano

le sono generate da spire che [illegible]
in un campo magnetico, queste onde
elettromagnetiche, sono fondamentali
sono della stessa natura delle radiazioni
dei corpi radioattivi ove l'elevatissima fre=
quenza, spostandosi alla velocità della luce

($\simeq$ 300 000 Km/sec) ha una lunghezza d'onda da centesimi di Ångström a qualche Ångström.
(un Ångström (Å); (1 Ång = 10^{-8} cm = 10^{-7} mm = 10^{-4} μ) cioè la decimillesima parte del millesimo di millimetro).
I raggi X hanno λ da 1 Å a 12 Å.
la luce nei vari colori varia da 4000 Å per l'ultravioletto ad 8000 Å per l'estremo rosso; i raggi infrarossi da 10 000 Å = (1 μ (micron)) a 300 μ.
poi si entra nelle onde Herziane che variano da pochi millimetri, a centimetri; "radar", "micro onde", onde ultra corte, (come quelle della televisione), onde corte da qualche metro a circa 150 metri, le onde medie da 600 metri = 500 Kilocicli/sec a 1500 metri = 200 Kc/sec; onde lunghe fino a

diversi chilometri, fino ad arrivare alle frequenze industriali ove i nostri 50 Hz = 50 Cicli/sec avrebbe una lunghezza d'onda di 6000 Km. (50 × 6000 = 300000 Km/sec)

Torniamo alla nostra spira che ruota in un campo magnetico con vettore induzione B (Weber/m²) con velocità angolare ω (rad/sec) ($\omega = 2\pi f$ ove: f = cicli/sec.") ; $\omega/f = 2\pi$ = costante ;

Consideriamo che la spira abbia ruotato per un angolo infinitesimo: $d\alpha = \omega dt$, si nota che, se il flusso di B che l'attraversa è normale al piano della spira, la variazione angolare infinitesima non varia il flusso $B \cdot A = \varphi_{Max}$ (ove A = area della spira), mentre quando il flusso di B è parallelo al piano della spira non attraversa la spira (i cui lati tagliano le linee di forza di B) e basta un piccolo angolo per ottenere l'attraversamento di un piccolo flusso.

-mento di un piccolo flusso.

Chiameremo la forza elettro-motrice (f.e.m) con la lettera "e", e misuriamo in "volt" l'intensità di "e" (tensione che varia sinusoidalmente.

$$e = \frac{-d\varphi}{dt}$$

Potenza di una corrente elettrica

In corrente continua.

$$P = VI$$

(Watt) = (Volt)(Amper)

(potenza) = (tensione d.d.p)(intensità di corrente)

lavoro/tempo = (tensione)(carica elettrica/tempo)

Joule = (Volt)(coulomb) = (Watt)(sec)

In corrente alternata (sinusoidale)

Istante per istante vale ancora:

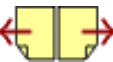
$$(p = v \cdot i)$$

Abbiamo visto che la tensione (qui indicata con la lettera v (d.d.p) era dovuta alla (f.e.m)

$$e = \frac{d\varphi}{dt}$$

ove φ era il flusso magnetico del vettore B (vettore induzione $B = \mu H$ = Weber/m²) connesso con l'area

(vettore induzione $B = \mu H$ = Weber/m²) connesso con l'area della spira od n volte se le spire sono n.

Ma la spira (o le n spire), ruotando nel campo magnetico costante, presentano un'area variabile alle linee del campo, che va da un massimo A quando il piano delle spire è perpendicolare alle linee del campo; a zero quando

il piano delle spire è parallelo alle linee di forza del campo. Se consideriamo l'angolo formato dalla direzione di B e la retta di giacitura del piano delle spire, considerando l'origine dei tempi variata di α (fase) avremo che istante per istante il flusso magnetico sarà

$$\varphi = (B \cdot A) \cos(\omega t + \alpha)$$

(con ω = velocità angolare di rotazione delle spire)

$(B \cdot A)$ = flusso massimo = Φ_M

$$\varphi = \Phi_M \cos(\omega t + \alpha)$$

derivando:

$$e = \frac{-d\varphi}{dt} = +\Phi_M \cdot \omega \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

se indichiamo con E_M il valore massimo

della forza elettromotrice ($E_M = \Phi_M \omega$) ...

della forza elettromotrice: $\left(E_M = \bar{\Phi}_M \omega\right)$ per $\alpha = 0$ si ha quando il piano delle spire è parallelo alle linee di forza del campo, cioè la retta di giacitura è normale alle linee di forza del campo cioè quando i conduttori delle spire paralleli all'asse di rotazione tagliano le linee del campo.

$$\boxed{e = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)}$$

Questa f.e.m. sinusoidale, applicata ad apparecchiature elettriche, si comporta in modo singolare, tanto che la corrente "i" generata può essere sfasata rispetto a "V" d.d.p ai capi dell'apparecchiatura.

In altre parole, pur essendo "V" ed "i" sinusoidali sono sfasati di un angolo ordinariamente indicato con $\varphi_{(rad)}$ (da non confondere con $\varphi_{(weber)}$ flusso del vettore B)

Poniamo quindi:

$$V = V_M \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$i = I_M \operatorname{sen}(\omega t - \varphi_{rad}) \quad \left(\begin{array}{c}\text{corrente in} \\ \text{ritardo} \\ \text{segno meno}\end{array}\right)$$

perciò:

$$p = (V_M I_M)(\operatorname{sen}(\omega t))(\operatorname{sen}(\omega t - \varphi))$$

ricordando dalla trigonometria che:

$$(\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$p = \left(\frac{V_M I_M}{2}\right)\left[\cos(\omega t - \omega t + \varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)\right]$$

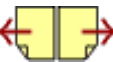
$$p = \left(\frac{V_M I_M}{2}\right)\left[\cos(\omega t - \omega t + \varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)\right]$$

ed anche:

$$p = \left(\frac{V_M I_M}{2}\right)\left[(\cos\varphi) + \operatorname{sen}\left(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

posti i valori efficaci: $V = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$; $I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$

avremo:

$$p = (VI)\operatorname{sen}\left(2\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + (VI)(\cos\varphi)_{m}$$

La potenza istantanea si scinde così in due valori: uno costante $(VI)\cos\varphi$, ed uno fluttuante sinusoidalmente:

$(VI)\,\text{sen}\left(2\omega t-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$ il cui valor medio in un periodo T è dato da:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \text{sen}\left(2\omega t-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)dt = \text{zero}$$

quindi la potenza media in un periodo resta il valore costante:

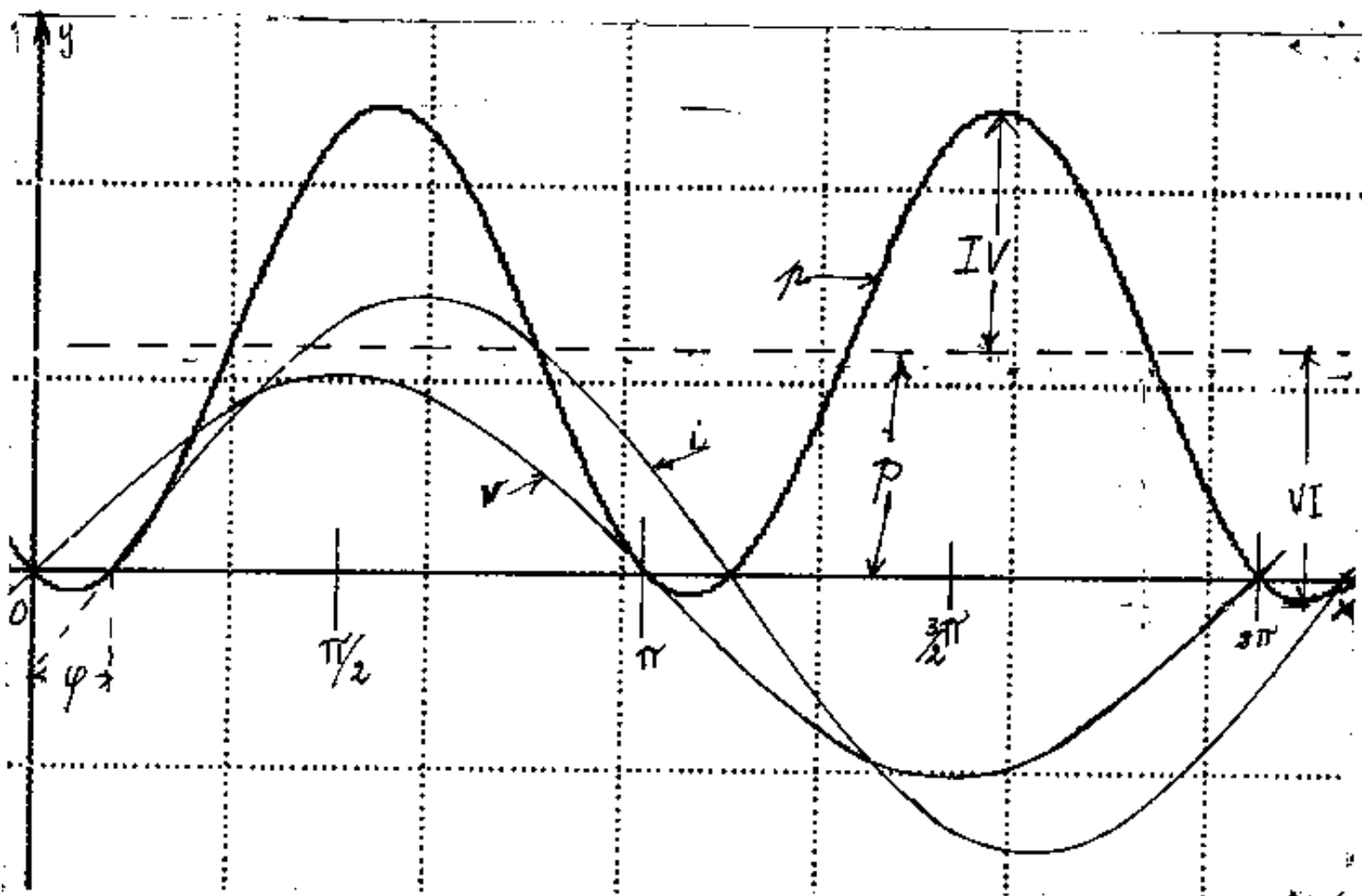
$$\boxed{P=(VI)\cos\varphi}$$

che è detta anche _potenza reale_ o _potenza attiva_ che è data dal prodotto dei valori efficaci per il coseno del loro sfasamento, ove $\cos(\varphi)$ è anche detto _fattore di potenza_.

Come in continua, invertendo i poli varia il verso della corrente, ma la potenza rimane

la stessa, così in alternata i valori efficaci del semiperiodo positivo, e quelli negativi del successivo semiperiodo, danno la stessa potenza media, ma la frequenza è doppia perché varia per semiperiodi

$$P = (VI) = (-V)(-I)$$

Riportiamo l'andamento grafico di:
v, i, p,

L'ampiezza della sinusoide di frequenza doppia è VI, indipendente dal fattore potenza "φ"; tale sinusoide ha lo stesso asse x di v e di I quando ($\varphi = \pi/2$); mentre per: ($\varphi = 0$) la sinusoide di p a frequenza doppia è tutta

sinusoide di p a frequenza doppia è tutta sopra l'asse x, è tutta positiva restando tangente l'asse x nei punti: zero, π; 2π. —

In ogni condizione: $VI = P_a$ è detta potenza apparente; mentre: $Q = (VI)\,\mathrm{sen}\,\varphi$ è detta potenza reattiva o Varpotenza

Le tre forme di potenza, tutte misurabili in volt·amper, sono connesse fra loro:

$$VI = P_a = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

si può esprimere:

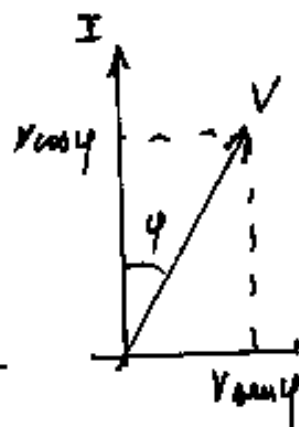
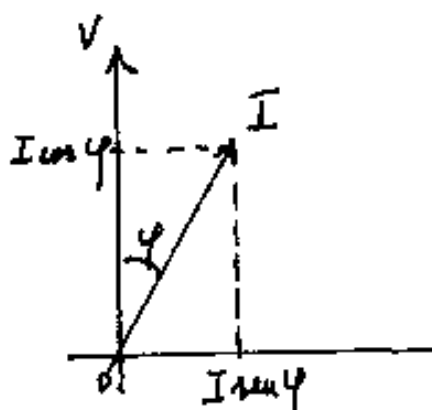
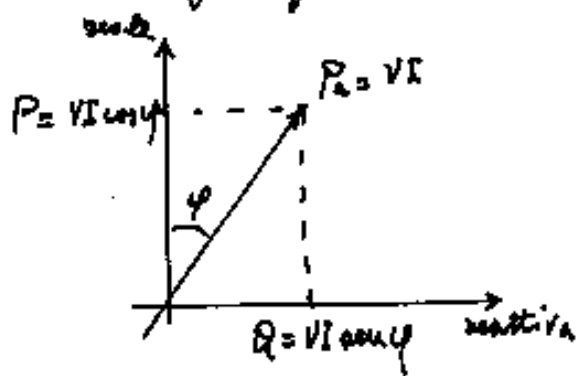
La potenza reale o attiva $P = P_a \cos\varphi$

La potenza reattiva o varpotenza $Q = P_a \operatorname{sen}\varphi$

Ciò porta a diverse possibili rappresentazioni grafiche:

reale; $P = VI\cos\varphi$; $P_a = VI$; φ; $Q = VI\operatorname{sen}\varphi$; reattiva

V; I; $I\cos\varphi$; φ; O; $I\operatorname{sen}\varphi$

I; V; $V\cos\varphi$; φ; $V\operatorname{sen}\varphi$

La potenza reale è positiva per: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

" " è negativa per: $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$

L'energia reattiva (integrale nel tempo

della potenza reattiva) assume per ogni semiperiodo sia il segno positivo, che negativo, per cui il segno della energia reattiva è convenzionale. Se la corrente I è in ritardo rispetto a V, assumeremo Q positiva $(Q>0)$; se la corrente I è in anticipo rispetto a V, assumeremo $Q<0$ (negativa).

I in ritardo su $V \rightarrow \varphi<0 \rightarrow \operatorname{sen}\varphi<0 \rightarrow Q>0$ (come nell'esempio)

Trattandosi di valori alternati nel segno, la misura di V e di I con strumenti per corrente continua, sarebbe impossibile perché ogni semiperiodo l'indice dello strumento sarebbe sollecitato a muoversi con versi opposti e lo vedremmo praticamente fermo sullo zero. Sono invece adeguati per misure in continua ed in alternata gli strumenti termici che non sono influenzati dal verso di I. Oppure elettrodinamici od elettrostatici con particolari avvertenze.

Per tener conto dei valori efficaci, poiché hanno rapporto costante coi massimi, basta la graduazione dello strumento.

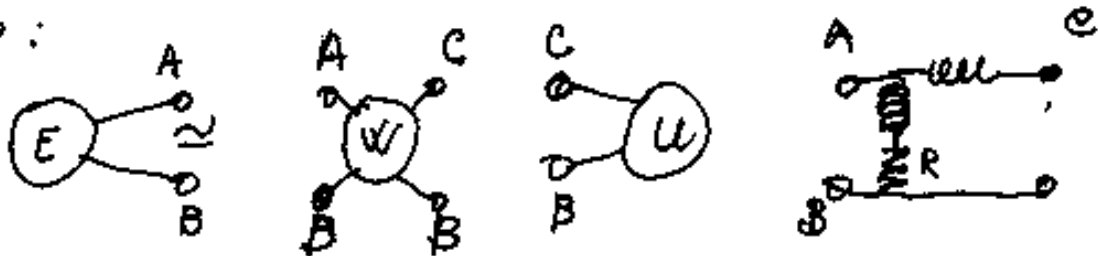
Il valore: $P = VI\cos\varphi$

può determinarsi anche misurando V ed I come sopra e φ con cosfimetri, ma non si usa. Si costruiscono invece particolari

si usa, si costruiscono invece particolari strumenti chiamati Wattmetri capaci di indicare direttamente P.

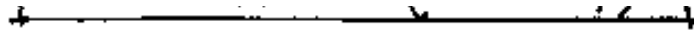
Vediamo come ciò sia possibile: si abbia un generatore (E) ed una utilizzazione (U) e sia (W) lo

strumento:

A ≃ B (E); A C B B (W); C B (U); A C R B

Per fissare le idee consideriamo nel polo A un potenziale alternato (fase) ed in B un neutro.

Internamente al Wattmetro poniamo fra A e C una bobina (avvolgimento solenoide) ampe=rometrica, e fra A e B una bobina (avvolgimento solenoide) voltmetrica in serie ad una resistenza R per limitare il flusso di corrente.

La bobina amperometrica sia fissa e se fosse posta su un amperometro elettrodinamico misurerebbe:

$$i = I_M \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

La bobina voltmetria sia mobile (cioè connessa con l'indice esterno) e se fosse posta in un voltmetro elettrodinamico mi-surerebbe:

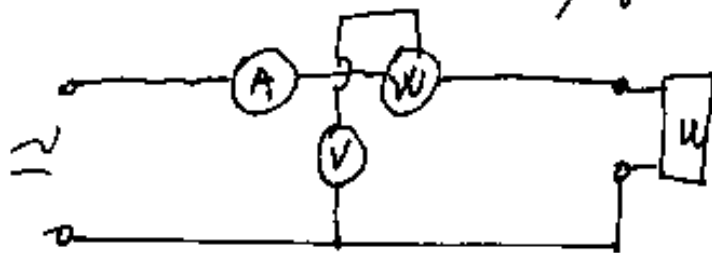
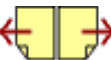
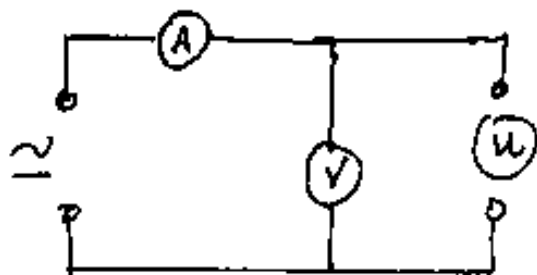
$$V = V_M \operatorname{sen}(\omega t)$$

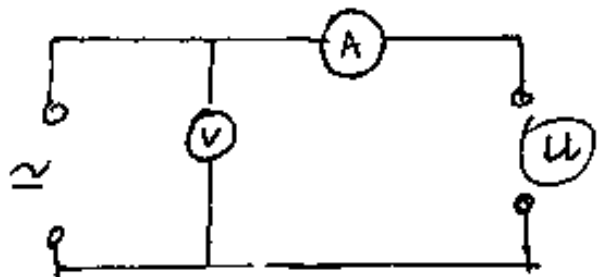
Chi genera il campo magnetico per far girare

la bobina voltmetrica è la: $i = I_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ della amperometrica; la notevole resistenza posta in serie alla voltmetrica limita la corrente i_v che la percorre e pertanto il campo magnetico da essa prodotto è trascu=rabile rispetto a quello della i, la coppia che fa ruotare la voltmetrica (l'indice dello strumento) è: $\boxed{c = K i\, i_v}$ ed indica

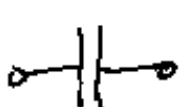
$$p = \boxed{VI \cos\varphi} = W \quad \text{(Watt)}$$

volendo misurare $\cos\varphi$ occorrono tre strumen=ti: un voltmetro V, un amperometro A, un Wattmetro W disposti come in figura:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{W}{VI}}$$

Sulle misure elettriche è bene ricordare che lo strumento deve consumare il minimo possibile di energia; infatti un amperometro di resistenza interna ρ_A su una utilizzazione di resistenza R assorbe la potenza $i^2\rho_A$ rispetto ad i^2R utilizzata,

Un Voltmetro di resistenza ρ_V sarà attraversato dalla corrente $i_V = \frac{V}{\rho_V}$ e la potenza assorbita $\frac{V^2}{\rho_V}$. Se poniamo:

l'amperometro segna la somma delle correnti che attraversano U e V, mentre il voltmetro segna la tensione diminuita dalla caduta di tensione: $\Delta V = i \rho_A$ che si verifica in A. Si usa per correnti intense e tensioni relativamente deboli.

Invece:

si usa per tensioni elevate e correnti relativamente deboli perché la tensione misurata è la somma delle tensioni $(V_A + V_U)$

Le utilizzazioni

Importanza fondamentale è conoscere cosa avviene in un circuito applicato ad un generatore di f.e.m. continue o alternate.

considereremo tre tipi elementari di utilizzazione:

1) Resistenza ohmica pura: "R" che al passaggio della corrente disperde in calore l'energia assorbita e provoca la caduta di potenziale $V = IR$
V (Volt); I (Amper); R (ohm).
In effetti salvo particolari accorgimenti le resistenze non sono "pure" ma presentano anche autoinduzione il simbolo è R

2) Induttanza si indica: "L" e si misura in Henry.

3) Capacitá si indica: "C" e si misura in Farad.

Per le resistenze vale la legge di Ohm

$V = IR$ sia in continua che in alternata

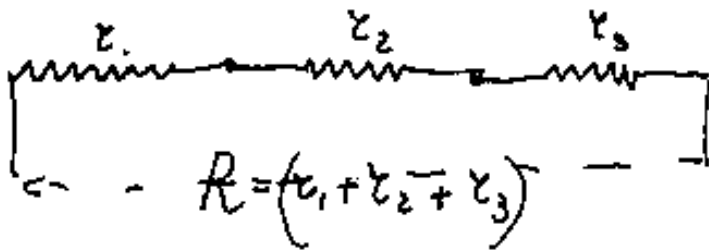
$W = V^2/R = I^2R$ ove V ed I sono valori efficaci

si può usare come potenziometro

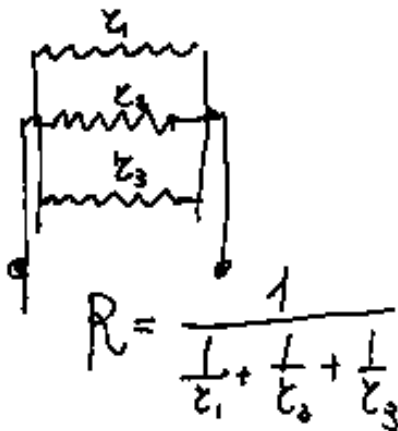
V_1 R_2 V_2

$$V_2 = V_1 \frac{R_2}{R_1}$$

$$R = \rho \frac{l}{A} = (\text{resistività})_{\text{Ohm.cm.}} \frac{(\text{lunghezza})\ (\text{cm})}{(\text{Area})\ (\text{cm}^2)} = \text{Ohm.}$$

r_1 r_2 r_3

resistenze in serie

$$R = (r_1 + r_2 + r_3)$$

r_1 r_2 r_3

resistenze in parallelo:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}$$

Per le correnti alternate su resistenze

Il fattore potenza: $(\varphi = 0)$; $\cos\varphi = 1$

la potenza reattiva $Q = 0$ essendo $(\operatorname{sen}\varphi = 0)$

la potenza apparente $P_a = VI$

Per le induttanze

Abbiamo visto, in corrente continua, la generazione di un campo magnetico e la costituzione di una elettrocalamita mediante un avvolgimento (solenoide), se

nel solenoide circola una <u>corrente variabile</u>, ai capi si verifica una forza elettromotrice:

$$f.e.m. = \boxed{e = -L\frac{di}{dt}}$$

ove L è il coeff. di autoinduzione del solenoide

$L = L_1 + L_2 + \cdots L_n$ = solenoidi in serie

$L = 1/\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots \frac{1}{L_n}\right)$ = solenoidi in parallelo.

Poichè (in via teorica) consideriamo il conduttore, che costituisce il solenoide, privo di resistenza ohmica (sarebbe meglio dire trascurabile), avremo che la tensione "V" agli estremi sarà:

$$(V+e) = 0 \; ; \quad (V = -e)$$

$$V = L\frac{di}{dt} \; ; \quad di = \frac{V}{L}dt$$

$$V = V_m \operatorname{sen}(\omega t) \; ; \quad i = \int \frac{V_m}{L}\operatorname{sen}(\omega t)\, dt =$$

$$\boxed{i = \left(\frac{V_m}{\omega L}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$ in ritardo

la fase di "i" rispetto a "V": $(-\varphi) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ "i" e "V"

... fase di i rispetto a V; $(-\varphi) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ i e V sono in quadratura

$$\boxed{I = \frac{V}{\omega L}}$$ (valori efficaci)

Il prodotto (ωL), che tiene il posto di R nella legge di ohm, si chiama: "reattanza induttiva" o reattanza magnetica si esprime in (ohm) quando L è in (Henry) e si simboleggia con $X_M = \omega L$

con la notazione simbolica:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{j\omega L} = \frac{\dot{V}}{j X_M} = -j\frac{\dot{V}}{X_M}$$

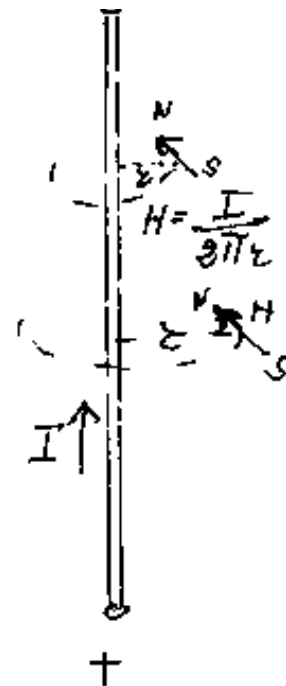
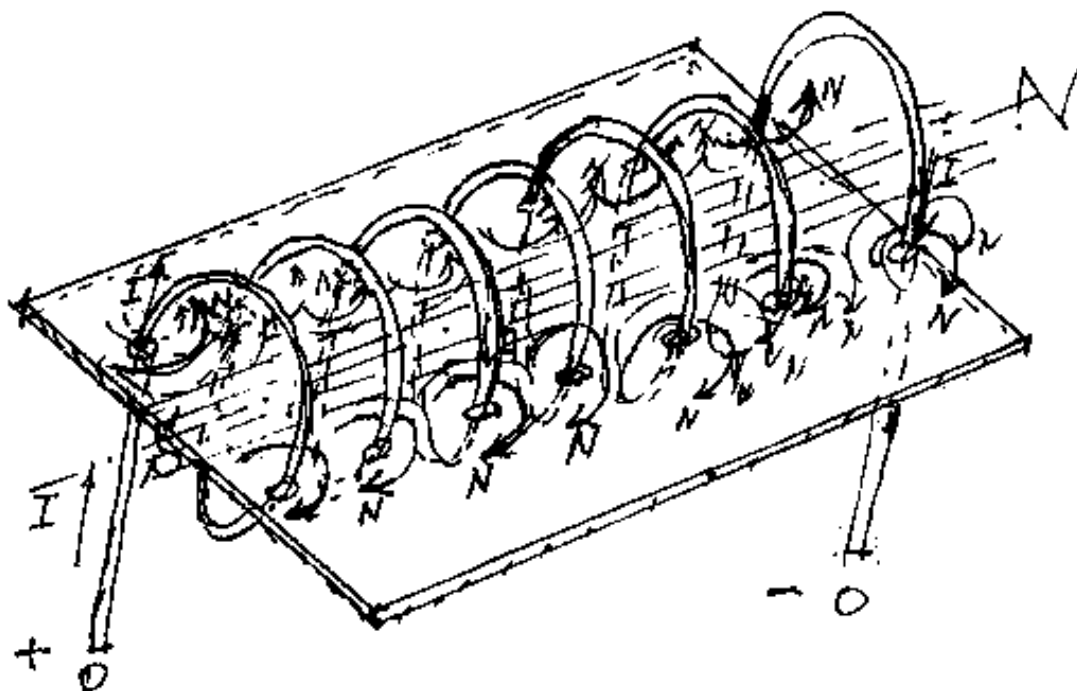
La potenza istantanea: $p = v i$

" reale $P = 0$

fattore potenza: $\cos(\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

potenza reattiva $Q = VI = \frac{V^2}{X_M}$ $(\operatorname{sen}\varphi = 1)$

potenza apparente $P_a = VI = Q$

la potenza apparente uguaglia la reattiva.

La f.e.m.

$$e = \frac{-d\Phi}{dt}$$

consideriamo il flusso generato da un solenoide percorso dalla corrente "i" e supponiamo di concatenare con quel flusso, il solenoide stesso avremo che:

$$\boxed{\Phi = Li}$$

ove L è il <u>coefficiente di autoinduzione</u>. (induttanza).

Quindi il flusso Φ è proporzionale ad "i" e ad "L".

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{(\text{Weber})}{(\text{Amper})} = \frac{\text{Volt-sec}}{\text{amper}} = (\text{ohm}\cdot\text{sec}) = \underline{\text{henry}}$$

avremo $d\phi = L\,di$

$$\boxed{e = -L\frac{di}{dt}}$$

"L" dipende dalle caratteristiche del solenoide,

L dipende dalle caratteristiche del solenoide,
che può essere un avvolgimento toroidale, o
cilindrico, può essere corto o lungo:
internamente alla spirale cilindrica
o toroidale, vi possono essere materiali
diversi, aria, oppure ferro dolce;

il diametro delle spire, (che possono essere affiancate o discoste), ecc sono tutti elementi che influenzano il valore di "L".

Facciamo una esperienza prendiamo un cilindro di cartone ed avvolgiamoci molte spire di filo di rame isolato, poniamo in serie una lampadina elettrica e inseriamo la spina la lampadina si accende.

Iniziamo ora a porre ferri rettilinei, fili di ferro, o ferri da calza, dentro il cilindro via via che aumenta il quantitativo di ferro dolce nel cilindro (nel solenoide) la lampadina si accende sempre meno fino a ridursi ad un filamento appena arrossato.

La $I = \frac{V}{\omega l}$ ci dice che anche il materiale

[illegible] $\frac{\ldots}{\omega L}$ [illegible]

del nucleo del solenoide ha grande importanza su L

È logico che l'alternarsi della tensione (e quindi della corrente) alterna il campo magnetico dell'elettrocalamita, e il lavoro per orientare i magnetini elementari è impedimento ae lipero passaggio della corrente.

L'impedimento è anche tanto maggiore quanto maggiore è la frequenza: ($\omega = 2\pi f$)

A questo punto dobbiamo dimensionare L.

Abbiamo visto che il flusso magnetico Φ del vettore B è: ($H = \frac{Ni}{l_0}$)

$$\Phi = BA = \mu HA = \mu \frac{Ni}{l_0} A$$

ma questo flusso si concatena con ciascuna spira di area A del solenoide, per cui

$$\Phi_N = LI = \frac{\mu A}{l_0} N^2 i$$

coeff. di <u>autoinduzione</u>

$$\boxed{L = \frac{\mu A N^2}{l_0}}$$

(induttanza)

Ma il flusso Φ potrebbe concatenarsi con un'altro solenoide, ove N_1 ed N_2 sono il numero delle spire dei due solenoidi, indicando con M_{12} il coefficiente di mutua induzione fra i due solenoidi avremo:

$M \quad \mu A (\ldots)$

$$M_{12} = \frac{\mu A}{l_0}(N_1 N_2)$$

A= area costante delle spire; l_0 lunghezza $2R\pi = l_0$ di un avvolgimento toroidale, ma valido anche come lunghezza del solenoide cilindrico quando sia sufficientemente lungo per solenoidi cilindrici corti o con spire

a più strati, valgono ancora formule del tipo:

$$L = K \mu N^2$$

ove "K" dipende dalla configurazione geometrica del solenoide.

Poiché il calcolo dell'induttanza "L" è fondamentale nello studio delle onde elettromagnetiche, (radio in particolare), diamo alcuni cenni sulle induttanze.

Le bobine (per radio) erano, almeno nei primi tempi, di vario tipo: (cilindriche, a nido d'api, a fondo di paniere, ecc), noi ci limitiamo ad esaminare le bobine cilindriche, cioè avvolte su tubi isolanti, all'interno dei quali possono esserci nuclei ferromagnetici mobili (per variare L). *; D = diametro = 2R

Sia R, il raggio esterno del tubo isolante -

$A = R^2\pi \simeq$ area di una spira $= \left(\frac{D^2\pi}{4}\right)$

$l =$ lunghezza del tubo cilindrico

$N =$ numero delle spire

$\delta =$ passo delle spire $= \left(l/N \right)$ $\left(\begin{matrix}\text{se affiancate} \\ = \text{Diametro filo}\end{matrix}\right)$

$N/l =$ spire per centimetro $= 1/\delta$

$h =$ lunghezza del conduttore $= \left(\sqrt{(2R\pi)^2 + \delta^2}\right) \cdot N$

Consideriamo ($\mu = 1$) nucleo ad aria senza materiale ferromagnetico.

in microHenry
$$L = \frac{\pi^2 N^2 D^2}{l \cdot 10^3}$$

$$L \cong \frac{4 \pi N D}{\ell \cdot 10^3}$$ in funzione della lunghezza del filo quando δ sia piccolo

$$L \cong \frac{l \cdot D}{\delta} \, 0{,}00314$$ "

Capacitá:

C (in farad) $C = \varepsilon \frac{S}{\delta}$

(in picofarad)
$$C = 0{,}08859 \cdot \varepsilon_r \frac{S(cm^2)}{\delta\,(cm)}$$

Consideriamo un generatore di corrente continua, per esempio una pila di f.e.m. "E", ed applichiamo un condensatore di capacità "C" ...

Capacità "C"; alla chiusura del circuito, indicando con "V" la ddp ai capi del conden= satore avremo: $i = \frac{E-V}{R}$ ove R è la re= sistenza del circuito al passaggio della cor= rente. (R comprende la ρ interna della pila, la ρ del circuito e la resistenza del condensatore)

E R C

$(E - V) = R i$;

$q = C V$ = (coulomb)

$$\frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dV}{dt} = (i)$$

$$(E - V) = RC \frac{dV}{dt}$$

separando le variabili:

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dV}{(E-V)} = -\frac{d(E-V)}{(E-V)}$$

e integrando:

$$\frac{t}{RC} = -\ln(E-V) + h'$$

(sia e = base dei ln) $(E - V) = e^{-\frac{t}{RC} + h'} = h\, e^{-t/RC}$

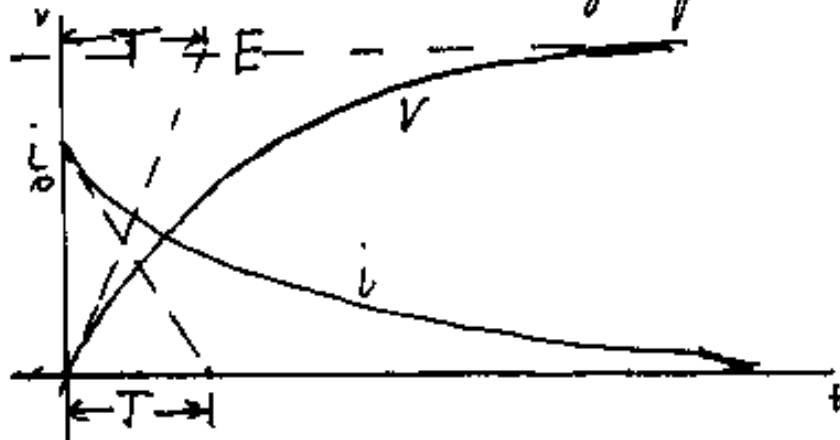
Inizialmente per $t = 0$; $V = 0$ per cui:

$$\boxed{h = E}$$

$V = E - h\, e^{-t/RC}$; $\boxed{V = E\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$

$$\boxed{q = CE\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Se poniamo in ascisse i tempi ed in ordinate le tensioni avremo il grafico del fenomeno trasitorio di carica di un condensatore ($i_0 = E/R$)

la tensione V ai capi del condensatore tende asintoticamente ad E, al limite

$$\boxed{Q = CE} \quad \text{(coulomb)}$$

Il prodotto: $(RC) = T$ è detto costante di tempo (ohm.farad) = sec. per $R = 1$ ohm; $C = 1$ picofarad; $T = 1$ picosecondo = (un milionesimo di secondo = 10^{-6} sec)

Inversamente il periodo di scarica ove $E = 0$ per cui:

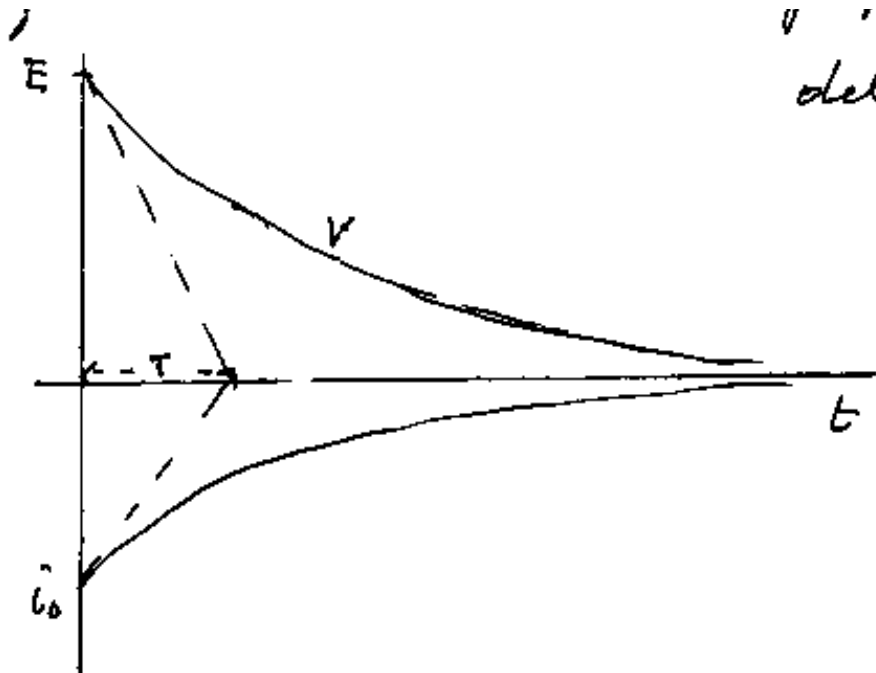
$$-V = RC \frac{dV}{dt}$$

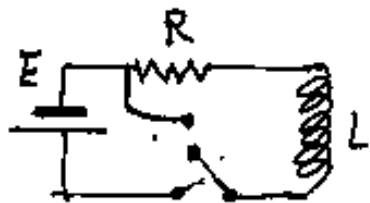
supponendo che la carica iniziale del condensatore fosse E, integrando: (per $t = 0 \rightarrow V = E$) per cui:

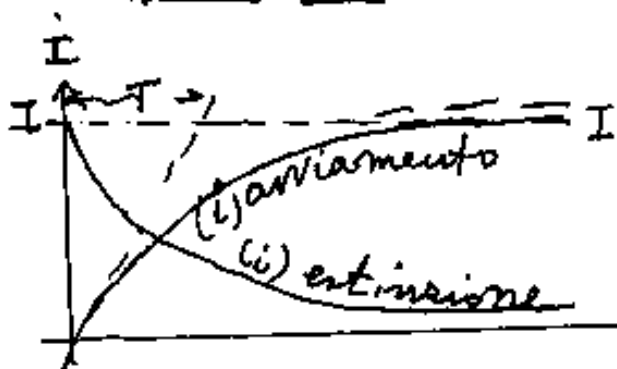
$$\boxed{V = E\, e^{-t/RC}}$$

$$\boxed{q = CE\, e^{-t/RC}}$$

$$\boxed{i = -\frac{E}{R}\, e^{-t/RC}}$$

tenuto conto che "i" ha verso opposto rispetto alla fase di carica si ha il grafico di scarica

del condensatore

Formule analoghe si hanno se consideriamo le correnti di avviamento e di estinzione di un solenoide applicato ad una pila

$$E - L\frac{di}{dt} = Ri$$

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$T = \left(\frac{R}{L}\right)$ costante di tempo

$$I = E/R$$ (al limite)

Togliendo E e cortocircuitando su R avremo

$$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

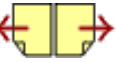
Mentre la sorgente continua E una volta caricato il condensatore estingue la corrente (le lamine sono isolate) la sorgente alternata applicata al condensatore con la semifase positiva lo carica

in un verso con la semifase negativa ne accelera lo scarico e lo ricarica con verso opposto:

$$q = C v$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

ma v è sinusoidale : $v = V_M \cdot \operatorname{sen}(\omega t)$

$$i = \omega C V_M \left(\operatorname{sen} \omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = (\omega C) V$$

cioè confrontando la legge di ohm.

abbiamo la reattanza capacitiva $\boxed{X_c = \frac{1}{(\omega C)}}$

$$I = \left(\frac{1}{X_c}\right) V$$

e con le notazioni simboliche:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\frac{-j}{\omega C}} = \boxed{j \frac{\dot{V}}{X_c} = \dot{I}}$$

La potenza istantanea $p = vi$

" Reale $P = 0$

La potenza reattiva: $\boxed{Q = -VI = \frac{I^2}{\omega C} = -\omega C V^2}$

La potenza apparente $\boxed{P_a = VI}$

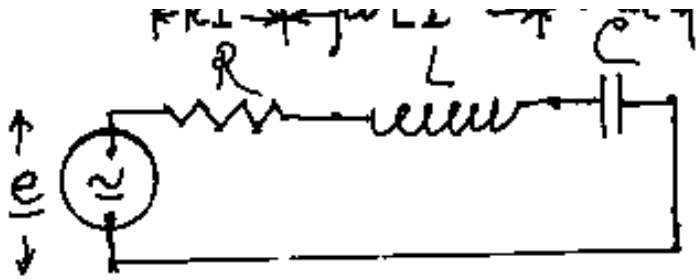
l'energia immagazzinata nel condensatore

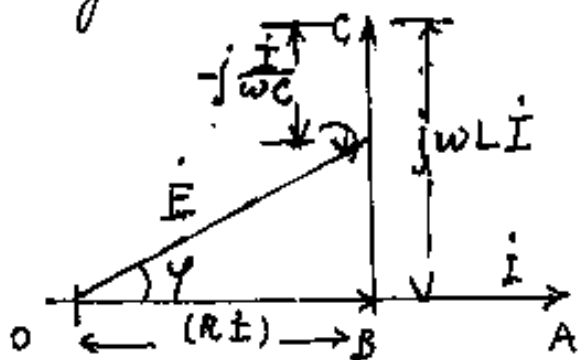
$$\boxed{W = \frac{1}{2} C V^2}$$

Considieriamo ora il circuito costi-

$\leftarrow R\dot{I} \rightarrow \leftarrow j\omega L\dot{I} \rightarrow \leftarrow -j\frac{\dot{I}}{\omega C} \rightarrow$ tuito da una sor

R L C

$\underline{e}$

tuito da una sorgente alternata su una resistenza ohmica R, in serie con una induttanza L, in serie con una capacità C, la corrente i che circola nel circuito è comune $\dot{I}$

Per cui, sommando le d.d.p ai capi delle singole utilizzazioni e riportandole sul diagramma a notazione simbolica si ha:

$$\overline{OB} = R\dot{I}$$

$$\overline{BC} = j\omega L\dot{I}$$

$$\overline{CD} = -j\frac{\dot{I}}{\omega C}$$

perciò:

$$\overline{OD} = \dot{E} = \dot{I}\left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)$$

Introduciamo così il concetto di

Impedenza $= \dot{Z} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]$

e possiamo scrivere la relazione simbolica

$$\dot{I} = \dot{E}/\dot{Z}$$

la relazione fra i moduli: $I = \frac{E}{Z}$

e l'angolo di sfasamento φ

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{(\omega L) - \left(\frac{1}{\omega C}\right)}{R} = \frac{X}{R}$$

Il modulo di $\dot{Z}$ è

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$Z = \frac{V}{I}$$

Il modulo di Z non potrá mai esse nullo, perché radice quadrata di somma di quadrati, peró puó minimizzarsi quando:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0$$

cioé:

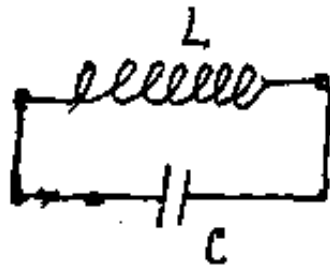
$$\omega^2 LC = 1$$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \left(\text{rad}/\text{sec}\right); \quad (\omega = 2\pi f)$$

La frequenza: $\boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$ (cicli/sec)

In via teorica consideriamo il circuito:

L

C

ed iniziamo da un certo istante in cui il condensatore sia carico, esso possiede una certa energia potenziale: $Q = CV$; $W = \frac{V^2 C}{2}$ che scaricherá sull'induttanza L la

quale nel produrre il suo campo magnetico assumerà l'energia $W = \frac{1}{2} L I^2$, uguagliando le due energie potenziali:

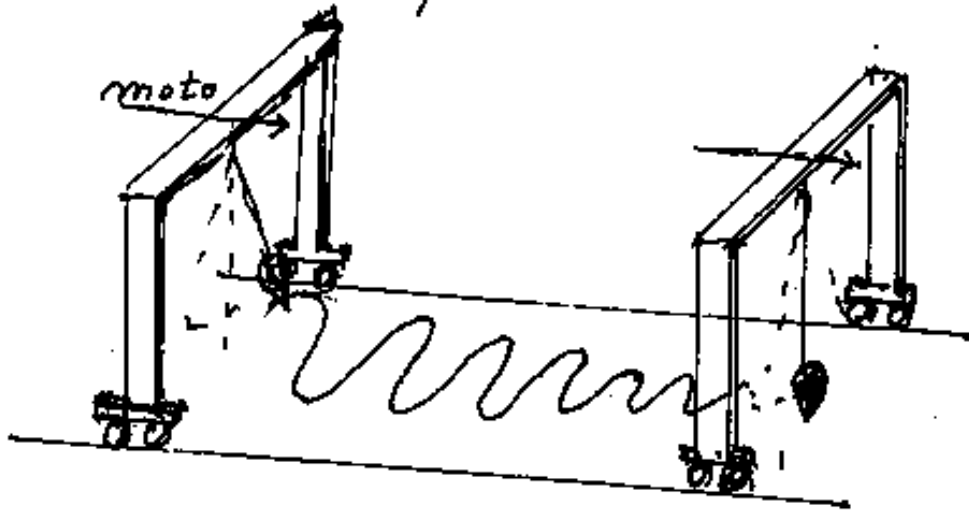
$$\frac{V}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Il circuito si scambia energia (elettrica ⇄ magnetica).

con inversione di corrente e di polarità, si è quindi in presenza di correnti alternate che risulteranno sinusoidali, la cui frequenza: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ è detta frequenza di risonanza per quei valori di L e di C.

Come un pendolo che scambia energia gravitazionale con energia cinetica, e viceversa, e continuerebbe indefinitamente se non vi fossero attriti; anche la nostra onda elettromagnetica proseguirebbe indefinitamente, però la concezione è puramente teorica, perché gli attriti esistono anche per la "i" e quindi avremo una oscillazione sinusoidale smorzata esattamente rappresentata da un pendolo di uguale periodo che spostandosi perpendicolarmente all'oscillazione traccia sul piano della sua traettoria.

traccia sul piano della sua traettoria.

moto

Data l'importanza dell'argomento cerchiamo di capire meglio, studiando il trasitorio del circuito in figura:

E R C L

E = f.e.m. continua (pila)

V = tensione variabile ai capi del condensatore C.

$\left(L \frac{di}{dt}\right)$ = f.e.m. di autoinduzione dell'induttanza L.

$$E - V - L\frac{di}{dt} = Ri$$

Si noti come la corrente "i" che la f.e.m. E della pila spingerebbe nel circuito, sia ostacolata dalla carica del condensatore, $v = \frac{Q}{C} = \frac{it}{C}$; e dalla f.e.m. di L dovuta alla variazione: $\frac{di}{dt}$ che è una variazione di corrente che genera una variazione di flusso magnetico, che genera una contro f.e.m.

$$i = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt} : \text{ ed anche: } \left(di = C\frac{d^2V}{dt^2}\right)$$

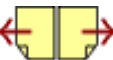
$dt \quad dt \quad (\quad dt^2)$

sostituendo:

$$(E - v) - LC\frac{d^2v}{dt^2} = RC\frac{dv}{dt}$$

dividiamo per LC: portando al secondo membro

$$\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + \frac{R}{L}\left(\frac{dv}{dt}\right) + \frac{(v-E)}{LC} = 0$$

equazione differenziale del secondo ordine,

Poiché: $(dv) = d(V-E)$ se poniamo $(V-E) = y$

e $t = x$ l'equazione diventa:

$$y'' + \left(\frac{R}{L}\right) y' + \left(\frac{1}{LC}\right) y = 0$$

Per risolverla consideriamo l'eq. caratteristica

(vedi III vol)
$$Z^2 + \left(\frac{R}{L}\right) Z + \left(\frac{1}{LC}\right) = 0$$

le cui radici:

$$\alpha_1, \alpha_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

risolvono l'integrale generale:

$$(V-E) = \alpha\, e^{\alpha_1 t} + \beta\, e^{\alpha_2 t}$$

ove α, β, sono le costanti d'integrazione.

Esaminiamo le radici: α_1 ed α_2 esponenti, della base "e" dei logaritmi naturali.

Vi sono tre casi:

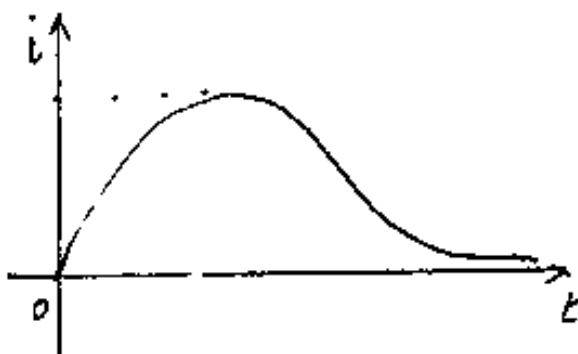
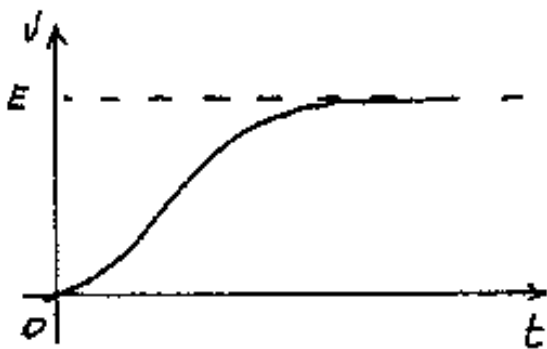
$$\Delta \text{(discriminante eq 2°)} = \left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}\right) \gtreqless 0$$

$\Delta(\ldots)=(\frac{\ldots}{4L^2}\quad LC)<0$

I) Se il discriminante è positivo, si hanno due radici reali, dovrà essere:

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ove: $\left(2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$ è detta <u>resistenza critica</u>

I diagrammi di i e v in funzione di t sono:

"i" cresce da zero ad un massimo e torna a zero quando C è carico.

"v" ai capi del condensatore C parte da zero e tende asintoticamente ad E.

II) $(\Delta = 0)$

sia: $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $\quad (\Delta = 0)$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\left(\frac{R}{2L}\right)$$

$$(V - E) = A e^{-\frac{R}{2L}t} + \beta t e^{-\frac{R}{2L}t}$$

III) $(\Delta < 0)$ è il caso di radici immaginarie nell'equazione caratteristica.

! narie nell'equazione caratteristica,
in questo caso (vedi vol. III) si opera
una trasformazione sostituendo
i coefficienti α e β otteniamo una for=
ma trigonometrica ..

Infatti ricordiamo (dalla trigometria

complessa di Eulero) che:

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos(x) \qquad e^{ix}=\cos(x)+i\,\text{sen}(x)$$

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\text{sen}(x) \qquad e^{-ix}=\cos(x)-i\,\text{sen}\,x$$

Nel nostro caso poniamo:

$$\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=\sqrt{(-1)\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\right)}=\left(\sqrt{-1}\right)(\omega)=j\omega$$

notare che: $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}=2\pi f$ (frequenza di risonanza f)

qui il valore di ω è variato non essendo $R=0$.

Le radici dell'equazione caratteristica diventano:

$$\left(\left(-\frac{R}{2L}\right)+j\omega\right)t \quad ; \quad \left(\left(\frac{-R}{2L}\right)-j\omega\right)t$$

avremo:

$$(V-E)=e^{\frac{-Rt}{2L}}\left[A\,e^{+j\omega t}+B\,e^{-j\omega t}\right]$$

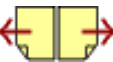
Consideriamo due diverse costanti di integrazione:

$$M = (A + B) \; ; \quad N = i(A - B)$$

cioè:

$$A = \left(\frac{M + N/i}{2}\right) ; \quad B = \left(\frac{M - N/i}{2}\right)$$

sostituendo:

$$(V - E) = e^{-\frac{Rt}{2L}}\left[\left(\frac{M + N/i}{2}\right)e^{+j\omega t} + \left(\frac{M - N/i}{2}\right)e^{-j\omega t}\right]$$

$$(V-E)=e^{-\frac{Rt}{2L}}\left[M\left(\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\right)+N\left(\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right)\right]$$

$$\boxed{(V-E)=e^{-\frac{Rt}{2L}}\left[M\cos(\omega t)+N\operatorname{sen}(\omega t)\right]}$$

Cerchiamo di definire le costanti di integrazione con condizioni limite.

per $t=0$; $V=0$; $e^{-\frac{Rt}{2L}}=1$;

$$-E=\left[M\cos(0)+N\operatorname{sen}(0)\right]$$

$$\boxed{M=-E}$$

Per trovare N facciamo la derivata: $\frac{dV}{dt}C$ moltiplicata "C" perché l'intensità di corrente $i=C\frac{dV}{dt}$ infatti $dQ=i\,dt=C\,dV=$ (variazione di carica).

$$\frac{d(V-E)}{dt}C=\frac{dV}{dt}C=i=-\frac{R}{2L}e^{-\frac{Rt}{2L}}\left[\left(M\cos(\omega t)+N\operatorname{sen}(\omega t)\right)\right]+$$

$$+e^{-\frac{Rt}{2L}}\left[-\omega M\operatorname{sen}(\omega t)+\omega N\cos(\omega t)\right]$$

L

per: $\boxed{t=0}$ si ha: $\boxed{i=0}$ $\boxed{e^{-\frac{RE}{2L}}=1}$

$$0=\frac{-R}{2L}(M)+\omega(N) \quad \text{Ma:} \quad \boxed{M=E}$$

$$\boxed{N=\frac{-RE}{2L\omega}}$$

$$(V-E)=e^{-\frac{RE}{2L}}\left[-E\cos(\omega t)+E\left(\frac{-R}{2\omega L}\right)\operatorname{sen}(\omega t)\right]$$

$$v = E\left[1 - e^{-\frac{Rt}{2L}}\left(\cos(\omega t) + \left(\frac{R}{2\omega L}\right)\operatorname{sen}(\omega t)\right)\right]$$

$$C\left(\frac{dv}{dt}\right) = i = CE\left[+\frac{R}{2L}e^{-\frac{Rt}{2L}}\left(\cos(\omega t) + \frac{R}{2\omega L}\operatorname{sen}(\omega t)\right) + \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{Rt}{2L}}\left(-\omega\operatorname{sen}(\omega t) + \frac{R}{2\omega L}\omega\cos(\omega t)\right)\right]$$

$$i = CE\,e^{-\frac{Rt}{2L}}\left[+\frac{R}{2L}\left(\cos(\omega t)\right) - \frac{R}{2L}\cos(\omega t) + \left(\frac{R^2}{4L^2\omega} + \omega\right)\operatorname{sen}(\omega t)\right]$$

$$i = \frac{CE\,e^{-\frac{Rt}{2L}}}{\omega}\left[\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega^2\right)\operatorname{sen}(\omega t)\right]$$

$$\left(\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega^2\right) = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \pm \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$i = \frac{CE}{\omega}\,e^{-\frac{Rt}{2L}}\,\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{LC}$$

$$i = \frac{E}{\omega L}\,e^{-\frac{Rt}{2L}}\operatorname{sen}(\omega t)$$

$$i = \frac{E}{\omega L} e^{\frac{Rt}{2L}} \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$i = E\left(\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{(\omega L)\, e^{+\frac{Rt}{2L}}}\right)$$

è meglio scrivere:

$$i = \left[\left(\frac{E}{\omega L}\right)\operatorname{sen}(\omega t)\right]_{\text{sinusoide}} \cdot \left[e^{-\frac{Rt}{2L}}\right]_{\text{fattore smorzante}}$$

fattore smorzante: $\left(e^{-\frac{Rt}{2L}} = 0\right)$ per $(t = \infty)$

Abbiamo già trattato lo smorzamento sul moto armonico, comunque ripetiamo le "dizioni."

$y = a\cos(\omega t)$ espressione di funzione sinusoidale: "a" = ampiezza massima della elongazione ($t = 0 + 2K\pi$, $0 \leq K < \infty$) che nel caso coseno per $t=0$; $y=a$

$y = a\cos(\omega t)\left(e^{-K(\omega t)}\right)$ ove: $e^{-K(\omega t)}$ = fattore smorzante

K = coefficiente di smorzamento

$\left(T = \text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ $2\pi K$ = decremento logaritmico

$\frac{y_n - y_{n+1}}{y_n}$ = smorzamento, da alcuni detto fattore di smorzamento

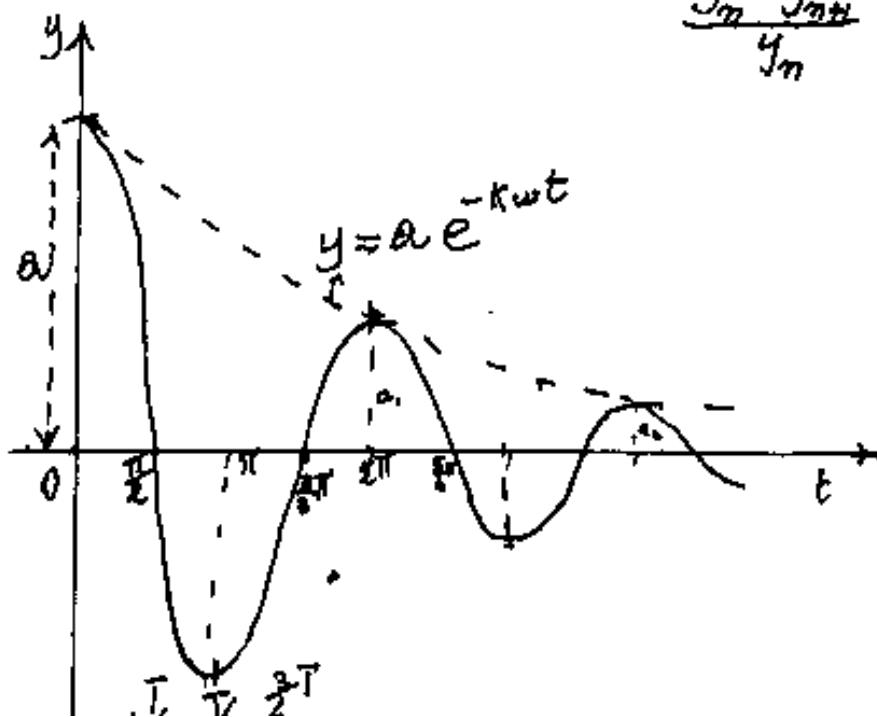
$y = a e^{-K\omega t}$

Si noti che se facciamo variare (ωt) di 2π in 2π avremo la serie:

$a e^{0}$; $a e^{-K2\pi}$; $a e^{-K4\pi}$

ma, $a e^{-K4\pi} = a\left(e^{-K2\pi}\right)^2$;

$a e^{-K6\pi} = a\left(e^{-K2\pi}\right)^3$

$\frac{T}{4}$ $\frac{T}{2}$ $\frac{3}{4}T$ $\qquad a e^{K6\pi} = a(e^{K2\pi})^3 \ldots\ldots$

Cioè si ha una progressione geometrica la cui ragione è: $e^{-2\pi K}$ che rappresenta "a" volte i massimi positivi decrescenti da "a" $(t=0)$ a zero per $t = \infty$. Siano a_1 ed a_2 due massimi positivi,

$a_1 e^{-2\pi K} = \frac{a_1}{e^{2\pi K}} = a_2$; $\frac{a_1}{a_2} = e^{2\pi K}$; prendiamo i

logaritmi naturali dell'espressione:

$$\ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \ln\left(e^{2K\pi}\right)$$

$$\ln(a_1) - \ln(a_2) = 2K\pi$$

diminuzione dei valori logaritmici di due massimi positivi consecutivi = decremento logaritmico

Ciò giustifica la definizione di

$2\pi K$ = decremento logaritmico

attenzione: non è $(a_1 - a_2)$ che sarebbe la diminuzione dei valori delle ampiezze a_1 e a_2, abbiamo dimostrato che il loro rapporto

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{2K\pi}$$ (progressione geometrica)

quindi essendo variabile il decremento delle ampiezze si è trovato costante il decremento del loro logaritmo

decremento del loro logaritmo.

———

Indice Enciclopedico Indice Pag. 196

La Risonanza

La risonanza si verifica fra le apparecchiature capaci di emettere vibrazioni della stessa specie e della stessa frequenza.
Nei suoni (da cui la parola risonanza), gli esempi sono molteplici: due diapason ove eccitando uno entra in vibrazione anche il secondo. Caratteristica l'esperienza di porre cavallucci di carta sulle corde di una chitarra, se un altro strumento fà la nota di una delle corde della chitarra, questa entrando in vibrazione fa saltar via il cavalluccio di carta mentre le altre corde sono rimaste ferme.
Ma a noi interessa la risonanza nelle onde elettromagnetiche, ove il circuito generatore ed il circuito

ricevente debbono avere la stessa frequenza: $f = \frac{\omega}{2\pi}$; $\left(\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$; $\boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$ L_1 e C_1; L_2 e C_2 possono essere diversi, ma $L_1 C_1 = L_2 C_2$ ciò porta: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1/C_1}{1/C_2}$

Le induttanze stanno fra loro come gli inversi delle capacità. (Nei circuiti in risonanza)

Dobbiamo riprendere due tipi di circuito che abbiamo già visti.

Superato il periodo transitorio, di apertura o di chiusura di un circuito reattivo sotto corrente continua si ha che, per un condensatore, non passa corrente, essendo le due lamine separate da un dielettrico (isolante). Per un solenoide, una volta costituita l'elettrocalamita, la corrente circola nel solenoide soggetta alla resistenza ohmica del solenoide stesso.

Una corrente alternata attraversa tanto più facilmente un condensatore, quanto più alta è la frequenza e quanto maggiore è la capacità. L'impedimento si chiama reattanza capacitiva, si indica con "X_c" $= \frac{-1}{\omega C}$

In un solenoide invece, oltre la resistenza ohmica, l'alternarsi del campo magnetico genera

ca, l'alternarsi del campo magnetico genera un impedimento che si chiama <u>reattanza induttiva</u>, si indica con $\boxed{X_L = \omega L}$ ed è tanto maggiore quando maggiore è la frequenza e tanto maggiore quanto maggiore è il coefficiente di autoinduzione "L" del solenoide.

Mentre una resistenza ohmica trasforma l'ener=
gia elettrica in energia termica, (effetto Joule)
Un condensatore accumula cariche elettriche,
(che restituisce), un solenoide produce un
campo magnetico, che restituisce in energia
elettrica. Cioè, mentre le resistenze ohmiche
disperdono in calore l'energia elettrica,
le reattanze (capacitiva e induttiva) accu=
mulano energia potenziale che restitui=
scono in energia elettrica.

Abbiamo già dato le equazioni di Maxwell,
e da esse il vettore di Poynting, sulla
potenza irradiata. Le onde radio sono
state scoperte da Hertz, ispirato dal
trattato di elettricità scritto dal Maxwell,
quest'ultimo, si dice, che avendo matemati=
camente rilevato che in casi particolari
la corrente elettrica si trasmetteva senza

la corrente elettrica si trasmetteva senza attriti e senza conduttori, ne faceva una battuta accademica. Hertz, rilevato che la scintilla che scocca fra i poli di un generatore non ha conduttori metallici, fece delle esperienze con oscillatori e risonatori,

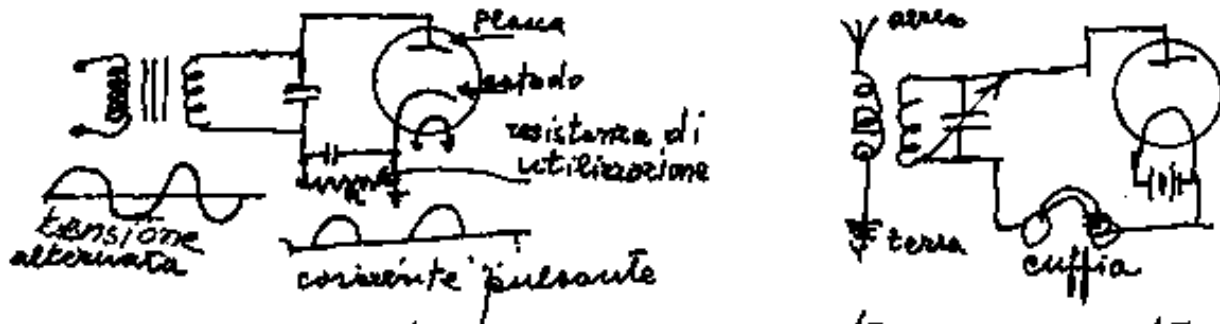
producendo onde elettromagnetiche che poi furono chiamate onde hertziane. e possono trasmettersi a distanza senza conduttori metallici. Hertz fece anche studi notevoli sulla luce violetta e sulla velocità dell'induzione magnetica, morì ancora giovane (1857 - 1894).
Le onde radio furono studiate dal Righi (1850 - 1921), eminente fisico che portò il suo contributo geniale nei vari campi della fisica, continuò le ricerche di Hertz, il suo oscillatore a sfere per dimostrare come nelle scintille elettriche si producevano onde elettromagnetiche di onda cortissima. Diede una veste sperimentale alle teorie di Maxwell, precorse l'invenzione di Marconi suo allievo.
Marconi con l'applicazione dell'antenna rese praticamente possibile la trasmissione

rese praticamente possibile la trasmissione anche a distanza notevole, e dal telegrafo al telefono senza fili, l'interesse produsse un rapido sviluppo. Il primo ricevitore utilizzato da Marconi fu quello inventato da Calzecchi-Onesti, dieci anni prima e sperimentato al Liceo di Fermo.

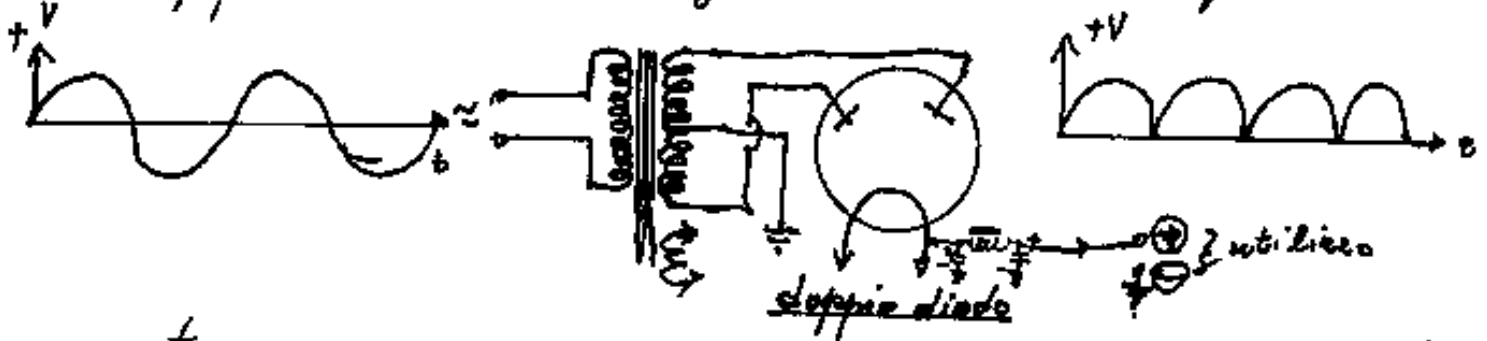
La Tecnologia

Le applicazioni si evolvono rapidissimamente, dalla pila di Volta alla lampadina di Edison, con la scoperta che il filamento della lampadina emette elettroni, (Effetto Edison) detto anche effetto termoionico o termoelettronico. L'effetto fu interpretato da G. Fleming, che costruì la prima valvola radio, aggiungendo una placca conduttrice nella lampadina. (Anodo positivo destinato ad attrarre e captare gli elettroni emessi dal filamento). La valvola fu detta "diodo" (due elettrodi) uno che emette elettroni, cioè il filamento, poi sostituito con conduttore detto "catodo"; l'altro elettrodo, la "placca", anodo, che se positiva attira gli elettroni, se negativa li respinge. La valvola fu usata come raddrizzatrice di tensioni alternate poste in placca, o come rivelatrice delle onde elettroma=

placca, o come rivelatrice delle onde elettromagnetiche provenienti dallo spazio. In entrambi i casi, però, restituisce solo la semionda positiva.

placca
catodo
resistenza di utilizzazione
tensione alternata
corrente pulsante
aereo
terra
cuffia

avremo quindi una corrente pulsante.

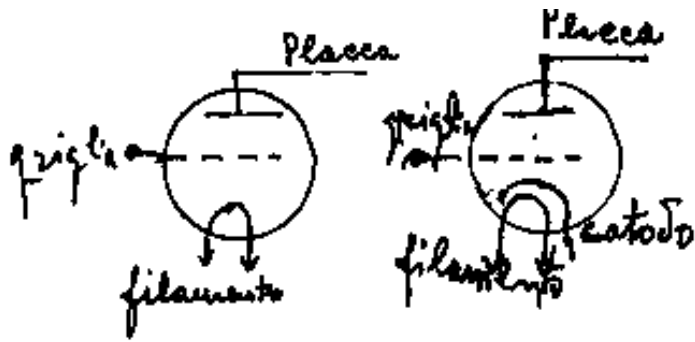
Volendo raddrizzare le due semionde, si usa il doppio diodo collegato con un trasformatore

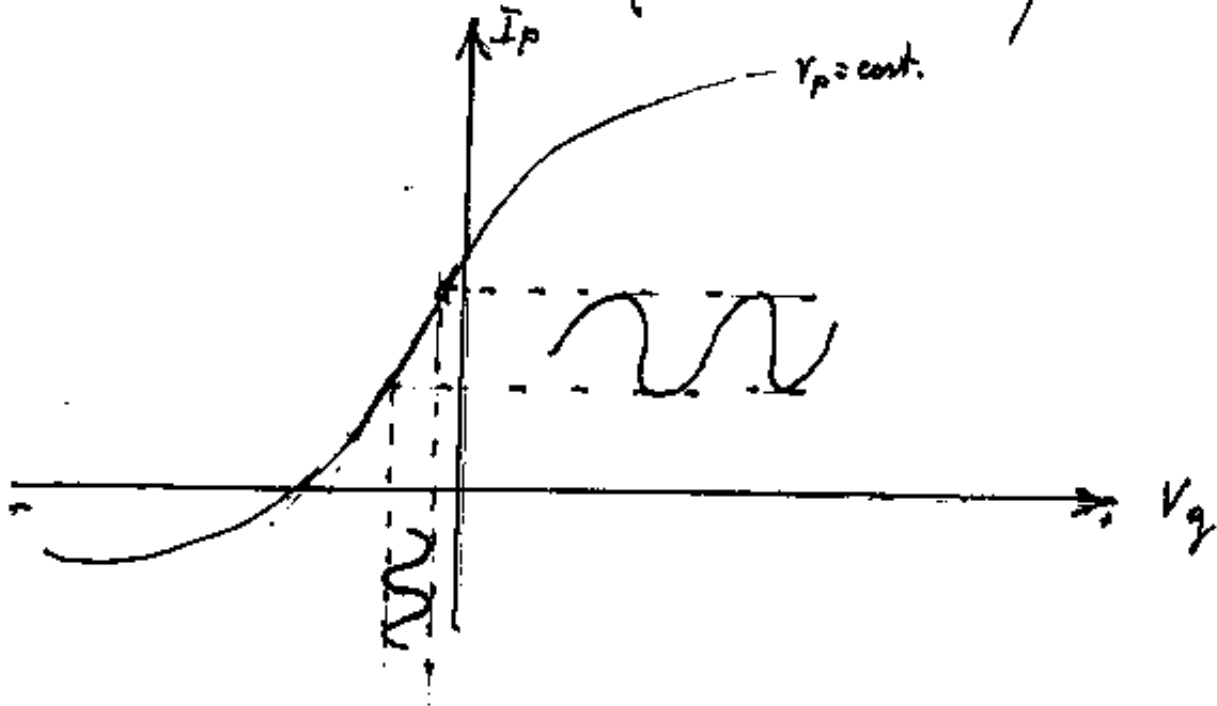
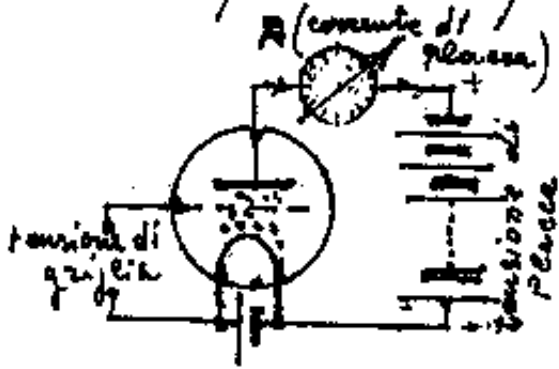
+V ~ t +V t doppio diodo utilizzo

opportuno, e si cerca con condensatori e impedenze induttive di limitare l'ondulosità della tensio= ne positiva.

Lee De Forest perfezionò la valvola "diodo" introducendo, fra filamento e placca un terzo elettrodo (la valvola è detta triodo) il terzo elettrodo detto "griglia", perchè costitui= to da una specie di spirale o rete metallica che, se posi= tiva, accelera gli elettroni verso la placca; se ne= gativa, ne diminuisce il flusso fino a respingerli.

Fu introdotto un nuovo elettrodo detto "catodo" che

Placca Placca riscaldato dal filamen

Placca Placca
griglia griglia
filamento filamento catodo

riscaldato dal filamento produceva più elettroni. La valvola "triodo" può avere come produttore di elettroni il filamento od il catodo, la griglia ha una funzione delicatissima e la placca la consideriamo a tensione costante.

Per capire l'importante funzione della griglia è opportuno fare un diagramma: V_g = tensione di griglia, I_p = corrente di placca. (a tensione di placca costante)

Si chiama "pendenza" l'inclinazione del tratto rettilineo del grafico e rappresenta il coefficiente di amplificazione dato dal rapporto fra la variazione di corrente di placca e la corrispondente variazione di tensione di griglia. Successivamente la griglia ...

griglia. Successivamente le griglie sono aumentate formando i tetrodi:

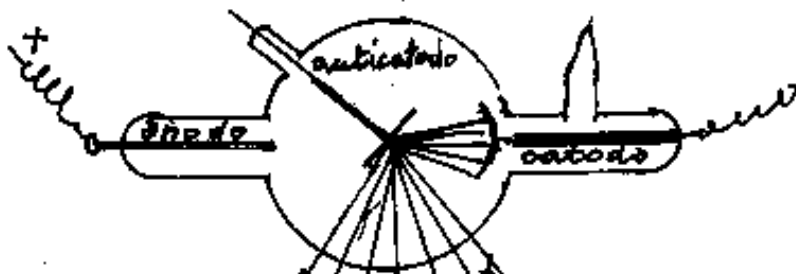
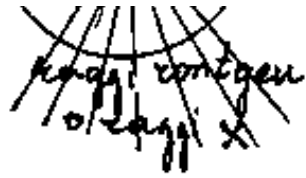
ed i pentodi:

valvole

generalmente usate come amplificatri-ci, lasciando ai diodi la rivelazione, raddrizzando l'onda portante la modulazione.

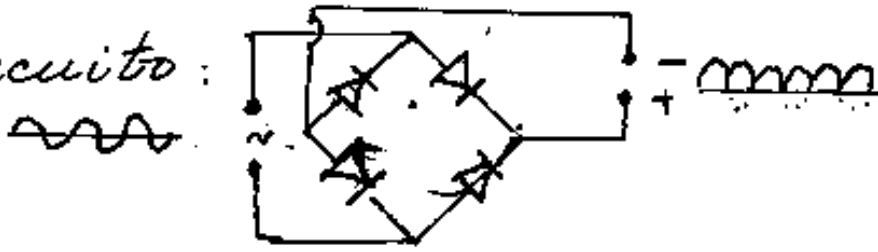
L'applicazione di questi fenomeni non è limitata alla valvola elettronica per la radio; un tubo a vuoto spinto, che abbia un elettrodo positivo (<u>anodo</u>); ed un elettrodo negativo (<u>catodo</u>) presenta un caso interessantissimo quando il flusso elettronico emesso dal catodo ed attratto dall'anodo, viene riflesso da un "anticatodo" che impedisce l'arrivo all'anodo ed i raggi riflessi o raggi X o raggi "Röntgen" (dal suo scopritore) hanno una minima lunghezza d'onda ($\frac{1}{10000}$ delle onde luce) ed hanno la caratteristica di attraversare i corpi, da cui le radiografie.

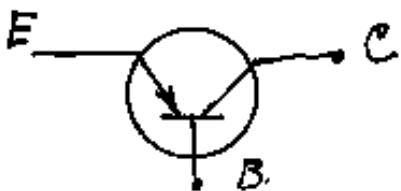
+ anticatodo anodo catodo -

Raggi röntgen o raggi X

Il campo delle lunghezze d'onda delle onde elettroma= gnetiche è così vasto che non è rappresentabile in unica scala. Si va da frazioni di Ångström per i raggi gamma, ($1 Å = 10^{-10}$ metri $= 10^{-8}$ cm. $= 10^{-7}$ mm) ai 4000 Å per i raggi violetti della luce agli 8000 Å per i raggi rossi, alle onde hertziane da pochi millimetri a Kilometri.

Che il raddrizzamento delle onde elettromagnetiche, potesse farsi anche con mezzi diversi dalle valvole termoioniche, era noto da tempo. Per esempio la "galena" (solfuro di piombo) ha poteri di raddrizzatore (rivelatore) di onde elettromagnetiche.
L'apparecchiatura che rivela le onde elettromagnetiche ordinariamente è chiamata: "detector" (parola inglese che significa rivelatore).
Il raddrizzatore a cristallo (galena) è costituito da un alloggiamento metallico ove viene fissato il cristallo (PbS) che termina con uno spinotto, l'altro spinotto, ha uno snodo che termina in una spiralina metallica che poggia sul cristallo. Nei circuiti, il raddrizzatore si simboleggia con: ▶| (raddrizza una semionda) cioè ottiene una corrente pulsante da una corrente alternata:

entra — esce

Per raddrizzare le due semionde si può fare il circuito:

Lo studio dei semiconduttori portò alla scoperta dei <u>transistori</u> che potevano sostituire il triodo. (i transistori furono detti triodi a cristallo). Lo spazio occupato da un transistor è molto minore della valvola elettronica, le sue dimensioni sono circa la punta di un lapis, Il transistor è costituito dall'af= fiancamento di semiconduttori e può avere come successione pnp oppure npn. questi cristalli di germanio e di silicio corrispon= dono ai tre elettrodi che escono dal transistor. il primo è detto "<u>emettitore</u>" (E) quello centrale "<u>base</u>" (B) ed il terzo è detto <u>collettore</u> (C). Lo schema nei circuiti elettronici è:

E C B.

L'elettronica ha fatto passi da gigante: i circuiti prestampati

passi da gigante; i circuiti prestampati si prestano a confezionare apparecchi sempre più piccoli, addirittura si prefabbricano microcircuiti contenenti anche centinaia di transistor. Le applicazioni sono ormai numerosissime dagli orologi ai computer, accelerando il progresso scientifico.

Analisi Armonica

La ricerca delle funzioni sinusoidali che in numero finito, od infinito, compongono ogni funzione periodica, dicesi: "analisi armonica".

Avvalendosi del teorema di Fourier che dice: "Ogni funzione periodica di frequenza ν può essere espresso in modo univoco mediante serie di funzioni trigonometriche con frequenze: $\nu, 2\nu, 3\nu, \dots n\nu \dots$"

Ciò porta alla serie di Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right]$$

per $n=1$, si ha la prima armonica; per $n=2$, la seconda armonica, e così via.

I coefficienti dello sviluppo, sono dati:

$$a_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} f_{(\alpha)} \, d\alpha$$

$$a_n = \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{2\pi} f_{(\alpha)} \cos(n\alpha) \, d\alpha$$

$$a_n = \left(\frac{1}{\pi}\right)\int_0 f(\alpha)\cos(n\alpha)\,d\alpha$$

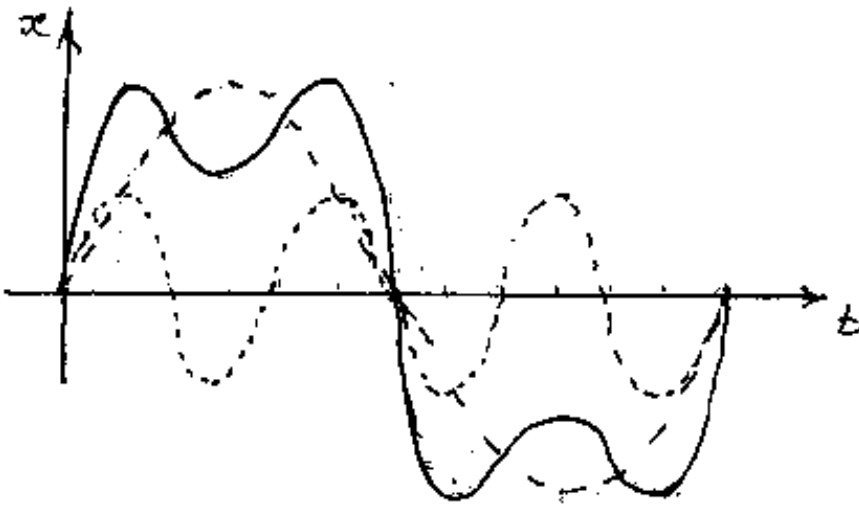
$$b_n = \left(\frac{1}{\pi}\right)\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,\text{sen}(n\alpha)\,d\alpha$$

ove le grandezze alternate, (fenomeni ci=clici), sono esprimibili:

$$f(\alpha) = f(\alpha + 2K\pi)$$

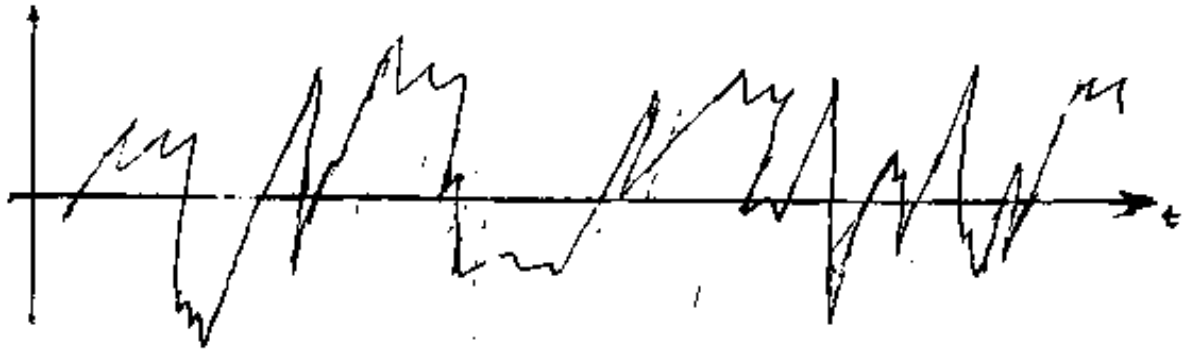
Supponiamo di voler rappresentare una funzione abbastanza semplice : $x = 2\,sen(\omega t) + sen(3\omega t)$ (per ora in fase)

x

t

Dalla rappresentazione si nota come la simmetria dell'onda positiva con l'onda negativa di $2\,sen(\omega t)$, si conservi nella curva risultante, e come le simmetrie delle onde positive e negative di $sen(3\omega t)$ si conservano nella modulazione della risultante.

Il fenomeno vale per ogni tipo di frequenza; in acustica, il fonografo di Edison ove una puntina

[illegible]
costretta a percorrere il solco delle vibrazioni incise
da apparecchi agenti per effetto di suoni, riprodu=
ce, (opportunamente collegata), i suoni stessi.
Visivamente, se amplifichiamo le vibrazioni sono=
re di una membrana acustica il grafico

tracciato sul nastro scorrevole, sarà del tipo:

ove in ascisse sono i tempi sincronizzati con lo scorrimento del nastro, in ordinate l'intensità; ma, l'intensità è dovuta alla maggiore o minore pressione sulla membrana, cioè alle vibrazioni elastiche. La frequenza della vibrazione ci dà l'altezza del suono, ma è sempre la somma di molte frequenze, per esempio il la_3 di un violino stradivarius, ha la vibrazione fondamentale a 435 vibrazioni al secondo, alla quale si addizionano una vibrazione di frequenza 870 (2ª armonica) ampia 1/4 della fondamentale, una vibrazione di frequenza 1305, ampia $\frac{1}{2}$ della fondamentale, oltre questa 3ª armonica si addizionano an

mentale, oltre questa 3ª armonica si addizionano anche la 4ª, 5ª, 6ª, 7ª, 8ª, 9ª tutte ampie circa $\frac{1}{10}$ o meno della fondamentale.
Il la_3 di un violino comune ha la fondamentale a 435 di frequenza ampia 0,8 la 2ª armonica ampia $\frac{1}{2}$; la 3ª, 0,8; la 4ª, $\frac{1}{4}$; la 5ª, 1,=; la 6ª, $\frac{1}{4}$, la 7ª, 0,4; l'8ª e la 9ª, $\frac{1}{10}$. Ciò ci chiarisce quello che viene

chiamato nei suoni: "il timbro o metallo", cioé come la stessa nota musicale, prodotta da strumenti diversi, sia diversa.

Ma nella composizione delle armoniche occorre anche tener conto della loro fase. Nel grafico: $x = 2\,sen(\omega t) + sen(3\omega t)$ non abbiamo considerato la fase, cioe' abbiamo posto: $\varphi = 0$.

Consideriamo ora: $x = 2\,sen(\omega t) + sen(3\omega t + \varphi)$.

x

t

$\varphi = \pi/2$

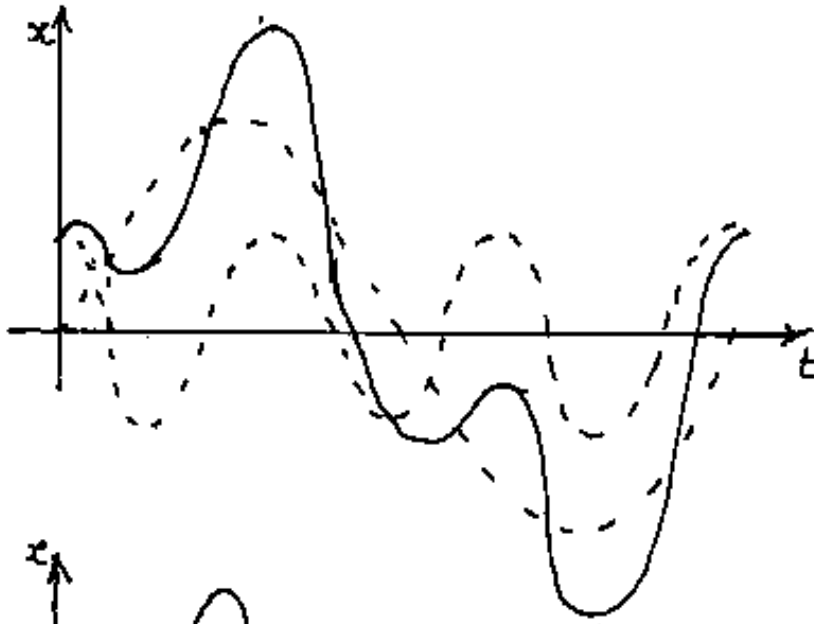
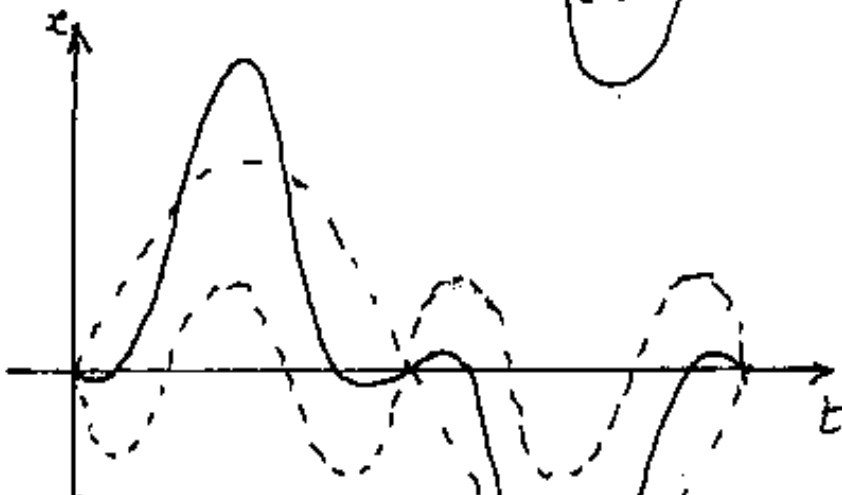
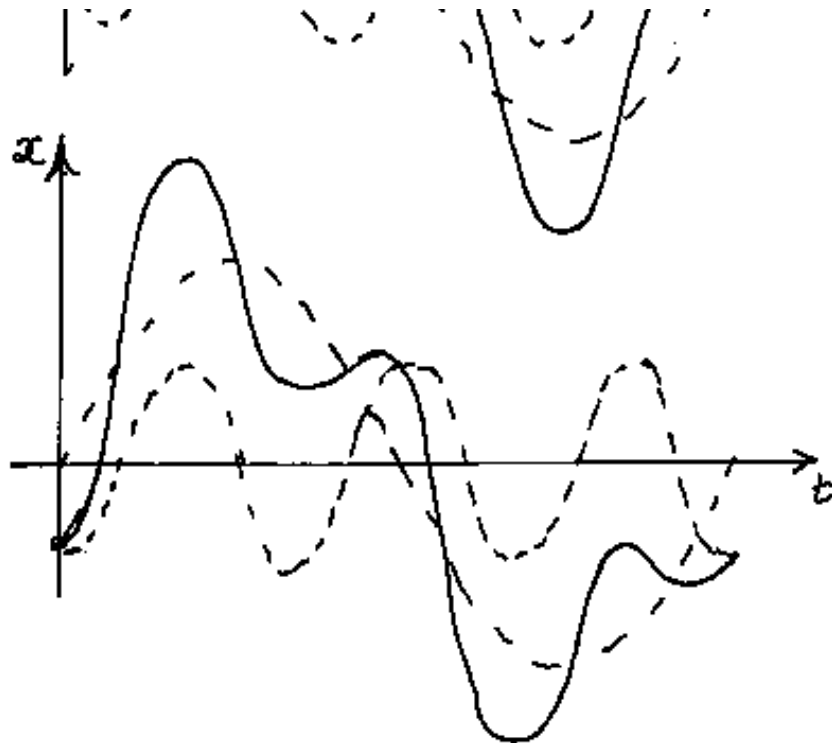
x

t

$\varphi = \pi$

x

t

$\varphi = \frac{3}{2}\pi$

Nel nostro esempio abbiamo considerato tre fasi caratteristiche della terza armonica, prima che ritorni la figura iniziale $(\varphi=0)=(\varphi=2\pi)$.
Poiché ciascuna armonica può avere una fase diversa, consideriamo un'armonica generica (per es. l'n^{esima}) che addizionerà $\ldots + K_n \operatorname{sen}(n\omega t + \varphi_n) + \ldots$
sviluppando si ha:

$$K_n \left[\operatorname{sen}(n\omega t)\cos(\varphi_n) + \cos(n\omega t)\operatorname{sen}(\varphi_n) \right]$$

posto:

$$a_n = K_n \operatorname{sen}(\varphi_n) \; ; \quad b_n = K_n \cos(\varphi_n) \; ;$$

avremo, addizionando le varie armoniche:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + \ldots + a_n \cos(n\omega t) + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen}(2\omega t) + b_3 \operatorname{sen}(3\omega t) + \ldots + b_n \operatorname{sen}(n\omega t).$$

che possiamo sintetizzare:

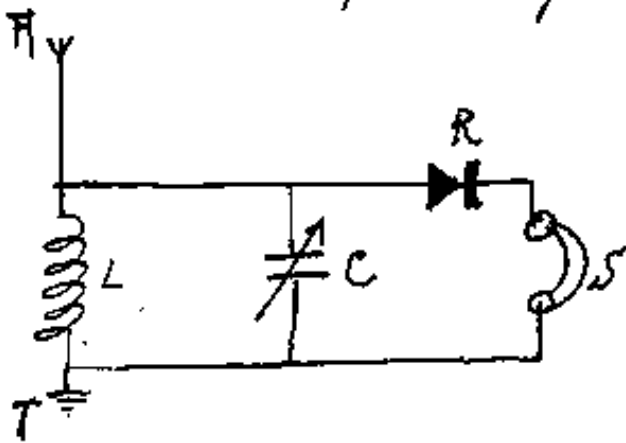
$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{=n} a_i \cos(i\omega t) + b_i \operatorname{sen}(i\omega t)}$$

È questa la serie di Fourier, dove si

E questa la serie di Fourier, dove si nota che i singoli coefficienti sono funzione delle fasi delle singole armoniche, e quindi di non facile determinazione. Con i risuonatori si può determinare l'intensità delle singole armoniche, meno facile determinare la loro fase.

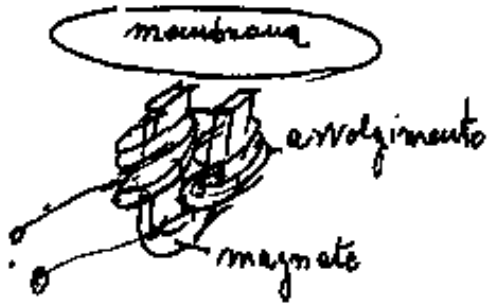
Apparecchi riceventi

Consideriamo un ricevitore di onde Hertziane, tale ricevitore può essere calcolato per ricevere una particolare frequenza, ma può avere il suo analizzatore per scegliere la frequenza in un certo campo di frequenze (C variabile).

A T R L C S

I poli di arrivo sono l'aereo (o antenna) A, e la terra T.

Il circuito di risonanza è dato dall'induttanza L e dal condensatore C. L'onda hertziana sinusoidale, modulata è rivelata dal raddrizzatore R che raddrizza una sola semionda, e lascia inalterata la modulazione. La restituzione sonora su altoparlante o cuffia S è data dalla modulazione della corrente che passando attraverso l'avvolgimento di una elettrocalamita fa

e avvolgimento di una elettrocalamita fa vibrare una membrana che riproduce il suono.

membrana
avvolgimento
magnete

Per induttanza intendiamo quel la parte di circuito elettrico caratterizzata dal coefficiente di mutua induzione che si misura in Henry.
In genere l'induttanza è un avvolgimento

di filo conduttore elettrico. Se l'avvolgimento avviene su un cilindro di raggio costante di lunghezza molto maggiore del raggio di sezione, tale avvolgimento (induttanza) si chiama solenoide. (Il solenoide può essere a più strati di spire, come nel caso di certe elettrocalamite ove il solenoide è avvolto su materiali ferromagnetici; ma può avere anche un solo strato di spire addirittura non affiancate fra loro lasciando aria all'interno del solenoide come avviene per le induttanze radio per alta frequenza).
Il solenoide può essere torico anziché rettilineo, oppure può avere le spire non parallele, od altri artifizi nell'avvolgimento, ed in questo caso le induttanze si chiamano bobine, termine tal volta usato anche per solenoidi rettilinei.

Per il solenoide cilindrico rettilineo, costituito di N spire di raggio r e lungo l

tubo di N spire di raggio r e lungo l
con $l \gg r$, il coefficiente di autoinduzione è:

$$L = \frac{4\pi^2 N^2 r^2}{l}$$

se il nucleo, anziché aria, è materiale ferromagnetico di permeabilità μ e sezione S,

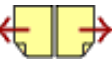
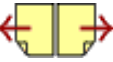
$$L = \frac{4\pi N^2 S}{l}\mu$$

Il condensatore è invece costituito da lamine metalliche conduttrici, separate da un dielettrico (che può essere anche aria).
La capacità "C" di un condensatore è data da:

$$(\text{Capacità in picofarad}) = C = (0{,}0885)\,\varepsilon_r \,\frac{S\ (\text{cm}^2)\ (\text{area affacciata})}{d\ (\text{cm})\ (\text{distanza})}$$

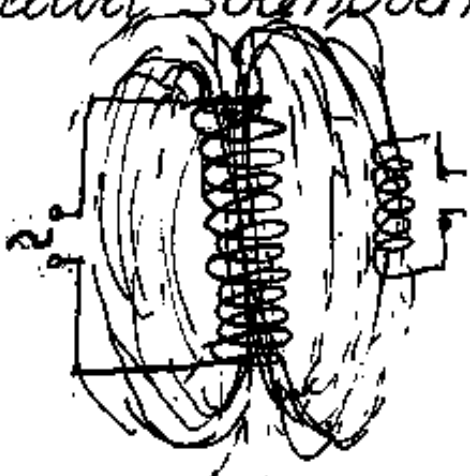
ove "S" è l'area delle superfici affacciate delle lamine, "d" è la distanza fra le lamine affacciate (è anche lo spessore del dielettrico interposto), "ε_r" la costante dielettrica relativa del dielettrico interposto (per l'aria $\varepsilon_r = 1$). L'unità di misura è il "Farad" (troppo grande, per cui praticamente si usa il microfarad = 10^{-6} Farad, od il Picofarad = 10^{-12} Farad). (Due lamine metalliche parallele nell'aria, distanti 1 mm., che si affacciano per 1 cm², hanno una capacità di 0,885

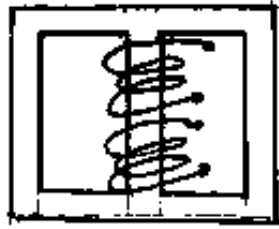
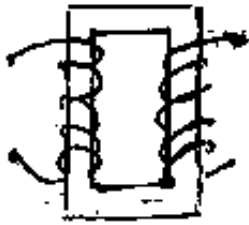
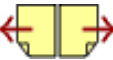
picofarad, quasi un picofarad).

Variando la superficie affacciata delle lamine si ha un condensatore di capacita' variabile e quindi potra' essere il variatore di un circuito oscillante per sintonizzarsi su una particolare frequenza (in quel campo di frequenze). $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

I simboli di condensatore variabile, ( ), e di induttanza variabile (oppure), consentono di distinguere, in un circuito, le parti che consentono di sintonizzarsi.

Per l'induttanza, la variazione è dovuta all'inserimento nel solenoide di nuclei ferro=magnetici, oppure alla variazione del numero di spire.

I Trasformatori

I solenoidi attraversati da correnti alter=nate, generano, al loro intorno, un campo magnetico variabile, capace di influenzare altri solenoidi esistenti in quel campo.

In genere però si cerca di convogliare il campo magnetico mediante la=mierini di materiale ferro=magnetico, o di avvolgere i solenoidi

magnetico, o di avvolgere i solenoidi sullo stesso nucleo, anche con solenoidi sovrapposti. Questi avvolgimenti,

sono detti trasformatori, il circuito in cui si immette corrente è detto primario, mentre il circuito da cui si preleva corrente è detto secondario. Le tensioni al primario, e secondario stanno fra loro come il numero delle spire del primario ed il numero delle spire del secondario. ($V_1 : V_2 = n_1 : n_2$)

Se l'avvolgimento è unico in figura, esso è detto: autotrasformatore

V_1 V_2

Senza entrare nel merito della teoria e calcolo dei trasformatori, con i rispettivi rendimenti e perdite, poiché la potenza (e quindi l'energia) immessa nel primario, salvo le perdite per dispersione in calore, è uguale a quella presa nel secondario, cioè: $W_1 \cong W_2$

$V_1 I_1 \cong V_2 I_2$, e poiché la dispersione in calore è proporzionale al quadrato della corrente;

è proporzionale al quadrato della corrente;

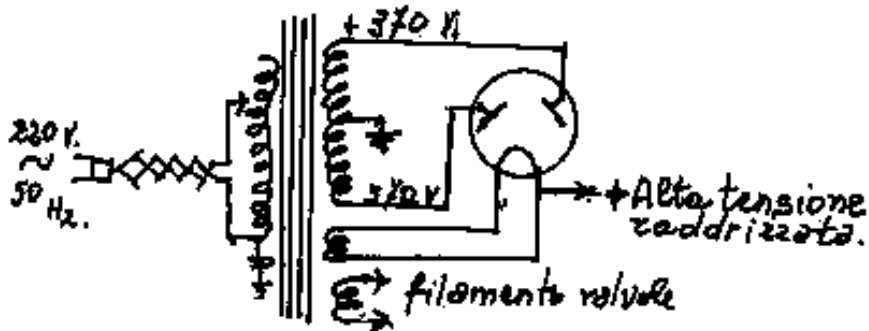
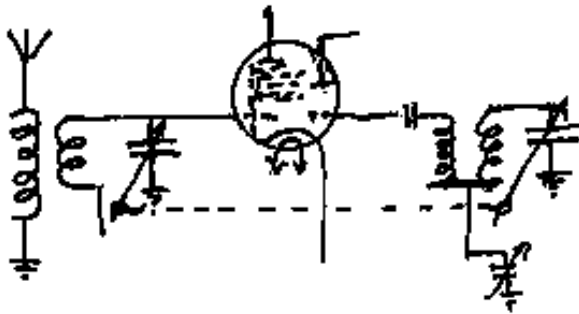
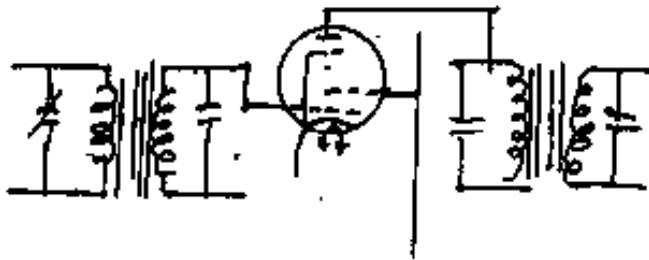
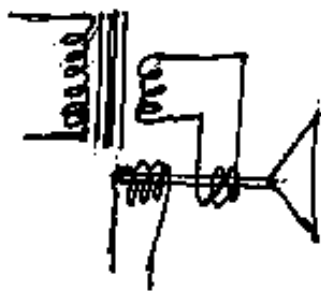
$W = V \cdot I$; $V = IR$; $W = RI^2$; il circuito ad alta tensione (piccola corrente) avrà un avvolgimento fatto di molte spire di filo sottile, mentre il circuito a bassa tensione (corrente intensa) sarà costituito di poche spire di filo di grande sezione essendo: $\left(R = \rho \frac{\ell}{S} \right)$.

Al variare della frequenza alternata, varia l'impedimento che l'induttanza esercita al passaggio di energia dal primario al secondario. Essendo la forza elettromotrice : $f.e.m = e = \frac{d\varphi}{dt}$, per alte frequenze bastano piccole impedenze per generare un campo elettromagnetico capace di connettere i circuiti : primario e secondario. (Poche spire avvolte senza nucleo ferromagnetico). Per basse frequenze invece, occorrono alte impedenze, costituite da avvolgimenti con moltissime spire, su nuclei ferromagnetici opportunamente dimensionati. (È il caso degli ordinari trasformatori per la tensione domestica, 50 Hz.)

Per avere l'idea della molteplicità di condizioni in cui può essere impiegato un trasformatore, possiamo osservare lo schema di una supereterodina (cioè un circuito radio che addi=

di una supereterodina (cioè un circuito radio che addizziona la frequenza di antenna con una frequenza autogenerata al fine di produrre una media frequenza costante che amplificata e raddrizzata, dà la frequenza fonica per l'altoparlante)
I circuiti sono molteplici, in dipendenza delle valvole o dei transistor impiegati, noi diamo

uno schema base per indicare i vari trasforma=
tori.

220 V. ~ 50 Hz. +370 V 370 V +Alta tensione raddrizzata. filamento valvole

Trasformatore di alimentazione con valvola rad= drizzatrice.

Trasformatore di antenna (alta frequenza) e trasformatore di oscil= latore con valvola addizionatrice per avere medie frequenze costanti.

Trasformatori a media fre= quenza e valvola amplifica= trice a media frequenza

trasformatore in bassa fre= quenza, con l'altoparlante per la riproduzione sonora.

Ricordando che la lunghezza d'onda di una

Ricordando che la lunghezza d'onda di una stazione trasmittente è data dalla velocità della luce (300.000.000 m/sec) divisa per la frequenza, avremo: per

$\lambda = 50$ m. $\nu = 6000$ Kc/sec $= 6 \cdot 10^6$ Hz

200 m. $\nu = 1500$ Kc/sec $= 1,5 \cdot 10^6$ Hz

600 m. $\nu = 500$ Kc/sec $= 0,5 \cdot 10^6$ Hz

Mentre le onde radio sono dell'ordine dei megaHertz, (10^6 Hz = 10^3 Kc/sec $\Rightarrow \lambda = 300$ m), la frequenza delle onde acustiche varia notevolmente da persona a persona, grosso modo si dice varia da 16 a 16000 Hz (il La$_3$, nelle note musicali, ha 435 vibrazioni al secondo). Però le onde sonore non sono paragonabili con le onde elettromagnetiche, sopratutto per il diverso modo di trasmettersi e la conseguente diversa velocità.

(300.000.000 m/sec le prime; varia con la temperatura e pressione dell'aria la velocità delle vibrazioni sonore. A 10 °C è circa 340 m/sec)

È possibile trovare suoni ed onde elettromagnetiche, che hanno la stessa lunghezza d'onda anche se le frequenze sono così diverse:

$\frac{340}{435} = 0,78$ m $= \lambda$ del La$_3$; occorre una frequenza di 384,6 megacicli per avere la stessa lunghezza d'onda in onde elettromagnetiche. (siamo nell'ordine di RAIUNO

[illegible]
in televisione).

Le vibrazioni elastiche cominciano ad emettere suono udibile nell'aria verso 16 periodi al secondo, ed il suono è udibile circa fino a 16000 periodi al secondo, poi si entra nel campo ultrasuoni

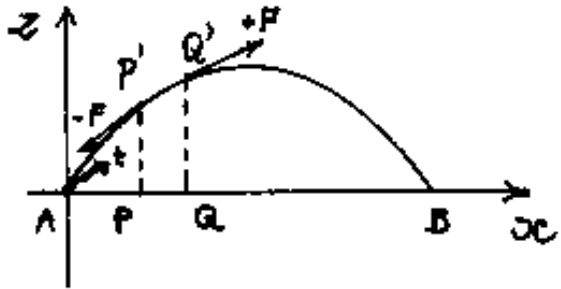
non più udibili per l'uomo, ma ancora udibili per animali (esistono fischi per cani non udibili dall'uomo). Anche le onde luminose (onde elettromagnetiche) sollecitano la vista umana in un certo campo (da circa 4000 Å nell'ultravioletto a 8000 Å nell'infrarosso), ma l'uomo ha costruito apparecchiature per rilevare un campo ben maggiore, basti pensare alla lunghezza d'onda delle "radiazioni gamma" ove $\lambda \cong 0{,}02 \div 1$ Å (Angström $= 10^{-8}$ cm) 1 Å $= 10^{-4} \mu$ (micron). Ed oltre il campo visibile, i raggi infrarossi $\lambda \cong 10\,000$ Å $= 1\mu \div 300\mu$ (micron); quindi si entra nel campo delle onde Hertziane. $\lambda \cong 1$ mm $\div 10$ Km.

Nel campo delle vibrazioni, abbiamo considerato le onde acustiche (<u>vibrazioni elastiche</u>) e le <u>vibrazioni elettromagnetiche</u>,

elastiche) e le vibrazioni elettromagnetiche, ci domandiamo quali altri tipi di vibrazioni è possibile trattare.

Per vibrazione, generalizzando, possiamo intendere ogni fenomeno che compie un certo numero di cicli al secondo. (nell'unità di tempo).

L'equazione delle corde vibranti

Consideriamo una corda, perfettamente flessibile, tesa fra due punti fissi A e B. Per fissare le idee, consideriamo le corde degli strumenti musicali, ma lo studio ha carattere più generale. La vibrazione di tale corda, nello spazio geometrico è piana, cioè bidimensionale, e, la posizione dei singoli punti, è variabile nel tempo. Se consideriamo il tempo rappresentato sulla y di un sistema di assi cartesiani $x, y, z \equiv x, t, z$, avremo in generale:

$$z = f(x, t)$$

ove la corda vibra nel piano verticale xz.

Gli spostamenti dei singoli punti (spostamenti piccolissimi), avvengono normalmente

all'asse x, su cui giace il segmento $\overline{AB}$, ed A sia nell'origine degli assi.

Consideriamo il segmento infinitesimo di corda $\overline{PQ}$ su $\overline{AB}$; ove: $\overline{PQ} = dx = ds$; sia $\overline{P'Q'}$ lo stesso tratto di corda al tempo t.

Data la piccolezza degli spostamenti, possiamo considerare costante, anche nel tempo, la tensione della corda. Rappresentiamo la tensione stessa con due forze tangenziali in P' e Q', di uguale modulo, con F in P' verso A ed in Q' verso B: (-F e +F in figura), la loro risultante è diversa da zero. Se proiettiamo tali forze sull'asse Z la differenza delle componenti secondo Z (risultante in z) è la forza agente il movimento, ed è pari alla <u>massa</u> di $\overline{P'Q'}$ per l'accelerazione secondo z, cioè: $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.
L'ascissa di P e di P' è: "x", l'ascissa di Q e di Q' è: ("x + dx")
Il coefficiente angolare tg α, della retta tangente in P' è $tg\,\alpha_{P'} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_x$
Il coefficiente angolare della retta tangente

Il coefficiente angolare della retta tangente in Q' è $tg\alpha_{Q'} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$,

Per la piccolezza degli spostamenti, anche α è piccola: $(tg(\alpha) \cong sen(\alpha))$, proiettando le due forze su l'asse Z, si hanno le componenti secondo z:

$$-F\frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad F\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx\right);$$

Il sonometro

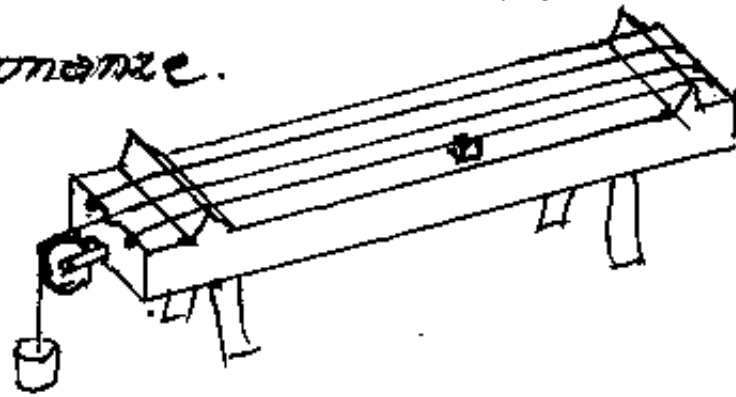
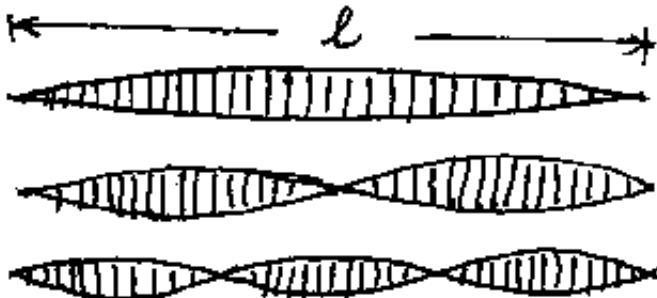
Il sonometro è un apparecchio destinato alla vibrazione delle corde sonore; è costituito da una cassa armonica su cui è tesa una corda sottile, la tensione (variabile) è dovuta ad un pesino posto all'estremità. Sulla cassa sonora possono esservi anche altre corde tese, per verificare le eventuali risonanze.

Se "ℓ" = lunghezza della corda;
"λ" = lunghezza d'onda, si ha $\boxed{\ell = N\frac{\lambda}{2}}$; $\boxed{\lambda = \frac{2\ell}{N}}$;

$\ell = \lambda/2$; $\lambda = 2\ell$;

$\ell = 2\,\lambda/2$; $\lambda = \ell$;

$\ell = 3\,\lambda/2$; $\lambda = \frac{2}{3}\ell$;

La frequenza: $\nu = \frac{N}{[illegible]}\sqrt{\frac{gP}{[illegible]}} = \frac{N}{[illegible]}\sqrt{\frac{P}{[illegible]}}$;

La frequenza: $\nu = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{gP}{\pi r^2 \rho}} = \frac{N}{2lr}\sqrt{\frac{P}{\pi\gamma}}$;

ove: $N = 1, 2, 3, \dots n$. (armoniche) ;

P = peso tensore ;

l = lunghezza della corda ; r = raggio della corda ;

ρ = peso specifico ; $\gamma = \rho/g$ = densità della corda ;

g = accelerazione di gravità.

sostituendo: $(x=0)$, nell'espressione di:

$$z = \varphi_1(x+vt) + \varphi_2(x-vt),$$

abbiamo: $(z=0)$ cioè:

$$z = \varphi_1(vt) - \varphi_2(vt) = 0$$

sostituendo: $(x=l)$ nell'espressione di z

abbiamo: $(z=0)$ cioè

$$z = \varphi_1(l+vt) + \varphi_2(l-vt) = 0$$

ovvero cambiando vt in x:

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(-x) = 0$$

$$\varphi_1(l+x) + \varphi_2(l-x) = 0$$

equazione che dà i valori di φ_1 quando il suo argomento varia da l a $2l$. Cambiando x in $-x$, si hanno i valori di φ_2 nello stesso intervallo.

Cambiando ancora x in $(l+x)$:

$$\varphi_1(2l+x) + \varphi_2(-x) = 0$$

da cui: $\varphi_1(2l+x) = \varphi_2(x)$

ma: $\varphi_2(x) = \varphi_1(x)$

$$\varphi_1(2l+x) = \varphi_1(x)$$

ossia φ_1 ha periodo $2l$, ed uguale periodo la funzione φ_2 : $\varphi_2(x) = -\varphi_1(-x)$. (nota per ogni valore di x nell'intervallo $0, 2l$)

L'Informatica

L'informatica è una nuova disciplina che, si può dire, sia nata coi computer. Non è, che prima, implicitamente, non esistesse come problematica di tutte le lingue, per evitare doppi sensi, o imprecisione nell'esporre una "informazione". Infatti, nelle varie lingue, vi sono espressioni ambigue, che possono anche essere utilizzate come battute di spirito, ma non accettabili in campo scientifico-matematico. Anche l'algebra è linguaggio.

È interessante notare che il "linguaggio" dei computer deriva dal linguaggio dell'insieme degli interruttori: (acceso; spento), al quale corrisponde il sistema binario nei numeri: (0, 1); (zero, uno); e trova invito nell'evangelico: "Ma il vostro linguaggio sia: – sì, sì, no, no. –" (S. Matteo 5, 37).

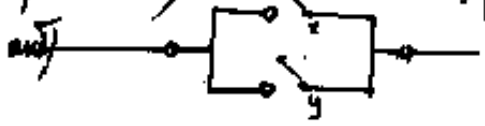
(S. Matteo 5, 37).

Abbiamo già trattato le operazioni aritmetiche in binario ed exadecimale, ma può essere interessante vedere, come sia possibile esprimere dei concetti mediante il linguaggio degli interruttori.

Per un interruttore è banale il: "Si"; "No".

Per due interruttori si hanno tre casi principali:

(in parallelo) (somma logica) (and) inglese

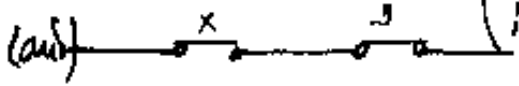
x	y	v
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

entrambi per il no! (l'uno e l'altro)

o l'uno o l'altro per il si!

(non necessario entrambi si!)

(basta sia chiuso uno per il si!)

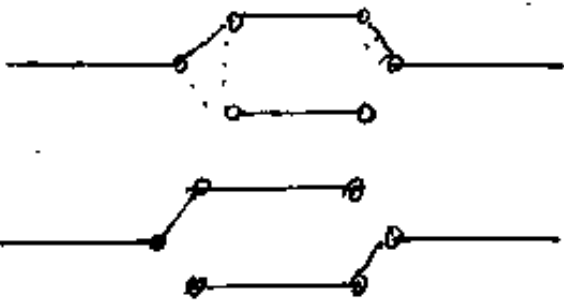
(in serie) (prodotto logico) (or) inglese

x	y	v
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

entrambi per il si! (l'uno e l'altro)

o l'uno o l'altro per il no!

(non necessario entrambi il No)

(basta sia aperto uno per il no!)

(indipendenti)

ciascuno può decidere per il si o per il no cambiando lo stato iniziale.

(Per il si! occorre che i due rami con cordino su quale intermedio)

Se consideriamo una molteplicità di interruttori connessi a grandezze numeriche, si può capire come funzionano le calcolatrici elettriche.

All'inizio del primo volume abbiamo già ac

All'inizio del primo volume abbiamo già accennato al problema intestando: "La memoria, - la comunicabilità - i linguaggi."
Per comunicare, dobbiamo avvalerci della memoria e di ciò che è noto a chi vogliamo comunicare. (Avere un linguaggio comune)

Cibernetica - Teoria dell'informazione - Informatica

La parola: "Cibernetica", deriva dal Greco: - "κυβερνητική" che significa "arte del timoniere" ed è normalmente interpretata come: "scienza dell'informazione".

L'americano Norber Wiener (1894-1964), pubblicò nel 1948 l'opera: "Introduzione alla Cibernetica" essa nacque per studi sul contenuto di informazione su messaggi trasmessi da una emittente in alfabeto morse. Il Wiener, a cui si deve la parola "cibernetica" è ritenuto il fondatore di questa scienza, col suo allievo Shannon.

La teoria dell'informazione considera tre fasi: "l'emissione, la trasmissione, la ricezione" ed occorre un codice convenuto fra emittente e ricevente, costituito di simboli,

emittente e ricevente, costituito di simboli, l'insieme dei quali è detto "alfabeto". Una sequenza di simboli opportunamente disposti costituisce un messaggio che contiene una certa quantità d'informazione.

Nelle tre fasi di emissione, trasmissione, e ricezione possono esservi: disturbi, distorsioni, ed

errori capaci d'invalidare il contenuto di informazione.

L'insieme dei simboli fonetici, possono dare luogo a linguaggi diversi, non solo, ma i simboli stessi possono essere graficizzati in modo diverso. Si dice che i Fenici siano stati i primi a rappresentare un alfabeto fonetico. La parola "alfabeto" deriva dalle prime due lettere dell'alfabeto greco: α = alfa; β = beta; come in italiano la parola "abbecedario".

La storia dell'alfabeto implica la storia della scrittura. Certamente la scrittura ideografica e pittografica, precedette come forma di comunicazione che, schematizzandosi, dette luogo ai geroglifici. Per semplificare la rappresentazione grafica si ebbe l'alfabeto cuneiforme. E' interessante notare come la

cuneiforme. E' interessante notare come, la
sequenza dei simboli, delle parole, sia la
chiave iniziale per "leggere" una scrittura.
La sequenza può essere per righe orizzontali
oppure verticali, o seguenti un tracciato.
può avere un verso, - da sinistra a destra
o da destra a sinistra; dall'alto al

basso o viceversa, ma per le antiche scritture può essere: "Bustrofedon" (bus = βοῦς = bove; trofe = τρέπω = volgere, τρέπομαι = volgersi) cioè come fa il bove che traccia il solco, finito il rigo da sinistra a destra, traccia di seguito il successivo da destra a sinistra e così via.

Riportiamo l'evolversi dell'alfabeto cuneiforme.

Caratteri cuneiformi			
Primitivi	Antico-Babilonesi	Assiri	Neobabilonesi

Alfabeto cuneiforme (fonetico)

a	th	n?
i	t'	y
u	lr	r
k	d	r'
k'h	dh	w
q	p	v
g	f	s
gh	b	sh
ch	m	z
j	m'	z
jh	m'	q?
t	n	dah
t'h	n'	bum'i

fonetico	a	b(a)	g(a)	d(a)	d(i)	d(u)	f(a)
persiano antico							
fonetico	g(a)	g(u)	h(a)	h(a)	i	j(a)	j(i)
persiano antico							
fonetico	k(a)	k(u)	l(a)	m(a)	m(i)	m(u)	n(a)
persiano							

Riportiamo ancora alcuni alfabeti antichi e moderni, per avere un confronto diretto sugli elementi delle prime forme di comunicazione scritta.

Alfabeti

Aramaico antico	Papiri	Palmireno	Ebraico quadrato	Rabbinico	Corsivo moderno Italiano (XV - XVI secolo)	Corsivo moderno Polacco (XIX - XX secolo)
			א			
			ב			
			ג			
			ד			
			ה			
			ו			
			ז			
			ח			
			ט			
			י			
			ךכ			
			ל			
			םמ			
			ןנ			
			ס			

Indice Enciclopedico Indice Pag. 234

Alfabeti

Nabateo	Siriaco	Arabo (papiri)	Mineo-Sabeo Arabo meridionale	Trascrizione	Etiopico
				'	አ
				b	በ
				g	ገ
				d	ደ
				ḏ	.....
				h	ሀ
				w, u, ū	ወ
				z	ዘ
				ḥ	ሐ
				ḫ	ኀ
				ṭ	ጠ
				ẓ	.....
				y, i, ī	የ
				k	ከ
				l	ለ
				m	መ
				n	ነ
				s	.....
				ʿ	ዐ
				ġ	.....
				f	ፈ
				ṣ	ጸ
				ḍ	ፀ
				q	ቀ
				r	ረ
				š	ሰ
				ś	ሠ
				t	ተ

ETIOPICO

ha	ሀ	ba	በ	wa	ወ	č̣a	ጨ
la	ለ	ta	ተ	ʿa	ዐ	pa	ጰ
ḥa	ሐ	ča	ቸ	za	ዘ	ża	ጸ
ma	መ	kha	ኀ	ža	ዠ	fa	ፈ
śa	ሠ	na	ነ	ya	የ	pa	ፐ
ra	ረ	ña	ኘ	da	ደ	qwa	ቈ
sa	ሰ	'a	አ	ǧa	ጀ	khwa	ኈ
sha	ሸ	ka	ከ	ga	ገ	kwa	ኰ
qa	ቀ	kha	ኸ	ṭa	ጠ	gwa	ጐ

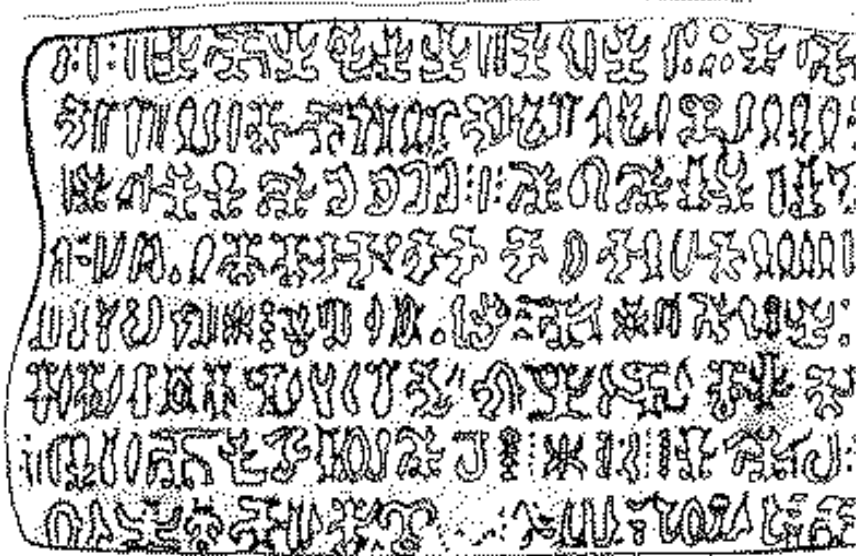
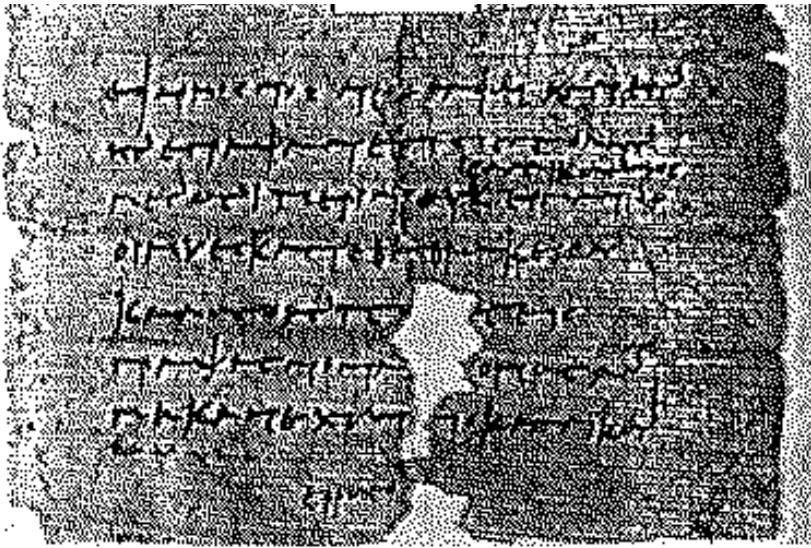
con varianti per le altre vocali.

GIAPPONESE (fonet.)

a	ア	i	イ	u	ウ	e	エ	o	オ	ra	ラ
ka	カ	ki	キ	ku	ク	ke	ケ	ko	コ	ri	リ
ga	ガ	ghi	ギ	gu	グ	ghe	ゲ	go	ゴ	ru	ル
sa	サ	si	シ	su	ス	se	セ	so	ソ	re	レ
za	ザ	zi	ジ	zu	ズ	ze	ゼ	zo	ゾ	ro	ロ
ta	タ	tsi	チ	tsu	ツ	te	テ	to	ト	wa	ワ
da	ダ	di	ヂ	dzu	ヅ	de	デ	do	ド	wi	ヰ
na	ナ	ni	ニ	nu	ヌ	ne	ネ	no	ノ	wu	ウ
fa	ハ	fi	ヒ	fu	フ	fe	ヘ	fo	ホ	we	ヱ
ba	バ	bi	ビ	bu	ブ	be	ベ	bo	ボ	wo	ヲ
pa	パ	pi	ピ	pu	プ	pe	ペ	po	ポ		
ma	マ	mi	ミ	mu	ム	me	メ	mo	モ		
ya	ヤ	yi	イ	yu	ユ	ye	エ	yo	ヨ		

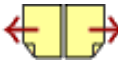
vi è altro alfabeto (corsivo)

Scritture

Tavola di scrittura Maia (purtroppo quasi tutti gli scritti furono distrutti dagli spagnoli)

Scrittura dell'isola di Pasqua (indecifrata) (incisa su legno con denti di pescecane) (si confronti i geroglifici)

Lettera su rotolo di papiro. (II sec a.C.)

EBRAICO

ʾ	א	l	ל
b	ב	m	מ ם
g	ג	n	נ ן
d	ד	s	ס
h	ה	ʿ	ע
w	ו	p	פ ף
z	ז	ṣ	צ ץ
ḥ	ח	q	ק
ṭ	ט	r	ר
j	י	š	ש
k	כ ך	t	ת

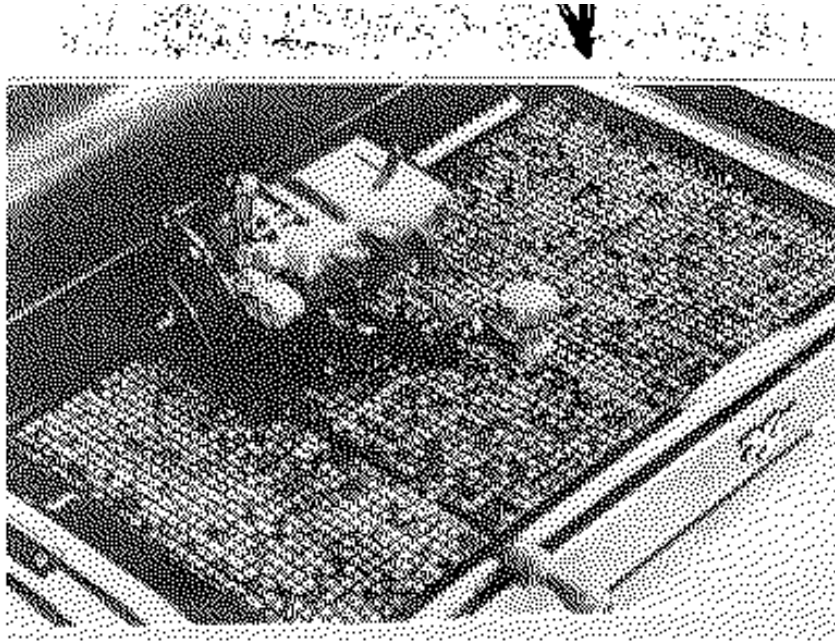
ʾ e ʿ sono due aspirazioni gutturali debole e forte. Le vocali sono trascurate o puntiformi.

Il cinese

1 I cinesi del periodo Han (206 a.C.-220 d.C.) conoscevano le numerose società che vivevano alle frontiere del paese. La loro visione di questi "barbari" era espressa dal modo con cui li chiamavano. I nomi dei popoli tenuti in alta considerazione erano combinati con la forma "jen", che significa essere umano (A); quelli dei popoli con scarse relazioni o poco stimati con "ch'uan", cane (B). Ai nomi dei popoli culturalmente molto differenti ed i cui costumi erano ripugnanti veniva aggiunto il carattere "ch'ung" o insetto (C).

1 A 人 B 犬 C 虫

cinese 是

帶所及，使英國人的生活習慣也起了變化。餡子吃一頓的，現在大多數改為吃自助餐，習慣，一星期中，除了幾天牛油麵包或三文被迫產生的節約風氣所造成的後果是帶來不至喪及學生們在假期中找臨時工作的出路。貶值以來，英國的經濟衰退情形更嚴重。入情況都還不錯的高級餐館們所開設的中國仲業。光是倫敦一地，過去一年來倫

La scrittura cinese non è alfabetica o sillabica, usa un segno diverso per ogni parola. Tuttavia i caratteri cinesi sono composti da otto segni base tutti rife=ribili al segno yung che vuol dire: "eternità" La scrittura è esegui=

ta con pennello su seta, rilevabile dai caratteri a fianco. La macchina per scriverli è complicata, è un vassoio con 2000 segni sovrapponibili o affiancabili.

Facsimile di caratteri runici

zone a nord-ovest del mar Nero. Ebbe la massima dif fusione tra i sec. X e XI; discusso la somiglianza coi caratteri greci.

Per completezza riportiamo anche altri esempi di scritture.

[illegible]

Arabo classico, sillabico, scritto da sinistra a destra.

sanscrito

संस्कृतं नाम दैवी वाग् अन्वाख्याता महर्षिभिः । तद्भवस् तत्समो देशीत्य् अनेकः[1] प्राकृतक्रमः ।। आभीरादिगिरः काव्येष्वपभ्रंश इति स्मृताः । शास्त्रे तु संस्कृताद् अन्यद् अपभ्रंशतयोदितम् ।। श्लेषः प्रसादः समता माधुर्यं सुकुमारता । अर्थव्यक्तिर्

Sanscrito

birmano

ကမ္ပစ္စည်းကရိယာများ ရှိပြီးဖြစ်လေသည်။ အလယ် ဗိုင်ရာ ပုဂ္ဂိုလ်များအတွက် အထူးသင်တန်းများ

Birmano

greco

λ 'Ο 'Οδυσσεὺς καὶ οἱ σύντροφοι αὐτοῦ πλοῖα, τὰ ὁποῖα ἦσαν πλήρη λαφύρων, ἀπ Τρῳάδος, ἐπιθυμοῦντες νὰ φθάσωσιν ὅσο

Greco

9 russo

Идея использования квантовых систем для ге радиоволн оказалось весьма плодотворной и недостижимые для обычной радиотехники резу.

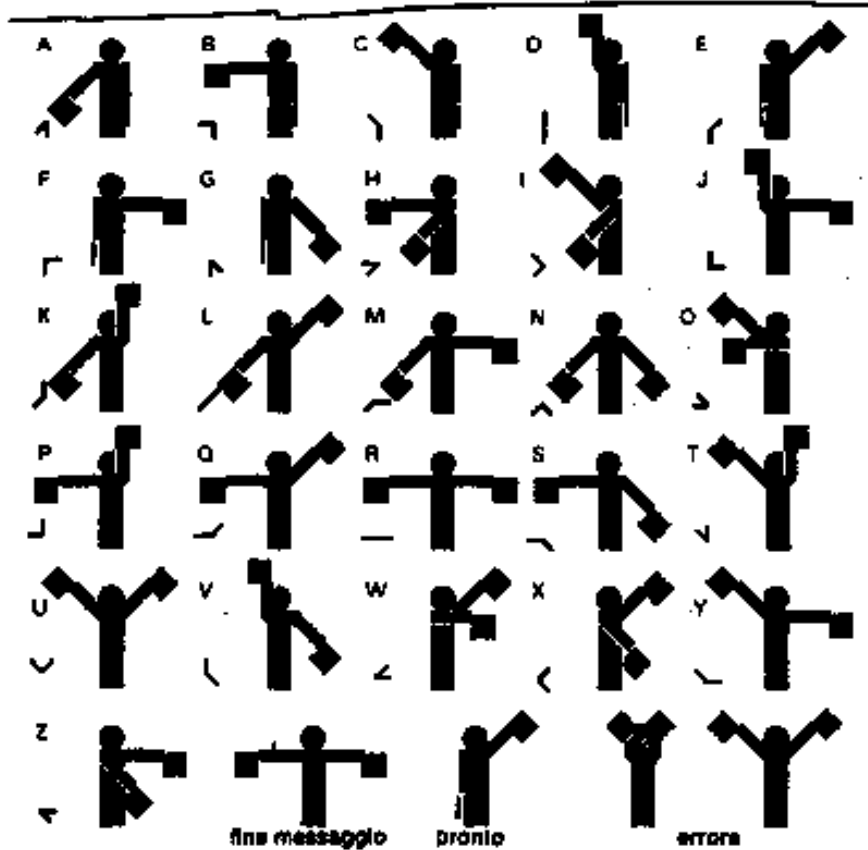
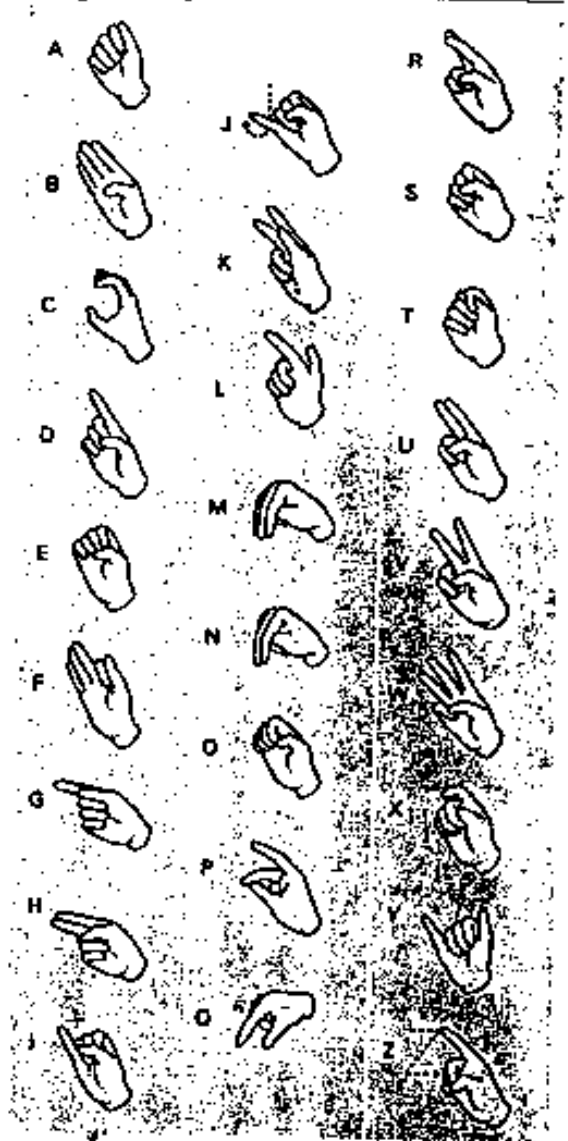
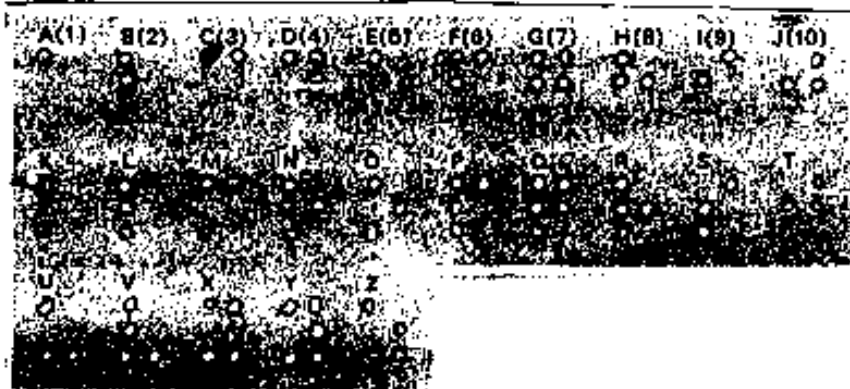
Russo

ebraico

ח

: יהודים שנולדו בה. כן שהגיע לאמסטרדם וראה
כן שראה את שמעון הצדיק ליד מערכתו השממה

Ebraico

Indice Enciclopedico Indice Pag. 241

sporgenti individuabili al tatto. Ogni lettera copre parte di un rettangolino diviso in 6 parti ove ogni punto occupa una delle 6 parti

1	2
3	4
5	6

Poiché i numeri (cifre da 1 a 10) corrispondono alle prime 10 lettere per distinguere sono preceduti da:

Rileviamo dal Dizionario Enciclopedico U.T.E.T. uno schema di derivazione degli alfabeti, che non ci appare concorde con gli alfabeti presentati.

Protosemitico

Semitico del nord — Semitico del Sud

Aramaico — Fenicio — Safaitico — Thamudenico — Lihyanico — Sabeo

Palmireno — Ebraico — Pehlevi — Kharosti — Alfabeti dell'Asia Minore — Brahmi

Alfabeti indiani — Alfabeti indiani

Greco — Cario — Licio

Frigio — Greco occidentale — Greco orientale

Etrusco — Lidio

Umbro — Osco — Runico — Glagolitico (lingue slave) — Cirillico

Falisco — Latino? — Oghams

Lingue moderne dell'Europa centrale ed occidentale

Arabo

In telegrafia si usa l'alfabeto Morse composto di punti e di linee, che, oltreché graficamente, può essere usato anche foneticamente.
Si noti l'importanza di differenziare gli intervalli fra simboli (punti e linee), fra lettere dell'alfabeto, e fra parole.

Alfabeto Morse.

a · —	n — ·	ch — — — —
b — · · ·	o — — —	

a	· —	n	— ·	ch	— — — —
b	— · · ·	o	— — —		
c	— · — ·	p	· — — ·	1	· — — — —
d	— · ·	q	— — · —	2	· · — — —
e	·	r	· — ·	3	· · · — —
f	· · — ·	s	· · ·	4	· · · · —
g	— — ·	t	—	5	· · · · ·
h	· · · ·	u	· · —	6	— · · · ·
i	· ·	v	· · · —	7	— — · · ·
j	· — — —	w	· — —	8	— — — · ·
k	— · —	x	— · · —	9	— — — — ·
l	· — · ·	y	— · — —	0	— — — — —
m	— —	z	— — · ·	punto	· · · · · ·

punto e virgola — · — · — ·
virgola · — · — · —
due punti — — — · · ·
punto interrogativo · · — — · ·
punto esclamativo — — · · — —

Cenni introduttivi ai personal computer

Il problema di comunicare è evidenziato nella trattazione dei P.C.

Definiamo il "BIT" termine ottenuto dalla contrazione di: BInary digiT ed indica ciascuno dei due simboli 0; 1; in binario. Cioè, possiamo dire che il "bit" è l'unità della quantità d'informazione. Otto bit affiancati formano un "byte". Il "byte", è l'elemento di memoria del p.c. Ricordiamo il sistema binario, ove ad ogni casello corrisponde una potenza del 2 iniziando con esponente zero, da destra a sinistra, il numero memorizzato è:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	1	1	0	0	1	0	1

= 1 + 4 + 32 + 64 = 101. Però analogamente occorre fare con le lettere:

0	1	0	0	0	0	0	1

= lettera A che numericamente corrisponde a 65.

che numericamente corrisponde a 65.
E' stata codificata una tabella "ASCII",
(American Standard Code International interchange)
in modo che un "byte" corrisponde ad un carat
tere alfanumerico. $(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7=255)$
Riportiamo i 256 segni e caratteri della
tabella ASCII. Ove ritroviamo $A \equiv D65$.

TABELLA dei Caratteri ASCII

ASCII value	Character	ASCII value	Character	ASCII value	Character
000	(null)	043	+	086	V
001	☺	044	,	087	W
002	☻	045	-	088	X
003	♥	046	.	089	Y
004	♦	047	/	090	Z
005	♣	048	0	091	[
006	♠	049	1	092	\
007	(beep)	050	2	093	]
008	◘	051	3	094	^
009	(tab)	052	4	095	_
010	(line feed)	053	5	096	`
011	(home)	054	6	097	a
012	(form feed)	055	7	098	b
013	(carriage return)	056	8	099	c
014	♫	057	9	100	d
015	☼	058	:	101	e
016	►	059	;	102	f
017	◄	060	<	103	g
018	↕	061	=	104	h
019	‼	062	>	105	i
020	¶	063	?	106	j
021	§	064	@	107	k
022	▬	065	A	108	l
023	↨	066	B	109	m
024	↑	067	C	110	n
025	↓	068	D	111	o
026	→	069	E	112	p
027	←	070	F	113	q
028	(cursor right)	071	G		
		072	H		

028	(cursor right)	071	G	113	q
029	(cursor left)	072	H	114	r
030	(cursor up)	073	I	115	s
031	(cursor down)	074	J	116	t
032	(space)	075	K	117	u
033	!	076	L	118	v
034	"	077	M	119	w
035	#	078	N	120	x
036	$	079	O	121	y
037	%	080	P	122	z
038	&	081	Q	123	{
039	'	082	R	124	¦
040	(	083	S	125	}
041	)	084	T	126	~
042	*	085	U	127	⌂

(Segue). TABELLA ASCII

ASCII value	Character
128	Ç
129	ü
130	é
131	â
132	ä
133	à
194	å
135	ç
136	ê
137	ë
138	è
139	ï
140	î
141	ì
142	Ä
143	Å
144	É
145	æ
146	Æ
147	ô
148	ö
149	ò
150	û
151	ù
152	ÿ
153	Ö
154	Ü
155	¢
156	£
157	¥

ASCII value	Character
170	¬
171	½
172	¼
173	¡
174	«
175	»
176	░
177	▒
178	▓
179	│
180	┤
181	╡
182	╢
183	╖
184	╕
185	╣
186	║
187	╗
188	╝
189	╜
190	╛
191	┐
192	└
193	┴
194	┬
195	├
196	─
197	┼
198	╞
199	╟

ASCII value	Character
213	╒
214	╓
215	╫
216	╪
217	┘
218	┌
219	█
220	▄
221	▌
222	▐
223	▀
224	α
225	β
226	Γ
227	π
228	Σ
229	σ
230	µ
231	τ
232	Φ
233	Θ
234	Ω
235	δ
236	∞
237	Ø
238	ε
239	∩
240	≡
241	±
242	≥
243	≤

157	¥
158	Pt
159	ƒ
160	á
161	í
162	ó
163	ú
164	ñ
165	Ñ
166	ª
167	º
168	¿
169	⌐
199	╟
200	╚
201	╔
202	╩
203	╦
204	╠
205	═
206	╬
207	╧
208	╨
209	╤
210	╥
211	╙
212	╘
242	≥
243	≤
244	⌠
245	⌡
246	÷
247	≈
248	°
249	•
250	·
251	√
252	ⁿ
253	²
254	■
255	(blank 'FF')

I due elementi: "1"; "0"; oppure: "acceso"; "spento"; sinteticamente: "si"; "no"; vengono posti nel byte di otto caselle, avremo così delle disposizioni con ripetizione, cioè il numero delle disposizioni con ripetizione di due elementi (1;0) di classe otto è: $2^8 = 256$.
che sono gli elementi della tabella ASCII.
E' bene notare che, ad ogni disposizione, si può far corrispondere elementi diversi da quelli della tabella ASCII; per esempio l'alfabeto arabo o greco, o caratteri cinesi.
La tabella A.S.C.I.I. contiene simboli di comando grafico, l'alfabeto latino minuscolo e maiuscolo, le lettere accentate, le cifre numeriche, le parentesi, i segni delle operazioni aritmetiche, altri segni matematici, alcune lettere dell'alfabeto greco, nonché una serie di angolature di segmenti e piccoli seu=

serie di angolature di segmenti e piccoli seg=
menti diversamente posizionati, in modo da
rendere facili certe rappresentazioni geome=
triche e scrivere certe formule matema=
tiche.

Da queste impostazioni primordiali, l'uso dei computer si è evoluto, sono nati linguaggi di programmazione, sempre più evoluti.

È importantissimo rendersi pratici della "numerazione binaria" sia come impostazione sia come operazioni od elaborazioni anche complesse.

La sequenza dei comandi e delle esecuzioni, (su cui abbiamo già accennato), implica programmazioni diverse.

Facciamo un esempio semplicissimo: a, b, c sono tre numeri tali che $a+b=c$.

Supponiamo di voler fare l'operazione $a+b=c$.

Nei calcolatori ordinari si batte il n° "a" poi si batte il simbolo + poi si batte il n° "b" ed infine battendo = appare "c".

Nei calcolatori con notazione inversa polacca si batte "a" e si batte "entra" ("a" va in una memoria), si batte "b" (che resta in memoria operativa) all'atto del + appare "C".

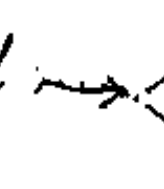
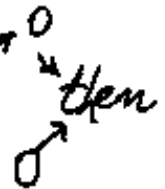
Ordinariamente, la sequenza delle azioni per eseguire una una operazione fra due numeri è:

1) immissione di un numero in memoria
2) immissione dell'operazione da effettuare
3) immissione del numero "operatore"
4) col segno: "=" si ottiene il risultato.

Nel procedimento inverso polacco, immessi i due numeri, ove il secondo è l'operatore, si immette l'operazione da effettuare e ciò dà subito il risultato.

Tutte le operazioni possono registrarsi in stampante in modo da avere un documento permanente di ciò che si è eseguito.

La sequenza delle varie operazioni può essere programmata sia su dischetti, sia nella memoria del computer, in tal modo fornendo al computer gli ele=

tal modo fornendo al computer gli ele-
menti base di un certo procedimento
di calcolo (opportunamente richiamato), il compu-
ter fornisce il risultato, senza bisogno di
altri interventi dell'operatore, anche se il
procedimento di calcolo è lunghissimo.

La programmazione strutturata

Un primo studio di un programma, può essere fatto mediante i diagrammi di flusso, che si avvalgono di figure geometriche elementari per ogni passaggio:

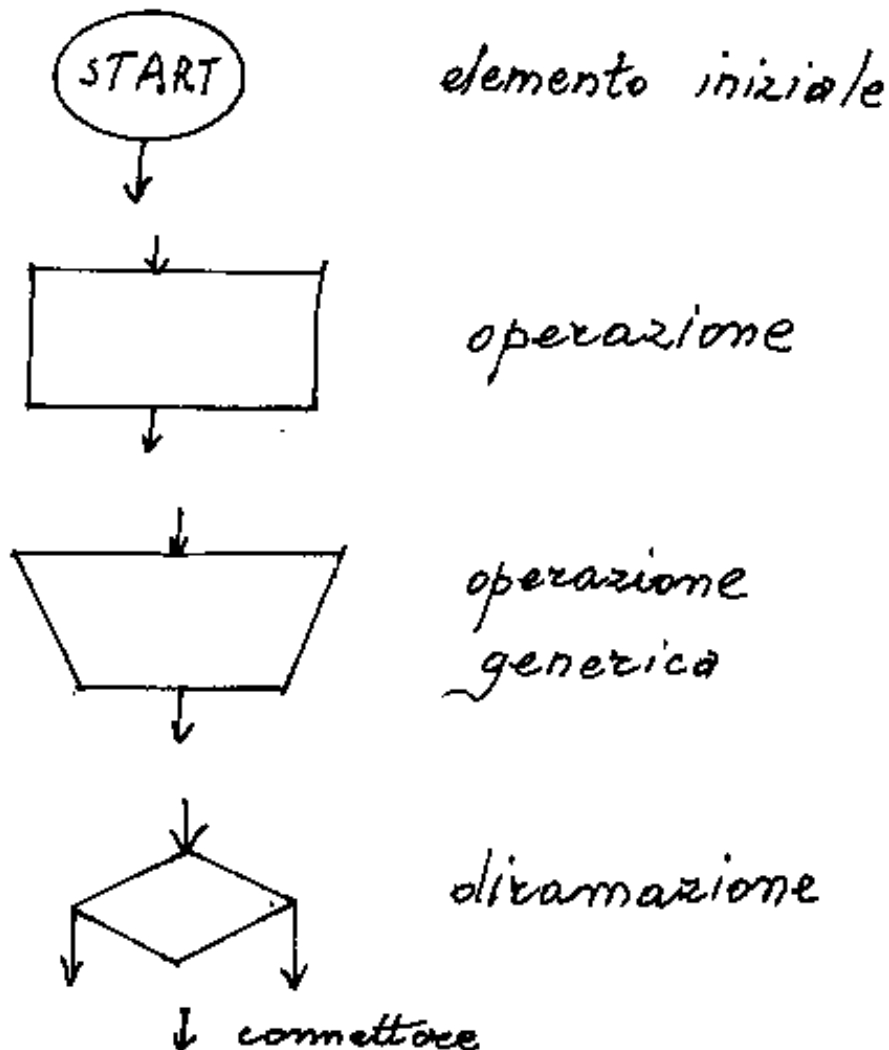
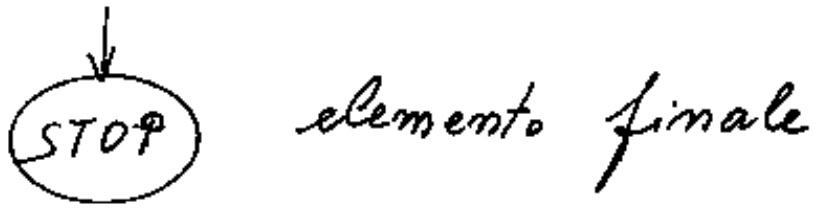
START — elemento iniziale

operazione

operazione generica

diramazione

connettore

STOP elemento finale

In inglese sono i simboli di "flow-chart"

La diramazione : if → o then → o..
→ o → a..

dal primo linguaggio di programmazione (1952), seguirono nel 1954 il Fortran (FORmula TRANslator), nel 1958 l'Algol (ALGOritm Language), nel 1950 il Cobol (COmmon Business Oriented Language). Nel 1964 Il PL/1 (Programming Language number 1) Il Basic (Beginners All-purpose Simbolic Instruction Code) fu introdotto nel 1964. Il Pascal nasce nel 1973 nel politecnico di Zurigo. Ed è particolarmente adatto per la programmazione strutturata.

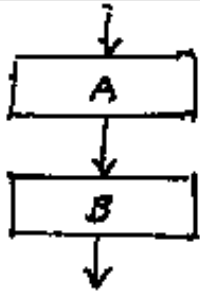
La programmazione strutturata ha le sue basi nel teorema di Böhm-Jacopini; Tale teorema afferma che qualsiasi algoritmo rappresentabile con un diagramma di flusso può essere espresso con tre sole strutture, tutte con un ingresso ed una

uscita: Sequenza, ripetizione, selezione.

A

B

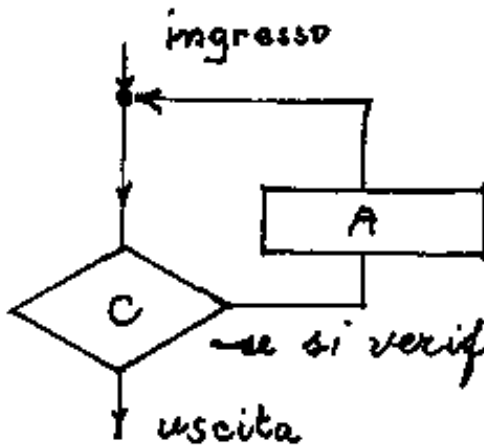
La sequenza

(1)

Begin (inizio) (ingresso)
Processo A
Collegamento (uscita-ingresso)
Processo B
End (FINE) (uscita)

ingresso

A

C

uscita

La ripetizione

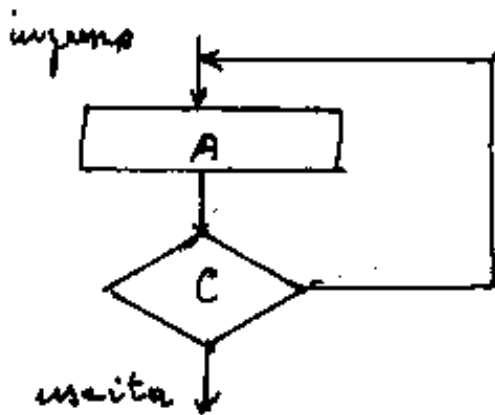
se si verifica la condizione C ripete per A
(A subentra in caso di ripetizione)

(2)

ingresso

A

C

uscita

La ripetizione

(A e C sono sempre eseguiti)

ingresso

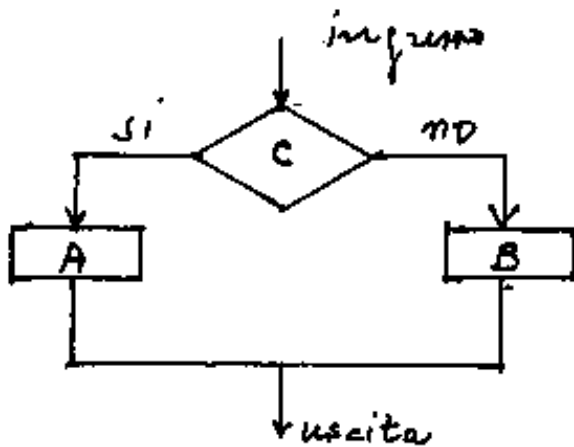
si

no

C

A

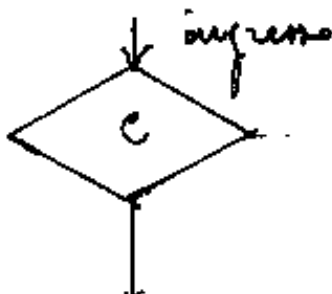
B

uscita

Selezione alternativa

(C condiziona)

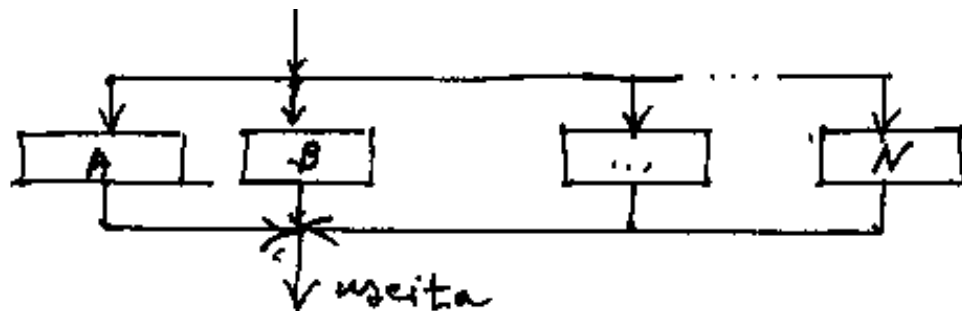
(3)

ingresso

C

selezione multipla

(c condiziona)

A B ... N

uscita

Le tre strutture: <u>sequenza</u>, <u>ripetizione</u>, e <u>selezione</u>, (sopra schematizzate) consentono la costruzione di qualsiasi diagramma di flusso.

Le regole grammaticali dei linguaggi di programmazione sono espresse in modo conciso dalla notazione simbolica di Backus-Naur (BNF - Backus Naur Form)

<S> che si legge: "struttura S del linguaggio"

::= " : "è definita come"

| " : "oppure

Per esempio, per definire una cifra si scriverà:

<cifra> ::= 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9

che si legge:

"La struttura cifra, è definita come: zero oppure uno oppure due, ... oppure nove".

" Vi sono "valori o procedimenti di calcolo che non mutano, sono costanti anche nei diversi programmi: per es.:

$\pi = 3,1415926535897932384626 \ldots$

$e = 2,718281828459045235360 28 \ldots$

sono costanti numeriche,

Tali costanti non saranno più variate, (è ovvio che trattandosi in genere di infinite cifre, la costante è definita dal grado di precisione richiesto)

Anche le operazioni aritmetiche, gli algoritmi o procedimenti di calcolo sono costanti e possono memorizzarsi, e nella memorizzazione possono avvenire semplificazioni, per es. il volume della sfera: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4,18879020478639..R^3$.

$V = \frac{\pi}{6} D^3 = \frac{\pi}{6} (2R)^3 = 0,523598775 . D^3$.

Comunque i coefficienti numerici, quando sono di infinite cifre, sono memorizzati nel grado di precisione richiesto.

Poiché i valori numerici (approssimati) sono uguagliati a lettere, (e viceversa): le formule letterarie assumo-

versa); le formule letterarie, assumendo i valori numerici memorizzati, avranno il grado di precisione fissato. Può avvenire che due procedimenti di calcolo che dovrebbero dare lo stesso valore, differiscano nelle ultime cifre, l'approssimazione dipende dalla precisione dei dati.

L'approssimazione di un numero può essere per difetto o per eccesso. Se il numero è minore del valore che vuol rappresentare, l'approssimazione è per difetto, se maggiore del valore, l'approssimazione è per eccesso. Per riconoscere se l'approssimazione è per difetto o per eccesso, in genere si opera sull'ultima cifra: se per difetto sarà seguita da puntini, se esatta o per eccesso non sarà seguita da puntini.

$3,1415 < \pi < 3,1416$ cioè: $\pi \cong 3,1415\ldots$;

$\pi \cong 3,1416$. Sarebbe meglio scrivere: $\pi \gtrapprox 3,1415$ $\pi \lessapprox 3,1416$. L'arrotondamento di un valore porta un "errore" che è lo scostamento dal vero valore. Per esempio 3,1415 si scosta per difetto di $\Delta = -0,0000926535897 9\ldots$

mentre 3,1416 ha un eccesso $\Delta = +0,00000 7346\ldots$

cioè è più approssimato il valore in eccesso

cioè è più approssimato il valore in eccesso che il valore in difetto.

L'uomo, quando cercò di affrontare la fenomenologia che ci circonda, data la complessità, cercò di semplificare,

linearizzando le espressioni algebriche del fenomeno. Le espressioni divennero: $a = K \cdot b$ ove K è un coefficiente numerico, oppure un'altra grandezza dimensionale; per es.: tensione = (intensità di corrente)(resistenza); $(V = I.R)$
Nell'espressione non appaiono i campi magnetici e le forze ponderomotrici.

Questo (forse troppo lungo) discorso ci avverte che l'approssimazione l'abbiamo già nella formula fisica, e che non possiamo inseguire una precisione già mancante nei dati di partenza. È assurdo scrivere numeri inerenti lunghezze fino al decimo di millimetro, quando tali lunghezze sono misurate con una comune rotella metrica graduata in centimetri.

Le formule Linearizzate sono valide in

campi ristrettissimi, ove sia possibile sostituire un tratto di segmento lineare ad un tratto curvo, e gli scostamenti non superino l'errore ammissibile. L'approssimazione deve essere accettabile.

I Riferimenti

Il problema che cerchiamo di trattare, è forse il più sottile, acuto e fondamentale di tutta la scienza.

Abbiamo considerato il punto (ciò che non ha parti) come una localizzazione nello spazio ennedimensionale; con ciò il punto diventa origine od arrivo di tutte le dimensioni.

Per avere le dimensioni, di punti ne occorrono almeno due, cioè una variazione della localizzazione. La variazione può riguardare una sola dimensione, per esempio il tempo, a cui si abbina il concetto di "prima o dopo".

La variazione può riguardare il potenziale elettrico, o l'energia potenziale connessa ad un campo qualsiasi, anche fuori del nostro spazio tridimensionale.

mensionale.

Sempre considerando il punto, l'emissione o l'as-
sorbimento, l'attrazione o la repulsione, ci danno la
visione delle infinite direzioni uscenti o conver-
genti in quel punto.

Basta scegliere una direzione per aver il
primo riferimento base dello spazio.

Siamo abituati a considerare la parola "punto" limitatamente allo spazio geometrico tri= dimensionale. Nel tempo ci è più familiare la parola istante. Eppure la determinazione di un certo stato termico, rispetto ad uno zero convenzionale o rispetto allo zero assoluto, è sempre un punto di quella dimensione, (in questo caso la temperatura a quel punto) ciò vale per la pressione, per il potenziale elettrico, per la densità; vale in genere per tutte le dimensioni. Abbiamo evidenziato questa generalizzazione della parola "punto", per rendere più accessibile il concetto "ennedimensionale" Consideriamo di aver fissato il centro "O" degli assi; (sappiamo trasformare le relazioni ad assi traslati ed assi ruotati, o viceversa); detta

x_p una coordinata di un punto, la successiva coordinata y_p è connessa alla prima dal fatto di dover insistere sulla retta $x = x_p$, analogamente z_p dovrà essere sulla retta $(x_p; y_p)$.
Analogamente la 4ª coordinata tempo è riferita alle precedenti tre, non solo, ma la successiva coordinata è riferita alle quattro precedenti

Il problema dell'equilibrio

Equilibrio si ha quando due agenti contrap=
posti si equivalgono. (Ogni espressione matema=
tica in cui figuri il segno "uguale": (=))
Abbiamo già trattato nel I volume il parago=
ne fra una espressione algebrica ed una bi=
lancia; sempre nel I volume si è accennato
all'equilibrio come simmetria; nel III volume
il problema è emerso nel calcolo dei baricentri.
Generalizziamo: "Una espressione algebrica
può contenere variabili nello spazio ennedi=
mensionale", in tal senso l'equilibrio oltre=
ché statico, è dinamico, può considerarsi
termico, elastico, elettrico, ecc in generale
energetico."
Questa impostazione è veramente feconda,
e supera diversi anacronismi e contraddizio=

e superò diversi anacronismi e contraddizioni della fisica classica.

L'azione gravitazionale terrestre ha portato al concetto di "peso" ed alla definizione dell'unità di misura dei pesi, sulle cui incongruenze abbiamo già trattato nel I volume. Due corpi, due cariche elettriche, o magnetiche

possono attrarsi o respingersi, questa azione attrattiva o repulsiva che per i corpi sulla superficie terrestre è il peso ed il senso di fatica che si ha nel sollevare pesi, portò a considerare più forte chi sollevava pesi maggiori, nacque la parola forza per definire le azioni pondero-motrici di attrazione o repulsione. Indicando con F queste azioni fu rilevato che

$F = \frac{m_1 m_2}{d^2}$ queste azioni erano proporzionali alle due masse (quantità di materia, o quantità di carica elettrica o magnetica) ed inversamente proporzionali al quadrato delle distanze.

Quindi l'azione "Forza" era relativa ad un certo istante in un certo punto dello spazio geometrico ed inerente a dimensioni fisiche di massa o carica elettrica o magnetica od altro che può anche ridursi a deformazioni elastiche (estremi di

anche ridursi a deformazioni elastiche (estremi di una molla compressa o tesa, però con impostazione diversa.)

Diremo "Lavoro" il sollevamento di un peso ad una certa altezza, e si estenderà tale termine all'azione della forza quando variando la distanza "d" si pensi F invariata. Ma anche il peso

varia con la gravità, e tale variazione non è rilevabile se la pesata avviene per confronto con pesi campione, cioè con bilance che utilizzano il principio della leva (stadere od altre).
Cioè un Kg di materiale fa restare in equilibrio la bilancia a due piatti, anche sulla luna, quando sull'altro vi sia un peso campione.

Se invece la pesata avviene con un dinamometro (bilancia a molla), o con una bilancia di torsione (bilancia di Coulomb), la deformazione elastica sarà molto minore se il Kg di materiale sarà pesato sulla luna, perché la gravità è minore.

I fisici, che dopo aver definito "massa" la quantità di materia, e definito il Kg-massa; definita la velocità (media ed istantanea) come variazione dello spazio nel tempo, e definita l'accelerazione come variazione della velocità nel tempo. Fu studiata la velocità di un corpo soggetto alla gravità terrestre.

velocità di un corpo soggetto alla gravità terrestre, classici gli esperimenti di Galileo (sul piano inclinato è conservato al Museo delle Scienze di Firenze). Fu detta Q = "quantità di moto" il prodotto di una massa "m" per una velocità "u"; ove: $Q = mu$.

Fu detto impulso il prodotto di una forza F per un

tempo: cioè: $\int_{t_1}^{t_2} F dt$ ed essendo uguale l'impulso alla quantità di moto Q, avremo cioè, in termini finiti, il valore della forza media $F_m = \frac{m \cdot u}{(t_2 - t_1)}$; dimensionalmente $F = (M \cdot L \cdot T^{-2})$ ed anche essendo l'accelerazione: $a = (L \cdot T^{-2})$, si ha: $\boxed{F = m \cdot a}$

Ma un sistema di unità di misura non risulta definito dalla sola indicazione delle unità fondamentali, (Cfr. E. FOA' - Lezioni di Fisica Tecnica, ed. Cedam - Padova - 1947. Cap I). Alle unità fondamentali occorre aggiungere il complesso di convenzioni che definiscono le unità derivate.

Per esempio la grande discussione fra i fisici se scegliere per l'unità di forza la relazione: $\boxed{F = ma}$ (dimensionalmente: MLT^{-2}), oppure scegliere la relazione: $\boxed{F = \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}}$ (dimensionalmente M^2L^{-2}); fu scelta: F=ma e, per far tornare le cose aggiunsero alla seconda formula un K dimensiona-

le $(M^{-1} L^3 T^{-2})$ e questo appiccicotto lo chiamarono pomposamente: "Costante di gravitazione universale" e la formula divenne: $F = K \frac{m_1 m_2}{d_2}$ cioè dimensionalmente: $(M^{-1} L^3 T^{-2} M^2 L^{-2}) = (MLT^{-2})$.

Uguagliando le azioni: $MLT^{-2} = M^2 L^{-2}$ si ha $\frac{M}{L^3} = \frac{1}{T^2} = \nu^2$; $\frac{massa}{volume}$ = densità = prodotto di frequenze.

Radianti

Il radiante è una dimensione "geometrica"

Il problema delle dimensioni, impropriamente qualificate come "fisiche", è annoso, e purtroppo per quel poco che so a tutt'oggi, non solo non è risolto, ma si continua ad insegnare cose assurde.

La verità in sé, è fuori delle capacità intellettuali di tutta la generazione umana, e se crediamo in un Ente Supremo, cerchiamolo con amore e gratitudine nel nostro animo e non andiamo a sbandierare: "Dio ha detto, Dio ha fatto, Dio vuole, ... noi siamo il popolo eletto" Ci sono uomini che lo fanno, come avessero Dio nella tasca dei pantaloni.

Noi ci sentiamo immersi in questo universo che ci circonda; l'esperienza dei nostri sensi è assolutamente individuale per cui l'immagine

è assolutamente individuale per cui l'immagine, "quella immagine" che è stata captata dalla nostra retina, ovviamente non può aver eccitato, in quell'istante, un'altra retina. Così il suono, così tutti i sensi.

Notiamo che una immagine, un suono, un flusso termico, una spinta, noi li connettiamo subito con una direzione.

E ciò consciamente o inconsciamente: uno perso=so si volta verso chi l'ha chiamata.

Abbiamo già scritto qualcosa sul concetto: "direzione", sulla sua importanza, sulla sua connessione con le misure angolari, che secondo i fisici attuali "non hanno dimensioni fisiche. (Il radiante non è una dimensione fisica!... insegnano!!!)

Questo nostro studio tende a dimostra=re che:

la dimensione lineare e la dimensione angolare sono fondamentali ed impli=citamente connesse con la dimensione tempo.

Occorre ripartire da zero, e non possiamo accettare leggi ipotizzate dall'uomo, cioè infarcite di convenzioni di comodo. Accettia=mo invece l'esperienza dei fenomeni.

mo invece l'esperienza dei fenomeni.

Ma l'acquisizione dei fenomeni avvie= ne attraverso i sensi e non è detto che i sensi rispondano esattamente nello stesso modo, nei singoli individui, e tal volta nello stesso individuo in tempi diversi.

È quindi molto difficile descrivere fenomeni, o fare affermazioni che siano universalmente accettate.

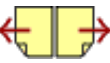
L'individuo, una volta raggiunta la consapevolezza dell'io, fissa un centro e ciò che lo circonda in tutte le direzioni.

È praticamente immediato il concetto di lontananza, di vicinanza, di sequenza, di verso, di moto, e quindi di tempo.

Il concetto: "verso" è delicatissimo ed occorre analizzarlo subito.

Allontanarsi o avvicinarsi all'osservatore ci dà il concetto di "verso" su una linea. Ma altri due osservatori posti lateralmente alla linea e da banda opposta affermerebbero uno: "è un moto verso destra", l'altro: "è un moto verso sinistra". Ci vuol poco a met=

terli d'accordo dicendo: "_è un moto che va da A verso B._"

Questa banalissima osservazione ha portato grandi discussioni soprattutto sul verso nei moti circolari. Infatti consideriamo un corpo che ruoti intorno ad un osservatore uomo, (che "in sé" ha già il verso

della sua vista, del suo modo di procedere, ed ortogonalmente a ciò una destra ed una sinistra); egli vedendosi passare davanti il corpo mobile, che gli ruotava intorno, notava, se il corpo proveniva dalla sua sinistra, lo diceva sinistrorso od anche destrogiro perché andava verso la sua destra. Se invece proveniva dalla sua destra veniva chiamato destrorso e siccome procedeva verso sinistra era anche detto sinistrogiro. Però: (cfr. Levi Civita Amaldi — compendio di meccanica razionale . parte I pag. 5 - ed. Zanichelli) . Certi geni, confondendo sinistrorso con sinistrogiro si giustificarono dicendo che la desinenza orso - orsa non deriva dal verbo latino "ortus", ma da advorsus cioè che si muove verso...... e quindi destrorso equivale destrogiro e sinistrorso equivale sinistro giro. Sembrano favole, per questo abbiamo fatto la citazione di un'opera

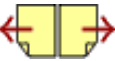
questo abbiamo fatta la citazione di un'opera illustre. Ma questo non basta; se guardiamo le lancette dell'orologio, noi diciamo moto orario oppure, come prima, "moto destrogiro o sinistrorso" (Lucifer ortus erat, dice Ovidio nei Tristia). però se guardiamo l'orologio in trasparenza dal disotto, il moto orario lo vediamo antiorario.

E' questo un primo impatto con la relatività, è una relatività Galileiana che Einstein estese alle onde elettromagnetiche. A noi occorre una definizione di "verso" che non dipenda dalla posizione dell'osservatore.

Ogni punto indefinitamente lontano determina la direzione di tutte le rette parallele che puntano verso di esso. La definizione è lecita perché dati due punti distinti A, B, con $\overline{AB}$ reale e finita e sia P il punto indefinitamente lontano, è sempre possibile determinare una distanza $\overline{PA}=\overline{PB}$ tale che l'angolo $\widehat{APB}$ sia minore di un angolo piccolo a piacere cioè al limite $\widehat{APB} \to 0$ con $\overline{PA}=\overline{PB} \to \infty$.

Cioè tutte le direzioni possibili sono le direzioni dei raggi uscenti da un centro sfera che puntano la superficie sferica. Quindi se in modo inequivocabile definiamo il centro C ed il punto P sulla

cabile definiamo il centro C ed il punto P sulla superficie sferica resta definita la direzione $\overrightarrow{CP}$ e la direzione di verso opposto $\overrightarrow{PC}$ che più propriamente è indicata con $\overrightarrow{CQ}$ ove: $|PQ| = |QP|$ = diametro della sfera.

Meno facile è la determinazione del verso di un moto circolare.

Consideriamo il moto circolare piano.

Occorre prima di tutto orientare il piano, ció è possibile con le rette di giacitura che sono normali all'insieme di piani paralleli, (sappia= mo orientare le rette). In toscana, si suol dire, per le ca= ve di pietra serena, che: "la pietra guarda il levar del sole" Ciò vuol dire che le stratificazioni di pietra serena, definite da piani paralleli, hanno rette di giacitu= ra che vanno dalla cava verso un punto ad est sopraelevato sulla superficie terrestre. cioé le lastre di pietra formano piani inclinati ed è facile portare in cava grandi lastre se la cava è aperta da est.

Definita la direzione della retta di giacitura del piano su cui avviene la ruotazione dire= mo positivo quel moto circolare che un uomo in piedi secondo la retta di giacitura vedrebbe

in piedi secondo la retta di giacitura vedrebbe <u>antiorario, destrorso, o sinistrogiro</u>. È la direzione della ruotazione del campo magnetico intorno ad un conduttore in cui si consideri il verso della corrente dal polo positivo al polo negativo; è il moto di svitamento della vite destrogira.

Tuttociò è indipendente dall'osservatore e dalla posizione nello spazio.

Il verso può essere invertibile come il moto in un pendolo, ma può anche essere non invertibile, come in certi fenomeni di emissione. Per esempio il secondo principio della termodinamica ci dice: "è impossibile che l'unico risultato di una trasformazione termodinamica sia il passaggio di calore (energia termica) da un corpo più freddo ad uno più caldo.
Si può generalizzare dicendo: È impossibile che l'unico risultato di qualunque trasformazione energetica sia il passaggio di energia da un corpo avente livello energetico minore ad un corpo avente livello energetico superiore.
Il concetto di sequenza implica l'ordinato susseguirsi di elementi, implica un "prima" ed un "dopo" ed in ciò implica un tempo.
Non entriamo, per ora, in merito al concetto "tempo"; consideriamo invece due modi

di essere delle cose; e cioé: ferme → statiche, in moto → dinamiche. Purtroppo, la relatività galileiana, interviene chiedendo la precisazio=ne: "rispetto a cosa?" In un treno in corsa sui binari, vi sono persone sedute, vi sono persone che camminano nel verso del treno vi sono persone che camminano in verso opposto;

Se poi pensiamo che anche la terra "si muove", che anche il sistema solare "si muove" e poiché il moto è una relatività, e poiché non esiste alcun sistema da considerare fermo. Non diciamo "le stelle fisse" perché non lo sono.

Ma, in tutto ciò, cosa c'entra la direzione, e quindi il radiante?

Supponiamo di essere in un treno in corsa e osserviamo il paesaggio attraverso il finestrino. Gli alberi, i pali, le siepi, vicine ai binari del treno ci passano velocissime davanti, tanto che la direzione del nostro sguardo devia di $180^0 = \pi$ rad in un attimo. Invece quella torre in cima al monte, distante molti chilometri dai binari, la vediamo praticamente ferma, la direzione del nostro sguardo varia pochissimo e non varia affatto se i binari forma=

mo, e non varia affatto se i binari forma=
no un arco di cerchio avente per centro la torre.
Le stelle, cosiddette fisse, sono molto, molto
più distanti di quella torre.
Rilevata la relatività del moto notiamo che,
affinché avvenga una mutazione occorre una
azione che la provochi. (Attenzione questa affer=
mazione è più estesa della legge d'inerzia)

Per non voler entrare nella legge d'inerzia, considerimo due cartoncini affiancati, di uguali dimensioni e diverso colore. La mutazione fra il cartellino bianco ed il cartellino verde rilevata dai nostri occhi, ha due azioni diverse : Una azione è l'emissione o riflessione cromatica che dipende dalla cosa. L'altra azione è quella che compiamo noi variando la direzione del nostro sguardo. Ma noi cerchiamo ciò che è indipendente dall'osservatore.

Facciamo una esperienza, per cercare di chiarire cosa intendiamo per "azione" (non accettiamo il concetto di forza). Ricordiamo Archimede:

Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.

Se si verifica l'azione di qualcosa su altro qualcosa, l'agente deve disporre di qualcosa capace di esercitare l'azione. Chiameremo energia questo qualcosa

tare l'azione. Chiameremo energia questo qualcosa che potrà presentarsi in infinite forme diverse.
L'energia per sua natura espliciterebbe la sua azione indipendentemente se non esistessero vincoli capaci di bloccarne l'azione che comunque il vincolo subisce, sia pure in modo meno appariscente.

L'energia bloccata è spesso chiamata: "energia potenziale" a cui si aggiunge una qualificazione: "elastica, elettrica, gravitazionale, chimica, termica, cinetica, molecolare, atomica, nucleare, ecc. ecc." (Tutta la materia è energia)

Il pendolo ricevuta una certa quantità di energia si diverte a trasmutarla da gravitazionale a cinetica e viceversa ed il suo moto sarebbe perpetuo se non vi fossero varie specie di attriti, con l'aria esterna e col perno intorno al quale oscilla.

L'attrito trasforma l'energia in altre forme, normalmente in calore, (energia termica), ma può essere elettrica ed anche forme diverse. Se non vi fossero attriti, la posizione del pendolo fermo in equilibrio, sarebbe una sola ed è la direzione della gravità che passerebbe per il centro di oscillazione e per il baricentro del sistema.

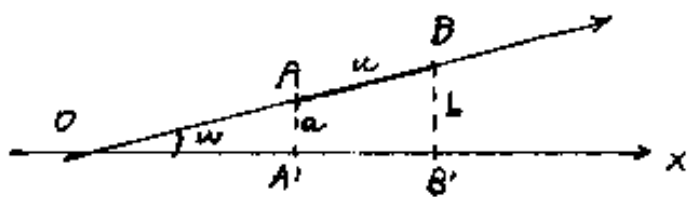
baricentro del sistema.

Invece all'intorno di questa posizione vi sono infinite posizioni in cui il pendolo non si muove e sono le direzioni che divergono dalla direzione della gravità di un angolo inferiore o tutt'al più uguale all'angolo di attrito.

Non si può quindi pensare ad un punto, ma ad un intorno più o meno piccolo dipendente dall'attrito.

Abbiamo già definito l'angolo piano nel I vol
e lo spazio angolare solido nel IV volume; con=
sideriamo qui un punto che si muova di moto
uniforme su una circonferenza, (vedi IV volume);
il suo moto, visto dalle due facce del piano su
cui giace la circonferenza, appare di verso
opposto: (orario o antiorario), però se proiettia=
mo il punto mobile su un diametro, il moto
è quello di un pendolo, ed è identico sia che
la circonferenza sia percorsa in senso orario
od antiorario, (non dipende dall'osservatore).
Ma il pendolo ha una frequenza e se si
muove ortogonalmente al piano di oscilla=
zione si ha una sinusoide ed una lun=
ghezza d'onda; (vedi IV vol. cap. Lo spazio angolare
solido) si ha cioè il modo di trasmettere delle
sorgenti energetiche, la oscillazione non è più le=

[illegible] non è più le=
gata ad un piano, non solo, ma può vibrare sia
nelle direzioni di emissione (come i suoni), sia
ortogonalmente alle direzioni di emissione, (come
le onde elettromagnetiche). Il verso è una
emissione ed è indipendente dall'osservatore,
supponendo relativamente fermi sorgente e os=
servatore.

Supponiamo di aver fissata una direzione (per esempio una retta orientata), e di aver presa in quella direzione una unità di misura lineare, : $u = \overline{OB} - \overline{OA} = \overrightarrow{AB}$, si proietti il segmento $\overrightarrow{AB}$ su un'altra direzione x

uscente da O e formante con $\overline{AB}$ l'angolo $|\omega|$, e siano A' e B' le proiezioni, avremo $\overline{A'B'} = \cos(\omega) \cdot \overline{AB} = u \cdot \cos\omega$

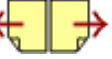
Se $\omega = 90° = \pi/2$, $\cos\omega = 0$ e quindi $\overline{A'B'} = 0$

Detti: $a = \overline{AA'}$; $b = \overline{BB'}$ gli spostamenti di A e di B per andare in A'B' avremo che l'area del trapezio descritto nel moto dai punti di $\overline{AB} = u$ è $Area_{ABB'A'} = \frac{a+b}{2} \cdot u\cos(\omega)$ e diventa nulla per $\omega = \pi/2$.

Ma se il segmento $\overline{AB}$ ruota intorno all'asse x, i punti A e B nel loro moto non compiono segmenti rettilinei, ma archi di cerchio, il cui raggio è la distanza dall'asse

cioè la lunghezza di tali archi raddrizzata è pari alla lunghezza del raggio in unità di lunghezza fatto radiante per l'angolo in radianti.

Perciò $\left(\frac{a+b}{2}\right)\overline{AB}\,2\pi = \left(\frac{l_a}{2\pi} + \frac{l_b}{2\pi}\right)\frac{1}{2}\,\overline{AB}(u)\,2\pi\,rad = \left(\frac{a+b}{2}\right)\overline{AB}\cdot 2\pi = S_l$ = Superficie laterale del tronco di cono. —

Si verificano cioè i seguenti casi:

1) L'azione è tale da spostare l'oggetto di una lunghezza nella direzione dell'azione, si ha che lo spostamento si misura semplicemente in unità di lunghezza.

a) Se l'oggetto è un punto si ha la lunghezza della linea (se il punto è libero)

b) Se l'oggetto è un segmento e l'azione è perpendicolare al segmento, il segmento descrive un'area data dal prodotto del segmento per lo spostamento entrambe in unità di misura lineare di lunghezze, cioè l'area è misurata in unità di lunghezza al quadrato.

c) Se l'oggetto è un'area e l'azione è perpendicolare all'area; il prodotto dello spostamento in unità di lunghezza, per l'area in unità di lunghezza al quadrato ...

ghezza al quadrato è un volume in unità di lunghezza al cubo

d) Se l'oggetto è una massa in campo gravitazionale e l'azione ha la direzione del campo, il prodotto della massa in unità di massa, per lo spostamento in unità di lunghezza è un lavoro. (es. Kg.m).

e) Se il punto P è vincolato ad avere distanza r = costante da un asse fisso ($r = \overline{PO} \perp$ all'asse), e l'azione è perpendicolare al piano determinato da P e dall'asse, il moto di P è un arco di circonferenza, ma anche tutti i punti della distanza $r = \overline{PO}$ descrivono archi di circonferenza; l'azione quindi non agisce sull'asse, ma fa descrivere al segmento $\overline{PO}$ l'angolo: $P\hat{O}(P)$ cioè provoca una rotazione.

Le azioni che provocano rotazioni, sono dette <u>momenti</u>. La lunghezza $\overline{OP} = r$ deve essere misurata in unità di lunghezza/radiante.

Se l'azione su $\overline{OP} = r$ ha provocato l'angolo α (rad)

$r\alpha = \frac{\text{lunghezza}}{\text{rad}} \cdot \text{rad.}$ = lunghezza dell'arco raddrizzato percorso da P.

f) quindi il momento statico di una linea è un'area per unità di radiante della superficie generata dalla li...

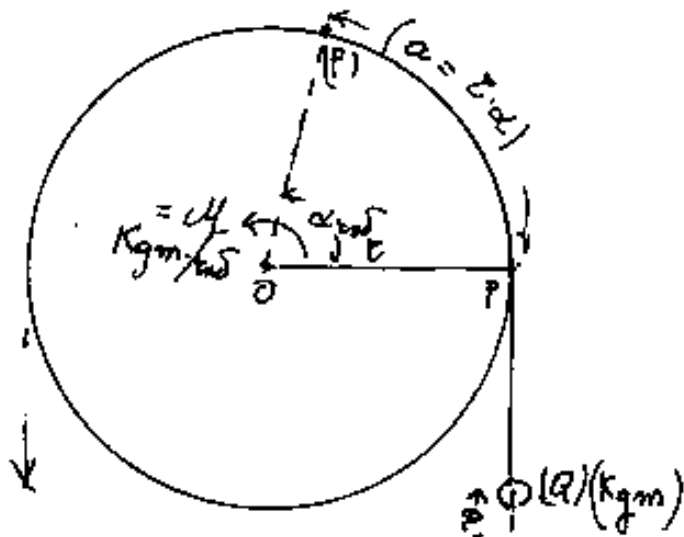
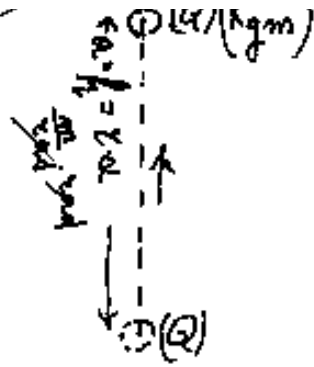
superficie generata dalla linea ruotando intorno all'asse. (V. teoremi Pappo e Guldino)

g) Il momento statico di un'area rispetto ad un asse è un volume per unità di radiante, ed è il volume di rotazione di tale area. (per es. $(cm^2)\left(\frac{cm}{rad}\right)(rad) = cm^3$) (V. Pappo e Guldino)

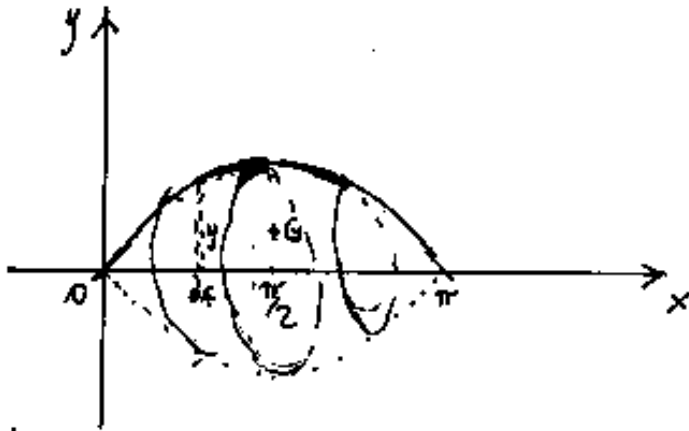
b) Il momento statico di una massa rispetto ad un asse, in campo gravitazionale è quindi un lavoro per unità di radiante.

Se la massa è espressa in Kg e la sua orizzontale ne dista "r" (in metri/radiante) $M = \frac{Kg\,metri}{rad.}$ ed il prodotto di un momento per l'angolo è un lavoro. Sia l'angolo $= \alpha$ (rad)

Il lavoro torna $L = M\alpha = \left(\frac{Kg\,metri}{rad}\right) rad = Kgm.$

Ciò toglie l'incongruenza che un lavoro ed un momento abbiano le stesse dimensioni fisiche come vorrebbe la fisica classica.

La figura a fianco evidenzia come il momento M facendo ruotare la puleggia dell'angolo α sollevi il peso Q di una altezza pari

all'arco descritto dalla fune sull'arco.

. Poiché abbiamo già trattato il momento statico nel calcolo dei baricentri; ed i solidi di rotazione col teorema di Pappo e Guldino,

Dimostriamo che: Momento di un'area = Volume/radiante

Trovare il volume del solido di rotazione generato da un arco di sinusoide ruotante intorno all'asse x e sia: $y = sen(x)$; $dA = y\,dx$;

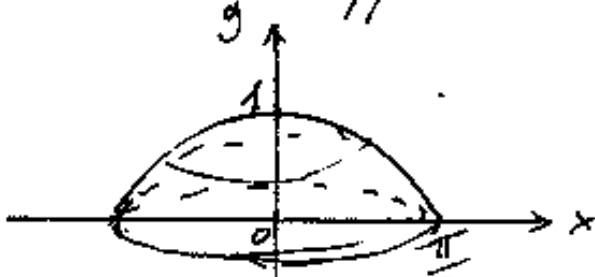
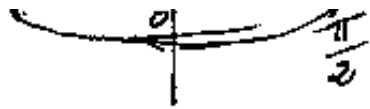
$$\int_0^{\pi} dS_x = \frac{y}{2}dA = \int_0^{\pi}\frac{y^2}{2}dx = \int_0^{\pi}\frac{sen^2 x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{sen x \cos x + x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$S_x \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi^2}{2} \simeq 4,934802 =$ volume di una rotazione completa di un giro.

L'area è $\int y\,dx = \int sen x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$ $\qquad A = 2$

$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} \simeq \pi/8 = 0,392699081$ (ordinata del baricentro)

$2\pi y_G = 2,467401 =$ circonferenza descritta dal baricentro

$(A)(2\pi y_G) = 2(2,467401) = 4,934802 =$ volume del solido per il teorema di Pappo e Guldino: $V = A\cdot 2\pi y_G = \cancel{A}\cdot 2\pi\frac{S_x}{\cancel{A}} = S_x\cdot 2\pi$.

Consideriamo il solido ottenuto facendo ruotare l'area di cosinusoide

0 $\frac{\pi}{2}$ l'arco di cosinusoide

da 0 a $\pi/2$ intorno l'asse y: $y = \cos x$

$dA = \cos(x)\,dx \quad S_y = \int_0^{\pi/2} x \cos(x)\,dx = \int x\,d(\operatorname{sen} x) =$ per parti

$\left(x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx\right)_0^{\pi/2} = \left(x \operatorname{sen} x + \cos x\right)_0^{\pi/2} = V/2\pi$

$[(1{,}570796)\cdot 1 + 0 - (0 + 1)]\,2\pi = 3{,}586419094$ = volume del solido.

I due volumi potevano ricavarsi da: $\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x)^2 \pi \cdot dx$ e da: $\int_0^{\pi/2} x^2 \pi\, d\cos x$.

La Geometria delle Masse

Abbiamo già dato un cenno al concetto di massa. Mentre in fisica per massa si intende: la quantità di materia, che il volume non poteva dare perché variabile con la tempera= tura e pressione, e che il peso non poteva dare perché variabile con l'accelerazione di gravità. Per noi "massa" è ciò che ha impor= tanza nel problema trattato.

In analisi matematica si dicono: "coordinate baricentriche" di un insieme di punti ciascuno dei quali ha una massa: $m_1, m_2, \ldots m_i \ldots m_n$, le medie ponderate: $x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$; $y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$; ... ecc. per quante sono le coordinate di uno spazio pluridimensionale. Abbiamo visto (vol III) le coordinate proiettive quando si riducono a coordina= te baricentriche; abbiamo visto il baricentro (vol I) come

te baricentriche; abbiamo visto il baricentro (vol I) come centro di pressione; nel vol III la definizione di momento statico, il calcolo dei baricentri con esempi; e l'applicazione ai teoremi di Pappo e Guldino sui solidi di rotazione con l'importante corollario:
"Il volume del solido generato da un'area che ruota intorno ad un asse è dato dal momento statico di quell'area rispetto a quell'asse moltiplicato per l'angolo in rad."

Ma è nel nostro proposito di voler "ripartire da zero"
Abbiamo già avvertito che il numero non qualifica la quantità: 3 cosa? 3 millimetri o 3 chilometri?, tre grammi o tre tonnellate?, tre secondi o tre secoli?,. . . . . si nota che occorrono almeno due specificazioni; e cioè: la natura della quantità: "lunghezze, pesi, tempi....ecc." e l'unità arbitraria di quella specie: "per esempio per le lunghezze: metri, piedi, centimetri, pollici, passi, come metriche, la lunghezza d'onda della riga rosso del cadmio a 15°C e 760 mm.Hg λ_{cd} = 0,00000064384696 metri; da cui 1 metro = 1.553164,13 λ_{cd}, l'anno luce, che è la distanza coperta dalla luce in un anno alla velocità di 299792458 metri al secondo (circa 300000 Km/sec)"
9460.528.436.000.Km. circa.

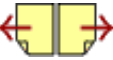
Facciamo una osservazione:

I valori delle funzioni trigonometriche che nascono come rapporto di due lunghezze, possono riguardarsi come numeri puri cioè privi di attributi dimensionali. Ciò premesso consideriamo un triangolo ABC ove un lato sia espresso col teorema dei seni avremo:

$a = b \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$; se sen α e sen β possono considerarsi numeri puri, a maggior ragione il loro rapporto; per cui il lato "a" del triangolo assumerà l'unità dimensionale del lato "b", cioè se b è in centimetri anche "a" risulterà in centimetri, se "b" è in pollici anche "a" risulterà in pollici,... ecc., ma "b" può essere espresso in unità dimensionali diverse da "lunghezze", ed il segmento $\overline{AC}$ = "b" che graficamente lo rappresenta può essere una grandezza elettrica, magnetica, in generale anche non fisica, nascono così quelle "geometrie" fuori del nostro spazio tridimensionale, di cui qualche esempio si trova in elettrotecnica, in scienza delle costruzioni, in economia, ecc.

Abbiamo detto che per noi "massa" è "ciò che ha importanza nel nostro problema", ma è ambientata nello spazio tridimensionale

per cui: "la distanza" ha importanza quanto la "quantità di massa".

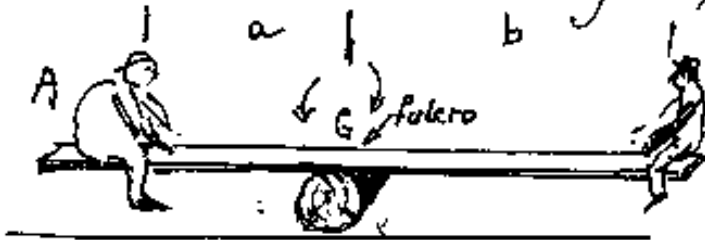
La statica è il problema dell'equilibrio che noi vogliamo trattare in generale, oltre il comune equilibrio meccanico.

Consideriamo di dover progettare una centrale termica che produca vapore, per una indu= stria che dispone di diversi capannoni, fra loro separati, ciascuno dei quali consu= mi un certa quantitá di vapore.
Le quantitá di vapore sono le nostre "masse" la posizione dei capannoni la loro ubicazione Il baricentro di queste masse è la migliore e più economicamente conveniente posizione della centrale, sia come costo d'impianto (i tubi più grandi sono più corti, ed il maggior flusso di vapore ha minore dispersione).

Consideriamo di dover progettare l'ubi= cazione di una casa colonica, per la lavorazione di un podere costituito da un, appezzamento ad orto, un appezzamento a frutteto, un appezzamento a seminativo.

frutteto, un appezzamento a seminativo, un appezzamento a bosco.
Rilevato che nel corso dell'anno il colono va al bosco un certo numero di giorni ed al= l'orto praticamente tutti i giorni, le giornate lavorative sono le nostre masse che ubicate negli appezzamenti relativi,

porteranno il loro baricentro in prossimitá dell'orto, ove va costruita la casa.

Analogamente una scuola o una stazione di trasporti destinate a servire borgate diverse, il numero degli allievi, o dei passeggeri, di ciascuna borgata saranno le nostre "masse".

Dalla prima visione dei due bambini, uno grasso ed uno magro, che fanno l'altalena su una tavola oscillante su un fulcro, e ciò è possibile, se il fulcro è nel baricentro delle due masse - peso dei due bambini, tanto che basta un leggero inclinarsi in avanti ed in dietro per ottenere l'oscillazione della tavola.

Visivamente il concetto di "equilibrio" è palese.

Il fulcro sostiene la somma dei pesi.

Quindi la risultante di un sistema di forze, e quindi l'equilibrante dovrà passare per il

e quindi l'equilibrante dovrà passare per il baricentro, considerando le forze "masse" ed i punti di applicazione, la loro localizzazione.

Il baricentro diventa <u>quel punto ove posso considerare la somma delle masse, per ottenere gli stessi risultati</u>.

Un altro aspetto di cose equiparabili a masse sono le frequenze, per vedere una applicazione di questo concetto, consideriamo un negozio che abbia in vendita vari articoli, alcuni dei quali sono venduti con notevole frequenza altri sono venduti più raramente, è ovvio che il banco di vendita sia il baricentro delle frequenze. Questo è solo un esempio, ma il baricentro delle frequenze ha applicazioni veramente notevoli sia in campo economico, che in campo fisico, ed il discorso diventa ancora più complesso se consideriamo la frequenza una probabilità a posteriori.

Per le aree assunte come masse abbiamo già dimostrato che per una lastra piana di spessore costante in materiale omogeneo di densità costante,

le aree sono proporzionali alle masse ed hanno lo stesso baricentro.

Se disegnamo su cartone una figura qualsiasi e ne calcoliamo il baricentro G, ritagliata la figura e posta in G (a metà spessore) sulla punta di uno spillo, essa starà in equilibrio perchè la somma dei momenti statici rispetto ad assi

baricentrici è nulla, qualunque direzione abbia l'asse, ed è la verifica che i calcoli sono giusti e che, per quel punto, passa la risultante dei carichi (peso del cartone).

Il baricentro è quindi un centro di simmetria rispetto alle azioni di rotazione dei momenti statici relativi ad ogni asse passante per G.

Poiché la massa-peso di un corpo solido è pensabile concentrata nel suo baricentro sospendendo per un suo punto il corpo solido esso si dispone in modo che il baricentro occupi la posizione più bassa possibile compatibile col vincolo.

Se nel punto di sospensione poniamo anche un filo a piombo, il baricentro G è certamente sul filo a piombo; e bastano per una lastra due punti di sospensione per definirne il baricentro

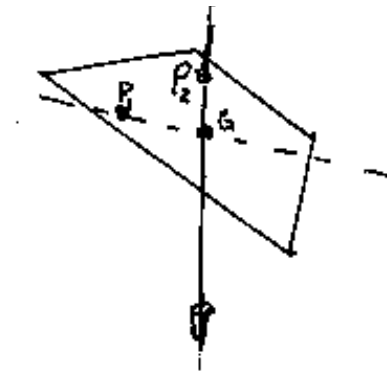
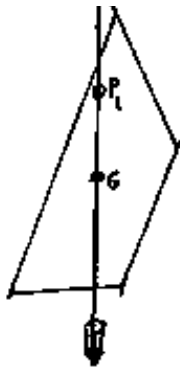
A A

P1

G

P2

P

G

È un metodo pratico per determinare il baricentro.

Abbiamo già dato alcuni esempi di calcolo di baricentri (vol. III) per l'applicazione dei teoremi di Pappo e Guldino. Per la continuità dell'esposizione riportiamo il calcolo dei baricentri anche se in parte sarà ripetitiva.

Distinguiamo, prima di tutto, le masse discontinue (puntiformi), dalle masse continue.

Masse discontinue

Se riferite ad un sistema di assi cartesiani valgono le coordinate baricentriche:

$$x_G = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i} \quad ; \qquad y_G = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i} \quad ;$$

Se non sono riferite ad un sistema di assi cartesiani, si possono considerare a due a due e per ogni coppia, trovata la posizione del loro baricentro, vi si riporta la somma delle due masse. Ciò può ripetersi

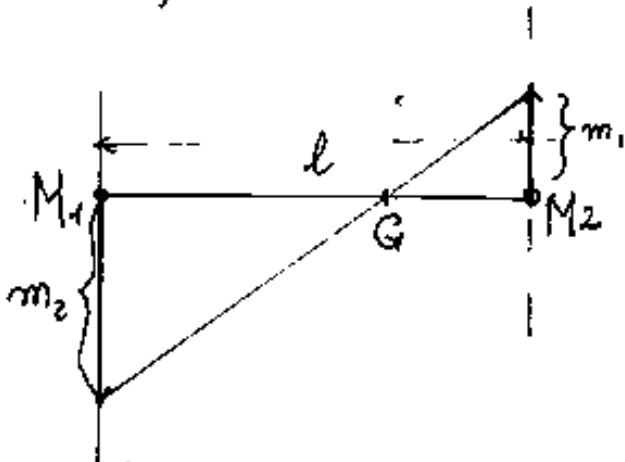
la somma delle due masse. Ciò può ripetersi indefinitamente fino all'ultima coppia che darà il baricentro del sistema comunque disposto nello spazio.

È quindi importantissimo conoscere i modi analitici e grafici per determinare

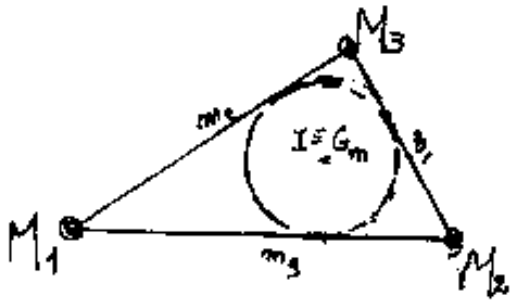
il baricentro di una coppia di masse: "M_1" ed "M_2" distanti "l", di valore: m_1 ed m_2.

Il baricentro G si trova sulla congiungente le due masse puntiformi, ad una distanza da esse che è inversamente proporzionale alle masse stesse. Cioè:

$$\overline{M_1G} = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}\,l \quad ; \quad \overline{M_2G} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\,l$$

Ciò può realizzarsi graficamente:

Si riportano, perpendicolarmente ad l, su M_1 un segmento proporzionale ad m_2; e su M_2, con verso opposto, un segmento proporzionale ad m_1; congiungendo gli estremi di questi due segmenti si incontra G sulla congiungente.

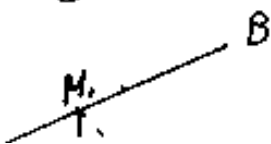
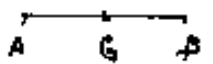
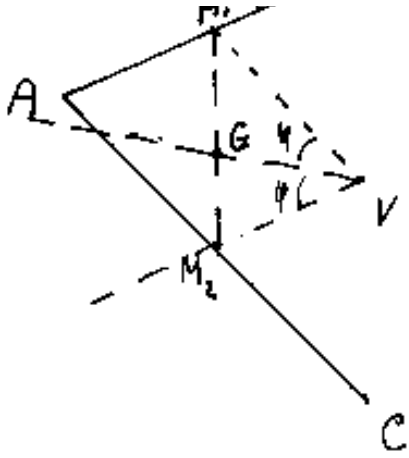
Se tre masse ai vertici di un

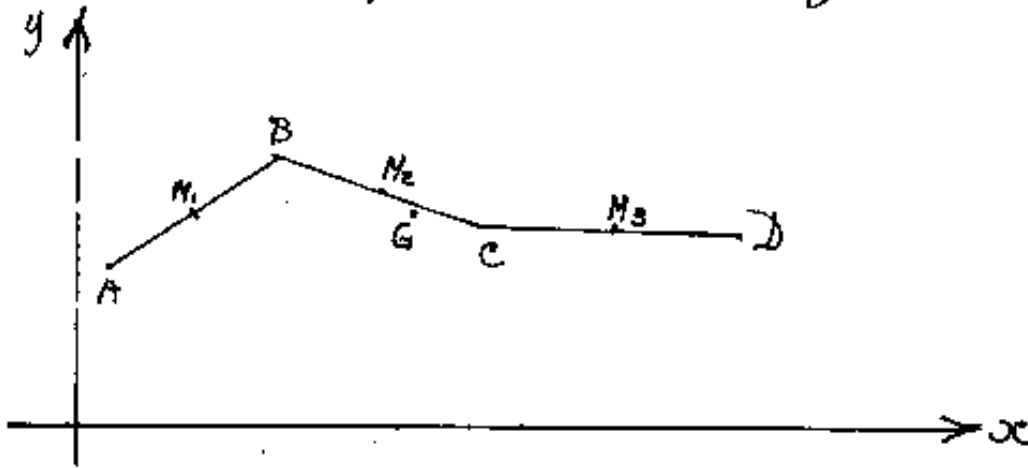
M_3, $I \equiv G_m$, m_1, m_2, m_3, M_1, M_2

triangolo sono proporzionali ai lati opposti, il loro baricentro coincide con l'incentro del triangolo, infatti le bisettrici dai vertici di un triangolo dividono il lato opposto in due parti proporzionali ai lati adiacenti.

Abbiamo già visto vol I come la simmetria del baricentro sia sui momenti statici. Solo se le due masse M_1 ed M_2 sono uguali il baricentro è a metà distanza: $(\overline{M_1 G} = \overline{G M_2})$.

Supponiamo ora di distribuire la massa uniformemente su un segmento lungo "a", la quantità "m" sarà proporzionale ad "a", e possiamo pensarla concentrata in "$a/2$", ove è G = baricentro del segmento.

Quindi calcolare il baricentro di una spezzata, può farsi in più modi: sia riferendo la spezzata ad un sistema di assi; sia graficamente. Occorre vedere la lunghezza dei segmenti sia come distanza, sia come massa.

Di un segmento G è nel punto di mezzo: A G B

B M₁ Di due segmenti G è sulla

congiungente i punti di mezzo M_1 ed M_2, e sulla bisettrice dell'angolo $M_1\hat{V}M_2$ ove V è il vertice opposto del parallelogramma dei segmenti, se i segmenti sono consecutivi; o del triangolo M_1VM_2 ove $\overline{M_1V} = Km_2$; $\overline{M_2V} = Km_1$, se disgiunti.

Se tre o più segmenti formano una spezzata continua, riferita ad un generico sistema di

di assi cartesiani possiamo utilizzare le coordinate baricentriche dei punti di mezzo.

$$x_{M_1} = \frac{x_A + x_A}{2} \quad ; \quad x_{M_2} = \frac{X_B + X_C}{2} \quad ; \quad x_{M_3} = \frac{X_C + X_D}{2}$$

$$m_1 = \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad ;$$

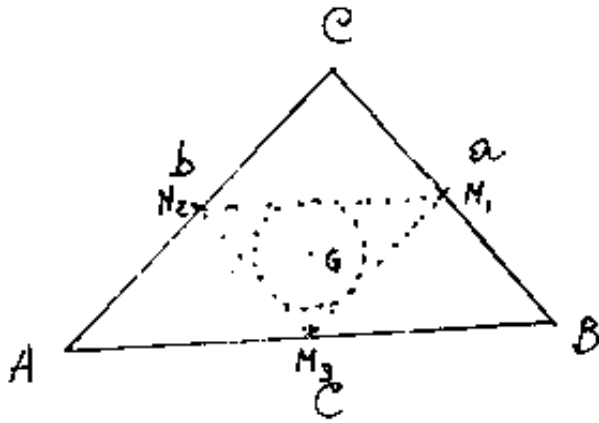
$$m_2 = \overline{BC} = \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$m_3 = \overline{CD} = \sqrt{(X_D - X_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$$

$$x_G = \frac{\sum_1^n x_{M_i} \cdot m_i}{\sum_1^n m_i} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum_1^n y_{M_i} m_i}{\sum_1^n m_i}$$

È più comodo il metodo grafico.

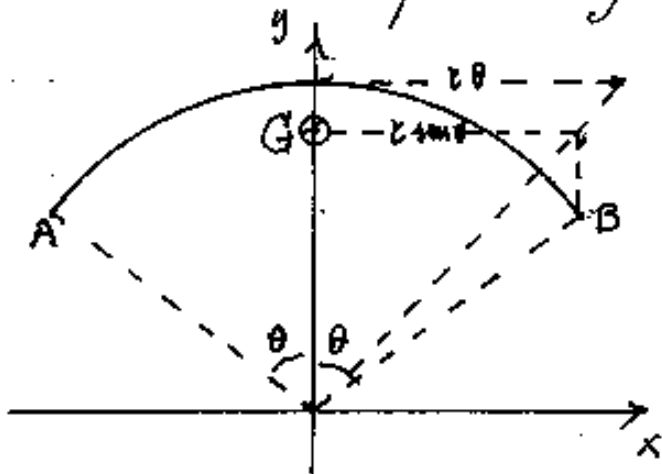
Se tre segmenti costituiscono il peri=

Se tre segmenti costituiscono il perimetro di un triangolo ABC, poiché i lati opposti del triangolo che ha per vertici i punti di mezzo dei lati di ABC sono proporzionali alle masse G è l'incentro di $M_1 M_2 M_3$

C
a
b
M_2
M_1
G
A
B
M_3
c

Il baricentro <u>del perimetro</u> di un quadrilatero, è l'incontro delle mediane.

Baricentro di linee continue

<u>Se la linea è simmetrica rispetto ad un asse, il baricentro</u> è sull'asse di simmetria e basta una sola coordinata per individuarlo.

Per esempio: <u>Arco di circonferenza di raggio "r" ed ampio angolarmente 2θ</u>

lunghezza della linea $= L = 2r\theta$

momento statico $S_x = 2\int_0^\theta r \cdot r\cos\theta\, d\theta$

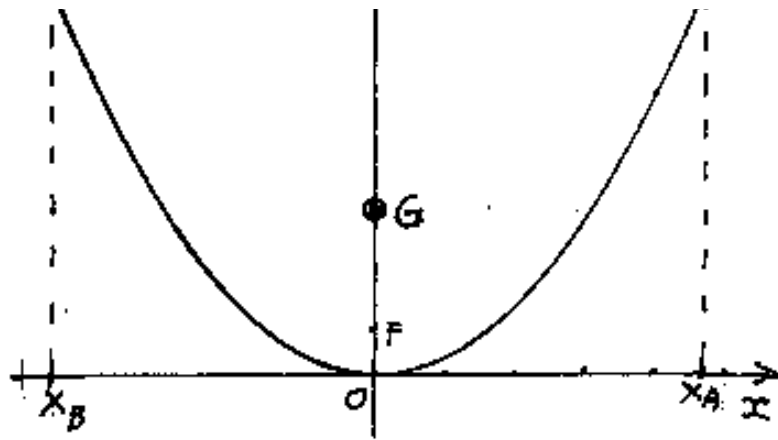
$$y_G = \frac{S_x}{L} = \frac{2r^2\,\text{sen}\,\theta}{2r\theta} = \left(r\,\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\right)$$

$$\boxed{y_G = r\,(\text{rasen}(\theta))}$$

<u>Arco di Parabola simmetrica rispetto ad y.</u>

$y = mx^2$; $y' = 2mx$; $\left(m = \frac{1}{4a}\right)$

lunghezza $\overline{OA} = \int_0^{x_A} \sqrt{1+4m^2x^2}\; dx$

$\overline{OA} = \frac{1}{2m}\int^{x_A} \sqrt{1+(2mx)^2}\; d(2mx)$

$$OA = \frac{1}{2m}\int_0 \sqrt{1+(2mx)^2}\, d(2mx)$$

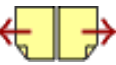
posto: $\boxed{2mx = senh(t)}$

$$\overline{OA} = \frac{1}{2m}\int \cosh^2(t)\, dt =$$

$$\overline{OA} = \frac{1}{2m}\left[\frac{senh(t)\cosh(t)+t}{2}\right] =$$

$$\overline{OA} = \left[\frac{1}{2m}\; \frac{2mx\sqrt{1+(2mx)^2} + argsenh\left(\sqrt{1+(2mx)^2}\right)}{2}\right]_0^{x_A} =$$

(lunghezza) $$\boxed{\overline{OA} = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1+(2mx)^2} + \left(\frac{1}{4m}\right)\ln\left|2mx + \sqrt{(2mx)^2+1}\right|\right]_0^{x_A}}$$

Il momento statico rispetto ad x $S_x = \int y \, dl =$

$$S_x = \int \left(\frac{x^2}{4a}\right)\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2}\right) dx = 2a\int \frac{x^2}{4a}\sqrt{1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2}\, d\left(\frac{x}{2a}\right) =$$

$$S_x = 2a^2\int \left(\frac{x}{2a}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2}\, d\left(\frac{x}{2a}\right)$$ ove posto: $\boxed{\frac{x}{2a} = \operatorname{senh}(t)}$

$$S_x = 2a^2\int \operatorname{senh}^2(t)\cosh(t)\, d\operatorname{senh}(t)$$

$$S_x = 2a^2\int \operatorname{senh}^2(t)\cosh^2(t)\, dt = \frac{a^2}{4}\int \operatorname{senh}^2(2t)\, d(2t) =$$

$$\boxed{S_x = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\operatorname{senh}(4t) - 4t}{4}\right)}$$

conviene mantenere questa espressione sintetica e ponendo: $\boxed{l = \frac{a}{2}\left(\operatorname{senh}(2t) + 2t\right)} = OA$

l'ordinata del baricentro della linea della parabola $y_G = \frac{S_x}{l}$;

$$\boxed{y_G = \frac{a}{8}\left(\frac{\operatorname{senh}(4t) - 4t}{\operatorname{senh}(2t) + 2t}\right)}$$

ove: $t = \operatorname{argsenh}\left(\frac{x}{2a}\right)$; $\operatorname{senh}(t) = \frac{x}{2a}$

In figura: (misure in cm.)

$y = (0,4)x^2$: $a = 0,625$; $2a = 1,25$; $x_A = 3$; $\frac{x}{2a} = 2,4$;

$\mathrm{senh}(t) = 2,4 \rightarrow t = 1,609437912$

$2t = 3,218875825 \rightarrow \mathrm{senh}(2t) = 12,48$

$4t = 6,43775165 \rightarrow \mathrm{senh}(4t) = 312,4992$

$\ell = \overline{OA} = \frac{0,625}{2}(12,48 + 3,218875825)$; $\ell = 4,905898695$ cm

$S_x = \left(\frac{0,625}{2}\right)^2 \left(\frac{312,4992 - 6,43775165}{4}\right) = 7,472203329$ cm ; $y_G = 1,52310917$ cm.

Nell'esempio abbiamo trovato il baricentro della linea parabolica $\overset{\frown}{BA}$ simmetrica rispetto all'asse y. Vogliamo ora trovare il baricentro di un tratto generico $\overset{\frown}{AC}$ di parabola.

In questo caso occorre trovare anche il momento statico rispetto ad y ed avremo:

$$S_y = \int x\, dl = \int x \sqrt{1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2}\, dx = 2a^2 \int \sqrt{1+\frac{x^2}{4a^2}}\; d\left(\frac{x^2}{4a^2}\right) =$$

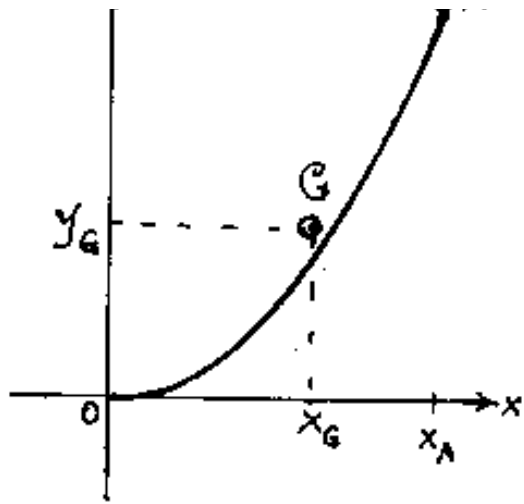
$$S_y = 2a^2 \int \left(1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2\right) = 2a^2 \left(1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)^{3/2} \frac{2}{3}$$

$$\boxed{S_y = \frac{4}{3} a^2 \left(1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)^{3/2}}$$

e sostituendo $\frac{x}{2a} = \operatorname{senh}(t)$ $\quad \boxed{S_y = \frac{(2a)^2 \cosh^3(t)}{3}}$

Nella figura abbiamo: $S_y = \frac{(1,25)^2}{3}(17,576) = 9,154166\overline{6}$

$$x_G = \frac{S_y}{l} = \frac{9,154166\overline{6}}{4,905898695} = \underline{1,86595 10.}$$

y A

Il procedimento è ...

Il procedimento è estensibile a tratti qualsiasi di linea parabolica ove: $\widetilde{PQ}$ = lunghezza = $(l_{OQ} - l_{OP}) = l$

Momenti statici: $(S_{x_P} - S_{x_Q}) = S_x$

" $(S_{y_P} - S_{y_Q}) = S_y$

$$x_G = \frac{(S_{y_P} - S_{y_Q})}{(l_{OQ} - l_{OP})} \quad ; \quad y_G = \frac{(S_{x_P} - S_{x_Q})}{(l_{OQ} - l_{OP})}$$

Arco di Catenaria

$$y = \left(a \cosh \frac{x}{a}\right) = \left(a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)$$

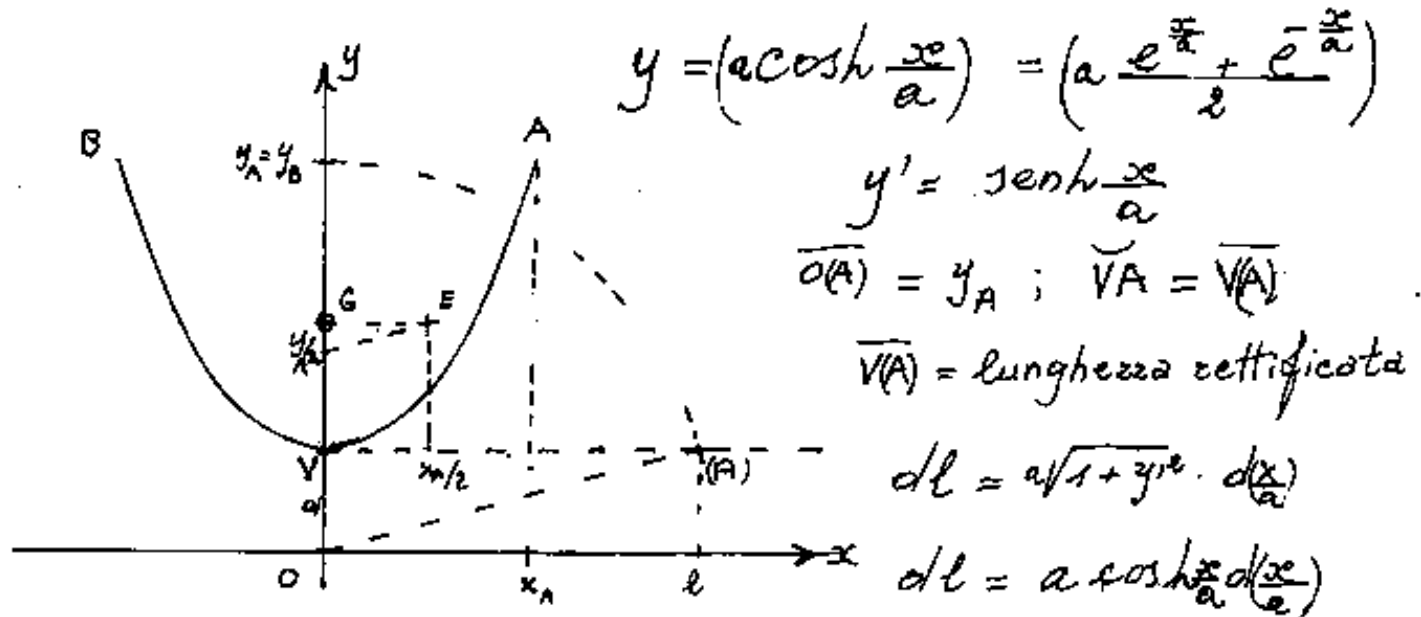
$$y' = \operatorname{senh} \frac{x}{a}$$

$\overline{O(A)} = y_A$; $\overline{VA} = \overline{V(A)}$

$\overline{V(A)}$ = lunghezza rettificata

$$dl = a\sqrt{1 + y'^2} \cdot d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dl = a \cosh\frac{x}{a}\, d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dl = a\, y\, d\left(\frac{x}{a}\right) ; \quad \frac{l}{VA} = a \operatorname{senh}\left(\frac{x_A}{a}\right) ;$$

$$S_x = \int y\, dl = a^2 \int \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right) = \boxed{a^2 \frac{\operatorname{senh}\frac{x}{a} \cosh\frac{x}{a} + \frac{x}{a}}{2}}$$

$$y_G = \frac{S_x}{l} = \frac{a}{2}\left(\cosh\frac{x}{a} - \frac{x}{\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)}\right)$$

$$\boxed{y_G = \frac{y}{2} + a\frac{x/2}{l}}$$

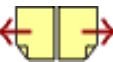
$$\frac{a}{l} = tg\, V\hat{A}O = tg\, \hat{E}$$

Cio' consente una facile costruzione grafica di G: da $\frac{y_A}{2}$ la // ad $\overline{O(A)}$ fino ad incontrare in E la $x = \frac{x_A}{2}$ da E la // a $\overline{V(A)}$.

$$S_y = \int x\, dl = a\int x \cosh\frac{x}{a}\, d\frac{x}{a} = a^2 \int \left(\frac{x}{a}\right) d \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) ; =$$

per parti

$$S_y = a^2 \left(\frac{x}{a} \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) - \int \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) d\frac{x}{a} \right)$$

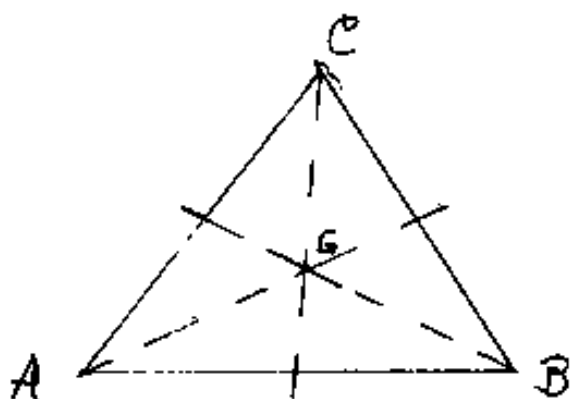
$$\frac{S_y}{l} = x_G = a^2 \frac{\frac{x}{a} \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) - \cosh(x/a)}{a \operatorname{senh}(x/a)}$$

$$\boxed{x_G = x_A - \frac{a}{l} y_A}$$

Baricentri di Aree

Aree delimitate da una spezzata chiusa.

C

A B

G

triangolo:

baricentro G = punto comune delle mediane che le divide in due parti una doppia dell'altra. (ogni mediana di un lato è il luogo dei baricentri dei segmenti interni al triangolo e paralleli a quel lato)

B

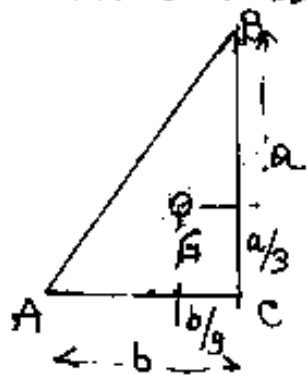
a

G

a/3

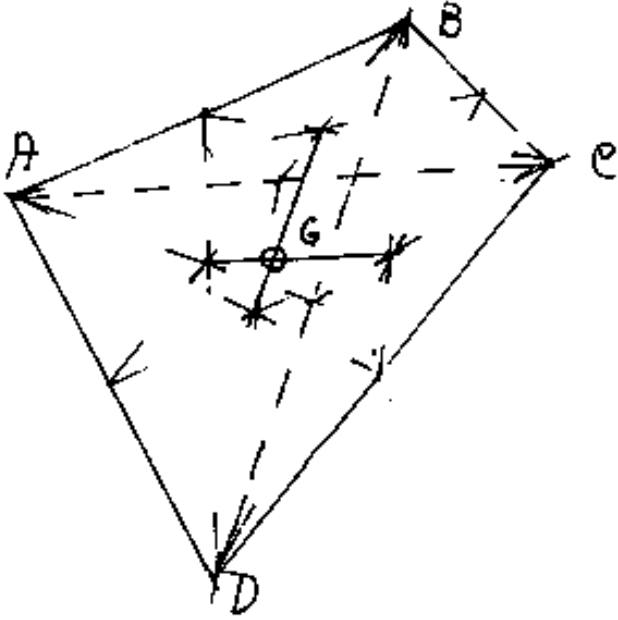
A C

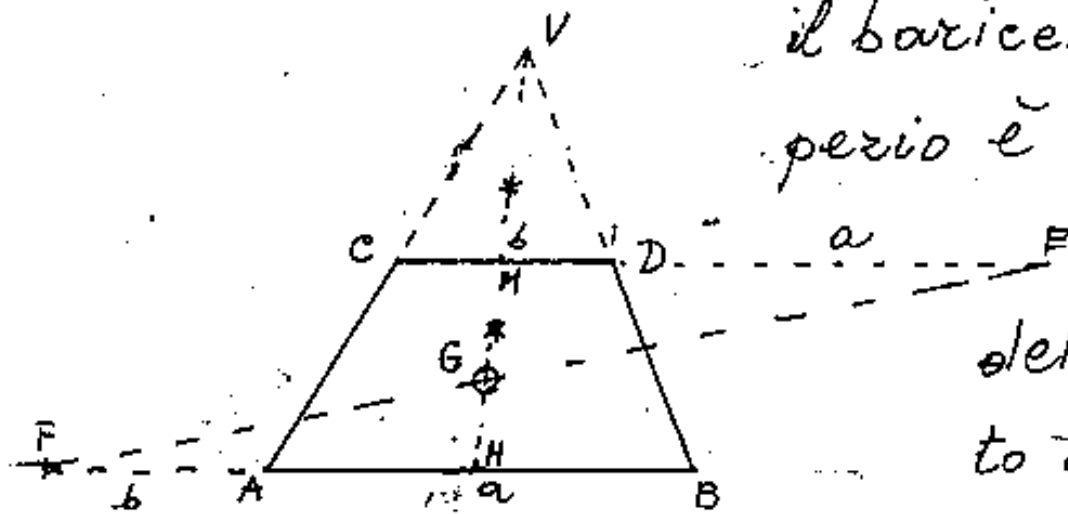
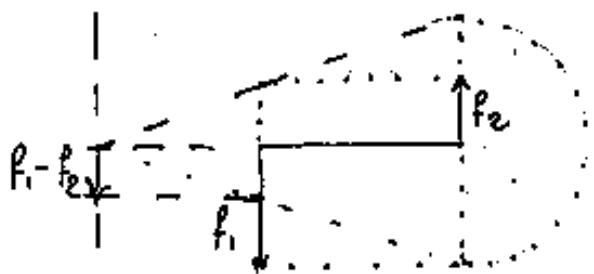
b/3

b

In un triangolo rettangolo il baricentro dista da ogni cateto, un terzo dell'altro, [$\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3}\right)$ = coordinate a partire dall'angolo retto].

Poiché un quadrilatero ha due diagonali che lo scompone in due triangoli ciascuna; il punto comune dei due segmenti unio

ne dei baricentri delle coppie di triangoli è il <u>baricentro del quadrilatero</u>.

A B C D G

Se il quadrilatero è un trapezio (due lati sono paralleli) prolungando i lati obliqui si ottiene un triangolo grande, al quale si

sottrae il triangolo che ha per base la base minore per ottenere il trapezio. Quindi il baricentro del trapezio è sulla mediana delle basi, in quanto deve congiungere i baricentri dei due triangoli.

Nasce qui il problema del baricentro della differenza di due masse che trova il suo analogo nel cercare la risultante di due forze parallele di verso contrario. Ricordiamo la costruzione (a fianco). Nel nostro caso, le masse sono le aree che sono proporzionali alle basi ed alle rispettive altezze,

porzionali alle basi ed alle rispettive altezze,

e le altezze pure proporzionali alle basi. $h_a = 2K \cdot a$;

$h_b = 2Kb$; $A_{AVB} = Ka^2$; $A_{CVD} = Kb^2$; $A_{ABCD} = K(a^2 - b^2) =$

area trapezio $= K(a-b)(a+b) = (h_a - h_b)(a+b)\frac{1}{2}$ ove

$(h_a - h_b)$ è l'altezza del trapezio. Se riportiamo in

$\overline{DE}$ la base "a" ed in $\overline{AF}$ la base "b" i triangoli CFE

e BFE sono uguali perché hanno per base la

stessa base (a+b) e per altezza la stessa altezza, e al

hanno la stessa area del trapezio, il lato comune $\overline{EF}$ taglia in G il baricentro del trapezio. La distanza di G dalle basi, si ha con la proporzione: $\overline{MG} : (\frac{b}{2} + a) = \overline{GH} : (\frac{a}{2} + b)$

se $\overline{HG} + \overline{MG} = \overline{HM}$: $\overline{MG}\left(\frac{a}{2} + b\right) = (\overline{HM} - MG)(\frac{b}{2} + a)$

$$\overline{MG}\left(\frac{3}{2}(a+b)\right) = \overline{HM}\left(\frac{b}{2} + a\right) \qquad \overline{MG} = \frac{(b+2a)}{3(b+a)}\overline{HM}$$

$$\boxed{\overline{MG} = \frac{\overline{HM}}{3}\left(1 + \frac{a}{a+b}\right)}; \quad (\overline{HM} - \overline{MG}) = \frac{1}{3}\left(3\overline{HM} - \overline{HM} - \overline{HM}\frac{a}{a+b}\right)$$

$$\overline{HG} = \frac{\overline{HM}}{3}\left(2 - \frac{a}{a+b}\right) = \frac{\overline{HM}}{3}\left(\frac{2a + 2b - a}{a+b}\right) = \overline{HG} \quad \frac{\overline{HM}}{3}\left(1 + \frac{b}{(a+b)}\right)$$

$$\boxed{\overline{HG} = \frac{\overline{HM}}{3}\left(1 + \frac{b}{a+b}\right)}$$

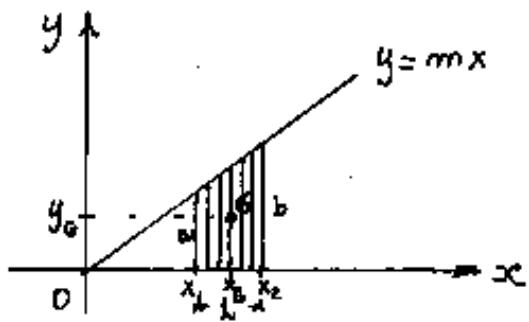
$$\overline{MG} + \overline{HG} = (\overline{HM})\frac{1}{3}\left(\frac{a + b + a + a + b + b}{(a+b)}\right) = HM.$$

Si poteva arrivare più velocemente alla dimostrazione utilizzando il metodo del quadrilatero diviso dalle diagonali.

Si noti dalla figura che con asterisco

si sono indicati i baricentri dei due triangoli,
e come G si trovi esterno al segmento che li con=
giunge sulla mediana, ciò avviene sempre quando
si cerca il baricentro della differenza di masse,
che si troverà sempre esterno al segmento che
congiunge i baricentri delle due masse, e dalla
parte della maggiore di esse

Baricentri di trapezzoidi retti aventi il lato obliquo : $y=f(x)$. (funzione di una variabile).

Questo genere di figure si ha quando una: $y=f(x)$ rappresentata su assi cartesiani delimita l'area coperta dalle ordinate comprese fra due limiti.

L'esempio più semplice è quello del trapezio (ora trattato).

In questo caso il trapezio è rettangolo: $y = mx$;

$$h=(x_2-x_1)\ ;\quad b=mx_2\ ;\ a=mx_1\ ;\ \int dA=\int_{x_1}^{x_2} y\,dx=\int_{x_1}^{x_2} mx\,dx=$$

$$\left[A=\frac{mx^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}=\frac{m}{2}(x_2^2-x_1^2)=\frac{m}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1)\ ;$$

$$\boxed{A=\frac{h}{2}(a+b)}$$

$$S_x=\int_{x_1}^{x_2}\frac{y}{2}\,dA=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x} y^2dx=\frac{m^2}{2}\int_{x_1}x^2dx=\left[\frac{m^2x^3}{6}\right]_{x_1}^{x_2}=$$

$$S_x=\frac{m^2}{6}(x_2^3-x_1^3)=\frac{m^2}{6}(x_2-x_1)(x_2^2+x_1^2+x_1x_2)=\frac{m^2h}{6}\left[(x_1+x_2)^2-x_1x_2\right]$$

$$S_x = \frac{h}{6}\left[(a+b)^2 - ab\right]$$

$$y_G = \frac{S_x}{A}) \qquad y_G = \frac{1}{3}\left((a+b) - \frac{ab}{(a+b)}\right) =$$

$$y_G = \frac{1}{3}\left((a+b) - \frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\right)$$

L'ordinata di G è data dalla terza parte, della somma delle basi diminuita del reciproco della somma dei reciproci della base.

$$S_y = \int_{x_1}^{x_2} x\,dA = \int_{x_1}^{x_2} m x^2 dx = \left[\frac{m x^3}{3}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{m}{3}\left[x_2^3 - x_1^3\right] =$$

$$S_y = \frac{m}{3}(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1^2 + x_1 x_2) = \frac{h}{3m}\left[(a+b)^2 - ab\right];$$

$$m = \frac{(b-a)}{h}; \qquad \boxed{S_y = \frac{h^2}{3(b-a)}\left[(a+b)^2 - ab\right]}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A}; \qquad \boxed{x_G = \frac{2}{3}\frac{h}{(b-a)}\left(a+b-\frac{ab}{a+b}\right)} = \left[\left(\frac{2h}{b-a}\right) y_G\right]$$

Mentre y_G è la distanza di G dall'altezza del trapezio x_G è la distanza di G dall'asse y, perciò conviene riferire la distanza di G da una delle basi, per esempio la base minore a e sia $\overline{MG}$

$$\overline{MG} = (x_G - x_1) = \left[\left(\frac{2}{3}\frac{h}{(b-a)}\right)\left((a+b) - \left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)\right) - \frac{a}{m}\right]$$

$$\overline{MG} = \left(\frac{2}{3}\frac{ha}{(b-a)}\right) - \frac{3ha}{3(b-a)} + \left(\frac{2}{3}\frac{h}{(b-a)}\right)\left(b - \frac{ab}{(a+b)}\right)$$

$$\overline{MG} = \frac{-ha}{3(b-a)} + \left(\frac{2h}{3(b-a)}\right)\left(b - \frac{ab}{(a+b)}\right).$$

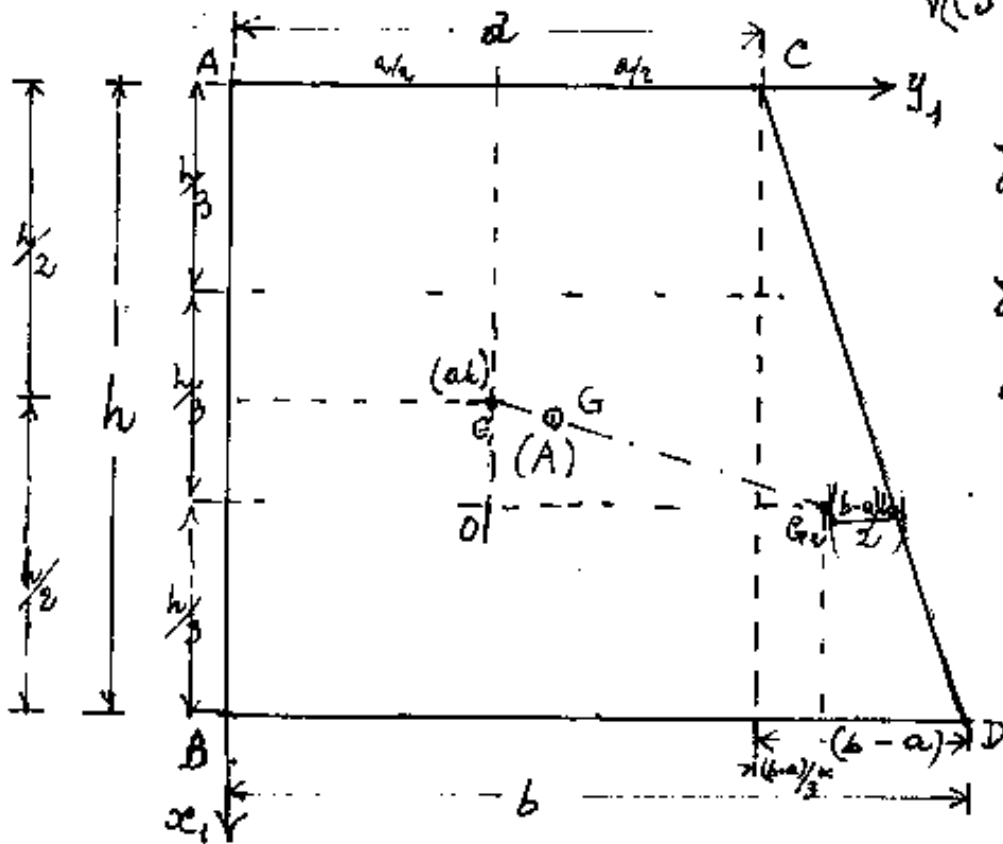
$$\overline{MG} = \frac{h}{\ldots}\left(\cdot(b-a) + b - \frac{a.b}{\ldots}\ \frac{ab}{\ldots}\right) = \frac{h}{\ldots}\left(\ldots ab + b^2 \ldots\right)$$

$$MG = \frac{h}{3(b-a)}\left((b-a)+b-\frac{ab}{(a+b)}-\frac{ab}{(a+b)}\right) = \frac{h}{3}\left(1+\frac{ab+b^2-ab-ab}{(b^2-a^2)}\right)$$

$$\overline{MG} = \frac{h}{3}\left(1+\frac{b(b-a)}{(a+b)(b-a)}\right)$$

$$\boxed{\overline{MG} = \frac{h}{3}\left(1+\frac{b}{a+b}\right)}$$

ove il terzo dell'altezza è incrementato proporzionalmente alla base maggiore sulla somma delle basi. Si può scrivere: $\boxed{\overline{MG} = \left(\frac{h}{(b-a)}\right)\left(2y_G - a\right)}$

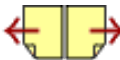
Per visualizzare geometricamente le formule ora scritte in funzione di a, b, h; scomponiamo il trapezio rettangolo in un rettangolo di base a ed altezza h ed in un triangolo rettangolo, adiacente di base: $(b-a)$ ed altezza h. I baricentri distano: $\delta = \sqrt{\left(\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)h\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{b-a}{3}\right)^2}$

cioè:

$$\delta = \sqrt{\frac{h^2}{36} + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{3}\right)^2}$$

$$\delta = \frac{1}{6}\sqrt{h^2 + (a+2b)^2}$$

dobbiamo ripartire tale distanza inversamente proporzionale alle due figure. Però è molto più comodo dividere proporzionalmente le coordinate $\overline{OG_2}$ ed $\overline{OG_1}$; $\overline{OG_1} = \frac{2}{3}h - \frac{h}{2} = \frac{h}{6}$;

$\overline{OG_2} = \left(\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{3}\right) = \frac{a+2b}{6}$; $A = \left(\frac{a+b}{2}\right)h$; $A_{ret} = (ah)$; $A_{tri} = \frac{(b-a)h}{2}$

Assumiamo gli assi coincidenti con l'altezza (x_1) e la base

Assumiamo gli assi coincidenti con l'altezza (x_1) e la base minore (y_1) avremo:

$$x_{1G} = \frac{h}{2} + \frac{(b-a)h/2}{(a+b)h/2}\left(\frac{h}{6}\right) = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{(b-a)}{(b+a)}\right) = \frac{h}{6}\left(\frac{3a+3b+b-a}{(a+b)}\right) =$$

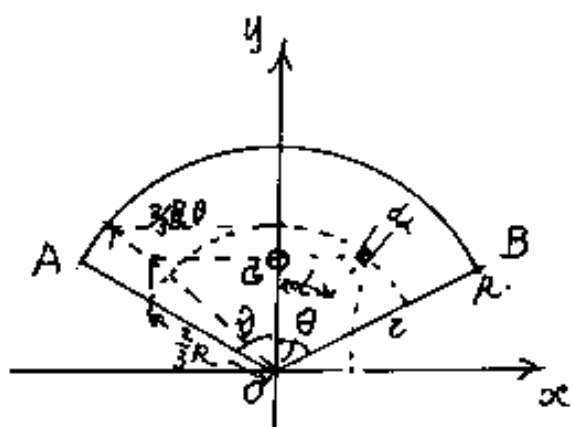
$$x_{1G} = \frac{h}{3}\left(\frac{2a+2b+2b}{2(a+b)}\right) = \boxed{x_{1G} = \frac{h}{3}\left(1 + \frac{b}{(a+b)}\right)}$$ come trovato.

$$y_{1G} = \frac{a}{2} + \frac{(b-a)h/2}{(a+b)h/2}\left(\frac{a+2b}{6}\right) = \frac{3a^2+3ab+ab-a^2+2b^2-2ab}{6(a+b)} = \frac{2(a^2+b^2+2ab)-2ab}{6(a+b)}$$

$$\boxed{y_{1G} = \frac{1}{3}\left((a+b) - \frac{ab}{a+b}\right)}$$ come già trovato.

Con gli stessi procedimenti è possibile calcolare baricentri di figure delimitate da linee curve.

Settore circolare

$$dA = r\,d\alpha\,dr \;;\quad A = \int_0^R\int_{-\theta}^{+\theta} r\,d\alpha\,dr =$$

$$A = \frac{R^2}{2}(2\theta)\;;$$

$$\boxed{A = R^2\theta}$$

$$S_x = \int r\cos\alpha\,dA = \int_0^R\int_{-\theta}^{+\theta} r^2\cos\alpha\,d\alpha =$$

$$S_x = \frac{R^3}{3}\,2\,\mathrm{sen}\,\theta$$

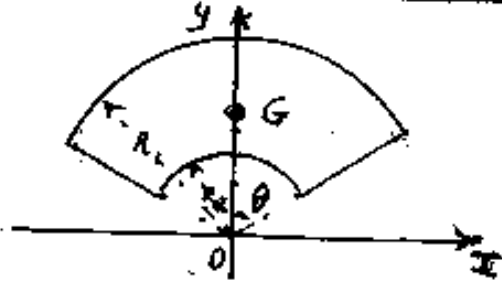
$$y_G = \frac{2R^3\,\mathrm{sen}\,\theta}{3R^2\theta} = \frac{2}{3}R\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta}$$

$$\boxed{y_G = \frac{2}{3}R\,\mathrm{rasen}\,\theta}$$

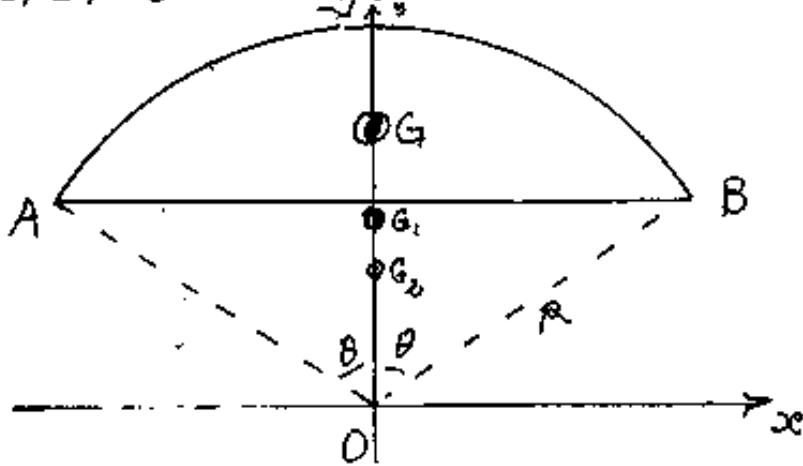
Che si realizza con una facile costruzione grafica. Tracciato un arco $\frac{2}{3}R$, si può considerare il luogo geometrico di tutti i baricentri dei settori elementari di ampiezza $d\alpha$ equiparati a triangoli; quindi il baricentro di questa linea

... quindi il baricentro di questa ... è il baricentro del settore. (Per la costruzione grafica del baricentro di un arco di circonferenza si vedano le pag. prec.)

Settore di Corona Circolare : $\left(y_{G} = \dfrac{y_{G_1} A_1 - y_{G_2} A_2}{A_1 - A_2}\right)$

y
G
R_1
θ
O
x

$$y_G = \left(\frac{2}{3}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)\left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 - R_2^2}\right)$$

Segmento circolare

Se al settore circolare AOB togliamo l'area del triangolo AOB si ha il segmento circolare

Siamo tornati al baricentro della differenza di masse.

Avremo:

A_1 = area settore $= R^2\theta$;

A_2 = area triangolo $= \frac{R^2}{2}\operatorname{sen}2\theta$; ordinata settore $= y_{G_1} = \frac{2}{3}R\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$

ordinata triangolo $= y_{G_2} = \frac{2}{3}R\cos\theta$.

Per differenza: area del segmento $= R^2\left(\theta - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right)$

$$S_x = (R^2\theta)\left(\frac{2}{3}R\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right) - \left(\frac{R^2}{2}\operatorname{sen}2\theta\right)\frac{2}{3}R\cos\theta$$

$$S_x = \frac{2}{3}R^3\operatorname{sen}\theta - \frac{2}{3}R^3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta = \frac{2}{3}R^3\operatorname{sen}\theta(1-1+\operatorname{sen}^2\theta)$$

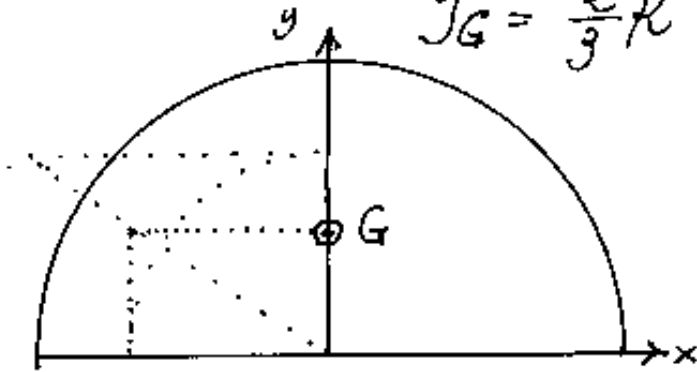
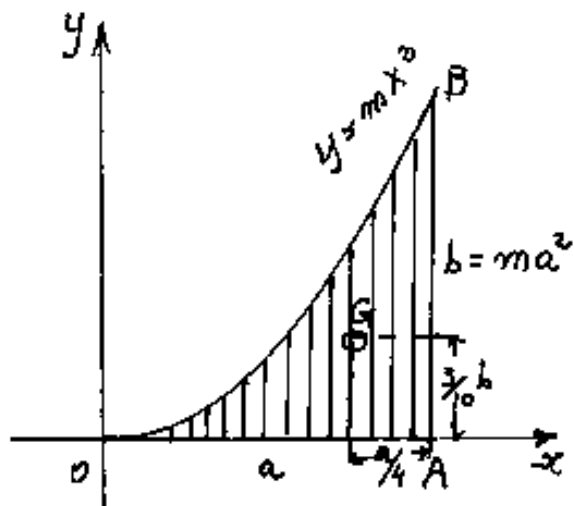
$$S_x = \frac{2}{3}R^3\operatorname{sen}^3\theta \qquad y_G = \frac{\frac{2}{3}R^3\operatorname{sen}^3\theta}{R^2(2\theta-\operatorname{sen}2\theta)/2} = \frac{4}{3}R\left(\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{2\theta-\operatorname{sen}2\theta}\right)$$

$$\boxed{y_G = \frac{2}{3}R\left(\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\right)}$$

Per $\theta = \pi/2$ si ha il Semicerchio

$$y_G = \frac{2}{3} R \frac{1}{\pi/2} = \frac{4R}{3\pi}$$

ove segmento e settore coincidono:

$$y_G = 0{,}4244131\text{8}\, R$$

Baricentri di triangoli parabolici

$$\int dA = \int_0^a y\,dx = \int_0^a mx^2\,dx = \frac{ma^3}{3}$$

$$\boxed{A = \left(\frac{ab}{3}\right)}$$

$$S_y = \int x\,dA = \int_0^a m x^3\,dx = \frac{ma^4}{4}$$

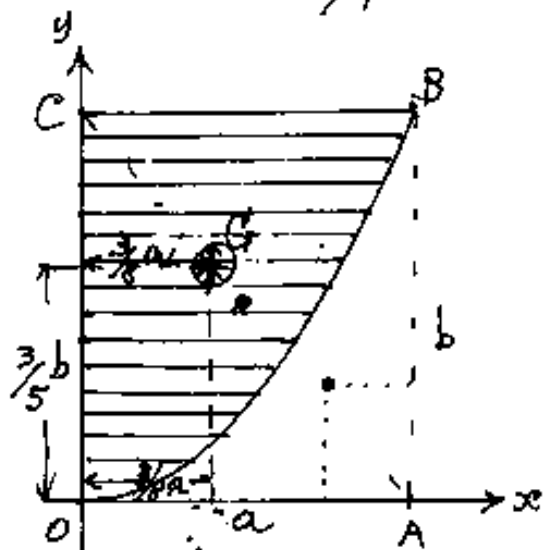
$$\boxed{S_y = \frac{ba^2}{4}} \quad ; \quad x_G = \frac{S_y}{A} \quad ; \quad X_G = \frac{b a^2/4}{ab/3}$$

$$\boxed{X_G = \frac{3}{4}a}$$

$$S_x = \int \frac{y}{2}\,dA = \int_0^a \frac{mx^2}{2} \cdot mx^2\,dx = \frac{m^2}{2}\int_0^a x^4\,dx = \frac{m^2 a^5}{10}$$

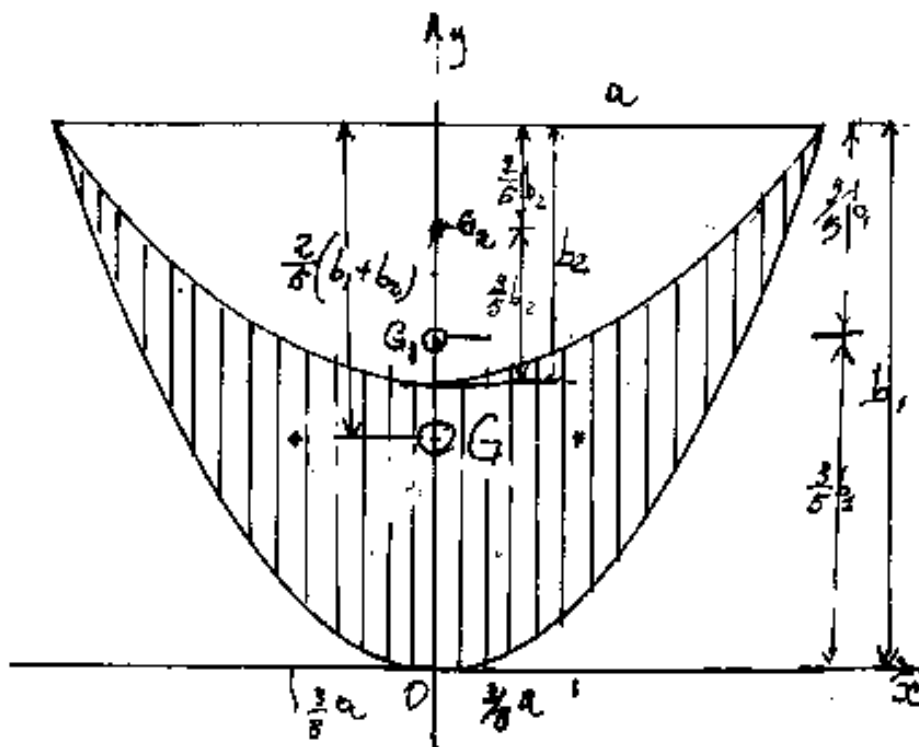
$$S_x = \frac{ab^2}{10} \quad ; \quad y_G = \frac{S_x}{A} \quad ; \quad y_G = \frac{ab^2/10}{ab/3}$$

$$\boxed{y_G = \frac{3}{10}b}$$

Il baricentro dista dallo spigolo retto, rispettivamente: $a/4$ e $3/10\,b$.

Per il triangolo parabolico OBC si può calcolare il baricentro come differenza di masse fra il rettangolo OABC ed il triangolo parabolico OAB.

oppure: $A_{OBC} = \frac{2}{3} ab$; $S_y = ab \frac{a}{2} - \frac{ab}{3} \cdot \frac{3}{4} a = a^2 b/4$

$X_G = \frac{a^2 b/4}{2/3\, ab} = \frac{3a}{8}$; $\boxed{X_G = \frac{3}{8} a}$; $S_x = \frac{ab^2}{2} - \frac{ab^2}{3} \frac{3}{10} = \frac{2}{5} ab^2$ $\boxed{y_G = \frac{3}{5} b}$

Baricentro di lunule paraboliche

Poiché il baricentro di un segmento parabolico, divide la sua freccia in 2/5 e 3/5 dal vertice, ci permette, per differenza di calcolare il baricentro delle "lunule paraboliche"

$A_1 = \frac{4}{3} a b_1$; $A_2 = \frac{4}{3} a b_2$; area della lunula $= A = \frac{4}{3} a (b_1 - b_2)$

$S_a = \left(\frac{4}{3} a b_1\right)\left(\frac{2}{5} b_1\right) - \left(\frac{4}{3} a b_2\right)\left(\frac{2}{5} b_2\right) = \frac{8}{15} a \left(b_1^2 - b_2^2\right)$

distanza di G dalla corda "a": $\delta_G = \frac{S_a}{A}$

$$\delta_G = \frac{8}{15} a (b_1 - b_2)(b_1 + b_2) \Big/ \frac{4}{3} a (b_1 - b_2)$$

$$\boxed{\delta_G = \frac{2}{5}(b_1 + b_2)}$$

Ciò vale anche per un ovulo a contorni parabolici, in questo caso: $A = \frac{4}{3} a (b_1 + b_2)$

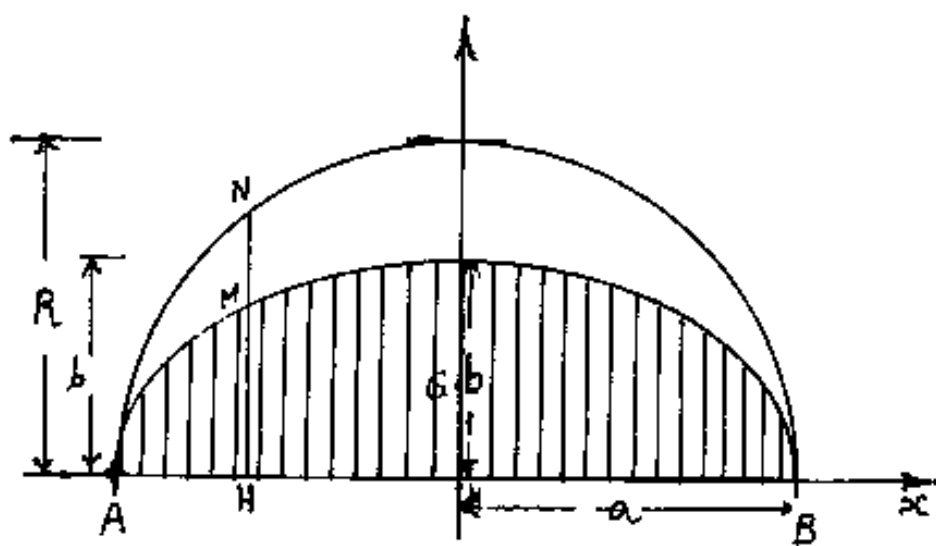
lici, in questo caso: $A = \frac{4}{3} a(b_1 + b_2)$.

mentre S_a rimane lo stesso perché A_2 pur sommandosi come area rimane da banda opposta ad "a" per il momento statico perciò: $\boxed{y_G = \frac{2}{5}(b_1 - b_2)}$ dalla parte di b_1

$\frac{2}{5}(b_1 - b_2)$ G $\frac{2}{5} b_2$ $\frac{2}{5} b_1$

Resta: $\frac{3}{8} a = x_G$ per ciascuna semilunula.

Baricentro del semiellisse

Osserviamo che se proiettiamo in piano, una qualunque figura piana, anche la proiezione del baricentro è il baricentro della figura proiettata. Il rapporto fra le corde dell'ellisse parallele al diametro minore b e le corrispondenti corde del cerchio è costante ed è "b/R", poichè nel semicerchio: $y_G = \frac{4}{3\pi} R$, nel semiellisse avremo:

$$y_G = \frac{4}{3\pi} \cdot R \cdot \frac{b}{R}$$

$$\boxed{y_G = \frac{4}{3\pi} b}$$

$$(y_G = 0{,}42441318\, b)$$

Bonaventura Cavalieri nella sua *Geometria Indivisibilibus*, rilevato che i segmenti $2\overline{NH}$ e $2\overline{MH}$

(corde del cerchio di raggio R e dell'ellisse di semidiametri a, b) nel loro moto in direzione ascisse, generano l'area del cerchio e dell'ellisse, mantenendo costante il rapporto

$\frac{\overline{MH}}{\overline{NH}} = \frac{b}{R} = \frac{b}{a}$; moltiplicando l'area del cerchio $R^2\pi \frac{b}{R} = a\,a\pi \frac{b}{a}$

poté dire che l'area dell'ellisse è: $A_E = ab\pi$

I segmenti erano "indivisibili di aree". (come i nostri differenziali).

Un secolo dopo il "moto" di un ente portò Newton al calcolo flussionale, e l'infinitesimo indivisibile portò Leibniz al calcolo differenziale.

I due aspetti degli "indivisibili" che generano le forme geometriche, in effetti sono la stessa cosa; Un punto <u>che si muove</u> in una certa direzione percorre nel tempo infinitesimo dt, lo spazio infinitesimo ds. Il punto in se non ha parti (dimensioni), la dimensione: "spazio lineare" nasce dal suo moto. E' la continuità del tempo, che dà la continuità dello spazio.

Analogamente un segmento, od una linea, nel suo moto genera una superficie, ed un'area genera un volume.

Notare che il moto di un segmento è computabile come <u>area</u> per le parti che <u>si muovono normalmente</u> al segmento. Così un'area che col <u>suo moto in direzione</u> ad <u>essa normale</u>, genera un volume. Ma il moto può essere diverso per le varie parti di area, o per le varie parti

di una linea, ed il problema risulta supe=
rato, se <u>consideriamo concentrate nel loro
baricentro</u> l'ampiezza delle aree e l'ampiez=
za delle linee, e consideriamo il moto di un
punto (G) baricentro. Nascono così i teoremi di Pappo
riscoperti da Guldino.

Aver introdotto il tempo come la conti
nuità dello spazio è la più grande e
fondamentale scoperta nata alla scuola di
Galileo, focalizzata da Bonaventura Cavalieri
prima e da Torricelli poi, Newton (un secolo
dopo) chiamò flussione la variazione rispetto
al tempo, termine caduto in disuso e sostitui=
to dal concetto più generale di derivata.

A noi sembra che questi stupendi concetti
che portano a considerare la variazione
del baricentro come variazione dell'
intera massa, non siano, ancora oggi, suf=
ficientemente approfonditi. Il concetto di moto,
di perpendicolarità, rilevabile dalla ruotazio=
ne intorno ad un asse, per le distanze, (raggi)
dei punti, ove si connette un moto angolare

alla generazione di forme geometriche.
Come ogni moto possa scomporsi secondo
tre assi ortogonali, come le "proiezioni"
possano utilizzarsi per i calcoli.
(è sempre possibile far sì che la proiezione di un ellisse
sia un cerchio); (è sempre possibile considerare un
punto che ruota intorno due diversi assi.).

I momenti del secondo ordine

Abbiamo visto i momenti statici (o momenti del primo ordine) come prodotti delle masse per le distanze, e ne abbiamo evidenziato l'azione di rotazione.

Supponiamo ora di sostituire le masse con i relativi momenti statici e moltiplichiamo questi per distanze che se sono quelle rispetto allo stesso asse, otteniamo i: momenti d'inerzia assiali; se le distanze sono relative allo stesso punto (polo) abbiamo i: momenti d'inerzia polari; se le distanze sono relative ad un nuovo asse, abbiamo i: momenti d'inerzia centrifughi.

I momenti del secondo ordine sono detti in generale momenti d'inerzia e sono definiti come la somma delle masse per il quadrato delle distanze. Si simboleggiano con la lettera

J affetta da due indici che indicano gli assi di riferi= mento o dalla sola lettera p per i polari.

Poiché ordinariamente consideriamo come assi il sistema cartesiano O,x,y avremo:

Assiali: $J_{xx} = \sum_1^n y_i^2 m_i = \int y^2 dm$; $J_{yy} = \sum_1^n x_i^2 m_i = \int x^2 dm$;

Polari $J_p = \sum_1^n r_i^2 m_i = \int r^2 dm$ (r = raggio)

Centrifughi $J_{xy} = J_{yx} = \sum_1^n x_i y_i m_i = \int xy\, dm$.

La parola "inerzia" secondo lo Zanichelli equivale ad "opposto di azione". Secondo il Tommaseo: "inerte" (dal latino) è colui che non ha nessuna arte.
Poiché ogni azione provoca una variazione, l'inerzia è l'impedimento alla variazione; da cui la legge d'inerzia: "Ogni corpo permane nel suo stato di quiete o di moto se non intervengono azioni esterne a modificarlo."

Consideriamo un corpo che ruota intorno ad un altro corpo, per inerzia il corpo in moto tenderebbe al moto rettilineo secondo la tangente alla traiettoria, istante per istante, occorre l'azione esterna per modificarne la direzione, azione che può essere costituita da un cavo materiale che risulterà teso dalla forza centrifuga, ma può anche essere la forza di mutua attrazione delle masse

essere la forza di mutua attrazione delle masse che istante per istante equilibra la forza centrifuga (come avviene per gli astri, ove però vi sono molte forze di mutua attrazione e nessun corpo può pensarsi fermo perchè tutti hanno moti relativi).

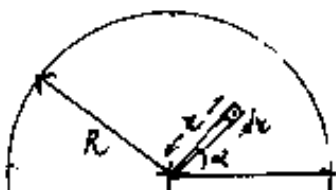
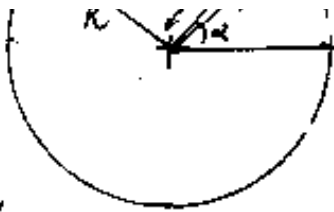
Se consideriamo un corpo solido, per esempio un disco ruotante intorno al suo asse baricentrico, perpendicolare al piano del disco, notiamo

che le parti di disco più lontane dall'asse si muovono con velocità istantanea (tangenziale) maggiore di quelle vicine all'asse, si può dire che, se la velocità angolare ω del disco è costante, la velocità istantanea, periferica, tangenziale, di ciascun punto del disco è proporzionale al raggio: $V = \omega r$; cioè ogni elemento di massa "dm" nei singoli punti, dispone di una energia cinetica: $dE_c = \frac{1}{2}(\omega r)^2 dm$.

Se consideriamo il disco omogeneo di spessore "s" costante e densità γ costante, detta dA l'area elementare all'intorno del punto, $dm = \gamma s\, dA$

$dE_c = \left(\frac{1}{2}\gamma s \omega^2\right) r^2 dA$ i valori in parentesi sono costanti per cui $E_c = K\int_A r^2 dA$ ove $K = \left(\frac{1}{2}\gamma s \omega^2\right)$

$$dA = r\, d\alpha\, dr \quad ; \quad \left(\int r^2 dA = I_p\right)$$

$$E_c = K\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{R^4}{4}(2\pi) = K\frac{R^4 \pi}{2}$$

Detto : $\frac{\gamma_s R^4 \pi}{2} = J_p$ = momento d'inerzia polare del disco avremo: $E_c = \frac{\omega^2}{2} J_p$

che confrontata con $E_c = \frac{V^2}{2} M$. ci fa notare che nel moto rotatorio J_p tiene il posto della massa nel moto lineare, come la velocità angolare ω tiene il posto della velocità lineare V.

Come la forza, azione lineare è definita da: $F = ma = \frac{dv}{dt} m = m \frac{d^2 s}{dt^2}$,

analogamente l'azione rotatoria di una coppia M (momento) può essere definita da: $M = J_p \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = J_p \frac{d\omega}{dt}$

ove si nota come ancora il momento d'inerzia polare corrisponda alla massa.

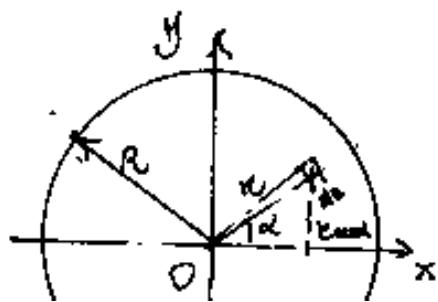
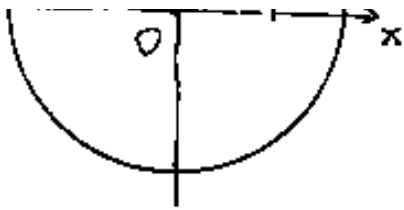
Il lavoro: $\int dL = \int M d\varphi = \int \omega M dt = \int J_p \omega \, d\omega = \frac{1}{2} \omega^2 J_p$

ritorna in energia cinetica.

Considereremo le aree come "masse" nelle figure geometriche, cerchiamo il momento d'inerzia assiale di un cerchio rispetto ad un diametro.

$$J_{xy} = J_{xx} = \int (r \operatorname{sen}\alpha)^2 dA = \iint (r \operatorname{sen}\alpha)^2 r \, d\alpha \, dr$$

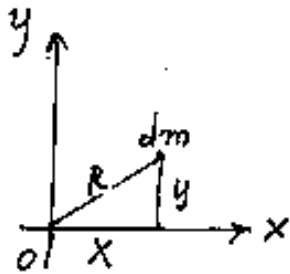
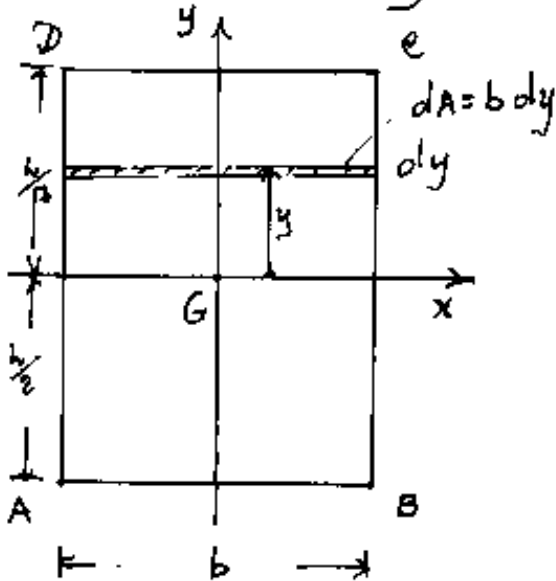
$$J_{xx} = \int^{R} r^3 dr \int^{2\pi} \operatorname{sen}^2\alpha \, d\alpha =$$

$$J_{xx} = \int_0 r^3 dr \int_0 \operatorname{sen}^2\alpha \, d\alpha =$$

$$J_{xx} = \frac{R^4}{4} \frac{\operatorname{sen} 2\pi [\cos 2\pi + 2\pi]}{2} = J_{xx} = \frac{R^4 \pi}{4}$$

essendo: $J_{xx} + J_{yy} = J_p$. infatti:

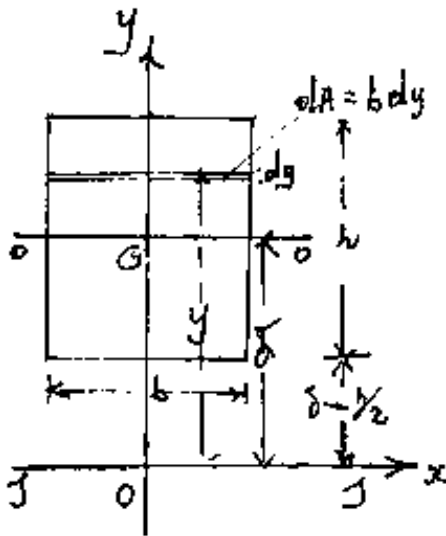
$$J_{xx} = \int y^2 dm \; ; \; J_{yy} = \int x^2 dm \; ; \; J_p = \int R^2 dm$$

ove: $x^2 + y^2 = R^2$. Per il cerchio essendo $J_{xx} = J_{yy}$

avremo $J_p = 2\left(\frac{R^4 \pi}{4}\right) = \frac{R^4 \pi}{2}$ (come già calcolato)

Calcoliamo i momenti d'inerzia assiali di un rettangolo ABCD

$$J_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b\,dy = \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right]$$

$$\boxed{J_{xx} = \frac{bh^3}{12}}$$

Scambiando "b" con "h"

$$\boxed{J_{yy} = \frac{hb^3}{12}}$$

Se spostiamo gli assi di δ in direzione y, l'asse x si mantiene parallelo all'asse x baricentrico che indichiamo con oo, mentre la nuova x si sovrappone all'asse ss parallelo ad oo, avremo:

$$J_{ss} = \int_A y^2 dA = \int_{(\delta-\frac{h}{2})}^{(\delta+\frac{h}{2})} y^2 b\,dy = \frac{b}{3}\left[y^3\right]_{(\delta-\frac{h}{2})}^{(\delta+\frac{h}{2})}$$

$$J_{11} = \frac{b}{3}\left[\left(\delta^3 + 3\delta^2\frac{h}{2} + 3\delta\frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{8}\right) - \left(\delta^3 - 3\delta^2\frac{h}{2} + 3\delta\frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8}\right)\right]$$

$$J_{11} = \frac{b}{3}\left(\left(3\delta^2\frac{h}{2}\right)2 + \left(\frac{h^3}{8}\right)2\right) = \boxed{\frac{bh^3}{12} + (bh)\delta^2}$$

Ma: $\frac{bh^3}{12} = J_{xx} = J_{00}$ baricentrico e $(bh) = A$ = area

cioè:

$$\boxed{J_{11} = J_{00} + A\delta^2}$$

Il teorema di Hüygens o di trasposizione

Quanto abbiamo ricavato per il rettangolo è valido per qualunque figura ed esprime che: "Il momento d'inerzia rispetto ad un asse è dato dal momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico parallelo aumentato dell'area per il quadrato della distanza fra i due assi."

$$J_{11} = J_{00} + A\delta^2$$

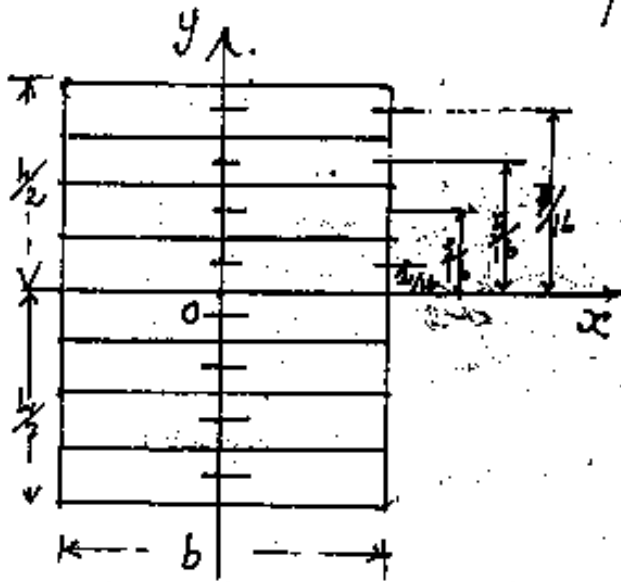
Inversamente se conosciamo il momento d'inerzia rispetto ad un asse e vogliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse parallelo baricentrico avremo:

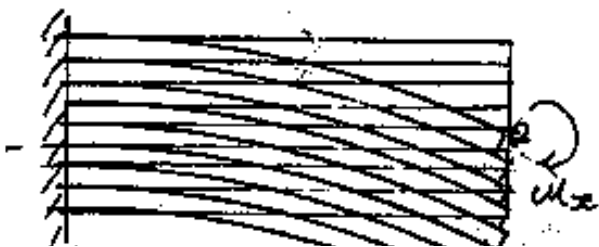
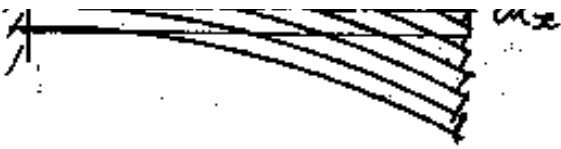
$$J_{00} = J_{11} - A\delta^2$$

Poiché J, A, δ^2, sono sempre maggiori di zero, la formula ci dice che i momenti d'inerzia rispetto ad assi baricentrici sono i minimi secondo la direzionalità di quegli assi.

direzionalità di quegli assi.

Il teorema di Hüygens ha molteplici aspetti, uno importantissimo è la connessione fra le aree che costituiscono la sezione, infatti se le aree non sono connesse, il momento d'inerzia della sezione è semplicemente la somma dei momenti d'inerzia delle singole

aree rispetto alla direzionalità del proprio asse baricentrico. Se invece sono connesse occorre aggiungere la somma delle aree per il quadrato delle distanze con l'asse baricentrico nella stessa direzionalità. Facciamo un esempio di sezione rettangolare di base "b" ed altezza "h" costituita da 8 tavole di spessore (h/8)

Se le tavole non sono connesse il loro momento d'inerzia nella direzionalità x, cioè d'impedimento ad un momento M_x, è la somma dei propri $J_{x_0x_0}$ baricentrici, cioè: $8\frac{b(h/8)^3}{12} = \Sigma J_{xx} = 8\frac{bh^3}{12(512)}$

$$\Sigma J_{x_0x_0} = \left(\frac{bh^3}{12}\right)\frac{1}{64}$$

Se sollecitiamo con un momento M_x la sezione composta da 8 tavole

composta da 8 tavole sovrapposte non connesse esse scorrono l'una sull'altra ed offrono $\frac{1}{64}$ della mezzia = impedimento che offrirebbe la struttura se le tavole fossero incollate fra loro. In particolare se le tavole fossero "n" avremmo $\frac{1}{n^2}$ di resistenza; 100 pagine di un blocco offrono alla

flessione: un impedimento = inerzia, pari a $\frac{1}{100^2}$ = undecimillesimo di quella che offrirebbe un cartone dello stesso spessore delle 100 pagine. e ciascuno può provare, (notando il mutuo scorrimento delle pagine).

Applicando Hüygens è come considerare connesse le 8 otto tavole (incollate fra loro) avremo: (J_{xx} = momento d'inerzia baricentrico della sezione)

$$J_{xx} = 8\left(\frac{b\left(\frac{h}{8}\right)^3}{12}\right) + 2\left(b\frac{h}{8}\right)\left(\frac{7}{16}h\right)^2 + 2\left(\frac{bh}{8}\right)\left(\frac{5}{16}h\right)^2 + 2\left(\frac{bh}{8}\right)\left(\frac{3}{16}h\right)^2 + 2\left(\frac{bh}{8}\right)\left(\frac{h}{16}\right)^2 =$$

$$J_{xx} = \frac{1}{64}\left(\frac{bh^3}{12}\right) + \left(\frac{bh}{4}\right)\left(\frac{49+25+9+1}{16^2}h^2\right) =$$

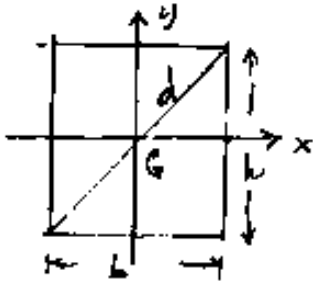
$$J_{xx} = \frac{1}{64}\left(\frac{bh^3}{12}\right) + \left(\frac{bh^3}{4}\right)\left(\frac{84}{256}\right) = \frac{bh^3}{12}\left(\frac{1}{64} + \frac{3 \cdot 21}{64}\right) = \frac{bh^3}{12}$$

Torna il J_{xx} baricentrico <u>dell'intera</u> sezione

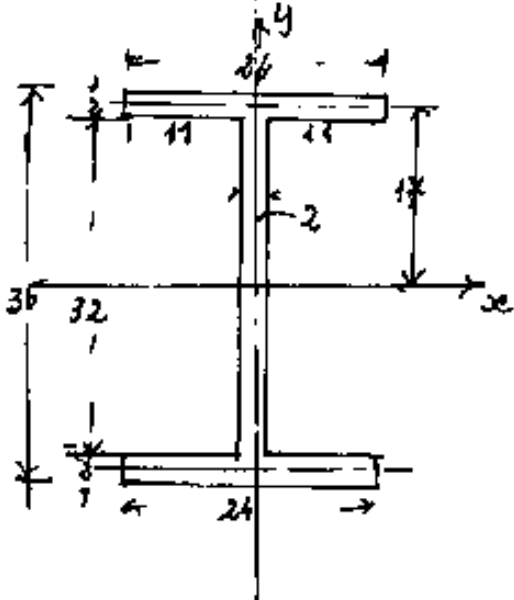
Ciò fa capire come cavi composti di tanti fili di acciaio sono facilmente flessibili mentre la stessa sezione di acciaio

sibili, mentre la stessa sezione di acciaio di area pari alla somma delle aree dei singoli fili è difficilmente flessibile. Però per flettersi facilmente i fili debbono scorrere fra loro e se per l'uso avviene spesso inversione d'inflessione, l'attrito logora i fili dei cavi, che debbono ogni tanto sostituirsi. (come negli ascensori).

Momenti d'inerzia di figure composte di rettangoli.

Utilizzando il teorema di trasposizione o di Huygens, e ricordando i momenti d'inerzia baricentrici del rettangolo:

$$J_{xx} = \frac{bh^3}{12} \; ; \; J_{yy} = \frac{hb^3}{12} \; ; \; J_G = J_{xx} + J_{yy} = \frac{bhd^2}{12} \; ;$$

è possibile in più modi calcolare J per figure composte.

Presentiamo un esercizio numerico (vedi figura)

$$J_{xx} = \text{ali} = 2\left[\left(\frac{24 \cdot 2^3}{12}\right) + (24 \cdot 2)(17)^2\right] = 27776$$

$$\text{anima} = \frac{2 \cdot 32^3}{12} = 5461,\overline{3}$$

$$J_{xx} = 33237,\overline{3}$$

Verifica:

$$J_{xx} = \text{sezione piena} = \frac{24 \cdot 36^3}{12} = 93312,-$$

$$\text{vuoti} = 2\left[\frac{32^3 \cdot 11}{12}\right] = -60074,\overline{66}$$

$$33237,\overline{3}$$

$$J_{xx} = 33237,\overline{3} \quad \text{(torna)}$$

$$J_{yy} = \text{ali} = 2\left[\frac{2 \cdot 24^3}{12}\right] + \text{anima} = \left[\frac{32 \cdot 2^3}{12}\right] =$$

$$4608 + 21,\bar{3} \qquad J_{yy} = \underline{4629,\bar{3}}$$

<u>verifica</u>

$$J_{yy} = \text{sezione piena} = \frac{36 \cdot 24^3}{12} = 41472$$

$$\text{vuoti} \quad 2\left[\frac{32 \cdot 11^3}{12} + (11 \cdot 32)(6,5)^2\right] =$$

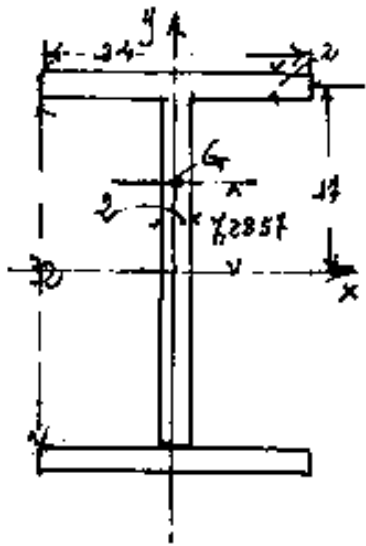
$$2\left[3549,\bar{3} + 14872\right] = \underline{-36842,\bar{6}}$$

$$= 4629,\bar{3}$$

$$J_{yy} = \underline{4629,\bar{3}} \quad \text{(torna)}$$

Esercizio 2) (segue dal prec.)

Supponiamo che per difetto di costruzione non agisca più la saldatura fra le ali inferiori e l'anima. Calcolare il nuovo momento d'inerzia. J_{yy} resta invariato $= 4629,\bar{3}$

la struttura si scinde in un T ed in una piastra.

Calcoliamo il baricentro del T riferendo i momenti statici all'asse x

anima: area $= 32 \times 2 = 64$; $S_x = 0$ (baricentrico)

ala: area $= 24 \times 2 = 48$; $S_x = 48 \times 17 = 816$

area $= 112$; $S_x = 816$

$$y_{G_T} = \frac{816}{112} = 7,285714286.$$

$J_{x_0 G}$ = anima $= 5461,\bar{3} + 64\,(7,285714286)^2 = 3397,22449$

$5461,33333$

$8858,55782$

ala $= 16 + 48\,(17 - 7,285714286)^2 = 4545,63265$

ferro a T $J_{x_0 G} = 13404,19047$

ala inferiore $J_{x_0 G} = 16,-$

[illegible]

complessivo $J_{xG} = 13.420,11047$

verifichiamo il J_{xG} del T:

sezione piena: $\frac{24 \cdot 34^3}{12} = 78608 + (24 \cdot 34)(7,2857 - 1)^2 =$

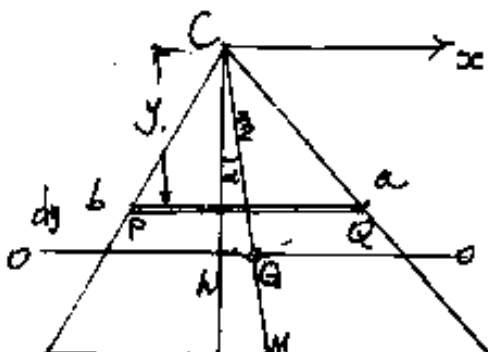
$= 110848,3265$

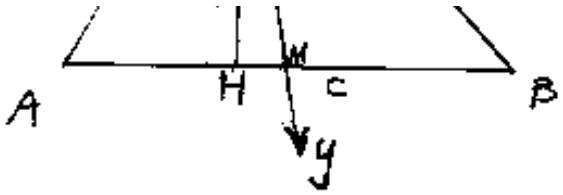
vuoti: $2\left[\frac{11 \cdot 32^3}{12} + (11 \cdot 32)(7,2857)^2\right] = \begin{matrix} 30037,3333 \\ 18684,7347 \end{matrix} \; 2\,[48722,0680] = -97444.1360$

(Torna) $13404,1905$

Per la mancanza di una connessione, l'impedimento alla flessione diventa meno della metà, circa 4/10.

La misura delle distanze delle aree da un'asse, per calcolare il momento d'inerzia rispetto a quell'asse, che ordinariamente è presa in direzione normale all'asse, può essere presa secondo direzioni qualsiasi, se tali direzioni formano l'angolo α con la direzione normale, basterà moltiplicare per $\cos^2\alpha$ questi momenti d'inerzia per risolire ai momenti d'inerzia con distanze misurate normalmente.

Calcoliamo i momenti d'inerzia di un triangolo con distanze misurate in direzione delle mediane per momenti d'inerzia relativi ad assi paralleli ai lati.

Assumiamo in C l'origine degli assi obliqui, ove la x è parallela al lato $c = \overline{AB}$ e la y è sulla mediana m

A H M C B y

e la y è sulla mediana m del lato $\overline{AB}$.

Il segmento generico: $\overline{PQ} = \frac{y}{m} c$; ma l'area all'intorno di $\overline{PQ}$ sarà $dA = \frac{y}{m} c \cos\alpha \, dy$ ove α è l'angolo fra la mediana e l'altezza su $\overline{AB}$.

$$J_{xx} = \int_0^m y^2 dA = \int_0^m y^3 \frac{c}{m} \cos\alpha \, dy = \frac{m^4 c}{4m} \cos\alpha = \boxed{\frac{m^3 c}{4} \cos\alpha}$$

Se volessimo il momento rispetto all'asse parallelo baricentrico $\overline{oo}$ avremo: $J_{oo} = J_{11} - A\delta^2$

cioè $J_{oo} = \frac{cm^3}{4}\cos\alpha - \left(\frac{cm\cos\alpha}{2}\right)\left(\frac{2}{3}m\right)^2 =$

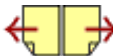
$$J_{oo} = \frac{cm^3}{4}\cos\alpha - \frac{2}{9}cm^3\cos\alpha =$$

$$\boxed{J_{oo} = \frac{cm^3\cos\alpha}{36}}$$

e se volessimo il momento rispetto all'asse $\overline{AB}$

$$J_{AB} = J_{oo} + A\delta^2 = \frac{cm^3\cos\alpha}{36} + \frac{cm\cos\alpha}{2}\left(\frac{m}{3}\right)^2$$

$$J_{AB} = \frac{c \cdot m \cdot \cos\alpha}{36} + \frac{cm^3\cos\alpha}{18} =$$

$$\boxed{J_{AB} = \frac{c \cdot m^3\cos\alpha}{12}}$$

Poiché $m \cdot \cos\alpha = h$ è l'altezza rispetto ad $\overline{AB} = c$ e $\frac{ch}{2} = A$ è l'area del triangolo i tre momenti d'inerzia diventano:

$$J_{xx\,(V)} = \frac{hc \cdot m_c^2}{2 \cdot 2} = \frac{A m_c^2}{2}$$

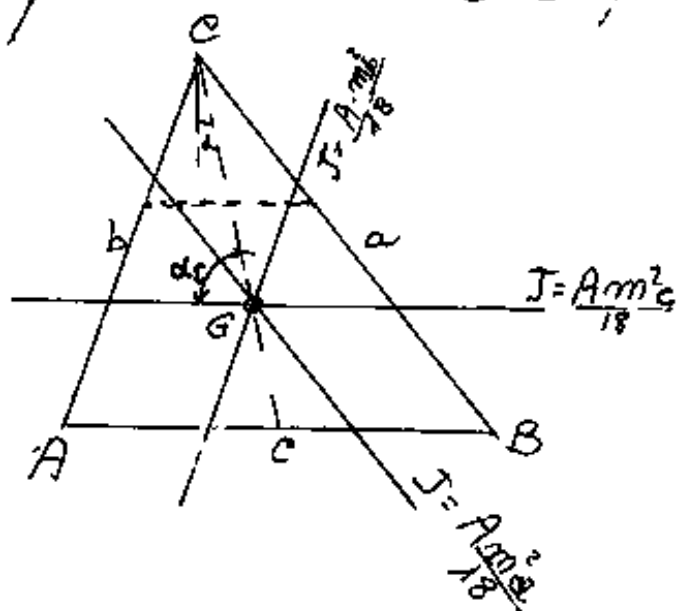
(4) 2 · 2 2

$$J_{oo} = \frac{h c m_c^2}{2 \cdot 18} = \frac{A m_c^2}{18}$$

$$J_{AB} = \frac{h c m_c^2}{2 \cdot 6} = \frac{A m_c^2}{6}$$

abbiamo indicato m_c per indicare rispetto a quale lato è mediana.

Ma questo discorso è repetibile per tutti i lati in particolare, poiché le mediane si incontrano nel baricentro, i momenti

d'inerzia per assi baricentrici paralleli ai lati del triangolo, risultano proporzionali al quadrato delle rispettive mediane.

Abbiamo scritto affiancati agli assi baricentrici paralleli ai lati, i relativi momenti d'inerzia, ove: m_a, m_b, m_c sono le mediane relative ai lati a, b, c.

Se volessimo il momento d'inerzia relativo alla mediano m_c, basta pensare che i singoli elementi di area $\frac{y}{m_c} c\, dy \cos\alpha$ sono divisi a metà dalla mediana stessa perciò il loro $dJ_{m_c} = \left(\frac{yc}{m_c}\right)^3 \frac{dy \cos\alpha}{12}$

$$J_{m_c} = \int_0^{m_c} \left(\frac{yc}{m_c}\right)^3 \frac{dy \cos\alpha}{12} = \boxed{\frac{c^3 m_c}{48} \operatorname{sen}\alpha_c}$$

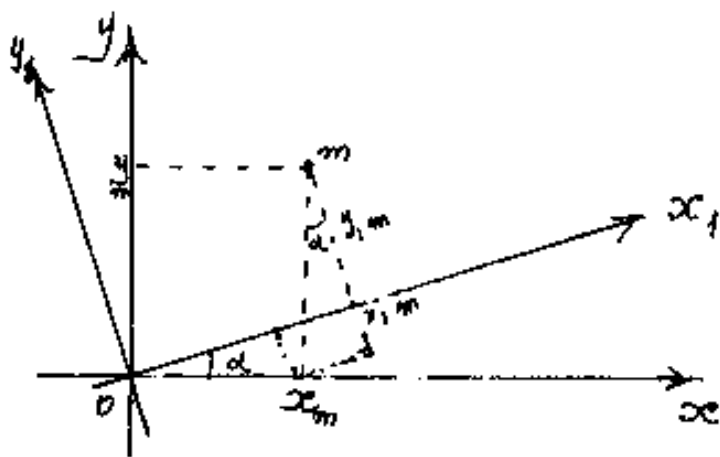
Qualora si voglia i momenti d'inerzia baricentrici per assi paralleli ai lati, ma con

misure prese ortogonalmente, dette h_a, h_b, h_c, le altezze relative ai lati a, b, c, avremo:

$$J_{oo_a} = \frac{A h_a^2}{18} \quad ; \quad J_{oo_b} = \frac{A h_b^2}{18} \quad ; \quad J_{oo_c} = \frac{A h_c^2}{18} \quad ;$$

Cerchiamo ora i momenti d'inerzia per assi ruotati.

Momenti d'inerzia ad assi ruotati

Ci riferiamo ad assi ortogonali e consideriamo i momenti d'inerzia con misure ortogonali delle distanze.

Ricordiamo che se x, y, sono le coordinate di un punto, le coordinate dello stesso punto riferite ad assi ruotati di α sono:

$$\begin{cases} x_1 = y \operatorname{sen}\alpha + x\cos\alpha \\ y_1 = y\cos\alpha - x\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse x_1 è:

$$J_{x_1x_1} = \sum_1^n m_i \cdot y_{1_i}^2 = \sum m\left(y^2\cos^2\alpha + x^2\operatorname{sen}^2\alpha - 2xy\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)$$

$$\boxed{J_{x_1x_1} = J_{xx}\cos^2\alpha + J_{yy}\operatorname{sen}^2\alpha - J_{xy}(\operatorname{sen}2\alpha)}$$

analogamente:

$$\boxed{J_{y_1y_1} = J_{xx}\operatorname{sen}^2\alpha + J_{yy}\cos^2\alpha + J_{xy}(\operatorname{sen}2\alpha)}$$

infine: $J_{x_1 y_1} = \sum_1^n m_i (y \,\text{sen}\alpha + x \cos\alpha)(y \cos\alpha - x \,\text{sen}\alpha) =$

$$J_{x_1 y_1} = (J_{xx} - J_{yy}) \,\text{sen}\alpha \cos\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$$

Si noti che il momento d'inerzia polare, resta invariato ad assi ruotati intorno al polo.

$$J_{p'} = J_{x_1 x_1} + J_{y_1 y_1} = J_{xx}(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) + J_{yy}(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) =$$

$$(J_{x_1 x_1} + J_{y_1 y_1}) = (J_{xx} + J_{yy}) = J_p = \text{cost.}$$

Ricordiamo dalla trigonometria: $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$:

$$\cos(2\alpha) = (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = \begin{cases} 2\cos^2\alpha - 1 \rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

Sostituendo nelle espressioni di $J_{x_1x_1}$; $J_{y_1y_1}$; $J_{x_1y_1}$ abbiamo:

$$J_{x_1x_1} = J_{xx}\left(\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}\right) + J_{yy}\left(\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\right) - J_{xy}\operatorname{sen}(2\alpha).$$

$$J_{y_1y_1} = J_{xx}\left(\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\right) + J_{yy}\left(\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}\right) + J_{xy}\operatorname{sen}(2\alpha)$$

$$J_{x_1y_1} = \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)\operatorname{sen}(2\alpha) + J_{xy}\cos(2\alpha)$$

ed anche:

$$J_{x_1x_1} = \left(\frac{J_{xx} + J_{yy}}{2}\right) + \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)\cos(2\alpha) - J_{xy}\operatorname{sen}(2\alpha)$$

$$J_{y_1y_1} = \left(\frac{J_{xx} + J_{yy}}{2}\right) - \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)\cos(2\alpha) + J_{xy}\operatorname{sen}(2\alpha)$$

$$J_{x_1y_1} = \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)\operatorname{sen}(2\alpha) + J_{xy}\cos(2\alpha)$$

per $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad.; $2\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}\cdot$rad $\rightarrow \cos(2\alpha) = 0$

quindi per assi ruotati di 45° si ha:

$$J_{x_1x_1} = \left(\frac{J_{xx} + J_{yy}}{2}\right) - J_{xy}$$

$$J_{y_1y_1} = \left(\frac{J_{xx} + J_{yy}}{2}\right) + J_{xy}$$

$$J_{x_1y_1} = \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)$$

valori validi solo per assi ruotati di 45°, ove si nota il valor medio assiale scostato dal centrifugo in + e − per i nuovi assiali.

Se ruotassimo di nuovo di 45° gli assi avremo che gli assi originari si sarebbero scambiati, cioè la x si sovrappone alla y originaria e la y va sulla x originaria (di verso opposto), Poiché ciò scambia i valori dei momenti d'inerzia assiali ci domandiamo se a partire dalla x originaria, vi sia un particolare valore di α (α_0) per il quale

$$J_{x_1x_1} = \left(\frac{J_{xx} + J_{yy}}{2}\right) + \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)\cos(2\alpha) - J_{xy}\,\operatorname{sen}(2\alpha)$$

assuma valori massimi o minimi, a tal fine uguagliamo a zero la derivata:

$$\frac{dJ_{x_1x_1}}{d\alpha} = \underset{(\text{costante})}{0} + \left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)(-2)\operatorname{sen}(2\alpha) - J_{xy}\cdot 2\cos(2\alpha) = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \boxed{\operatorname{tang}(2\alpha_0) = \frac{-2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}}}$$

ricordiamo che: $\operatorname{tang}(\varphi) = \operatorname{tang}(180° + \varphi)$

quindi la nostra formula diventa:

quindi la nostra formula diventa:

$$\tan(2\alpha_0) = \tan(2\cdot(90+\alpha_0))$$

ed anche:

$$\begin{matrix}(\alpha_0)\\(90+\alpha_0)\end{matrix} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctang}\left(\frac{-2\,J_{xy}}{J_{xx}-J_{yy}}\right)$$

Esistono quindi due assi ortogonali fra loro sui quali si verifica contemporaneamente che

su uno c'è Jmax, sull'altro Jmin, diremo questi assi: "assi principali d'inerzia"

Li indicheremo: $J_{\xi\xi}$ e $J_{\eta\eta}$

Si noti che se uguagliamo a zero il valore di $J_{x_1y_1} = \frac{J_{xx}-J_{yy}}{2}\,sen(2\alpha) + J_{xy}\cos(2\alpha)$, il valore di $\alpha = \alpha_0$ infatti: $tg\,\alpha = \frac{-2J_{xy}}{J_{xx}-J_{yy}}$ ciò vuol dire che il momento centrifugo rispetto agli assi principali d'inerzia è identicamente nullo.

$$\boxed{J_{\xi\eta} = 0}$$

Ciò semplifica le formule se assumiamo come assi iniziali gli assi: ξ ed η e con x, y, gli assi ruotati, chiameremo ancora "α" l'angolo di rotazione anche se in effetti il nostro angolo sarebbe rispetto agli assi originari $(\alpha+\alpha_0)$.

Indichiamo con: $\boxed{J_c = \frac{J_{\xi\xi}+J_{\eta\eta}}{2}}$

[illegible] con; $J_c = \frac{[illegible]}{2}$

con $$R_J = \frac{J_{\xi\xi} - J_{\eta\eta}}{2}$$

Sostituendo:

$$J_{xx} = J_c + R_J \cos(2\alpha)$$

$$J_{yy} = J_c - R_J \cos(2\alpha)$$

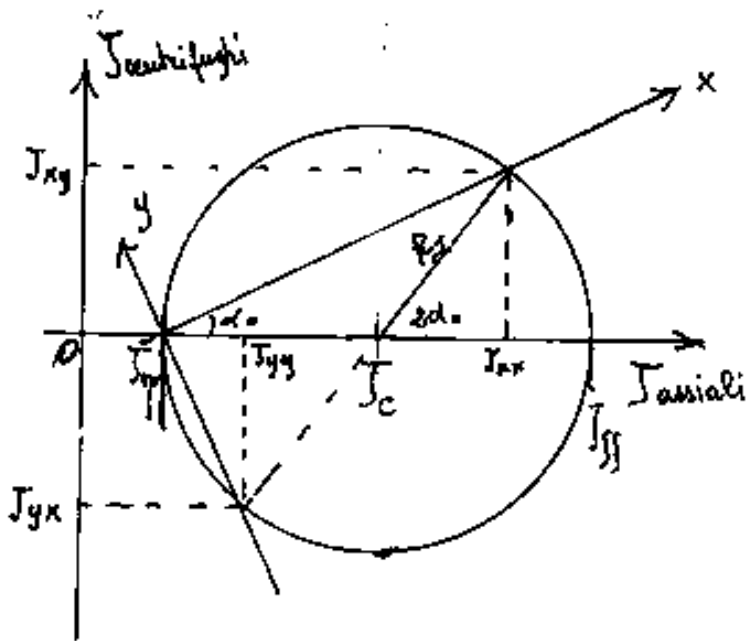
$$J_{xy} = R_J \operatorname{sen}(2\alpha)$$

Notiamo che il massimo momento d'inerzia centrifugo si ha per assi x, y a 45° gradi rispetto agli assi principali d'inerzia.

Il Cerchio di Mohr

Poichè la somma dei momenti d'inerzia assiali: $J_{xx} + J_{yy}$ = cost., lo è anche la semisomma che abbiamo indicato con. J_c = valore medio, e doppio del momento d'inerzia polare.

Se consideriamo un sistema cartesiano ove in ascisse si riportano J assiali avremo che $J_{\xi\xi}$ e $J_{\eta\eta}$ sono le ascisse max e min, J_C è l'ascissa media non solo dei momenti d'inerzia principali ma di tutti quelli su sistemi ortogonali ruotati. $(J_{\xi\xi} - J_{\eta\eta})$ è il diametro di un cerchio, (perciò abbiamo indicato con R_J = raggio = $\frac{J_{\xi\xi} - J_{\eta\eta}}{2}$)

Confrontando le espres:

Confrontando le espressioni di J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}, in funzione di $J_{\xi\xi}$ e $J_{\eta\eta}$, si nota la validità della rappresentazione grafica a fianco, detta cerchio di Mohr.

Il cerchio di Mohr, (che ritroveremo per le tensioni)

è un particolare diagramma angolare, ove l'angolo al centro è doppio dell'angolo di rotazione degli assi, perciò ad ogni punto della circonferenza corrisponde una direzione, mentre la direzione a questa ortogonale sarà diametralmente opposta (per fare 90° al centro debbono essere 180°)

Il cerchio di Mohr serve per trovare gli assi principali d'inerzia, ed i relativi momenti principali, o viceversa valori di J per assi inclinati.

Come si opera:

Noi abbiamo determinato i momenti d'inerzia rispetto a due assi ortogonali baricentrici che indichiamo con J_{xx} ; J_{yy} ; $J_{xy} = J_{yx}$ (supponiamo $J_{xx} > J_{yy}$)

Possiamo riportare in ascisse: J_{yy} , J_c , J_{xx}

$$J_c = \frac{J_{yy} + J_{xx}}{2}$$

da questi punti in ascissa possiamo riportare ortogonalmente J_{xy} e J_{yx} ,

unendo questi punti; (il segmento deve passare per J_c) abbiamo determinato R_J.

$$R_J = \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + \left(J_{xy}\right)^2}$$

e quindi i momenti principali d'inerzia

$$J_{\xi\xi} = J_c + R_J \quad ; \quad J_{\eta\eta} = J_c - R_J$$

L'angolo che gli assi principali d'inerzia formano con gli assi x,y è dato da:

$$\tan(2\alpha_0) = \frac{-J_{xy}}{(J_{xx} - J_{yy})/2}$$

Le direzioni degli assi principali sono dette Direzioni principali.

È bene ricordare che il momento d'inerzia rispetto ad un asse è l'impedimento a ruotare per flessione, intorno a quell'asse, e che un diagramma (segmento) che rappresenti proporzionalmente valori inerenti tale impedimento deve essere posto normalmente all'asse, ma può anche assumere direzioni diverse come avviene, per esempio in un cerchio che ruoti intorno ad un

diametro, solo il diametro normale all'asse di rotazione resta normale nella proiezione; le altre coppie di diametri, fra loro originariamente perpendicolari, nella proiezione non sono più perpendicolari e formano quelli che sono chiamati Diametri Coniugati nell' ellisse proiezione.

L'ellisse d'inerzia

La visione dei vari momenti d'inerzia baricentrici in un triangolo e relativi ad assi ruotati in direzione dei lati, ci ha portato a cercare espressioni algebriche capaci di darci i valori di J ruotato di un generico angolo "α".

Fra tutti i possibili valori di α abbiamo cercato i valori α_0 che rendono massimo e minimo il valore di J.

Questi assi ruotati di α_0 rispetto ai nostri orientati arbitrariamente, sono stati chiamati: assi principali d'inerzia e le loro direzioni sono state chiamate direzioni principali, sulle quali abbiamo deciso di porre gli assi cartesiani di riferimento.

Ci domandiamo,: "come rispetto ad un generico sistema di assi cartesiani è stato possibile calcolare le coordinate di un punto (baricentro), ove pensare concentrata la somma delle masse, per ottenere gli stessi momenti statici, rispetto a qualunque

retta, moltiplicando tale somma di masse per la distanza da tale retta; è forse possibile calcolare, rispetto agli assi principali di inerzia, (assunti come assi di riferimento), un punto, o un luogo di punti, ove pensare concentrata la somma delle masse, che moltiplicata per il quadrato di una distanza, dia il J. relativo ad un prescelto asse comunque inclinato rispetto agli assi principali d'inerzia, ma, ovviamente, anch'esso baricentrico.?"

<u>È possibile</u>, e possiamo arrivarci con ragionamenti diversi. Cercheremo di esprimerci, nel modo che riteniamo più semplice, ed adatto per chi voglia ripartire da zero.

<u>Consideriamo una nuova grandezza "Il momento d'inerzia per unità di massa"</u>

Notiamo che, se per masse si intendono le aree, $\frac{J}{A} = \rho^2$ $\left(\frac{cm^4}{cm^2} = cm^2\right)$, tale grandezza è il quadrato di una distanza ρ, che essendo destinata per una stessa area a trovare J rispetto ad assi ruotati, la chiameremo:

Raggio giratore d'inerzia.

avremo:

$$\rho_1 = \sqrt{J_{11}/A}$$

Quindi la "distanza" ρ è misurata da certi punti, ove posso pensare concentrata la "massa" A, che moltiplicata per ρ^2, dia il momento d'inerzia rispetto a certi assi baricentrici connessi con tali punti.

Vi è qui una corrispondenza biunivoca fra "punti" e "rette (assi)". È noto che una corrispondenza biunivoca fra rette e punti è detta polarità ove le rette-assi sono dette polari ed i punti corrispondenti sono detti poli.

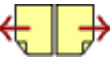
"La parola "polo" deriva dal greco πόλος che significa "perno" i poli erano riferiti agli estremi di un'asse di rotazione la cui funzione era

di sostegno, ma non di impedimento alla rotazione, come i poli terrestri"
Polari sono le coordinate uscenti da un punto, poli sono anche i centri di proiezione. in vari significati si trovano le parole: "polare e polo", a noi interessa qui la correlazione fra

punti e rette, è una correlazione involutoria ove involutoria assume il significato di inversa o biunivoca, o reciproca: se alla retta "p" corrisponde il punto "P", al punto "P" corrisponde la retta "p".
Se due punti giacciono rispettivamente sulla polare dell'altro si dicono coniugati o reciproci; così ogni polo ha per coniugati tutti i punti della sua polare. Un polo che giace sulla propria polare si dice autoconiugato.
Analogamente si dicono coniugate le rette polari che ciascuna ha su di se il polo dell'altra.
Per noi le "polari" sono gli assi baricentrici rispetto ai quali calcoliamo i momenti d'inerzia.
I "poli" sono quei punti che distano ρ dalle rispettive polari.
Ma queste distanze polari possono essere

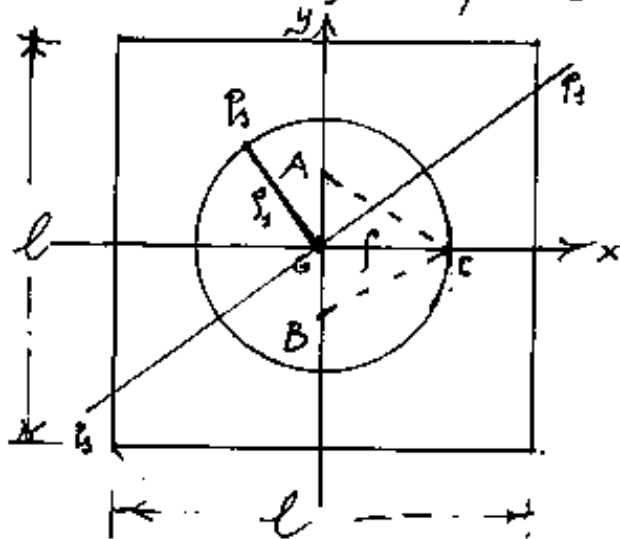
Ma queste distanze polari possono essere misurate fra il polo ed il centro G = baricentro cioè fra punti coniugati, oppure ortogonalmente alla polare.

Noi sappiamo che ogni ρ è: intermedio fra ρ_{max} e ρ_{min}.

$$\rho_{min} \leq \rho \leq \rho_{max}$$

Se torniamo a sezioni rettangolari troviamo:

$J_{xx} = \frac{bh^3}{12}$; $J_{yy} = \frac{hb^3}{12}$; ma se la sezione fosse quadrata : $h = b = l$; $J_{xx} = J_{yy} = J_{11} = \frac{l^4}{12}$

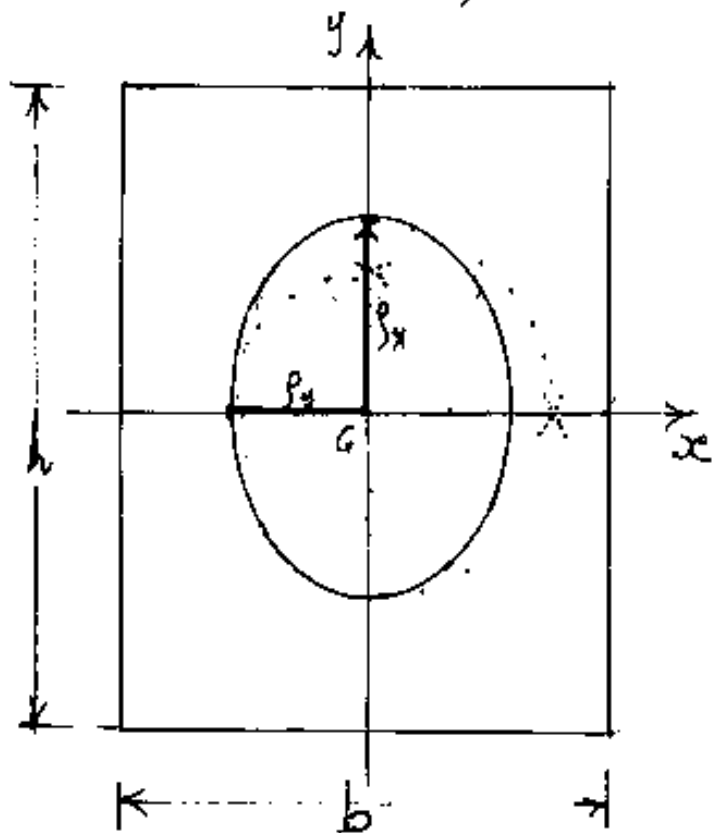
da cui: $\rho = \sqrt{\frac{l^4}{12 \cdot l^2}} = \frac{l}{6}\sqrt{3}$ quindi

$$\rho_{max} = \rho_{min} = \frac{l}{6}\sqrt{3}$$

ogni altro ρ non potendo essere maggiore di ρ_{max}, né minore di ρ_{min} dovrà essere $\rho = \frac{l}{6}\sqrt{3}$

Poiché le distanze sono prese "ortogonalmente" in questo caso concidono con le distanze dal centro e ρ è il raggio di una circonferenza di centro G ed ogni ρ è ortogonale all'asse cui si riferisce.

La costruzione di ρ graficamente è facile se ricordiamo che l'altezza di un triangolo equi=

[illegible] che è altezza di un triangolo equi-
latero è: $h = \frac{lato}{2}\sqrt{3}$; dividendo l in tre parti possiamo costruire il triangolo equilatero ABC ove l'altezza $\overline{GC} = \rho$, e la circonferenza di raggio ρ è il luogo dei "poli" P_s ove moltiplicando l'area per ρ^2 otteniamo il momento d'inerzia rispetto alla polare p_s normale a ρ.

Se facciamo ruotare il nostro quadrato intorno all'asse y, in proiezione diventa un rettangolo, e la circonferenza dei ρ un ellisse, ove però i diametri che erano perpendicolari nella circonferenza diventano i diametri coniugati nell'ellisse, mentre i diametri principali dell'ellisse sono le direzioni principali, e restano ortogonali sugli assi x ed y. (Per le correlazioni nella costruzione dell'ellisse vedasi Vol II) $\rho_x = \frac{h}{6}\sqrt{3}$; $\rho_y = \frac{b}{6}\sqrt{3}$;

E' questo l'ellisse centrale d'inerzia o di: Culmann che però nasce da impostazioni

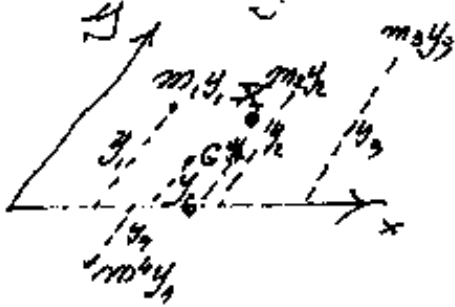
molto più complicate. Nei fenomeni fisici, molte grandezze, che variano da un massimo ed un minimo; e che, in qualche modo correlazionano biunivocamente rette e punti, sono rappresentate dai raggi dell'ellisse.

In generale, in meccanica razionale l'inerzia è studiata nello spazio tridimensionale, qui

limitiamo il nostro studio a sistemi piani, ove le masse sono, in genere, le aree delle figure piane.
Ricordiamo dalla geometria proiettiva che il luogo dei punti autoconiugati, in una polarità, e l'inviluppo delle rette autoconiugate è la conica fondamentale; poiché ciò non è reale nel nostro caso, si prende come polo il simmetrico, sulla base di queste premesse che definiscono una antipolarità si trova l'ellisse di Culman che, per completezza, dimostriamo.

Il sistema antipolare

Abbiamo considerato il momento d'inerzia come il momento statico ove al posto delle masse iniziali si sono sostituiti i momenti statici di tali masse iniziali. Tuttociò rispetto ad un asse definito e con distanze dall'asse

arbitrariamente inclinate. Tali distanze le indicheremo con y e l'asse con x ove però il sistema di assi x ed y non è in genere ortogonale, ma obliquo. Avremo il baricentro G delle masse e la relativa y_G, ed

avremo il nuovo baricentro dei momenti sta-
tici assunti come nuove masse al posto delle
masse iniziali, e questo nuovo baricentro
si indica con la lettera X ed è detto:
centro relativo. (all'asse x) di coordinata y_X;

Se ricordiamo che: $J_{xx} = \sum_1^n (my)y$

possiamo avvalerci che: $S_x = y_G \sum_1^n (m)$

per dire $J_{xx} = y_X \cdot \sum my = y_X S_x = \rho_x^2 \sum_1^n (m)$

$$\boxed{J_{xx} = y_G \, y_X \sum_1^n (m)} =$$

era ovvio che: $\boxed{y_X = \dfrac{J_{xx}}{S_x}}$ e

$$\boxed{\rho_x^2 = y_G \, y_X}$$

attenzione! questo: ρ_x non è baricentrico

Quest'ultima relazione afferma che
il raggio giratore d'inerzia è medio
proporzionale fra l'ordinata del bari-
centro G e l'ordinata del centro relativo

$\overline{X}$ = (baricentro dei momenti statici assunti come masse)

Ricordando il teorema di trasposizione o di Huygens ove gli assi x, y non sono baricentrici, ma lo sono i loro paralleli x_0, y_0 avremo:

$J_{xx} = J_{x_0 x_0} + \Sigma(m)\, d^2_{x-x_0}$ che può scriversi:

$$\rho_x^2 \Sigma(m) = \rho_{x_0}^2 \Sigma(m) + d^2_{x-x_0} \Sigma(m)$$ e dividendo:

per $\Sigma(m)$ si ha:

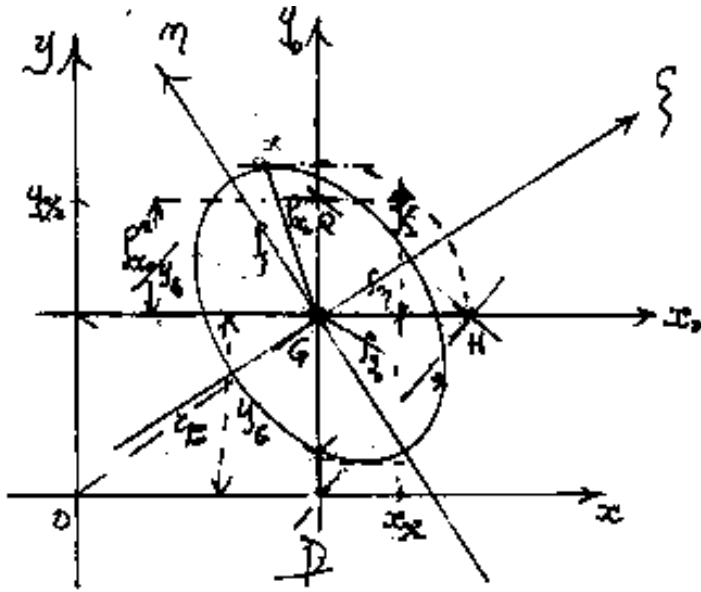
$$\rho_x^2 = \rho_{x_0}^2 + d_{x-x_0}^2 \qquad \text{ove: } \left(d_{x-x_0} = y_G\right)$$

per cui:

$$y_X = \frac{\rho_x^2}{y_G} = \frac{\rho_{x_0}^2 + y_G^2}{y_G} = \left(y_G + \frac{\rho_{x_0}^2}{y_G}\right)$$

L'espressione ora scritta evidenzia che il <u>centro relativo</u> X è più lontano del baricentro G dall'asse di riferimento x della grandezza: $\left(\rho_{x_0}^2 / y_G\right)$ cioè del rapporto fra il quadrato del raggio giratore d'inerzia, relativo al parallelo asse baricentrico x_0, e la distanza fra i due assi: x ed $x_0 = y_G$.

Dato quindi un generico sistema di riferimento (che possiamo supporre ortogonale) x, y, ed il parallelo sistema di riferimento x_0, y_0; e baricentrico si abbia il sistema: ξ, η, delle direzioni principali d'inerzia, e sia dato l'ellisse

y η y_0 centrale d'inerzia

centrale d'inerzia. è facile costruire (X) centro relativo, infatti riportato in $\overline{GH} = \rho_{x_0}$, da H la normale ad HD troviamo Q ove $\overline{QG} = \rho^2_{x_0}/y_G$. (i ρ_{xx} per y)

Per il momento d'inerzia polare nell'origine degli assi x ed y avremo: $J_p = J_{xx} + J_{yy}$

$$J_p = \left(J_{x_0x_0} + d_x^2 \Sigma(m)\right) + \left(J_{y_0y_0} + d_y^2 \Sigma(m)\right) =$$

ed essendo $J_{x_0x_0} + J_{y_0y_0} = J_G$; e $d_x^2 + d_y^2 = r_G^2$ ove r_G è la distanza $\overline{OG}$ (o modulo in coordinate polari) avremo:

$$\boxed{J_p = J_G + r_G^2 \Sigma(m)}$$

—

Il momento d'inerzia centrifugo: $J_{xy} = \Sigma(mxy)$,

$$J_{xy} = \Sigma(m)(x_0 + d_x)(y_0 + d_y) = \Sigma(m)(x_0y_0 + x_0d_y + y_0d_x + d_xd_y)$$

i prodotti: $\Sigma(m)x_0$ e $\Sigma(m)y_0$ sono nulli perché x_0 ed y_0 sono baricentrici perciò anche: $d_y \Sigma m x_0 = d_x \Sigma m y_0 = 0$

$$\boxed{J_{xy} = J_{x_0y_0} + d_x d_y \Sigma(m)}$$

—

Il momento d'inerzia centrifugo può essere calcolato per due assi qualsiasi, se uno dei due è baricentrico: $d_x d_y \Sigma(m) = 0$ perché: o $d_x = 0$ o $d_y = 0$

$$J_{x_0 y} = J_{y_0 x} = J_{x_0 y_0}$$

Se i due assi sono paralleli fra loro e paralleli a x_0

$$J_{x_1 x_2} = J_{x_0 x_0} + d_1 d_2 \Sigma(m)$$

e se uno di essi coincide con x_0 ; $d_1 d_2 \Sigma(m) = 0$

$$J_{x_1 x_0} = \underline{J_{x_0 x_2} = J_{x_0 x_0}} \quad \text{(assiale)}$$

Esempio di calcolo di centri relativi

(e di assi principali per la verifica grafica)

Riferite ad un sistema cartesiano 0,x,y, sono note le masse:

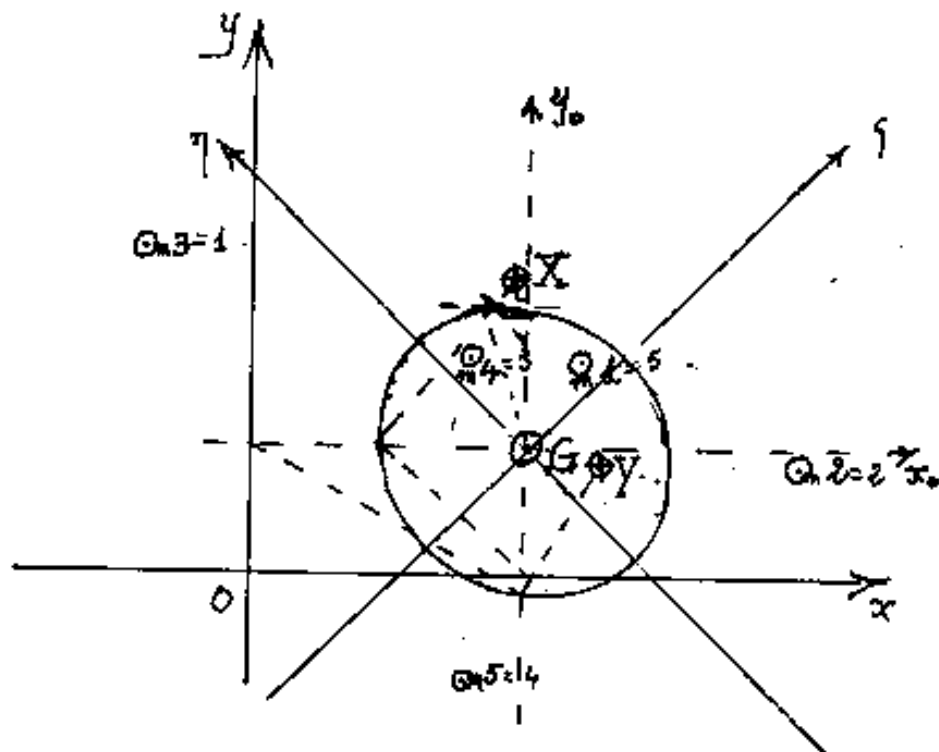
$m_1 = 5$; $\equiv (3,2)$

$m_2 = 2$; $\equiv (5,1)$

$m_3 = 1$; $\equiv (-1,3)$

$m_4 = 3$; $\equiv (2,2)$

$m_5 = 4$; $\equiv (2,-1)$

$\Sigma m = 15$

(baricentro)

$S_x = (5 \cdot 2) + (2 \cdot 1) + (1 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot (-1))$

$10 + 2 + 3 + 6 - 4 = 17$; $y_G = \frac{17}{15} = 1{,}133\bar{3}$

$S_y = (5 \cdot 3) + (2 \cdot 5) + (1 \cdot (-1)) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 2)$

$15 + 10 - 1 + 6 + 8 = 38$; $x_G = \frac{38}{15} = 2{,}533\bar{3}$

(centro relativo) X (rispetto ad x) ottenuto sostituendo alla posizione delle masse i valori S_x, e calcolando il nuovo baricentro come se i valori S_x fossero masse.

il nuovo baricentro come se i valori S_x fossero masse.

$$J_{xx} = (10 \cdot 2) + (2 \cdot 1) + (3 \cdot 3) + (6 \cdot 2) + ((-4)(-1))$$

$$20 + 2 + 9 + 12 + 4 = \underline{\underline{47}}\,; \quad y_X = \frac{47}{17} \cong \underline{\underline{2{,}764706}}$$

$$J_{xy} = (10 \cdot 3) + (2 \cdot 5) + (3 \cdot (-1)) + (6 \cdot 2) + (-4 \cdot 2)$$

$$30 + 10 - 3 + 12 - 8 = 41\,; \quad x_X = \frac{41}{17} \cong \underline{\underline{2{,}4117647}}$$

$$J_{x_0 x_0} = J_{xx} - \Sigma(m)\, y_G^2 = 47 - 15\left(\frac{17}{15}\right)^2 = \underline{\underline{27{,}733\bar{3}}}\,.$$

$$J_{yy} = (15\cdot 3) + (10\cdot 5) + ((-1)(-1)) + (6\cdot 2) + (8\cdot 2)$$

$$45 + 50 + 1 + 12 + 16 = \underline{\underline{124}}\ ;\ x_y = \frac{124}{38} = \underline{\underline{3,263158}}$$

$$J_{yx} = (15\cdot 2) + (10\cdot 1) + ((-1)\cdot 3) + (6\cdot 2) + (8\cdot(-1)) = J_{xy} :$$

$$+30 + 10 - 3 + 12 - 8 = \underline{\underline{41}} : y_y = \frac{41}{38} = \underline{\underline{1,078947}}$$

$$J_{y_0 y_0} = 124 - 15\left(\frac{38}{15}\right)^2 = \underline{\underline{27,7\bar{3}33}}$$

$$J_{x_0 y_0} = \underline{-2,066666} = \sum m_i (x_i - x_G)(y_i - y_G) = J_{xy} + x_G y_G \sum m_i + S_x x_G + S_y y_G$$

$$\operatorname{tang}(2\alpha_0) = \frac{-J_{x_0 y_0}}{(J_{x_0 x_0} - J_{y_0 y_0})/2}$$

$$\operatorname{tang}(2\alpha_0) = 2\cdot\frac{+2,066\bar{6}}{(27,733\bar{3}) - (27,7333)} = \infty$$

$$\alpha_0 = 45^\circ \qquad \alpha_0 = 135^\circ$$

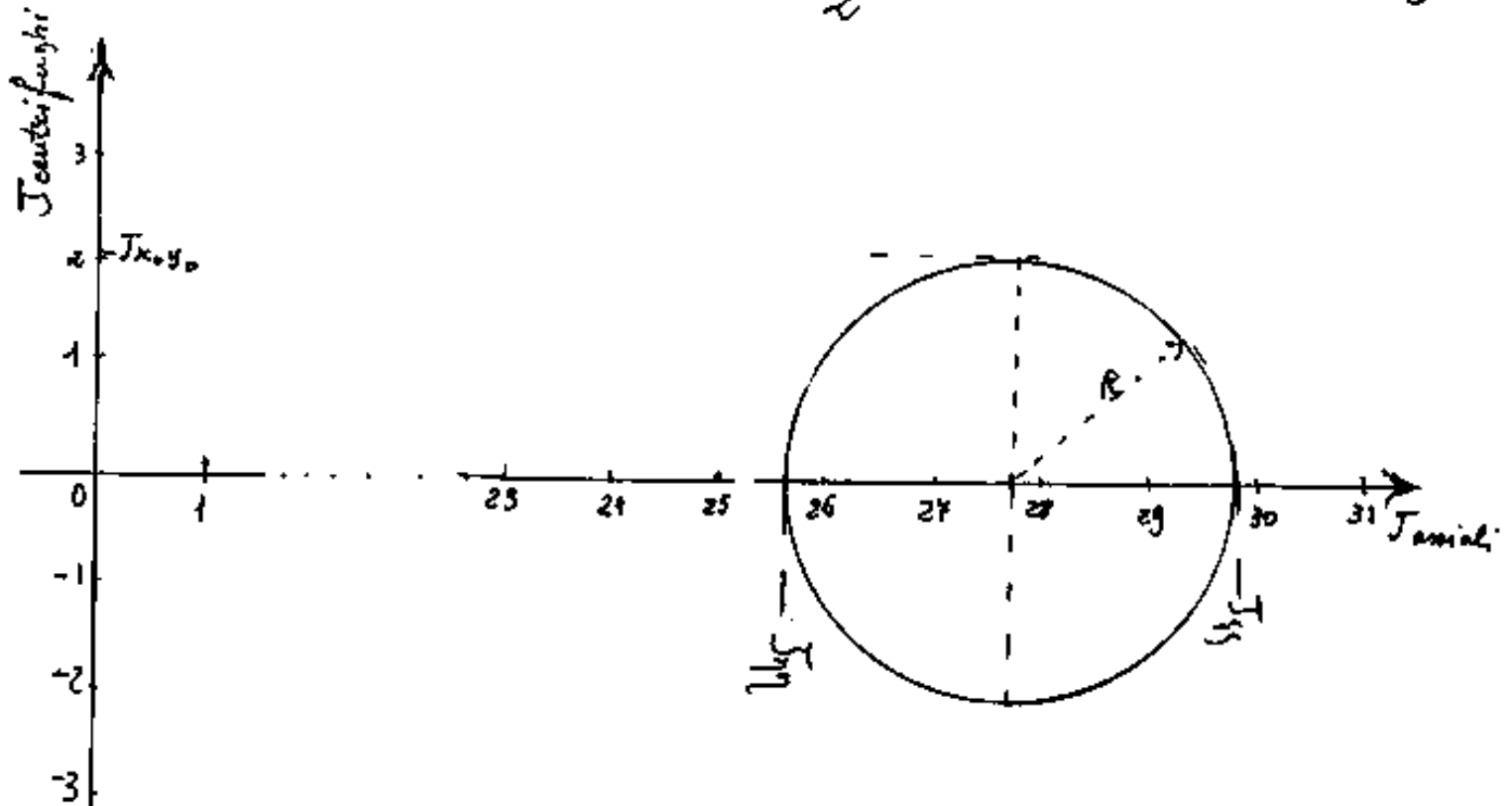
$$\rho_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0 x_0}}{\sum m}} = \sqrt{\frac{27,733}{15}} = 1,35973854 = \rho_{y_0}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{J_{x_0x_0} - J_{y_0y_0}}{2}\right)^2 + J_{x_0y_0}^2} = \underline{2,066\bar{6}}$$

$$J_{\xi\xi} = 27,733\bar{3} + 2,066\bar{6} = \underline{\underline{29,8}}$$

$$J_{\eta\eta} = 27,733\bar{3} - 2,066\bar{6} = \underline{\underline{25,666\bar{6}}}$$

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{29,8}{15}} = \underline{\underline{1,40949163}}; \quad \rho_\eta = \sqrt{\frac{25,2666}{15}} = \underline{\underline{1,29786149}}$$

In questo caso i momenti principali d'inerzia sono abbastanza vicini $J_{\xi\xi} = 29,8$; $J_{\eta\eta} = 25,66\bar{6}$ per cui il raggio del cerchio di Mohr $\frac{29,8 - 25,66\bar{6}}{2} = 2,066\bar{6}$ conviene quindi lasciare fuori del foglio l'origine degli assi: $\frac{J_{\xi\xi} + J_{\eta\eta}}{2} = 27,733\bar{3} = \frac{J_{x_0x_0} + J_{y_0y_0}}{2}$

Si noti che la retta x, che taglia l'ellisse, ha il suo centro relativo X esterno all'ellisse, mentre la retta y, che è esterna all'ellisse, ha il suo centro relativo interno all'ellisse

ha il suo centro relativo interno all'ellisse,
cioè se le rette fossero tangenti all'ellisse
i loro centri relativi sarebbero sull'ellisse
dall'altra parte di G, ma se noi consideriamo
i simmetrici dei centri relativi rispetto a G.
questi simmetrici X'; Y' giaceranno sulla ret-
ta sono autoconiugati, si ha una polarità, mentre

le rette ed i rispettivi centri relativi, dan=
no una antipolarità; se la retta passa per
il baricentro G, il suo centro relativo è al=
l'infinito, se il centro relativo si avvicina a
G la retta si allontana.

L'aver considerato i simmetrici ha per=
messo di tracciare la conica che è l'ellisse
di Culmann.

Elementi di geometria proiettiva

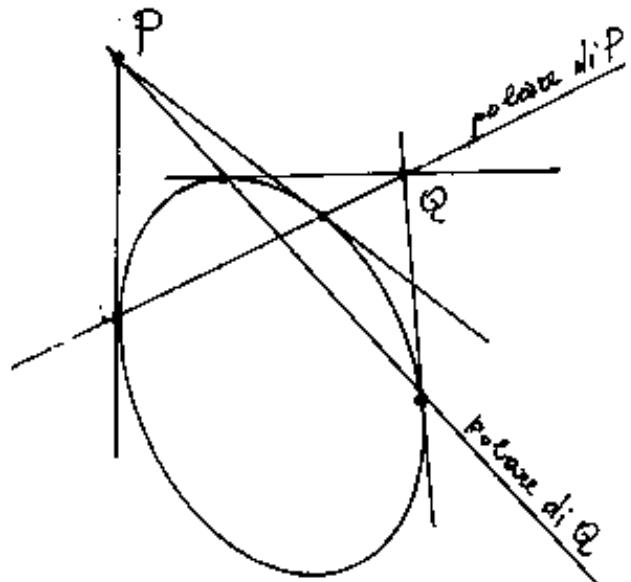
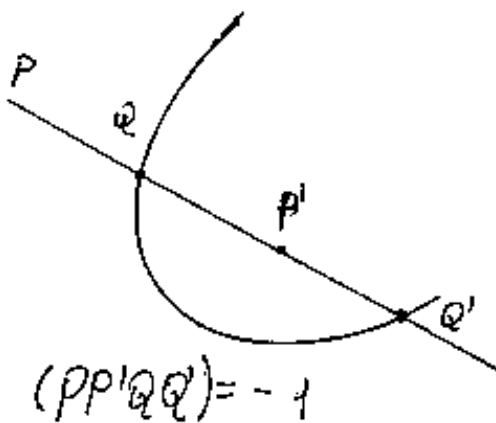
Per comprendere come la conica fonda=
mentale di una polarità sia il luogo
dei punti autoconiugati, (cioè che stanno
sulla propria polare) come i simmetrici dei
centri relativi e le rispettive rette. (Quando
la retta ed il suo centro relativo sono equi=
distanti da G, il simmetrico X' di X è sulla
retta). riteniamo opportuno di amplia

retta), riteniamo opportuno di amplia=re gli elementi di geometria proietti=va, già esposti nel II e III volume.

Due punti P e P' si dicono: Coniugati rispetto ad una conica, quando separano armonicamente i due punti di intersezione fra la retta $\overline{PP'}$ e la conica.

Se teniamo fisso il punto P (Polo), il luogo dei punti coniugati è una retta che dicesi polare di P la indichiamo con "p" e passa per i punti di contatto delle tangenti alla conica. Due rette si dicono coniugate rispetto alla conica quando l'una contiene il polo dell'altra. Cioè se le due rette coniugate p e p' e le tangenti alla conica passano per P esse formano un gruppo armonico. L'involuzione è ellittica o iperbolica a seconda che P sia interno od esterno alla conica.

P
Q
P'
Q'
(PP'QQ') = -1

P
polare di P
Q
polare di Q

Teorema di Steiner - Charles

Il luogo dei punti comuni ai raggi corrispondenti in due fasci proiettivi (complanari distinti e non proiettivi) è una conica passante per i centri S ed S' e tangente in S ed S' al raggio che corrisponde ad $\overline{SS'}$. e queste tangenti si incontrano nel centro di collinazione. Inversamente prendendo i due punti su una conica e proiettando altri tre punti della stessa.

Il teorema di Pascal dice:

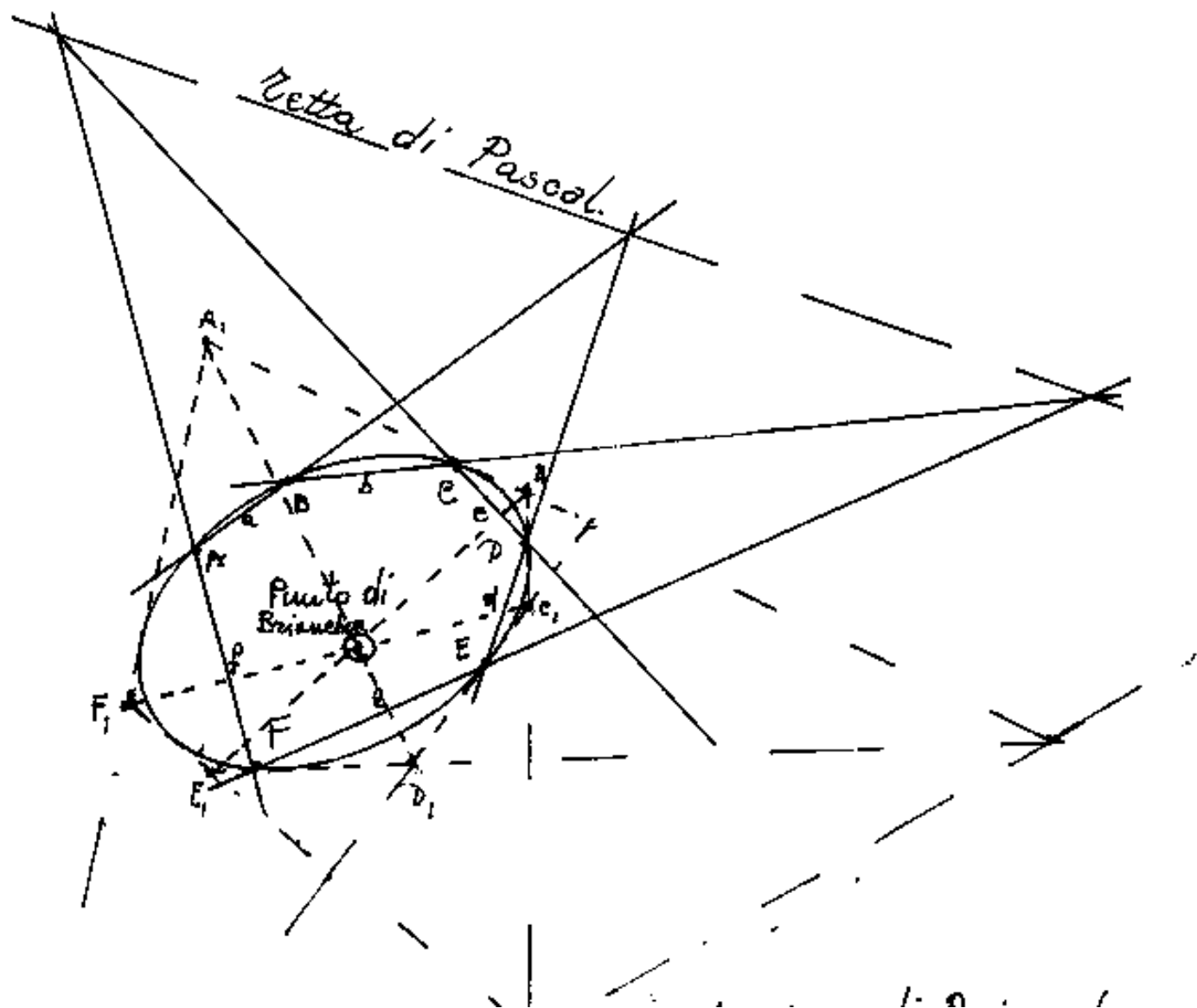
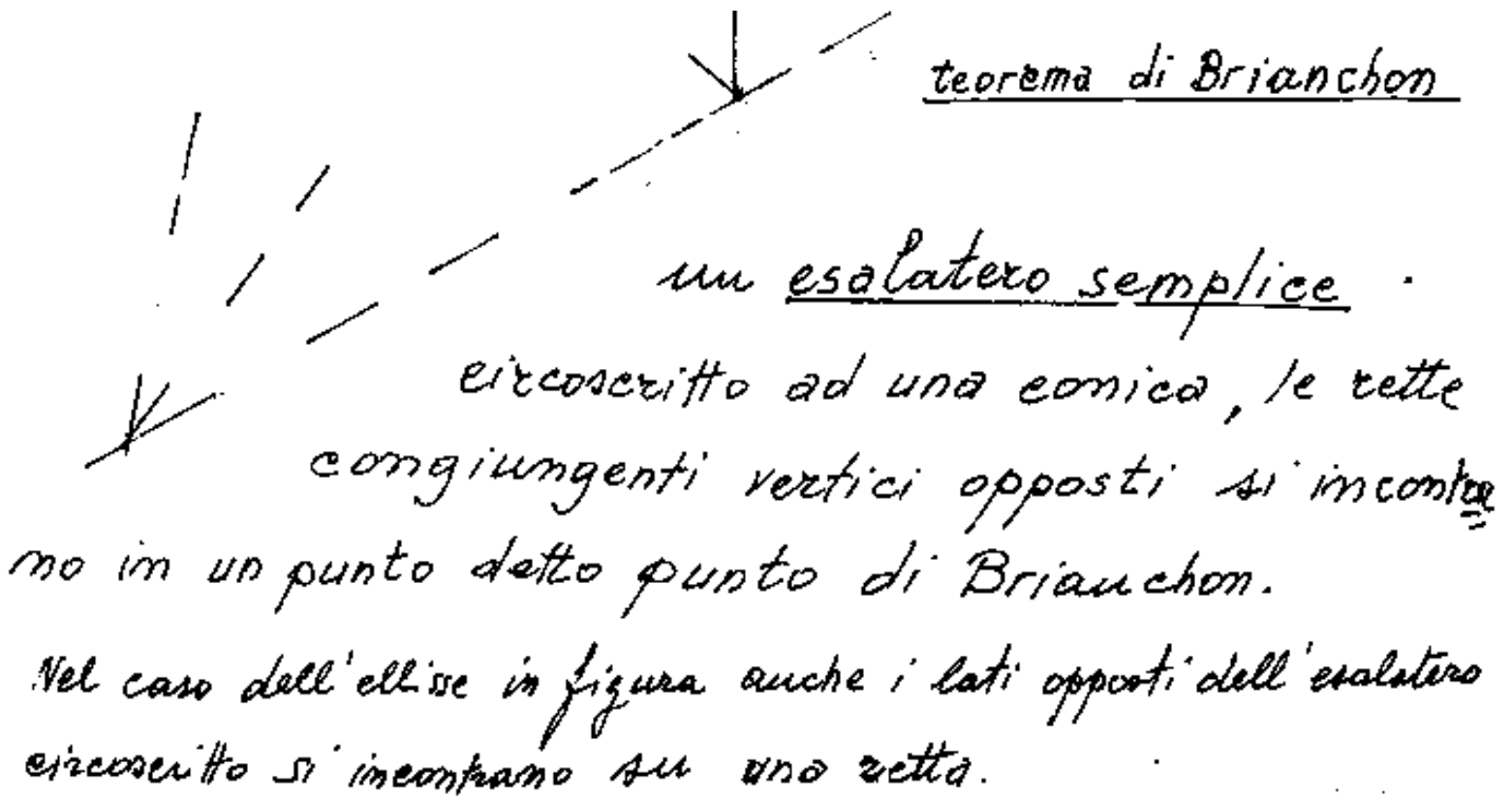
se un esagono semplice è inscritto in una conica, i punti di intersezione delle tre coppie di lati opposti appartengono ad una retta (retta di Pascal) e inversamente.

Retta di Pascal.

A_1 A B C D E F F_1 E_1 D_1 Punto di Brianchon

teorema di Brianchon

un esalatero semplice circoscritto ad una conica, le rette congiungenti vertici opposti si incontrano in un punto detto punto di Briauchon.

Nel caso dell'ellisse in figura anche i lati opposti dell'esalatero circoscritto si incontrano su una retta.

Alcune osservazioni sulla proiettiva.

La parola projettare (dal latino gettare in avanti) implica un proiettore ed una proiezione, se consideriamo puntiforme il proiettore si hanno due casi: il centro proiettore è in campo finito e si hanno le proiezioni centrali, se il proiettore è all'infinito il fascio dei raggi è composto di rette parallele.

La proiezione può avvenire in piano e se i raggi sono perpendicolari al piano si ha la proiezione ortogonale. (Monge)

Se consideriamo due piani qualsiasi ed un centro di proiezione, dal quale si proietta la figura di un piano sull'altro piano, la figura proiettata e la sua proiezione sono figure omologiche.

Si è già trattata (vol III) la questione dei trian

goli omologici, dei quadrilateri completi e dei gruppi armonici; abbiamo già definito le coordinate proiettive, per esse abbiamo messo a fuoco la interpretazione di equazioni omogenee dimensionalmente. In geometria proiettiva, la polarità, è una correlazione reciproca

fra due piani sovrapposti, ed è tale che se ad un punto "P" corrisponde la retta "p" si ha che a tutti i punti della retta "p" corrispondono rispettivamente tutte le rette passanti per il punto P.

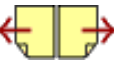
Ogni coppia Punto (Polo) e retta (polare) che si corrispondono hanno una corrispondenza involutoria. Analoga la reciprocità involutoria fra piani nella polarità spaziale.

Ci limitiamo al piano.

Due rette si dicono coniugate, se ciascuna possiede il polo dell'altra.

Un punto si dice autoconiugato se giace sulla propria polare e viceversa, una retta polare si dice autoconiugata se contiene il proprio polo.

Il luogo dei punti autoconiugati è una conica che si chiama conica fondamentale della polarità ove l'involuzione delle polari costituisce l'insieme delle rette tangenti

polari costituisce l'insieme delle rette tangenti alla conica nei punti dei rispettivi poli.
È una polarità piana, e la conica si dice irriducibile.
Se consideriamo le rette del piano ed i rispettivi centri relativi che sono da banda opposta rispetto a G e che X si allontana da G quando la retta si avvicina, se consideriamo X' simmetrico finiscono per incontrarsi (autoconiugati) si ha l'ellisse di Culmann.

L'ellisse centrale d'inerzia di un sistema di masse è la conica fondamentale, nella polarità fra le rette del piano ed i simmetrici X' rispetto al baricentro G dei rispettivi centri relativi X. Quindi i centri relativi X e le rette del piano si corrispondono in una antipolarità determinata dall'ellisse centrale d'inerzia. Intendendo per antipolarità quella che ciascuna retta polare ha col simmetrico del proprio polo, rispetto al centro della polarità.

Se avessimo assunto come polarità = (corrispondenza biunivoca fra punti e rette) quella delle rette e dei propri centri relativi, poiché per rette baricentriche i poli (centri relativi) sono all'infinito e viceversa, non potendo i centri relativi X giacere sulle rispettive rette, non era possibile, in campo reale, avere la conica fondamentale. Avendo assunto come ...

damentale. Avendo assunto come polarità quella delle rette coi simmetrici X', la correlazione fra le rette ed i centri relativi X diventa un'antipolarità, rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.

Costruzione grafica del diametro coniugato

Dato l'ellisse di centro G e di diametri $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, ove: $\overline{AG} = \overline{GB} = a$; $\overline{DG} = \overline{GC} = b$.

Per C tracciamo una parallela ad $\overline{AB}$ che incontra in E un generico diametro dell'ellisse.

Se $E\hat{G}C = \alpha$ avremo $\overline{EC} = b \cdot \tan\alpha$.

Sul prolungamento di $\overline{GC}$ fino ad H riportiamo: $\overline{CH} = a$; da H la perpendicolare ad HE fino ad incontrare in E_1 la tangente per C, ove $\overline{CE_1} = b \tan\beta$, ove $\beta = C\hat{G}E_1$. (E_1G = retta del diametro coniugato)

Dal triangolo rettangolo EHE_1 per il 2° di Euclide

$$(b \tan\alpha)(b \tan\beta) = a^2$$

da cui;

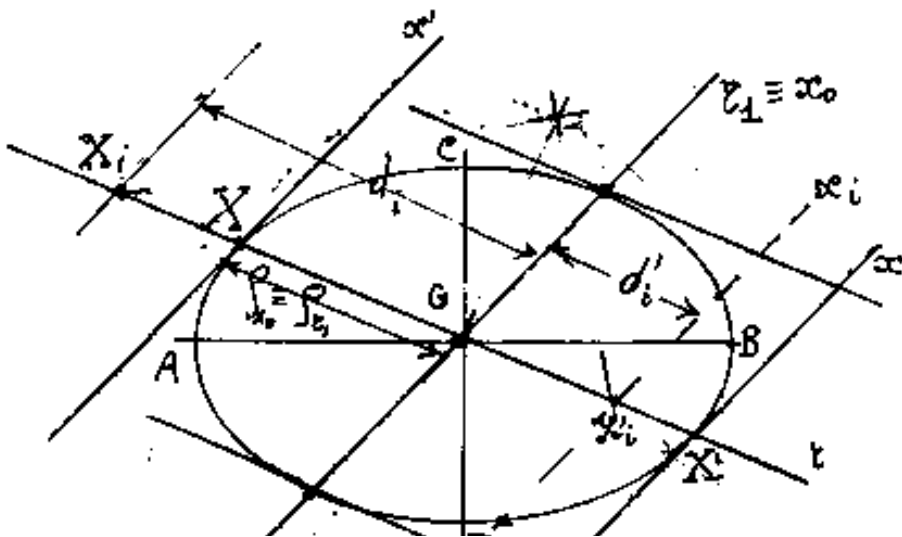
$$(\mathrm{tang}(\alpha))(\mathrm{tang}(\beta)) = \left(\frac{a^2}{b^2}\right)$$

Nota formula dei diametri coniugati dell'el= lisse, ove α e β sono gli angoli che formano col diametro minore dell'ellisse.

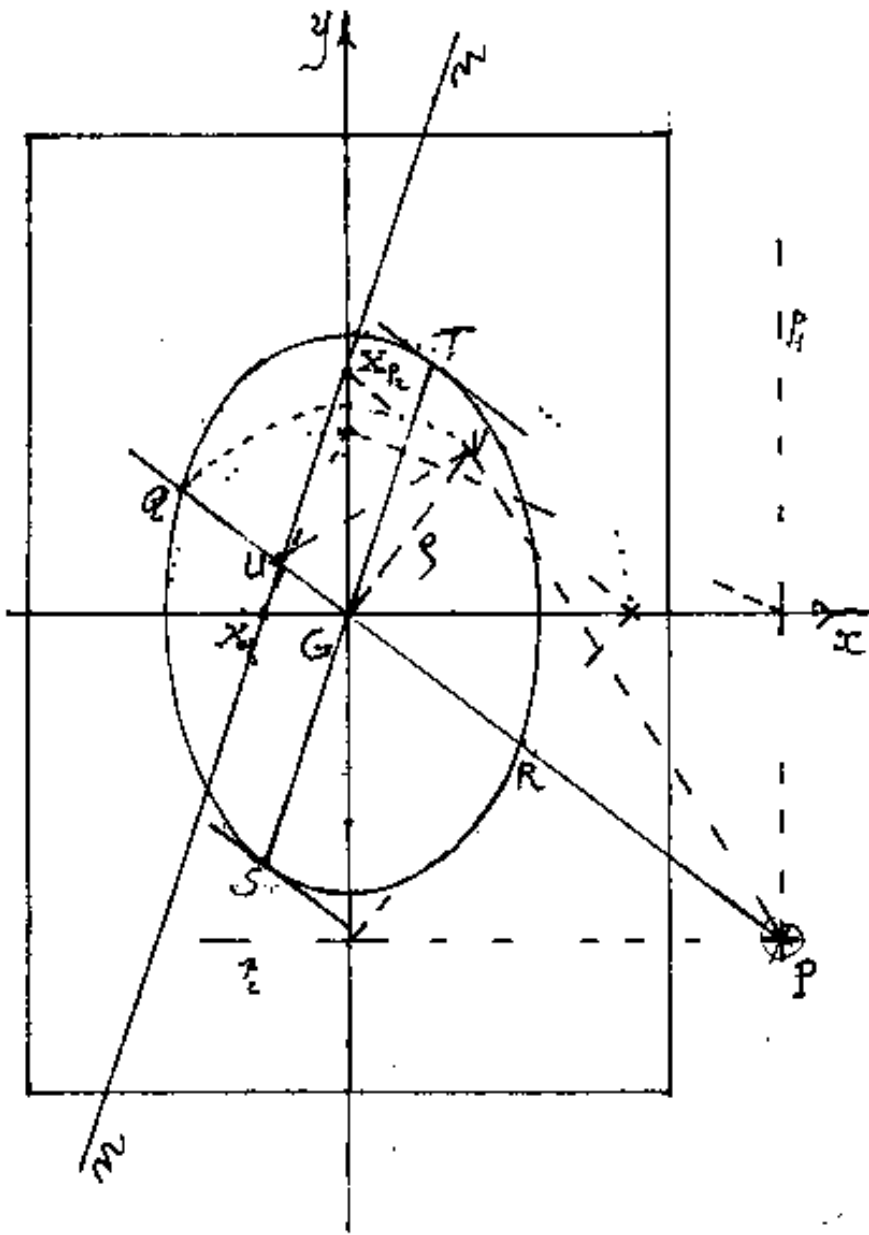
Se φ e φ' sono gli angoli che formano col diametro maggiore avremo:

$$(\mathrm{tang}(\varphi))(\mathrm{tang}(\varphi')) = b^2/a^2$$

Consideriamo l'insieme delle rette "r" passanti per il baricentro G, ciascuna di esse incontra un insieme allineato di centri relativi X e di simmetrici X' giacenti sulle rispettive rette x; inoltre, ciascuna "r" divide a metà le corde dell'ellisse parallele alle tangenti x in X', ed x' in X. In particolare la corda r_1 passante per G parallela alla x ed x', ai suoi estremi ha tangenti all'ellisse parallele alla r, cioè <u>questa r_1 e la r sono diametri coniugati</u>. <u>le direzioni r ed r_1 sono direzioni coniugate</u>. Le distanze d_i e d_i' dal baricentro G. di X_i ed X_i', misurate in direzione r sono tali che

$$d_i d_i' = \rho_{x_0}^2 \equiv \rho_{r_1}^2$$

essendo: $\rho_{t_1}^2$ = costante

anche i prodotti: $d_i d_i'$ = costanti, ciò dimostra che la corrispondenza X_i, X_i' è una involuzione nella quale G è il centro.

Il fatto che le distanze d_i, d_i', dal baricentro G, misurate da banda opposta a G sulla retta di un diametro, il cui semidiametro (raggio d'inerzia del diametro coniugato), sia medio proporzionale fra d_i e d_i'; Cioè in altre parole che le distanze: $\overline{XG}$ e $\overline{Gx}$ costituiscono le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa: $\overline{Xx}$ di un triangolo rettangolo ove l'altezza relativa all'ipotenusa, ha il piede in G ed è ampia: ρ = (semidiametro dell'ellisse giacente sulla retta ...) permettono una facile de

retta su cui si misura) permettono una facile determinazione di x conoscendo X o viceversa.

P sia il centro di sollecitazione di un carico normale ad una sezione, la retta di cui è centro relativo, rispetto all'ellisse d'inerzia della sezione, è l'asse neutro intorno al

quale ruota la sezione per l'inflessione prodotta da P.

L'asse neutro n-n, puó costruirsi in più modi: il piu semplice è forse quello di considerare per P due rette p_1 e p_2 parallele ai diametri principali d'inerzia, l'unione dei due centri relativi X_{p_1} ed X_{p_2} è l'asse neutro.

Un'altro metodo è unire P con G e determinare il diametro $\overline{QR}$ e quindi $\rho = \overline{QG}$, riportato ρ perpendicolarmente a $\overline{PG}$ in $\overline{GV} = \rho$, si determi-u tracciando da V la normale a $\overline{VP}$, avremo:

$$\overline{UG} : \overline{GV} = \overline{GV} : \overline{GP} \; ; \text{ cioè: } \boxed{\overline{UG} = \rho^2 / \overline{GP}}$$

ma U è solo un punto di n-n ed occorre conoscere la direzione del diametro coniugato $\overline{ST}$ (coniugato d $\overline{QR}$) per avere la direzione della parallela n-n passante per U.

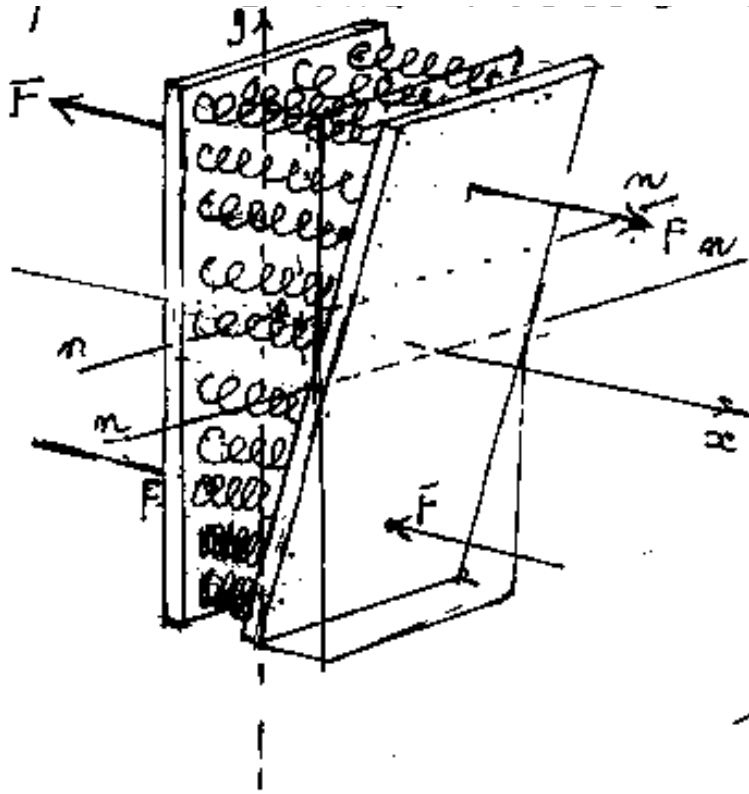
Poiché una forza F agente in P da un

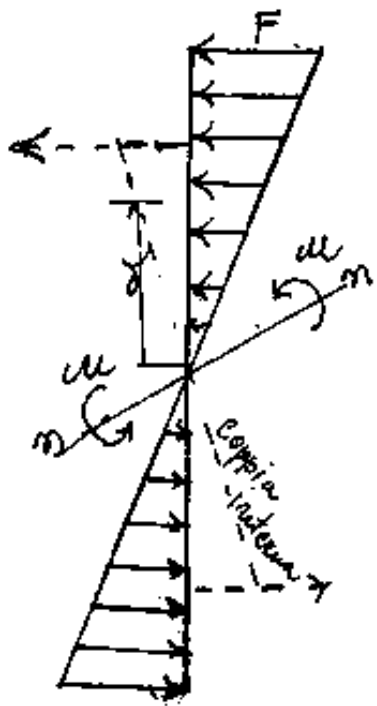
Poichè una forza F agente in P da un momento $\mathcal{M} = F \cdot \overline{PG}$ il raggio d'inerzia $\overline{GQ} = \rho$ è il raggio che dà il momento d'inerzia rispetto all'asse $\overline{ST}$, l'asse neutro n-n è parallelo, ma spostato di $\overline{UG}$ perchè la F genera anche compressione oltrechè inflessione.

Il gioco della leva con la proporzionalità dei bracci, ci porta a considerare l'azione di un Momento come l'azione di un peso o forza infinitesima, posta a distanza infinita: ($M = 0 \cdot \infty$). Ci è quindi familiare il momento statico proporzionale alla distanza (braccio).

Il momento d'inerzia proporzionale al quadrato delle distanze, può crearci dei dubbi.

Supponiamo di avere due tavole, per semplicità, rettangolari, affacciate fra loro, e collegate, ogni cm^2 con una molla (dinamometro) il cui accorciamento o allungamento sia proporzionale alla azione (forza) ricevuta. Le molle siano tutte uguali fra loro.

Supponiamo, con due coppie equilibrate di produrre una ruotazione relativa φ fra le due

tavolette. Per semplicitá consideriamo ferma una tavoletta, con gli assi di riferimento. Se per l'asse neutro della tavoletta ruotata, facciamo passare un piano parallelo alla

tavoletta fissa, notiamo che le deformazioni delle molle sono proporzionali alla distanza dall'asse neutro. Poichè le deformazioni sono anche proporzionali alle loro azioni (forze), detto K un coefficiente di proporzionalità e δ la distanza dall'asse neutro, le forze $F = K\delta$.

Notiamo che le azioni delle molle generano sull'asse neutro dei momenti nello stesso verso, (siano esse compresse o tese).

Il momento provocato da ciascuna molla distante δ dall'asse neutro è $M = F\delta$ e sostituendo F, si ha $M = K\delta^2$

Se alle molle sostituiamo le fibre normali alla sezione, e osserviamo che l'azione delle fibre è proporzionale alla striscia di area a distan

fibre è proporzionale alla striscia di area a distanza δ, il problema del quadrato delle distanze è risolto perchè le forze sono proporzionali a δ, i bracci relativi sono proporzionali a δ cioè il momento reattivo interno è proporzionale ai quadrati di δ, e J è l'impedimento ad M.

Nocciolo centrale d'Inerzia

È noto che la muratura non resiste a trazione, quindi è importantissimo che "l'asse neutro, (che separa la zona tesa dalla zona compressa) sia fuori della sezione muraria, cioè il centro di sollecitazione a compressione sia interno ad una zona di sezione tale che i rispettivi assi neutri sia esterni, od al più, tangenti non secanti la sezione. Tale zona è detta nocciolo centrale d'inerzia.

Si definisce il nocciolo centrale d'inerzia come: "Il luogo dei punti antipolo, nell'antipolarità determinata dall'ellisse centrale d'inerzia, di tutte le rette:

a) tangenti non secanti la sezione, (definito come perimetro)

b) esterne alla sezione; (definito come area)"

Per il rettangolo gli antichi

Per il rettangolo gli antichi dicevano: "*Il terzo medio*" quella parte ove concentrare il carico senza che si verifichi trazione. $\left(J_{xx} = \frac{bh^3}{12};\ J_{yy} = \frac{hb^3}{12}\right)$

$\delta_x = \delta_x = \delta_x : \frac{h}{2}$; $\rho_x^2 = \frac{h^2}{12}$; $\delta_x = \frac{h^2/12}{h/2}$

$\delta_x = \overline{GV_1} = h/6$ da cui: $\overline{V_1V_2} = h/3$

analogamente $\overline{U_1U_2} = b/3$

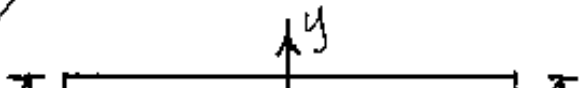
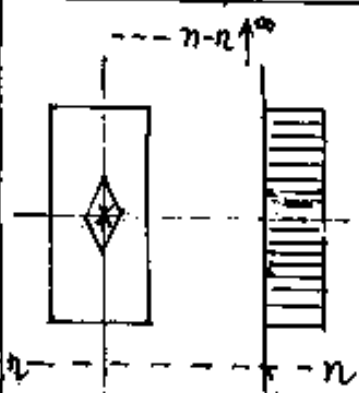
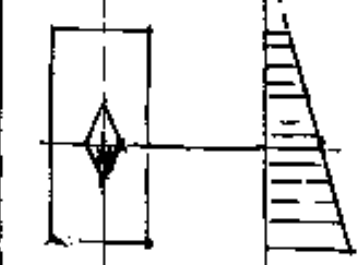
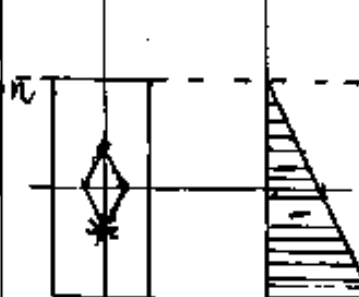
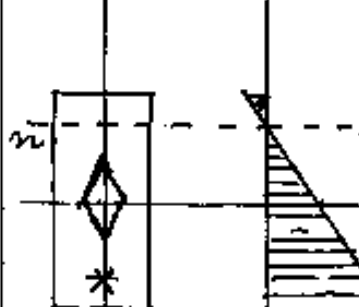
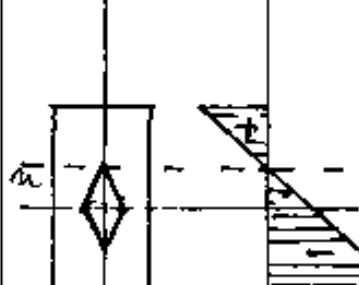
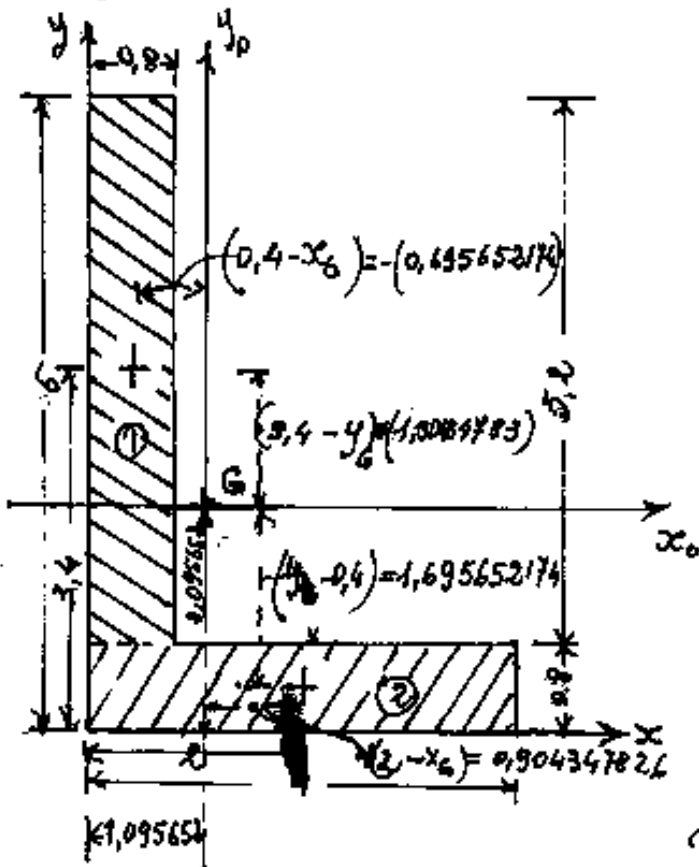



Tavola degli assi neutri per sezioni rettangolari

Schema sezione	diagramma tensioni	Centro di carico ✱	asse neutro n - - - - n	NOTE
		Nel baricentro	all'infinito	sezioni solo compresse
		interno al nocciolo	esterno alla sezione	
		al bordo del nocciolo	al bordo della sezione	
		interno alla sezione, esterno al nocciolo	esterno al nocciolo interno alla sezione	
		al bordo della sezione	al bordo del nocciolo	

	sezione	nocciolo	
n — — — n	esterno alla sezione	interno al nocciolo	
	all'infinito con carico infinitesimo. —	nel baricentro	è un momento Puro $m = 0 \cdot \infty$

Esercizio di statica

Data la sezione di profilato ad L in figura calcolare i diametri principali d'inerzia e disegnare in scala il cerchio di Mohr orientato sulla figura della sezione.

Risoluzione

I°) Calcolo del baricentro

si divide in due rettangoli di area

$$(5,2 \times 0,8) + (4 \times 0,8) = A = 7,36$$
$$(4,16) \quad + \quad (3,2)$$

$$S_x = (4,16)(3,4) + (3,2)(0,4) = 15,424$$

$$y_G = \frac{15,424}{7,36} = 2,095652$$

$$S_y = (4,16)(0,4) + (3,2)(2) = 8,064$$

$$x_G = \frac{8,064}{7,36} = 1,095652$$

Calcolo dei momenti d'inerzia (assiali e centrifughi)

$$J_{x_0x_0} = \left[\frac{(0,8)(5,2)^3}{12} + (4,16)(1,30434783)^2\right] + \left[\frac{(4)(0,8)^3}{12} + (3,2)(1,695652174)^2\right] =$$

$$\boxed{J_{x_0x_0} = 25,8227942}$$

$$J_{y_0y_0} = \left[\frac{(5,2)(0,8)^3}{12} + (4,16)(0,695652174)^2\right] + \left[\frac{(0,8)(4)^3}{12} + (3,2)(0,904347826)^2\right] =$$

$$\boxed{J_{y_0y_0} = 9,118794203}$$

$$J_{x_0y_0} = (4,16)(-0,695652174)(1,304347826) + (3,2)(0,904347826)(-1,695652174) =$$

$$\boxed{J_{x_0y_0} = -8,681739131}$$

Calcolo degli assi principali d'inerzia.

$$\left(\frac{J_{x_0x_0} + J_{y_0y_0}}{2}\right) = \frac{(25,82279415)+(9,11879420)}{2} = \underline{\underline{17,47079417}}$$

$$\left(\frac{J_{x_0x_0} - J_{y_0y_0}}{2}\right) = \frac{(25,82279415)-(9,11879420)}{2} = \underline{\underline{8,352}}$$

$$\tan g(2\alpha) = \frac{J_{x_0y_0}}{(J_{x_0x_0} - J_{y_0y_0})/2} = \frac{-8,681739131}{8,352} = -1,03948026$$

$$(2\alpha^\circ) = -46^\circ,1089933 \quad ; \quad \alpha^\circ = -23^\circ,05449\bar{6}$$

$$\underline{\underline{\alpha^\circ = 23^\circ\ 03'\ 16'',19}} \quad \simeq (\underline{23^\circ})$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{J_{x_0x_0} - J_{y_0y_0}}{2}\right)^2 + \left(J_{x_0y_0}\right)^2} = \sqrt{(8,352)^2 + (8,681739131)^2} = \underline{\underline{12,046929}}$$

$$J_{\xi\xi} = \left(\frac{J_{x_0x_0} + J_{y_0y_0}}{2}\right) + R = 17,47079417 + 12,046929 = \underline{\underline{29,5177232}}$$

$$J_{\eta\eta} = \left(\frac{J_{x_0x_0} + J_{y_0y_0}}{2}\right) - R = 17,47079417 - 12,046929 = \underline{\underline{5,4238652}}$$

Calcolo dei raggi giratori d'inerzia

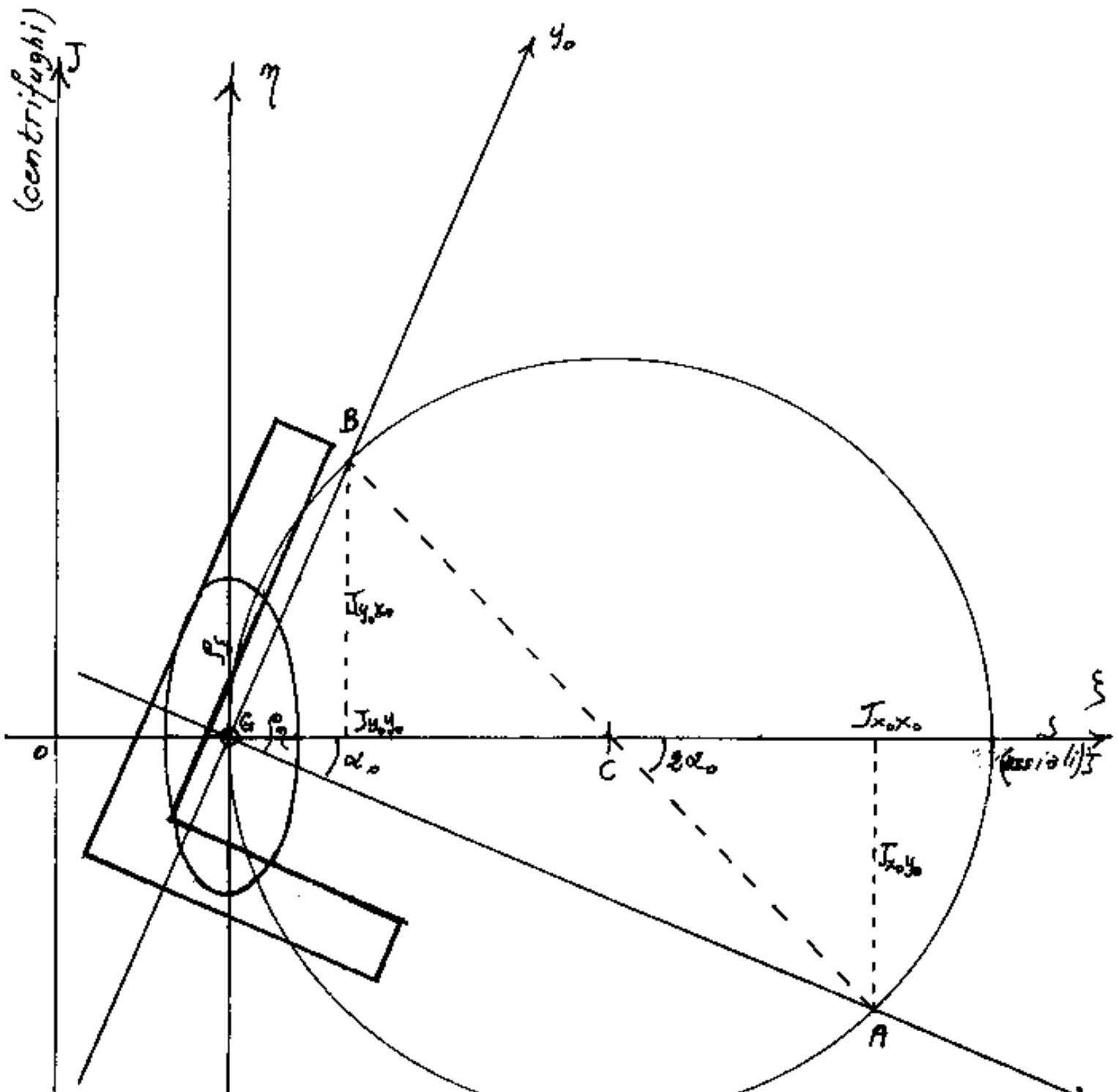
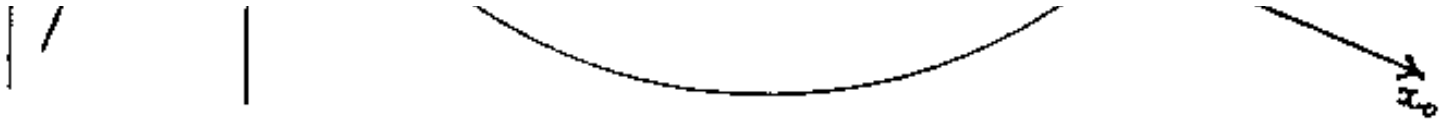
$$\rho_\xi = \sqrt{J_{\xi\xi}/A} = \sqrt{\frac{29,5177232}{[illegible]}} = 2,00\ldots [illegible]$$

$$\rho_{\xi} = \sqrt{J_{\xi\xi}/A} = \sqrt{\frac{29,5177232}{7,36}} = \underline{\underline{2,00263831}}$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{J_{\eta\eta}/A} = \sqrt{\frac{5,4238652}{7,36}} = \underline{\underline{0,85845105}}$$

Costruzione grafica del cerchio di Mohr.

Scala J : cm 1 = 2,5 cm⁴; Scala ellisse e figura 1:1.

x_0

Preso un sistema di assi ortogonali di centro O, riportiamo in ascisse i momenti d'inerzia assiali: $J_{x_0x_0}$; $J_{y_0y_0}$ ed in ordinate i relativi momenti d'inerzia centrifughi: $J_{x_0y_0}$; $J_{y_0x_0}$; troviamo i punti A e B che uniti determinano C. Con centro in C e raggio $\overline{AC} = \overline{CB}$ troviamo i momenti d'inerzia principali $J_{\xi\xi}$ e $J_{\eta\eta}$.

La Statica

Per affrontare un problema di statica, o di Scienza delle costruzioni, occorre seguire una certa sequenza di operazioni, che va rispettata e che, ormai diversi anni fa, i miei allievi chiamarono: "Corano" per dare l'idea di una legge assoluta. Quindi schematizzata una struttura, la sequenza è la seguente:

punto zero) Mettere le lettere, le dimensioni, ed i parametri atti ad individuare le sezioni delle singole aste.

1) Vedere se la struttura è isostatica, iperstatica o labile, sia per vincoli esterni, sia per vincoli interni. Vedere se la struttura è scomponibile in strutture semplici ed individuare le strutture portanti, le strutture portate e le portate-portanti,

individuando ed evidenziando le strutture che stanno in piedi da sole, direttamente al suolo, senza appoggiarsi ad altre strutture. Vedere i pendoli (o bielle) gli pseudopendoli, e le strutture (anche complesse) che funzionano come pendoli. Vedere se la struttura è

anomala o staticamente indeterminata.

2) <u>Se labile</u> ed i carichi non impegnano la labilitá, si calcola come isostatica; se i carichi impegnano la labilitá i calcolo si effettua tenendo conto delle forze dinamiche, (ció non fa parte del presente programma).

3) <u>Se iperstatica</u>, si tolgono i vincoli sovrab=bondanti e si sostituiscono con le loro azioni, (incognite iperstatiche) che determi=niamo con uno dei metodi della s.d.c, (per es. Lavori Virtuali, equazioni di congruenza ed elasticitá, equazioni dei tre momenti, linea elastica, Mohr, teoremi vari sul lavoro ecc) Con ció la struttura è ridotta ad isostatica perché le incognite

ridotta ad isostatica perchè le incognite iperstatiche sono divenute carichi esterni.

4) Se isostatica, o equiparabile a isostatica, o ridotta ad isostatica, si calcolano le reazioni vincolari, riducendo così la struttura in equilibrio nello spazio:

$\Sigma F = 0$; $\Sigma M = 0$ (equazioni canoniche della statica)

5) Si calcolano le sollecitazioni : $N, T, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t$, e si tracciano i relativi diagrammi

.

6) Dai diagrammi tracciati si individuano le sezioni più sollecitate ed in esse si calcolano le tensioni σ e τ, (σ = tensione normale), (τ = tensione tangenziale) : $\sigma = \frac{N}{A}$; $\sigma = \frac{\mathcal{M} y}{J}$; $\tau = \frac{T S}{J b}$; $\tau = \frac{\mathcal{M}_t r}{J_p}$; $\tau = \frac{\mathcal{M}_t}{2 \omega s}$; e si tracciano i relativi diagrammi

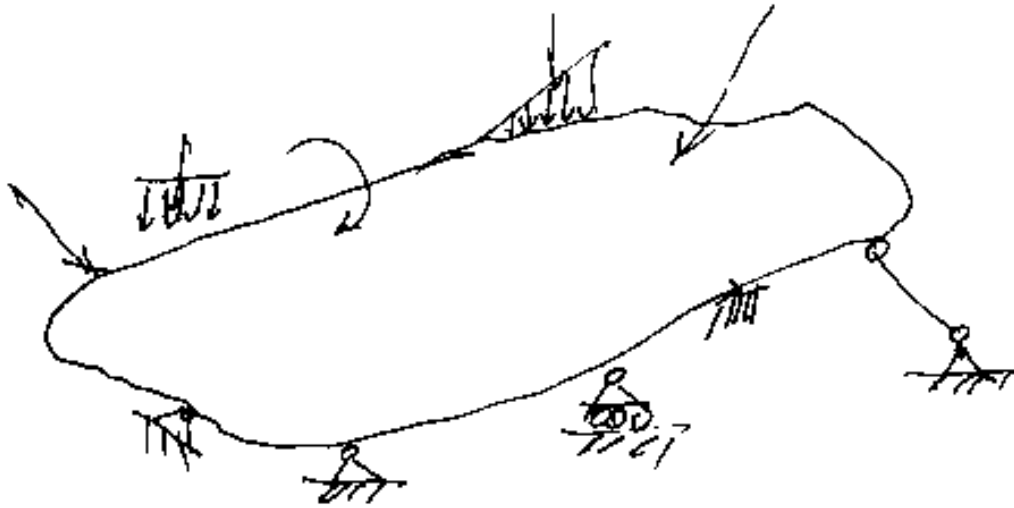
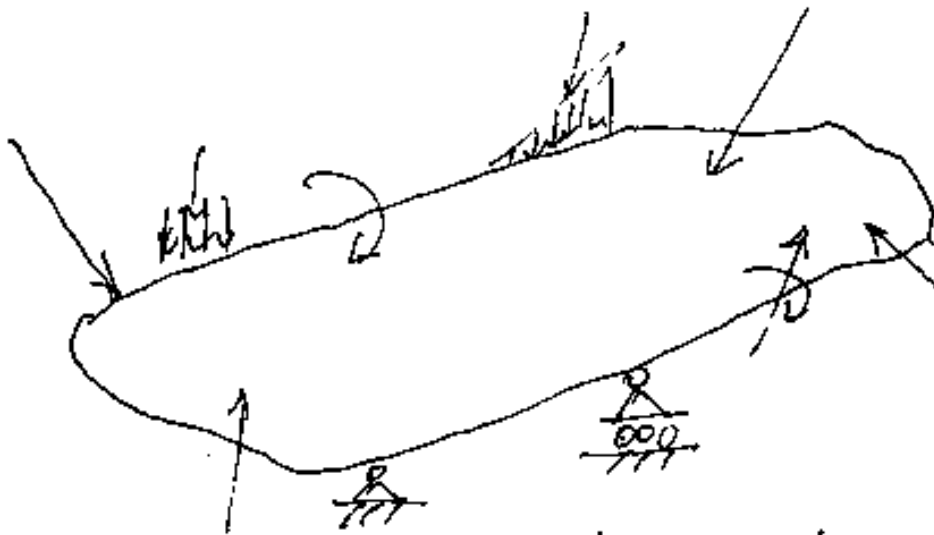
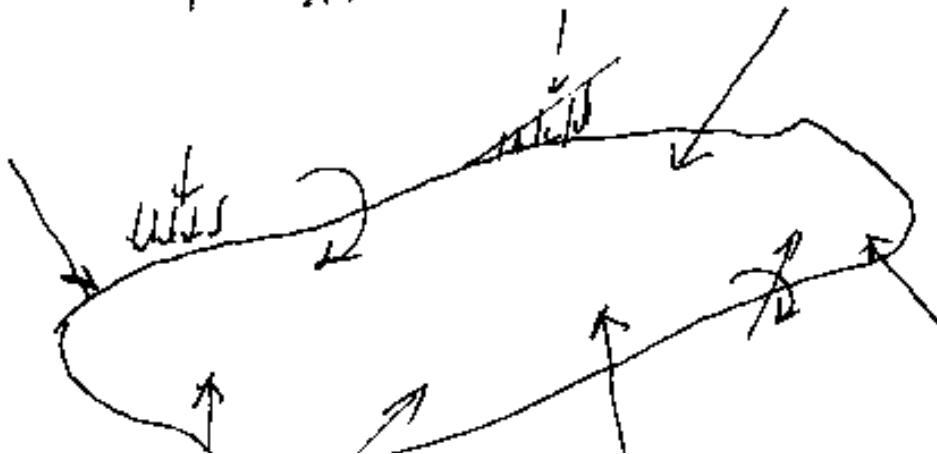
7) Dai diagrammi complessivi delle tensioni σ e τ si individuano i punti della sezione che sono più impegnati e per essi si traccia il cerchio di Mohr.

8) Dal cerchio di Mohr si individuano le direzioni principali e le tensioni principali che agiscono in quelle direzioni

che agiscono in quelle direzioni

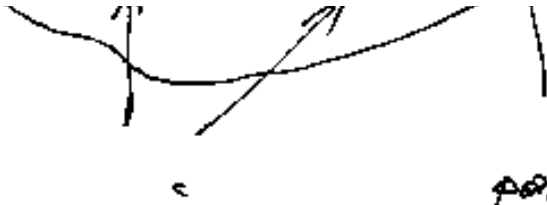
9) Con uno dei criteri di sicurezza si verifica la struttura.

10) Si calcolano le deformazioni, se non sono già state calcolate al punto 3, per verificare l'idoneità.

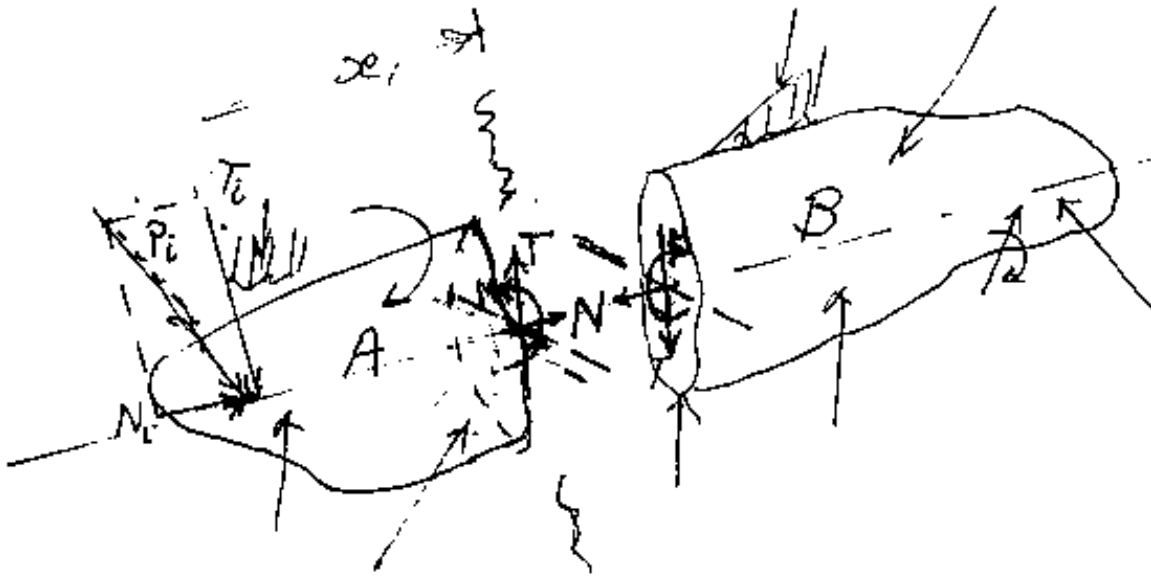
Sintesi delle operazioni

Struttura iperstat.

resa isostatica

in equilibrio nello spazio

$$\Sigma F = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

... in due

sezioniamo in due parti la struttura ed indichiamo le azioni mutue nella sezione, (sollecitazioni) che ne impediscono i movimenti relativi di allontanamento, o avvicinamento, di slittamento o di rotazione relativa.

Le sollecitazioni

si calcolano o per forze a destra o per forze a sinistra della sezione, hanno lo stesso valore e lo stesso segno.

N = Sforzo Normale, positivo se di trazione negativo se di compressione. Si portano i carichi concentrati e le risultanti dei distribuiti sull'asse e si scompongono in N_i e T_i.

$$N = \sum_{1}^{n} N_i$$

T = Sforzo di Taglio positivo se la parte a destra della sezione diviene più bassa operando per forze da sinistra.

Il diagramma T si traccia riportando nel loro verso le T_i. partendo dall'estremo sinistro

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

M = Momento flettente positivo se tende le fibre inferiori della trave o interne al telaio.

$$M = \sum_{i=1}^{n} T_i \cdot x_i$$

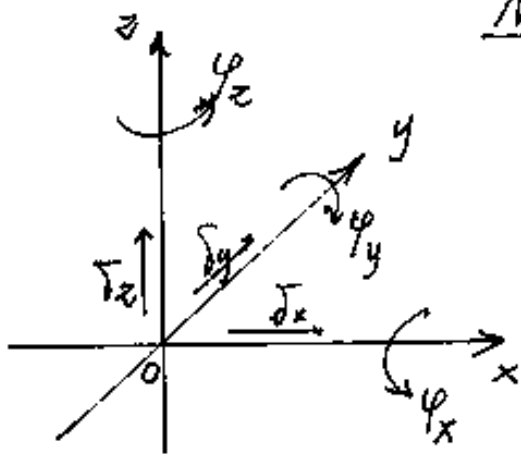
Il diagramma M si disegna sempre dalla parte delle fibre tese.

Mt = Momento torcente positivo se è come lo svitamento della vite destrogira

se b_i è il braccio della P_i // T_i fuori dell'asse

$$M_t = \sum_{1}^{n} P_i b_i$$

Gradi di libertà e gradi di vincolo

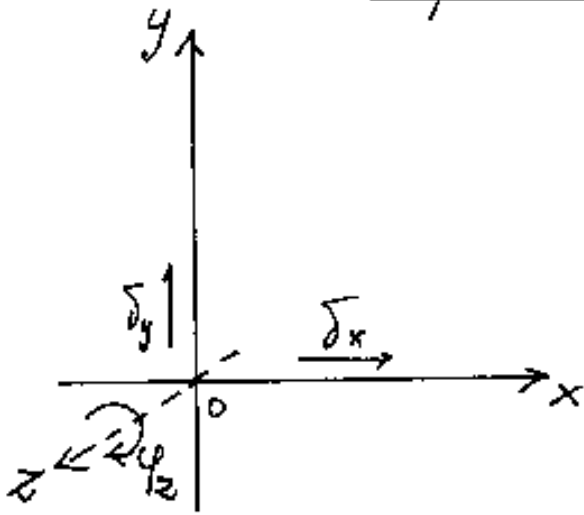
Nello spazio tridimensionale

Dati tre assi cartesiani coordinati i movimenti di un corpo possono ridursi a tre traslazioni: δ_x; δ_y; δ_z e tre rotazioni intorno agli assi: φ_x; φ_y; φ_z.

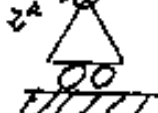
Quindi nello spazio tridimensionale i gradi di libertà sono sei e quindi occorrono sei gradi di vincolo per equilibrarli.

Si potrebbe obiettare: "lo spostamento δ è uno solo, come una sola è la rotazione φ; però per determinare la direzione dello spostamento δ occorrono i coseni direttori (ne bastano due, il terzo è ricavabile da $\cos\gamma = \sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$ lo stesso vale per l'asse intorno a cui ruota

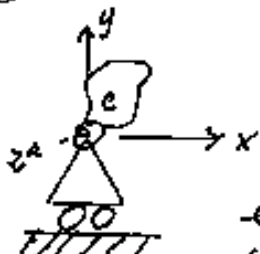
e le grandezze ritornano 6.

Però lo studio delle strutture spaziali è piuttosto complesso e, per quanto possibile, si cerca di ridurre il complesso ad uno o più sistemi piani. (Spazio bidimensionale)

Spazio bidimensionale (sistemi piani)

Gli assi cartesiani si riducono a due: x ed y, ma un corpo di dimensioni finite sul piano, mentre è libero di traslare linearmente δ_x, δ_y, non può ruotare intorno ad x od intorno ad y senza staccarsi dal piano xy, mentre può ruotare intorno ad assi paralleli a z cioè φ_z.

Quindi nel piano i gradi di libertà sono tre: δ_x; δ_y; φ_z; ed occorrono tre gradi di vincolo per equilibrarli.

Esaminiamo ora, nel dettaglio i vincoli piani ed il loro grado di vincolo che equivale al grado di libertà impedite.

Vincoli di grado uno

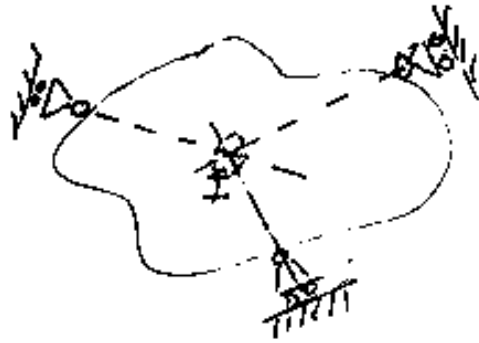
Il carrello

Il carrello: è un vincolo bilatero ed andrebbe disegnato: in quanto il corpo "c" è impedito anche a sollevarsi, cioè:

δx = libero
$\pm\ \delta y$ = vincolato
φ_z = libero

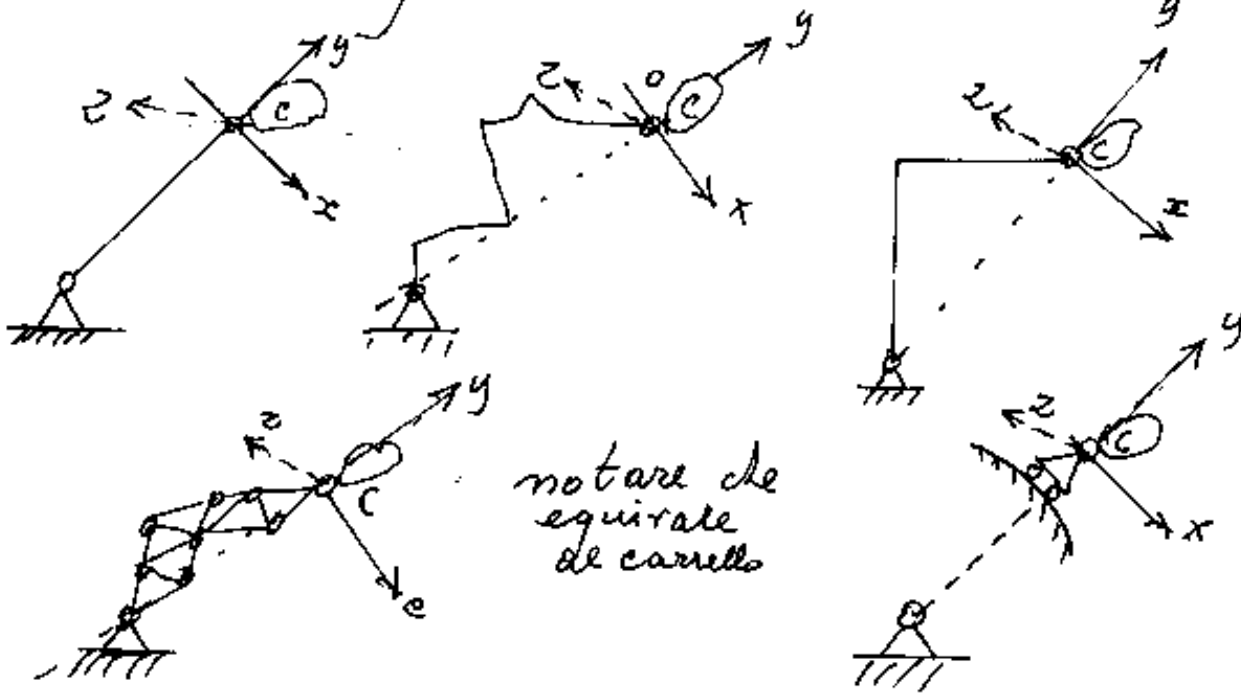
due gradi di libertà, un grado di vincolo.

Il carrello reagisce sempre in direzione normale al piano di scorrimento.

Tre carrelli possono vincolare un corpo nel piano purché le loro rette di azione non abbiano lo stesso punto comune, (come I) perché in tal caso il punto comune sarebbe un centro istantaneo di rotazione ed il corpo avrebbe, almeno per piccoli angoli, la libertà di

ruotare intorno ad esso. — Come vedremo una forza non è scomponibile secondo tre direzioni concorrenti nello stesso punto.

Pendolo o biella

Dicesi pendolo (o biella) un asta o struttura scarica lungo l'asta (che può essere di forma qualsiasi) cernierata agli estremi:

notare che equivale al carrello

δ_x = libero
δ_y = vincolato
φ_z = libero

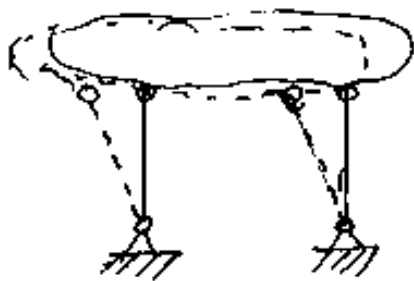
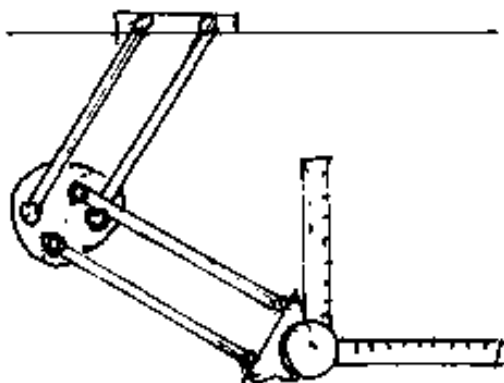
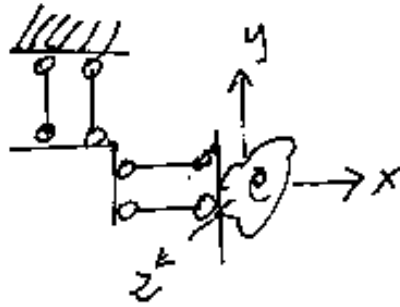
due gradi di libertà
un grado di vincolo

Il pendolo (o biella) reagisce sempre secondo la congiungente le cerniere estreme. Ciò non avverrebbe se fosse carico

non avverrebbe se fosse carico

Come già detto per il carrello occorrono tre vincoli di grado uno, le cui rette di azione non concorrano in uno stesso punto per vincolare un corpo.

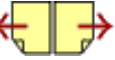
Se vi concorrono i vincoli si dicono irrazionalmente distribuiti.

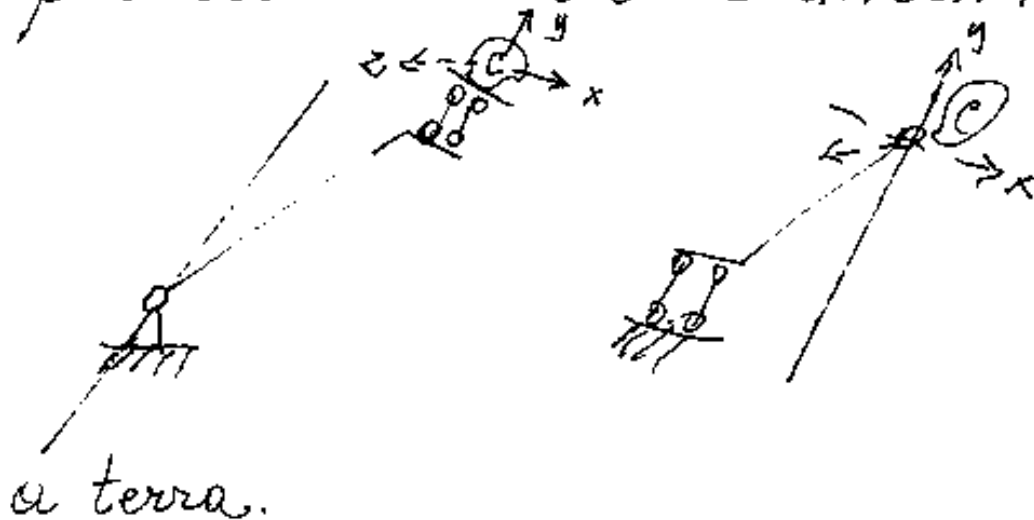
Notiamo che se due pendoli della stessa lunghezza e paralleli vincolano un corpo, poiché le loro rette di azione si incontrano all'infinito, il corpo trasla senza ruotare; cioè le traslazioni sarebbero rotazioni con raggio infinitamente grande.

Ma questa osservazione portò alla costruzione dei tecnigrafi ove la messa in opera di due doppi pendoli (bipendoli) consentiva di traslare le righe o stecche da disegno sia orizzontalmente che verticalmente restando parallele a se stesse. (non ruotano se non lo vogliamo noi).

Nacque così il vincolo a doppio bipendolo

ove:

δ_x = libero } due gradi di libertà

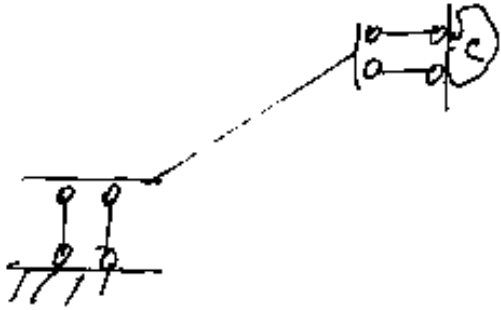
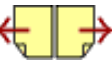
δ_y = libero

φ_z = vincolato } un grado di vincolo.

Il doppio bipendolo reagisce solo ai momenti.

Lo pseudopendolo

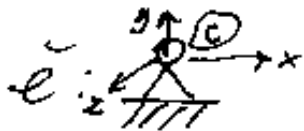
C'è un'altro vincolo di grado uno che utilizza il doppiopendolo (bipendolo) ed è una specie di pendolo ove una delle due cerniere estreme è andata all'infinito, lo abbiamo chiamato pseudopendolo, e può trovarsi in due diversi modi applicato cioè con la cerniera a terra, oppure col bipendolo a terra.

Come per i pendoli l'asta deve essere scarica e la sua reazione è la coniugente le cerniere, cioè passa per la cerniera reale ed ha come retta di azione la parallela alla direzione del bipendolo.

azione del bipendolo.

Se agli estremi dell'asta vi sono due bipendoli si ritorna al doppio bipendolo che reagisce solo ai momenti

Vincoli di grado due.

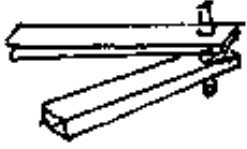
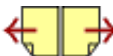
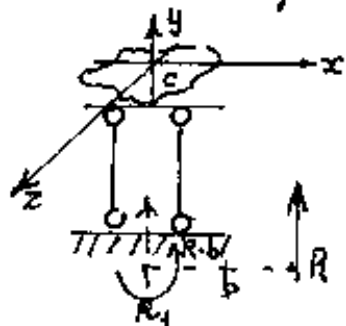
Due vincoli di grado uno formano un vincolo di grado due (reale o fittizio), per esempio due pendoli che concorro= no nella stessa cerniera su un corpo, equi= valgono ad una cerniera reale (altrimenti ad una cerniera fittizia)

Le Cerniere

il simbolo classico di cerniera è: se la cerniera è diretta= mente a terra si usa il simbolo: se invece la cerniera si appoggia su un'altra struttura si usa il simbolo .

δ_x = vincolato
δ_y = vincolato
φ_z = libero

} due gradi di vincolo, un grado di libertà

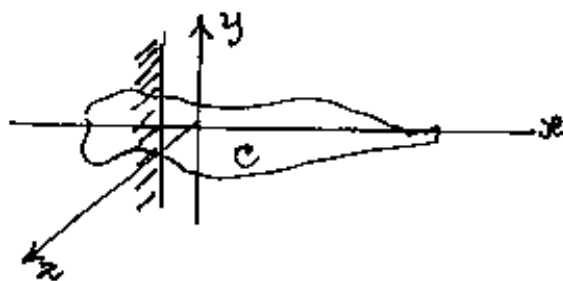
La reazione e l'azione hanno la retta passante per la cerniera, se così non fosse, la distanza sarebbe il braccio di un momento al quale la cerniera non può resistere.

due aste forate sullo stesso spinotto è una cerniera

Le aste di un compasso, le due lame delle forbici, le aste degli occhiali, sono vincolate a cerniera

Il bipendolo

δ_x = libero
δ_y = vincolato
φ_z = vincolato

Un grado di libertà, due gradi di vincolo

Il doppio pendolo reagisce a forze aventi la retta d'azione parallela ai due pendoli, cioè la reazione può essere esterna, ma può essere riportata sul vincolo aggiungendo il momento.

Vincoli di grado tre

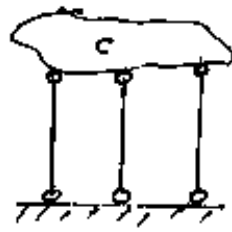
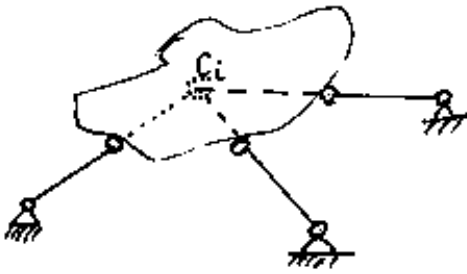
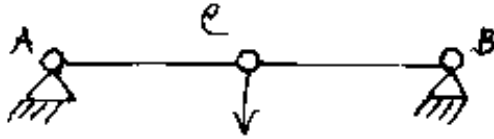
L'incastro

δ_x
δ_y
φ_z

vincolati

Vincoli irrazionalmente distribuiti

Si hanno vincoli irrazionalmente distribuiti quando i vincoli di grado 1 formano cerniere ideali in campo reale o all'infinito, cioè il corpo può rotare intorno C. o traslare se $C_{i\infty}$

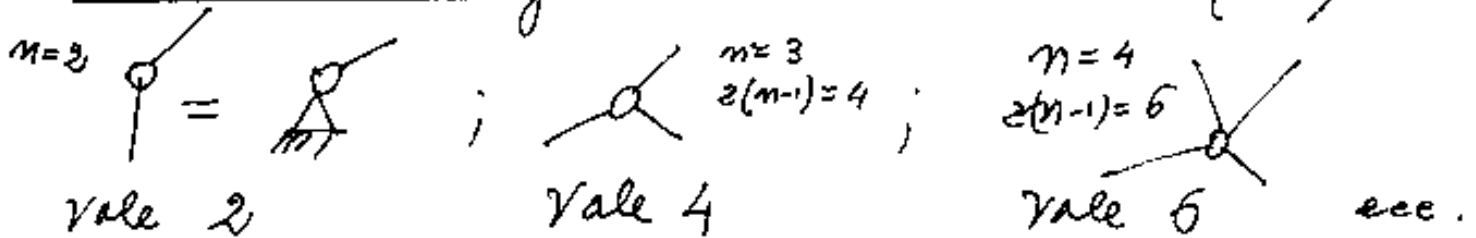
all'infinito, cioè il corpo può rotare intorno c_i, o traslare se $C_i \to \infty$

$c_i \to \infty$

strutture labili, ove c_i = centro istantaneo di rotazione.

Anche l'arco a tre cerniere, se ha le cerniere allineate diventa una struttura isostatica, staticamente indeterminata.

Vincoli colleganti più aste

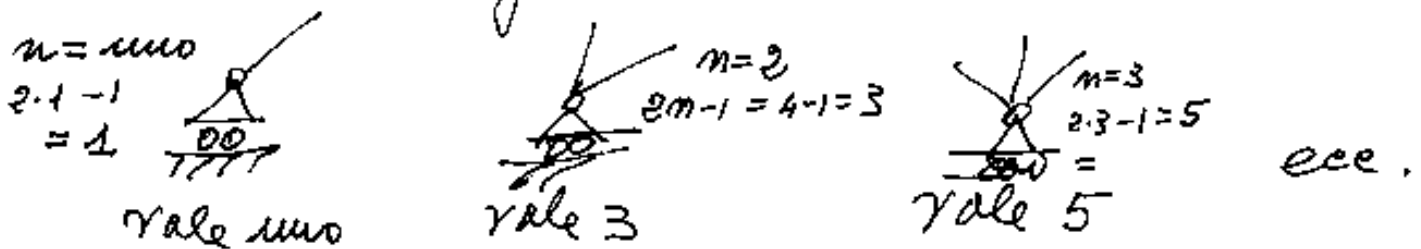
cerniera collegante n aste vale: $2(n-1)$

n=2 = ; n=3 $2(n-1)=4$; n=4 $2(n-1)=6$

vale 2 vale 4 vale 6 ecc.

come i numeri pari

carrello collegante n aste vale $2n-1$

n = uno $2\cdot1-1=1$; n=2 $2n-1=4-1=3$; n=3 $2\cdot3-1=5$ =

vale uno vale 3 vale 5 ecc.

Come i numeri dispari

poiché ogni asta richiede un grado di vincolo pari a tre avremo che detta a la Σa dei valori dei vincoli di grado 1 Σc la somma dei valori delle cerniere I il numero degli incastri per n aste avremo la formula:

$$\sum a + \sum e + I - 3n = g$$

ove g è il grado di iperstaticità

$g = 0$ isostatica (o anomala)

$g < 0$ labile

Ciò ci consente un calcolo per le reticolari ma, è meglio vedere la struttura.

infatti consideriamo le due strutture, ove accanto alle cerniere c'è il loro valore. (aste n = 8)

2 4 2
A 4 6 B
D 4 2 C

$\Sigma_c = 24$
$-3 \times 8 = 24$
$g = 0$

effettivamente completamente isostatica

2 4 2
A 6 6 B
D 2 2 C

$\Sigma_c = 24$
$-3 \times 8 = 24$
$g = 0$

l'asta 3 che unisce A e B già fissi crea un grado di iperstaticità (+1) mentre la maglia ABCD è labile (−1) $\overline{DC}$ può dondolare, si ha
(+1) − (1) = 0
struttura in parte labile in parte iperstatica.

Per vedere una struttura pensiamo di fare il rilievo di un vano quadrilatero e di aver misurato i quattro lati e le due diagonali.

C D

A
B

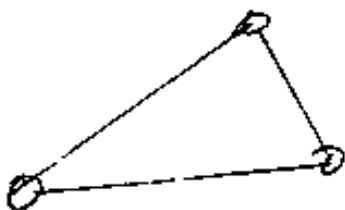
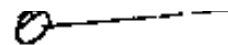
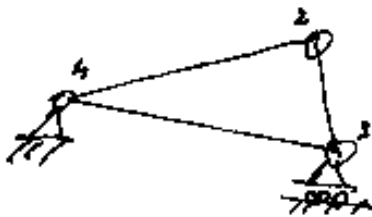
Al momento di fare il disegno in scala supponiamo di aver tracciato la base $\overline{AB}$, quindi con centro in A ed apertura del compasso AC tracciamo un archetto, quindi con centro in B ed apertura $\overline{BC}$ facciamo un secondo archetto, l'incontro dei

due archetti fissa la posizione di C rispetto ad A e B cioè la maglia triangolare ABC è indeformabile (internamente isostatica perché variando la lunghezza di una misura varia la posizione di un vertice, ma non influenza le altre.) La stessa costruzione possiamo farla per D, e supponiamo di aver preso per base $\overline{AB}$ e per raggi $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ è rimasta fuori la misura $\overline{CD}$, che serve di verifica, però facendo centro in C si nota un piccolo triangolino d'errore, tanto più piccolo quanto più le misure erano precise, ma che ci fa notare che, se la variazione di una misura influenza le altre, il caso è iperstatico.

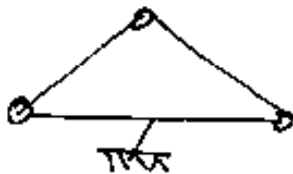
maglia triangolare cernierata

$\Sigma c = 6$

$3 \times 3 = -9$

$q = -3$

internamente isostatica
esternamente tre volte labile

$\Sigma a = 3$
$\Sigma c = 6$
9
$3 n t - 9$
0

isostatica internamente ed esternamente

$I = 3$
$\Sigma e = 6$
9
$3 n t - 9$
0

isostatica internamente ed esternamente

Tutte le strutture costituite da maglie triango-
lari cerniezate, con cerniere non includenti

sono internamente isostatiche. Se nella figura a fianco (internamente isostatica) ponessimo un'asta fra A e B diverrebbe internamente una volta iperstatica.

A

B

maglia quadrangolare

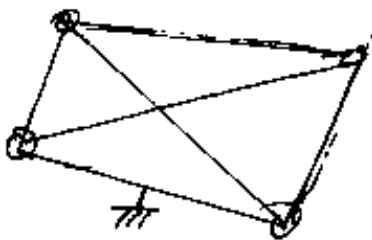
$\Sigma c = 8$

-3 Σ $\Sigma = -12$

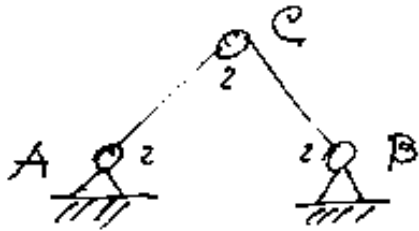
-4 — 3 volte labile esternamente
— 1 volta labile internamente

Se aggiungiamo un pendolo

sono due maglie triangolari cerniate è internamente isostatica

se aggiungiamo un'altro pendolo è internamente una volta iperstatica infatti la lunghezza di quest'ultimo pendolo è condizionata dalla lunghezza

[illegible] e [illegible] della lunghezza
degli altri come nell'esempio del rilievo
di un vano.

Se una struttura è internamente non labile (isostatica od iperstatica) e esternamente è isostatica si possono calcolare subito i vincoli esterni, comunque complessa sia la struttura.

L'arco a tre cerniere

esternamente vi sono due cerniere $2 \times 2 = 4 = 3 + 1 =$ una volta iperstatico esternamente.

tolte le cerniere esterne le due aste cernierate in C sono internamente una volta labili. Complessivamente isostatico.

Se è carico un solo ramo, per esempio l'asta $\overline{AC}$, l'altra asta $\overline{CB}$ diventa un pendolo e l'arco a tre cerniere diventa isostatico esternamente e costituito da una sola asta internamente.

Quindi per risolvere l'arco a tre cerniere possiamo anche avvalerci della sovrapposizione degli effetti considerando una volta carica una parte, poi considerando carica l'altra.

Però il metodo classico è considerare lo

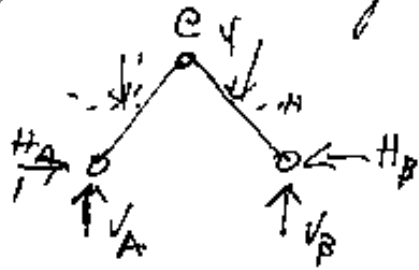
Però il metodo classico è considerare le quattro incognite: H_A; V_A; H_B; V_B ed imporre: le

$\Sigma H = 0$

$\Sigma V = 0$

$\Sigma M_C = 0$ per forze a sin

$\Sigma M_C = 0$ per forze a destra

quattro equazioni che risolvono le quattro incognite

Il calcolo delle reazioni vincolari

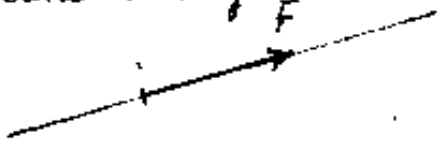
Il calcolo delle reazioni vincolari può essere eseguito seguendo vari criteri.
Metodi grafici
e Metodi analitici
E' di importanza fondamentale ricordare che un insieme di carichi comunque frastagliati e distribuiti e concentrati e momenti, cioè un insieme di carichi comunque complesso è sempre riducibile ad una unica risultante, da equilibrare coi vincoli. (vale ai soli fini del calcolo delle reazioni dei vincoli isostatici)
E ricordare che in una struttura complessivamente isostatica, ogni asta può vedersi come una trave vincolata da un vincolo di grado uno ed un vincolo di grado due.
Analiticamente ci avvaliamo del fatto

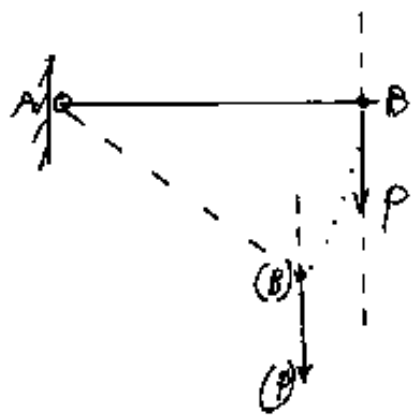
che il momento per forze a destra di una sezione è in valore e segno uguale al momento per forze a sinistra della stessa sezione.

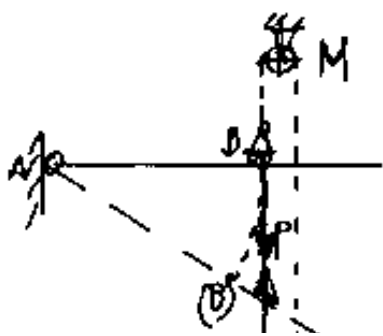
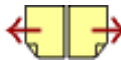
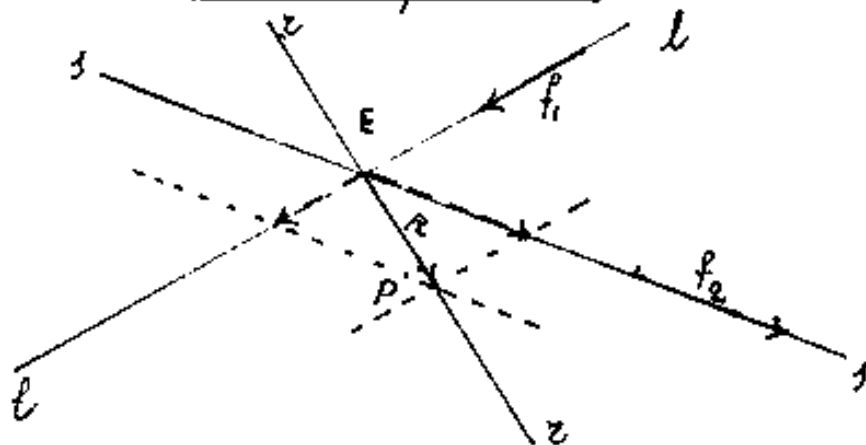
Se come sezione possiamo scegliere quella ove figura una incognita, questa sparisce avendo braccio nullo e facilmente si calcola l'altra.

Composizione e scomposizione di Forze

I sistemi equivalenti

scala: cm 1 = Kg... F

Una forza si rappresenta con un segmento orientato su una retta di azione non può spostarsi dalla sua retta di azione perché genererebbe un momento. La lunghezza del segmento è in scala l'intensità della forza. La forza può scorrere lungo la sua retta di azione,

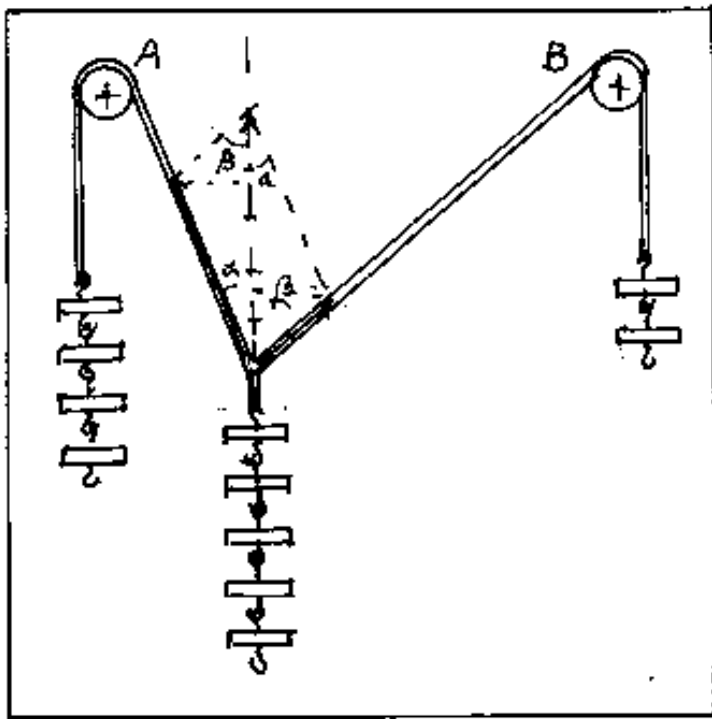
A B P (B) (P)

Non può considerarsi un vettore applicato perché (vedi figura) nel tempo, a causa della sua azione non manterrebbe la sua retta di azione. Se costruiamo vincoli tali da imporre al peso P di mantenere la sua retta d'azione (le carrucole M ed N) il peso agendo

M A B P' (B')

(le carrucole M ed N) il peso agendo sull'asta non manterrebbe il suo punto di applicazione. (Le forze non sono vettori) (Era molto più giusta la definizione degli antichi "Le forze secundum situ") Giordano de Nemore. (C.f.r. anche: Marcolongo - Rossi - Tolle: Elementi di calcolo vettoriale, omografico, tensoriale e Meccanica Razionale ed Hoepli - Milano)

Somma di forze

Date le forze f_1 ed f_2 agenti rispettivamente sulle rette l ed s, per trovare il sistema equivalente, costituito dalla risultante R, occorre prima di tutto trovare il punto: E comune alle due rette di azione, (detto punto di equilibrio). Riportare "di piumo" in E le due forze, (Piuma → Punta, ← intensità →) e, dalle punte, le parallele alle rette di azione; queste parallele si incontreranno in un punto P, ove $\overrightarrow{EP}$ è la risultante R. agente sulla retta r. La forza −R di verso opposto alla R ma agente sulla stessa retta r equilibra le forze: (Reagente).

Si possono pensare tre funi legate in E e tirate

secondo le rette di azione, se le forze sono proporzionali ai moduli di f_1, f_2, e $-R$ il punto E resta fermo in equilibrio.

L'esperimento può essere fatto utilizzando dei pesi e delle carrucole come in figura; il filo che li sostiene si sposterà

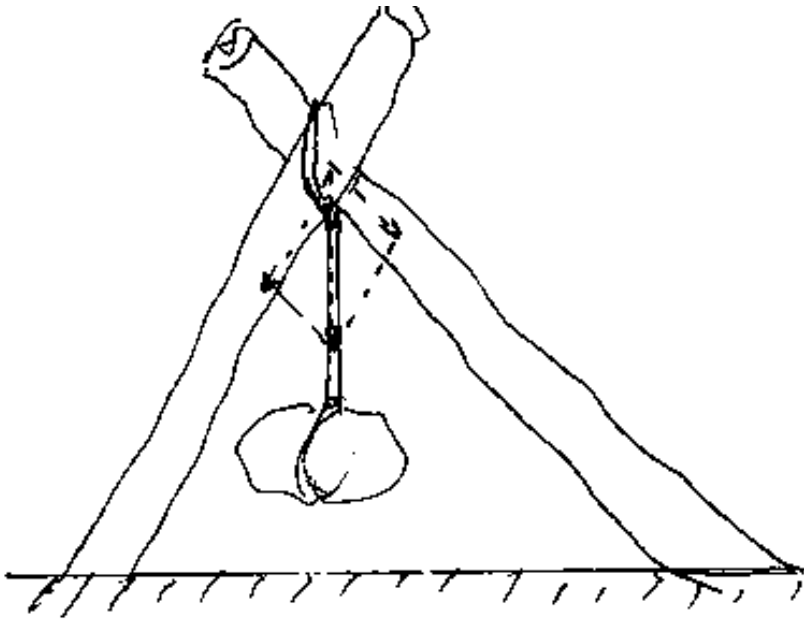
fino ad assumere la configurazione di equilibrio. Supponiamo che siano α e β gli angoli che le rette di azione di f_1 ed f_2 formano con la retta di azione della risultante, avremo

$$f_1 \cos\alpha + f_2 \cos\beta = R$$

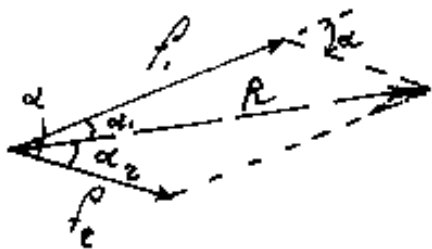
$$|f_1 \operatorname{sen}\alpha| = |f_2 \operatorname{sen}\beta| = H =$$

= componenti di f_1 ed f_2 normali alla retta di azione di R che sono equilibrate fra loro.

Aumentando i pesi laterali la corda diviene più tesa.

Lo stesso principio di scomposizione si ha per due pali infissi nel terreno, che sostengono un peso. In questo caso i pali sono compressi

È bene osservare subi=

to che, nel caso della fune teso, si ha un equilibrio nel piano, mentre nel caso dei pali compressi, vi è una instabilità statica senza un terzo palo.

Quindi date due forze f_1 ed f_2 e la loro risultante R, è possibile calcolare gli angoli α_1 ed α_2 che la R forma con f_1 ed f_2.

$$\cos\alpha_1 = \frac{R^2 + f_1^2 - f_2^2}{2 R f_1}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{R^2 + f_2^2 - f_1^2}{2 R f_2}$$

Ove: $(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha$ = angolo fra le due forze.

ed anche: $R = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 - 2 f_1 f_2 \cos(180° - \alpha)}$

Nasce così quella che è detta: "La regola del parallelogramma che è vera se il parallelogramma viene costruito sulle vere rette di azione delle forze, non è più vera se f_1 ed f_2 vengono trasportate parallelamente a se stesse una di seguito all'altra, con R cambiato di segno, ottenendo quello che, molto im

propriamente, viene detto triangolo di equilibrio.

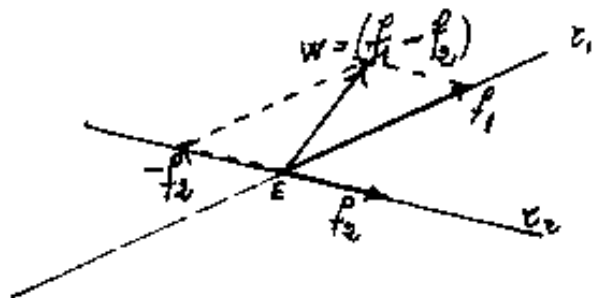
E' vero che: $f_1 + f_2 - R = 0$, però se prendiamo un punto interno al triangolo, esso disterà r_1, r_2, r_3 rispettivamente da $f_1, f_2, -R$ ed il momento é la somma dei momenti concordi: $M = f_1 r_1 + f_2 r_2 + |R| r_3$ ed è pari al doppio dell'area del triangolo.

Cioè il triangolo è sollecitato a ruotare per effetto di un momento proporzionale al doppio della sua area. E' questa un'altra conferma che le forze non sono vettori infatti nel caso dei vettori il triangolo di equilibrio vale perché non si parla di direzione, ma di direzionalità, di tutte le rette parallele e non si ammette rotazione.

Ai fini dell'equilibrio, conviene sempre scomporre le forze in orizzontali (parallele alle x)(H), ed in verticali (parallele alla y)(V) ed imporre $\Sigma H=0$; $\Sigma V=0$ che equivalgono all'equazione canonica della statica $\Sigma F=0$. La $\Sigma M=0$ (somma dei momenti) in qualunque punto deve essere nulla, perché non può esservi rotazione. Considerata una sezione, l'equazione diventa: $\Sigma M_{sin.} = \Sigma M_{destra}$ entrambi tenderanno o le fibre inferiori o le fibre superiori, però

o le fibre inferiori o le fibre superiori, poi se uno è orario l'altro è antiorario ed il simbolo = si riferisce solo alla intensità che abbiano verso opposto ed uguale intensità e nella formula $\Sigma M_{sin} + \Sigma M_{destra} = 0$.

Si noti il segno in s.d.c dei momenti flettenti.

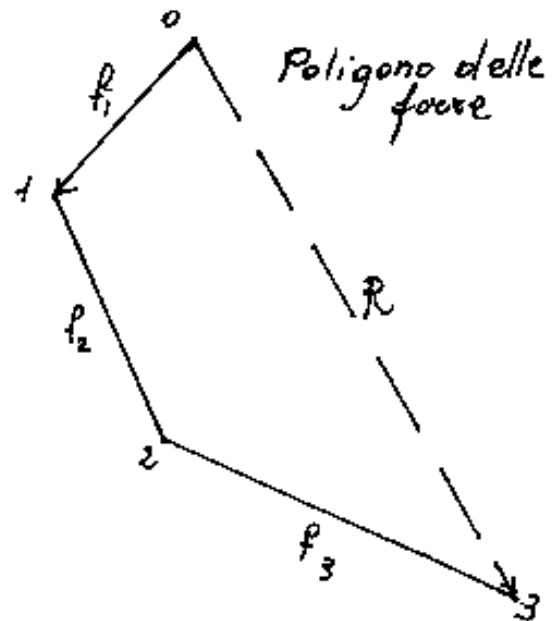
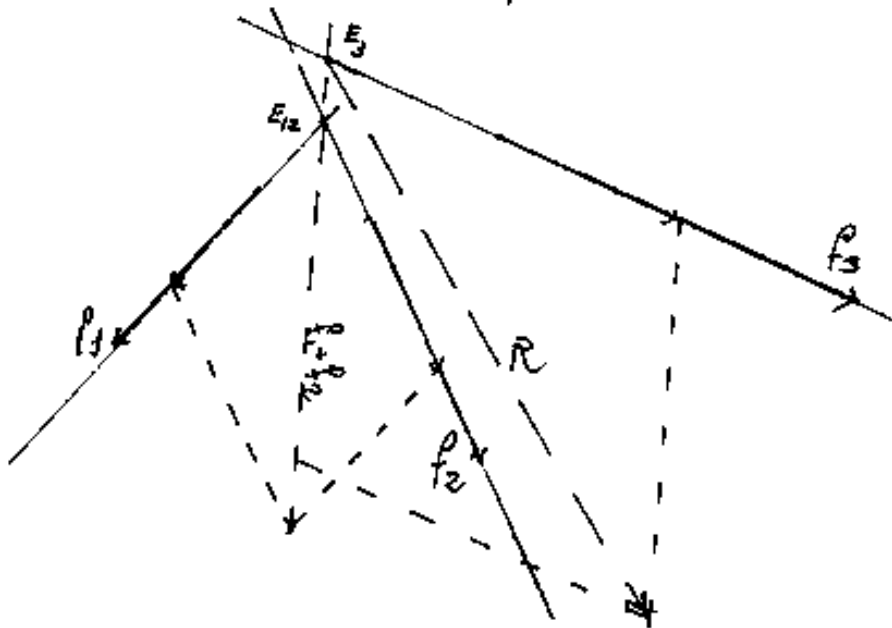
Differenza di due forze

Due forze f_1 ed f_2, date ed agenti rispettivamente secondo le rette r_1 ed r_2, per trovare la differenza: $f_1 - f_2$, si inverte il segno di f_2 e, $(-f_2)$ si somma alla f_1 ed avremo come risultante la forza $W=(f_1-f_2)$.

Nella regola del parallelogramma, è la seconda diagonale, la differenza dei vettori ed è diretta dalla punta del diminutore alla punta del diminuendo, come intensità e direzionalità vale anche per le forze, ma la vera retta di azione è parallela e passa dal punto comune alle rette di azione di f_1 ed f_2. (punto E di equilibrio)

Somma di più forze.

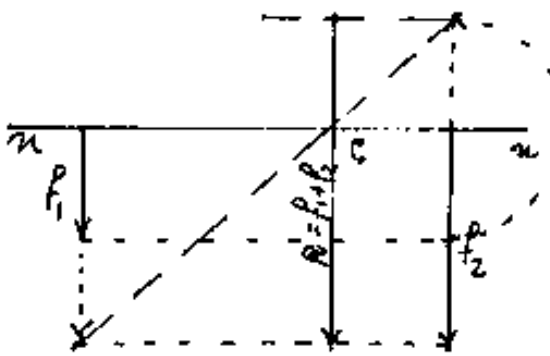
Se le forze di un sistema, le spostiamo parallelamente a se stesse, disponendole successi-

...identicamente a se stesse, disponendole ... =
vamente l'una all'altra, cioè che la piuma della
successiva, corrisponda alla punta della precedente,
costruiamo quello che chiamasi: "Poligono
delle forze" Ove il segmento che unisce la piuma
della prima forza con la punta dell'ultima è la
risultante, come intensità e direzionalità, ma la sua

vera retta di azione deve essere determinata per esempio componendo le forze del sistema.

Per es. f_1 ed f_2 si riportano in E_{12}, si trova f_1+f_2 che si riporta di piuma con f_3 in E_3 si trova $R = f_1+f_2+f_3$. A destra si è disegnato il poligono delle forze che, salvo la retta di azione dà la stessa R. (Le due R disegnate sono lo stesso vettore non sono la stessa forza). Con ciò si spera di aver chiarito quanto esprimono autorevoli testi, cioè che: "le forze non sono vettori". Abbiamo già fatto cenno ai vettori che tratteremo in seguito.

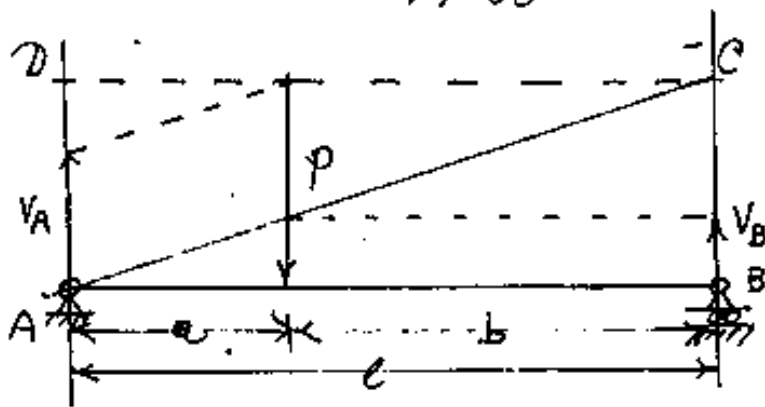
Le forze parallele

Le forze parallele

Composizione di forze parallele.

Date due forze parallele f_1 ed f_2, si ri-portano di piuma sulla stessa norma-le nn alle loro rette di azione, una si proietta sulla retta dell'altra, l'altra si proietta sulla prima rovesciata rispetto ad nn, si unisco-no le punte e si determina C e la $R = f_1 + f_2$.

Scomposizione di forze parallele

Il procedimento inverso alla composizione, è utile per trovare graficamente le reazioni sulla trave semplicemente appoggiata soggetta al carico P.

D C P V_A V_B A B a b l

Il carrello reagisce verticalmente, il carico P può sempre scomporsi in una orizzontale alla quale reagisce la cerniera, ed in una verticale da scomporre. Consideriamo P verticale, si proietta sulla retta di azione del carrello e sulla parallela per la cerniera, si ottiene così il rettangolo ABCD; si traccia una diagonale del rettangolo che dividerà P in due parti che non possono attraversare la diagonale, restano così definite le reazioni vincolari V_A e V_B del carico verticale P.

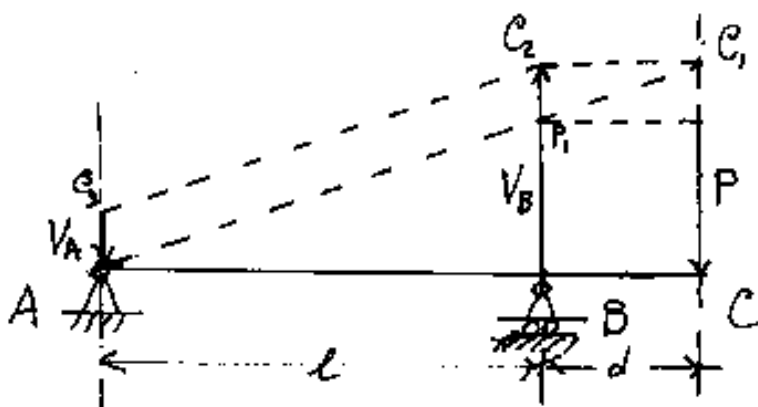
dei carichi verticali P.

Analiticamente avremo: $\mathcal{M}_{A\,sin} = 0 = \mathcal{M}_{A\,dest.} = +V_B \cdot \ell - P \cdot a = 0$

da cui: $\boxed{V_B = \frac{Pa}{\ell}}$; $\mathcal{M}_{B\,dest.} = 0 = \mathcal{M}_{B\,sin.} = V_A \cdot \ell - P \cdot b = 0$

da cui $\boxed{V_A = \frac{Pb}{\ell}}$ che giustificano la costruzione grafica; infatti: $P:\ell = V_B:a$; $P:\ell = V_A:b$;

come appare dai triangoli simili.

Nel caso particolare che il carico verticale P si trovasse sul prolungamento della trave, cioé non intermedio agli appoggi, si tracciano le rette di azione degli appoggi, si proietta P sulla retta di azione dell'appoggio intermedio, (nel nostro caso in $\overline{BP_1}$) si unisce l'altro appoggio con P_1 e si prolunga fino alla retta di P in C_1 che si riporta sulla retta intermedia in C_2 da C_2 la parallela ad AC_1. Si trova così $V_B = \overline{BC_2}$; $V_A = \overline{C_3A}$; (attenzione al verso di V_A !).

Si noti che è il procedimento precedente invertito, infatti si può pensare V_B un carico verso l'alto e V_A e P le reazioni verso il basso.

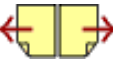
Analiticamente $\quad M_{A\,sin} = 0 = M_{A\,destra} = -P(l+d) + V_B \cdot l = 0$

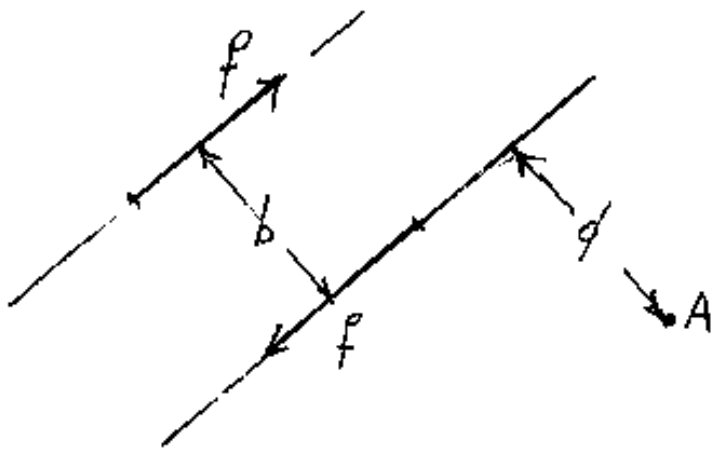
$\boxed{V_B = \frac{P(l+d)}{l}}$; $\quad M_B = +|V_A\, l = -P\,d| \ldots M_B$

$$V_B = \frac{P(\ell + d)}{\ell}\,; \qquad \mathcal{M}_{B\,sin} = +\left(V_A \cdot \ell = -P \cdot d\right) = \mathcal{M}_{B\,destra}$$

$$V_A = \frac{-Pd}{\ell}$$

(ci dice che V_A è verso il basso.)

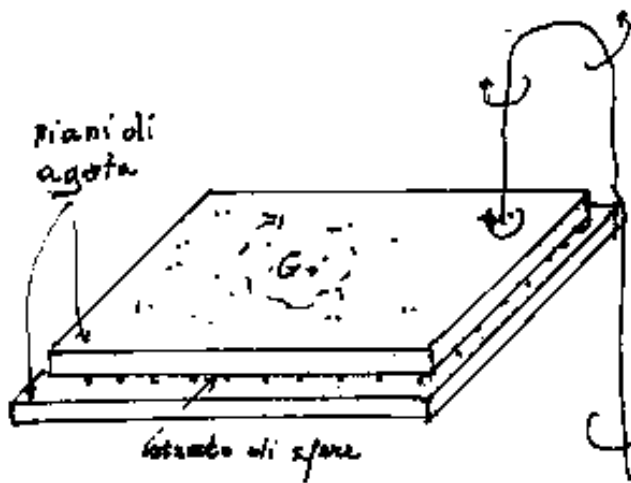
(vedasi anche vol I. cap. la simmetria)

Le coppie di forze

Due forze della stessa intensità, agenti su rette parallele, ma con verso opposto, si dicono: "coppie di forze". Se la distanza fra le rette di azione è "b" ("b" è detto braccio della coppia.)

Consideriamo un punto A nel piano della coppia, e sia d la distanza di A dalla retta di azione più vicina, il momento in A della coppia sarà: $\mathcal{M}_A^{+} = f(b+d) - fd = fb$.

Il valore del momento è indipendente da "d" perciò M è identico! per qualsiasi punto del piano ed ha per assi di rotazione le rette di giacitura cioè le normali al piano.

Il momento è quindi un vettore

Il momento è quindi un vettore rappresentabile con un segmento pari alla sua intensità su una qualsiasi retta normale al piano, e di verso tale da rispettare la convenzione sui segni. Noi considereremo che dalla punta del vettore si veda il piano ruotare antiorario.

I fisici vollero sperimentare la validità che l'azione del momento era indipendente dal punto di applicazione; a tal fine presero due lastre di agata, rese specularmente piane, una per basamento, resa con ogni accuratezza orizzontale, l'altra sovrapposta, ma separata da uno strato di sfere metalliche calibrate, in modo da rendere minimo l'attrito fra le due lastre.

Sulla faccia superiore erano predisposti gli attacchi per un cavo flessibile che potesse trasmettere il momento e doveva essere disposto in modo da non impedire spostamenti orizzontali della lastra. Il risultato fu che qualunque fosse il punto di applicazione del cavo, la lastra girava sempre intorno al proprio baricentro.

sempre intorno al proprio baricentro.

Se attaccate un filo al mandrino di un trapano elettrico ed all'altro capo del filo un tavolettina di legno, sostenuta appesa al filo stesso, facendo ruotare, (accendendo il trapano) noterete che il filo descrive una superficie conica e che il baricentro della tavoletta è sulla stessa verticale del mandrino ovunque si attacchi il filo.

Il teorema di Varignon

Il teorema di Varignon dice:

"La somma algebrica dei momenti di rotazione di due forze rispetto ad un punto del loro piano è uguale al momento della risultante."

Sia E il punto comune alle forze $|f_1| = \overline{EA}$; $|f_2| = \overline{EB}$; da esso passa la risultante $|R| = \overline{ED}$.

Sia P il punto per il quale dovremo dimostrare chi i momenti in P dovuti alle forze equivalgono quello dovuto alla risultante. Notato che i momenti in P sono il doppio dell'area dei triangoli: EAP ; EBP ; EDP ; basterà dimostrare l'equivalenza fra le aree: $S_{EAP} + S_{EBP} = S_{EDP}$.

Se da A tracciamo la parallela ad $\overline{EP}$ fino ad incontrare H su R, avremo che il triangolo: EHP è equivalente al trian-

golo: AEP perché stessa base $\overline{EP}$ e stessa altezza. Lo stesso discorso vale   la parallela ad $\overline{EP}$ fino a K ove il triangolo EPK è equivalente ad EBP.

Ma $\overline{EK} = \overline{HD}$ per uguaglianza di triangoli perciò il triangolo EPK equivale HPD (stessa altezza basi uguali) cioè la somma dei triangoli EPH + HPD è il triangolo EPD. (come dovevasi dimostrare)

Il teorema di Varignon è estendibile ad un qualsiasi sistema di forze, ove le forze prese due a due, e quindi le risultanti prese due a due ... e le risultanti delle risultanti, fino ad arrivare all'ultima risultante.

Ma la risultante di una coppia è una forza infinitesima, (nulla), posta a distanza infinita; ciò sarà visto meglio trattando le sollecitazioni composte di presso-flessione e tenso-flessione, (lo abbiamo accennato in geometria delle masse)

La retta di azione della risultante di un qualsiasi sistema di carichi è detta <u>asse centrale</u>, si ricava in genere coi poligoni funicolari ed è detta come il "luogo dei punti che minimizza i momenti"

(In generale zero).

(In generale zero).

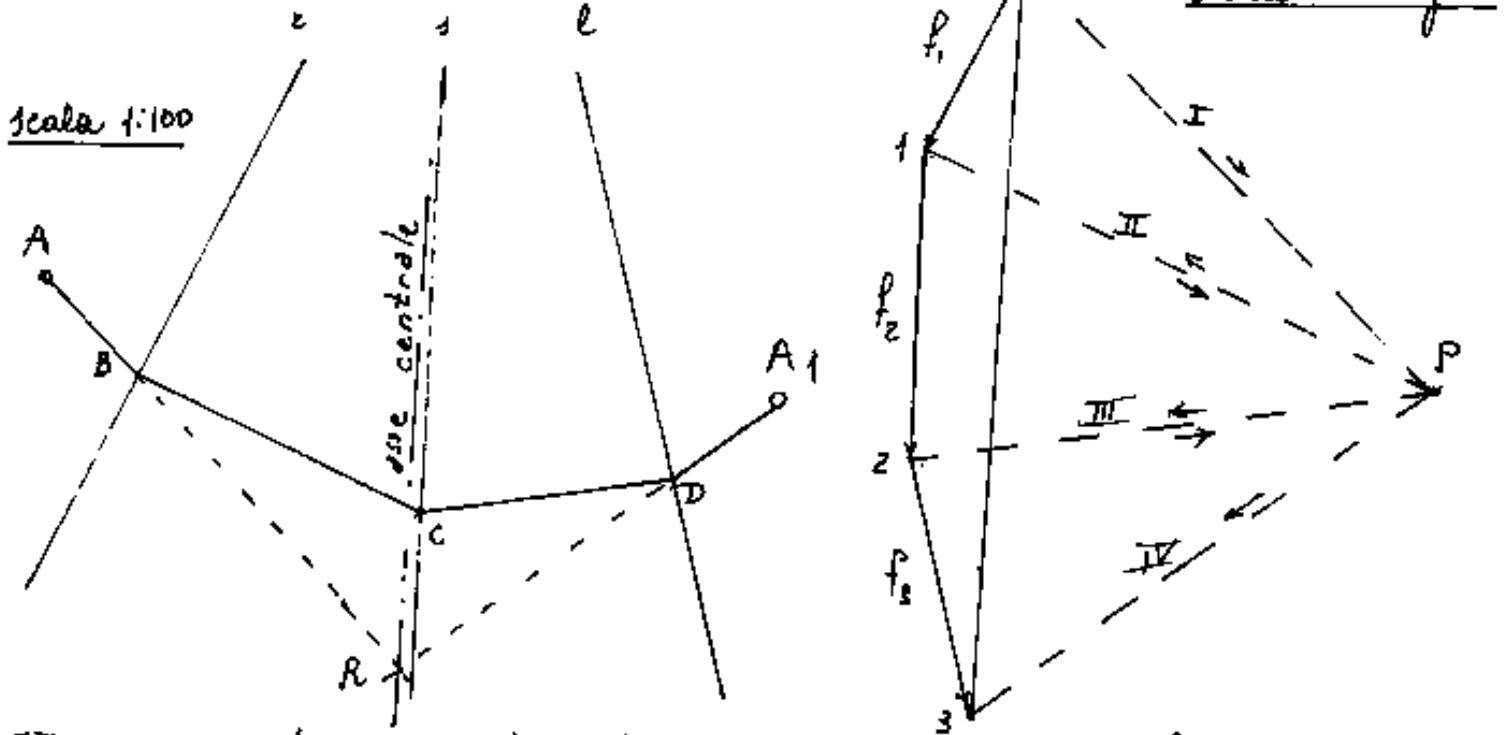
I poligoni funicolari

Dicesi poligono funicolare la confi=
gurazione di equilibrio di una fune
soggetta a carichi in direzioni prefis=
sate. Il grafico del poligono funicolare
è in scala lunghezze, per poter misurare
la distanza e l'orientamento delle rette
di azione dei carichi, nonchè le lunghez=
ze dei tratti di fune fra carico e carico
e fra carico ed appoggi. –

Per costruire il poligono funicolare, si
costruisce prima il poligono delle forze in
scala forze (cm 1 = Kg ...), quindi si proiet=
ta il poligono delle forze da un polo P
che inizialmente può anche essere arbitra=
rio, ma, come vedremo può essere tale da
imporre condizioni allo stesso poligono funi

imporre condizioni allo stesso poligono funicolare.

I raggi proiettanti le forze sono, in scala, le componenti delle forze stesse, sia come intensità, sia come direzionalità. Ogni raggio è comune a due forze, salvo il primo e l'ultimo che è comune con la risultante.

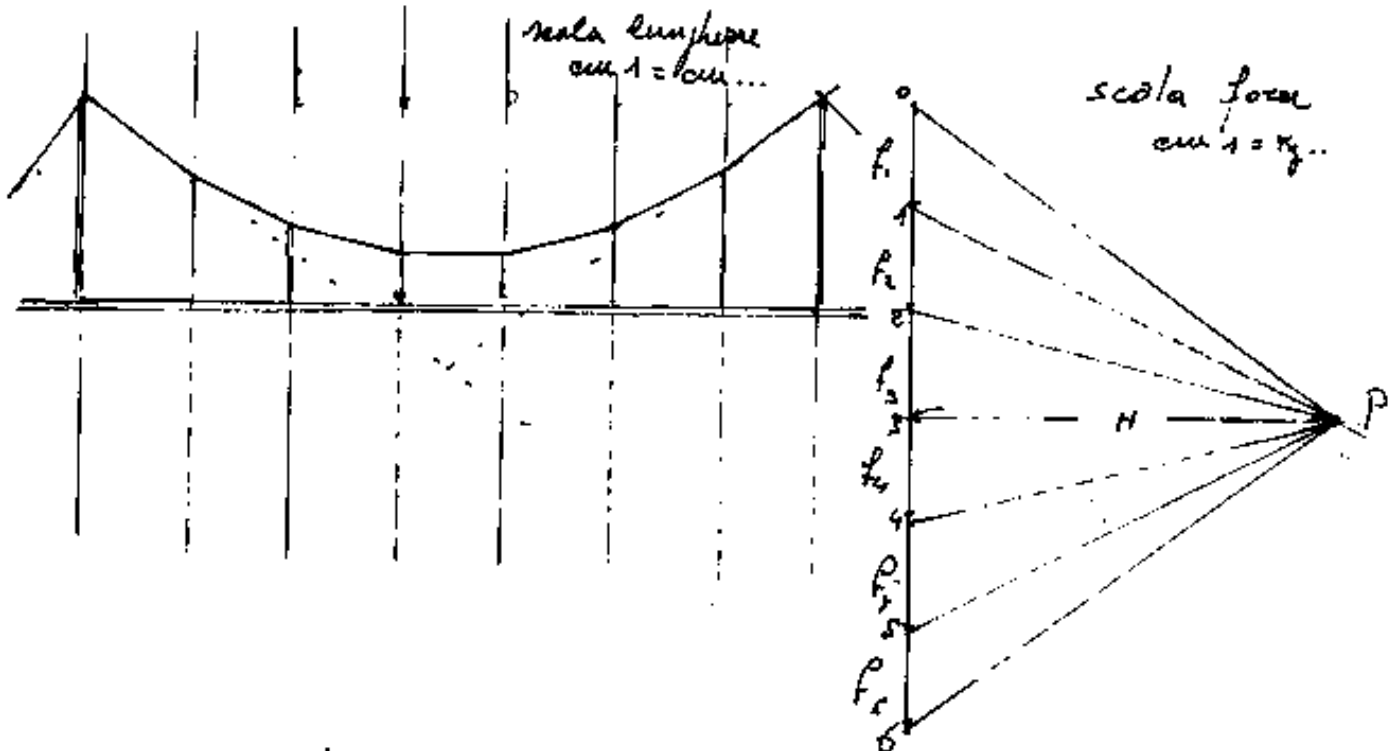
Facciamo un esempio:

Date le tre rette di azione r, s, l, su cui agiscono le forze: $f_1 = 200$ Kg ; $f_2 = 300$ Kg ; $f_3 = 250$ Kg; facciamo il poligono delle forze, o, 1, 2, 3; tracciando le parallele alle rette di azione, e riportandovi, consecutivamente in scala forze: f_1, f_2, f_3. otteniamo l'intensitá della risultante $= \overline{03} =$ Kg 710; e la sua direzionalitá.

Considerato il punto A come inizio del poligono funicolare (A può essere considerato come

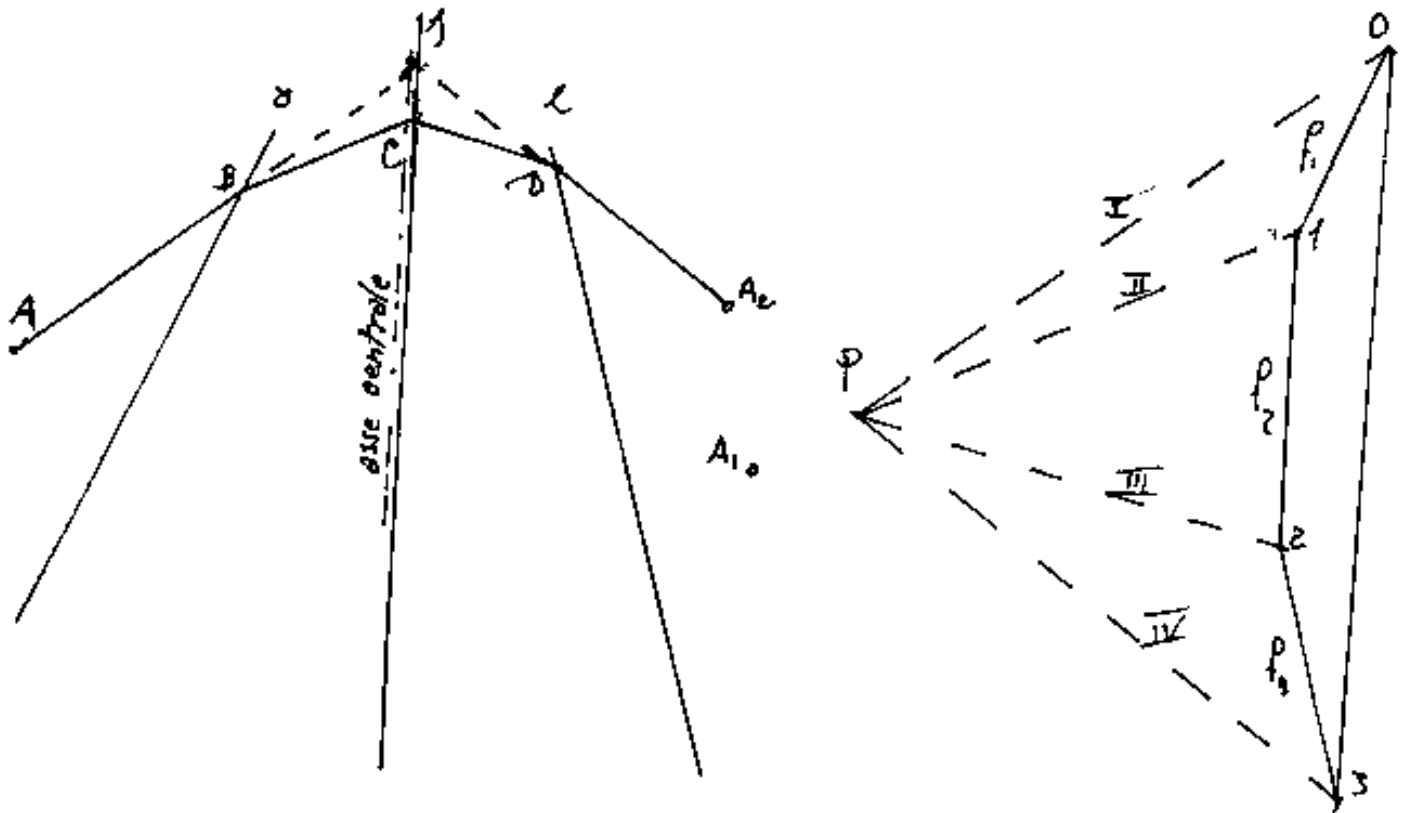
gono funicolare, (A può essere considerato come l'ancoraggio della fune), per A tracciamo la parallela al I raggio proiettante, che incontrerà in B la retta r; quindi da B la parallela al II raggio fino a C su s; da C la parallela al III fino a D su l, e da D, in questo caso, la parallela al IV ed ultimo raggio che sale fino all'ancoraggio A_1, e si prolunga fino ad incontrare

definire univocamente un poligono funicolare, per esempio: <u>passante per tre punti.</u>

Particolare interesse si ha quando il sistema di forze è costituito da forze paral= lele come i pesi in campo gravitazionale

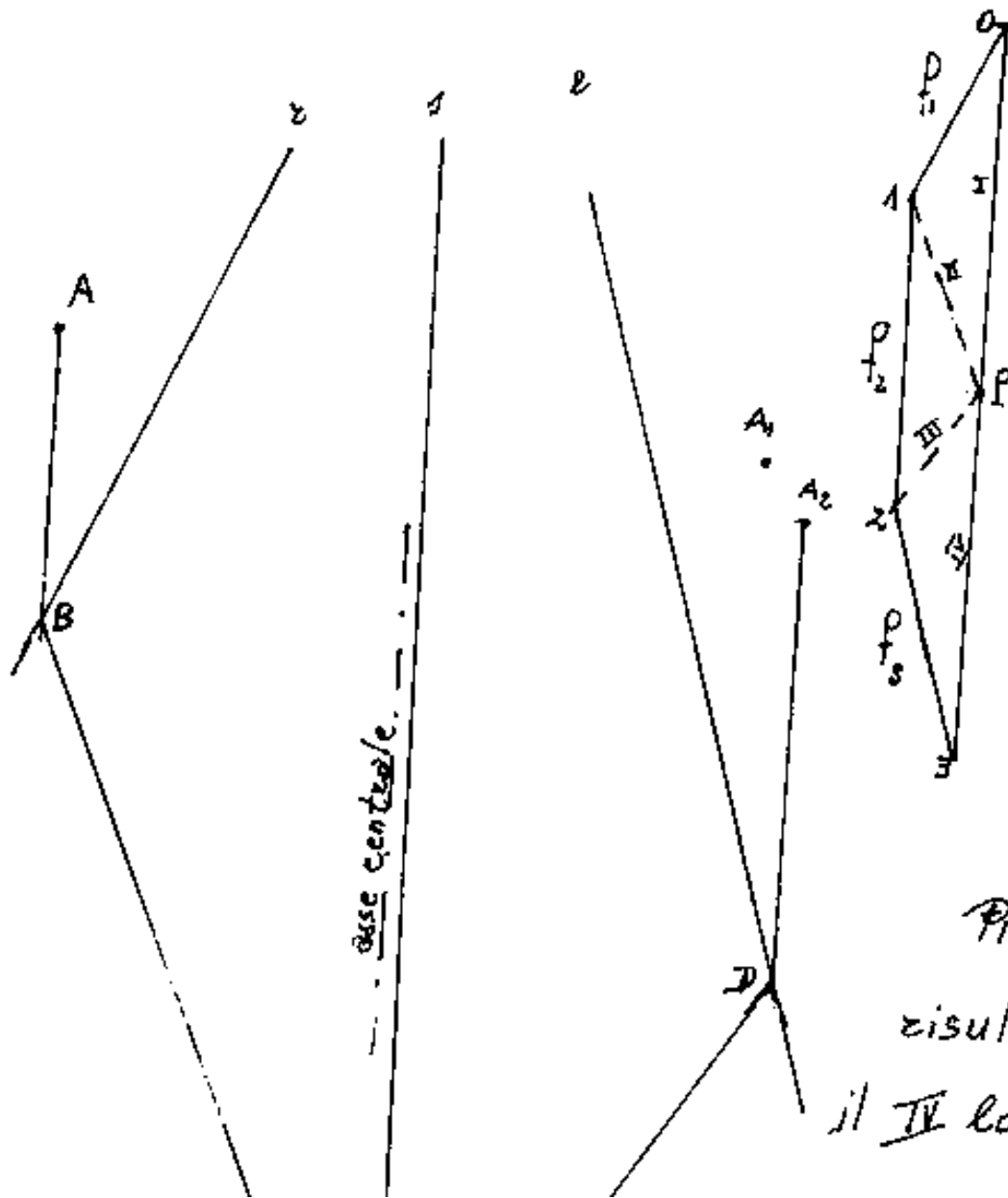
I poligoni funicolari tesi possono utilizzarsi nel calcolo dei ponti sospesi, i poligoni funicolari compressi nel calcolo degli archi in muratura.

Nel calcolo delle travi semplicemente appog=

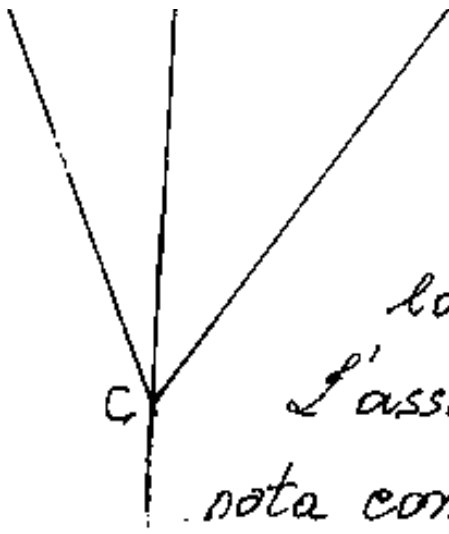
Nel calcolo delle travi semplicemente appog=
giate i carichi si scompongono in assiali
(equilibrati in cerniera) e trasversali per i quali
può farsi un poligono funicolare, ove il primo
lato e l'ultimo taglieranno le rette di azione
delle reazioni verticali; uniti questi due punti,
(retta di chiusa) se ne traccia la parallela per P che
dividerà la risultante secondo le reazioni degli appoggi,

Continuando a spostare il polo verso la sinistra, vi sono diversi casi particolari dipendenti anche dalla configurazione del poligono delle forze, (polo interno al poligono delle forze; polo giacente su una forza del poligono delle forze.) Non appena il polo è a sinistra del poligono delle forze, il poligono funicolare diventa di compressione.

Anche in questo caso l'asse centrale (retta di azione della risultante dei carichi) resta lo stesso.

azione della risultante dei carichi) resta lo stesso.

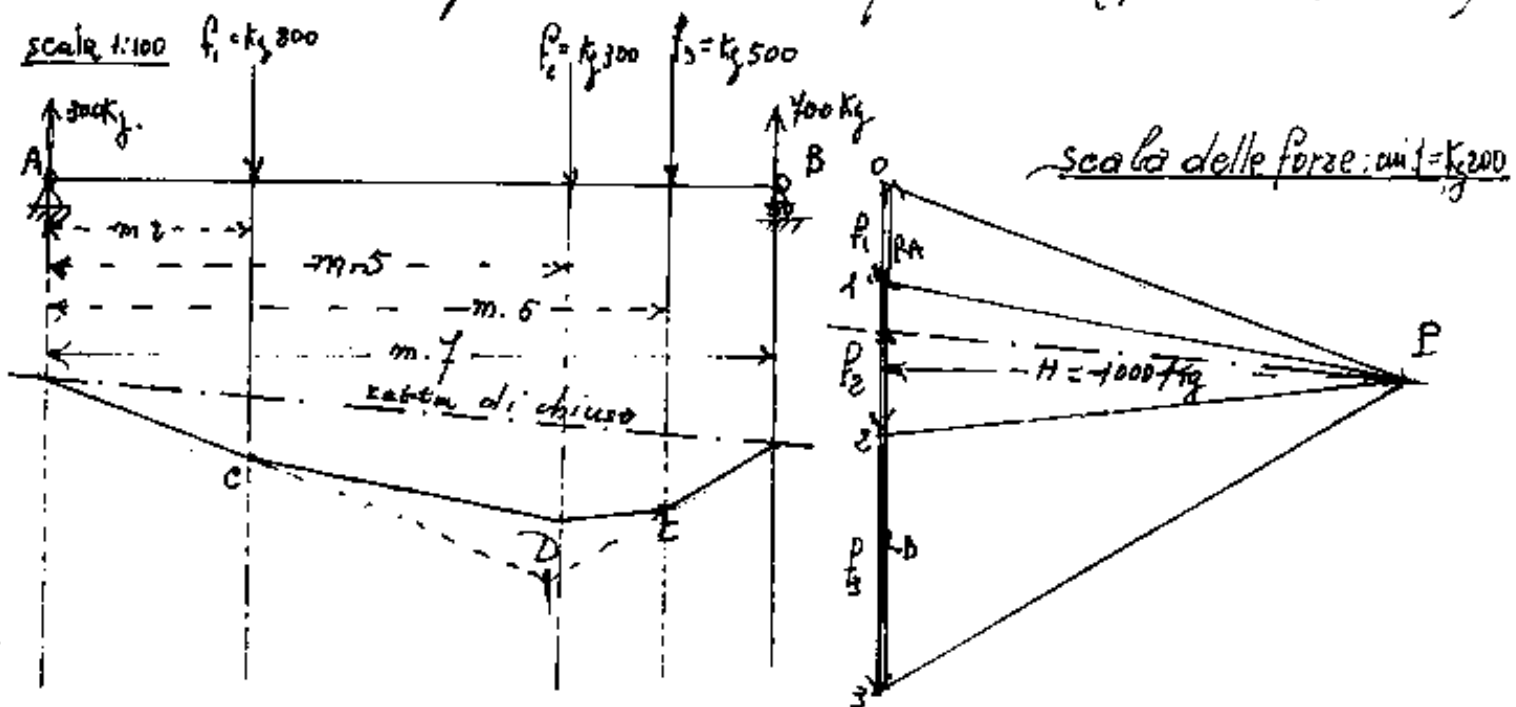
La scelta del polo implica due coordinate la scelta della posizione del primo lato del poligono funicolare implica un'altra condizione, (si suol dire che un sistema di forze ammette infinito cubo poligoni funicolari) in effetti fra gli infiniti poligoni funicolari, bastano tre condizioni per

avere il massimo raggio (la massima tensione) minore di metá risultante. (La tensione minima di una fune che sostiene un peso intermedio, si ha quando ai capi della fune c'è metá peso)

Prendendo P a metá risultante, in generale, il IV lato non passerá

C

per A_1; possiamo farcelo passare, ma non avremo più lo sforzo minimo.

L'asse centrale deve essere determinata con un diverso poligono funicolare perché, in questo caso il I e l'ultimo lato sono paralleli alla risultante e non si incontrano in campo reale.

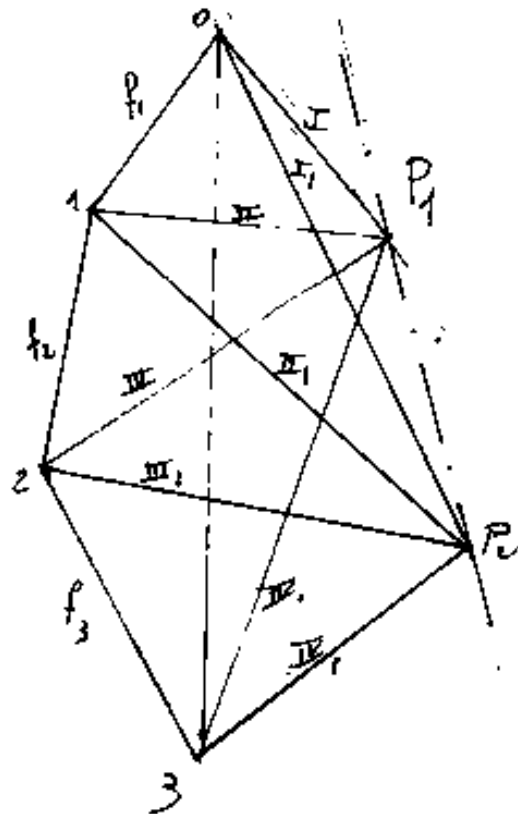
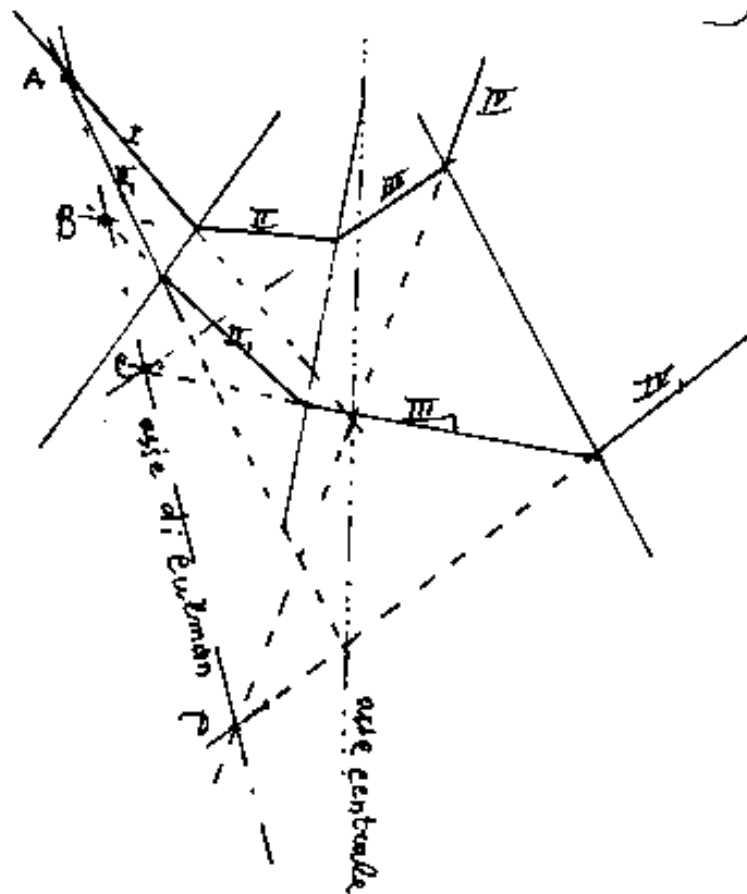
Le ordinate fra il poligono funicolare sono del diagramma dei momenti flettenti, debbono essere lette in scala lunghezze e moltiplicate per H (distanza del polo dal poligono delle forze) letta in scala forze.

Conviene quindi prendere la distanza del polo H un numero facile a moltiplicare (p. es. 10, 100,..)

La parallela alla retta di chiusa divide la risultante in $R_B = 700$ Kg ; $R_A = 300$ Kg

Nella sezione C leggiamo fra la retta di chiusa ed il

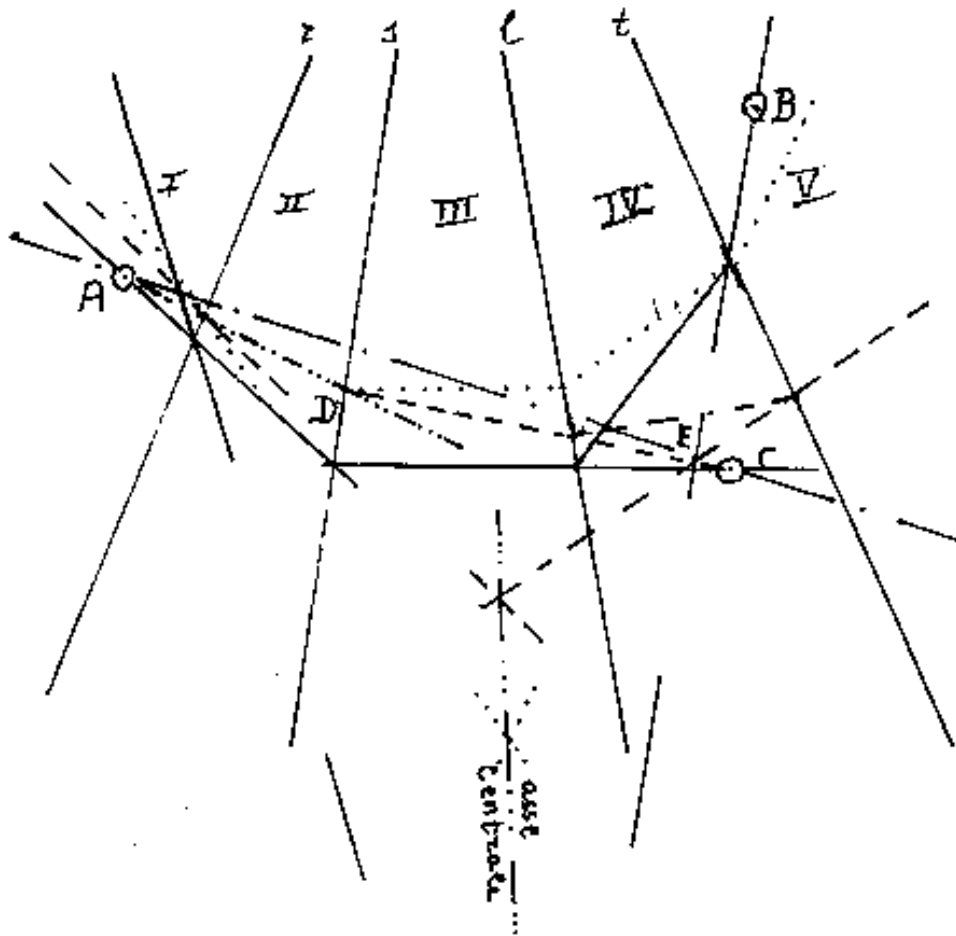
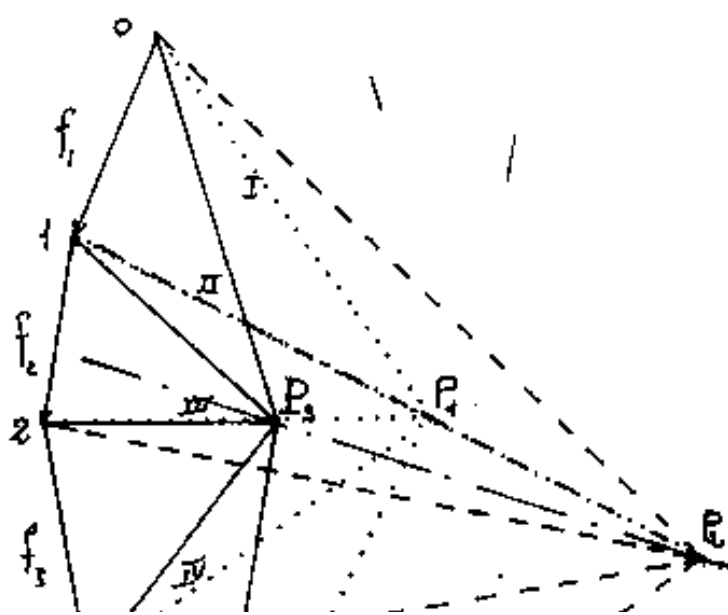
poligono funicolare in scala lunghezze = 0,60 m che moltiplicato per H=1000 Kg da' M_C = 600 Kgm ; analogamente M_D = 900 Kgm ; ed M_E = 700 Kgm .
L'asse centrale passa a m. 4,9 da A .

L'asse di Culmann

Dato un sistema di forze, facendo due poligoni funicolari diversi (da due poli diversi) i lati omonimi dei poligoni si incontrano su una retta, detta asse di Culmann che è parallela alla congiungente i poli.

Si sono indicati con A, B, C, D i punti di incontro sull'asse di Culmann rispettivamente

di incontro sull'asse di Culmann rispettivamente dei primi, secondi, terzi, e quarti lati dei due po= ligoni funicolari

Utilizziamo l'asse di Culmann per far passare un poligono funicolare per tre punti assegnati.

Poligono funicolare per tre punti

Date le rette: r, s, l, t, su cui agiscono rispettivamente le forze: f_1, f_2, f_3, f_4; fissati i punti A, B, C, vogliamo costruire un poligono funicolare che abbia il II lato per A, il III per C, il V per B.

Tracciato il poligono delle forze: 0,1,2,3,4; si prende inizialmente un polo P_1, a caso, e si fa passare il II lato del poligono funicolare per A, tracciando dopo gli altri lati.

Si nota che il III non passa per C, ed il V non passa per B.

Assumiamo il II lato come asse di Culmann, il III lato incontra in D tale asse, si unisce D con C e si assume come nuovo III lato, perciò la parallela a $\overline{DC}$ dal punto 2 del poligono delle forze determina P_2 sulla parallela all'asse di Culmann (II raggio).

Assumiamo ora, come asse di Culmann, la retta $\overline{AC}$, ove i secondi lati dovranno incontrarsi in A ed i terzi in C; il quinto lato incontra in E tale asse, unito E con B si assume come V lato, ora, dal punto 4 del poligono delle forze, la parallela al V lato, e da P_2 la parallela ad $\overline{AC}$, il punto comune è il polo P_3 che soddisfa il poligono funicolare richiesto.

Una Applicazione

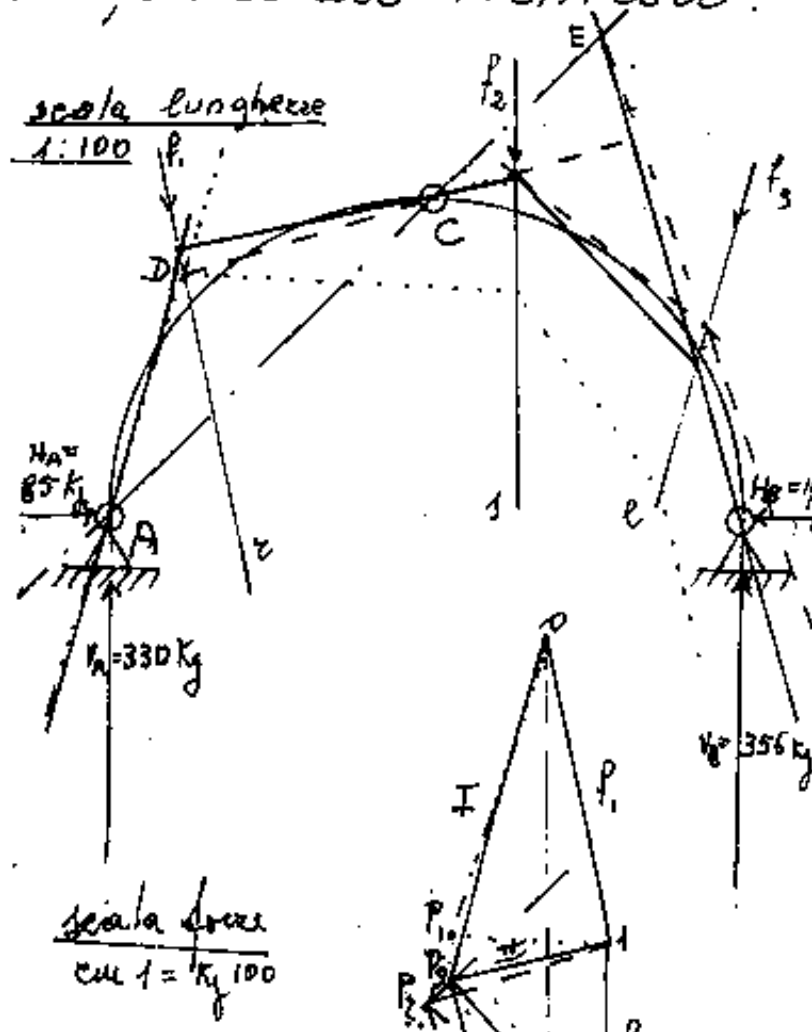
scala lunghezze 1:100

scala forze cm 1 = Kg 100

H_A = 85 Kg

V_A = 330 Kg

H_B = 100 Kg

V_B = 356 Kg

Dato l'arco a tre cerniere: A, B, C, caricato dalle forze: $f_1 = 300$ Kg; $f_2 = 200$ Kg; $f_3 = 200$ Kg agenti secondo le rette r, s, t, trovare le reazioni vincolari e lo sforzo di taglio in C.

Data la situazione delle cerniere rispetto ai cari-

cerniere rispetto ai cari: chi, il I lato deve passare per A, il II per C, il IV per B. Costruito il poligono funicolare abbiamo $R_A = 340$ Kg cioè: $V_A = 330$ Kg; $H_A = 85$ Kg. ;

$R_B = 370$ Kg ; $V_B = 356$ Kg ; $H_B = 100$ Kg ; $T_c = 155$ Kg ; $V_c = 40$ Kg ; $H_c = 150$ Kg

(nei limiti del graficismo)

Il poligono funicolare è un sistema equivalente al sistema dei carichi, le intensità debbono essere lette sul poligono delle forze per i carichi, sui raggi proiettanti per gli sforzi sui lati del poligono funicolare.

Ciò consente di trasformare un sistema in un'altro. Per esempio: data la coppia in figura

scala 1:100

$P_1 = 100$ Kg

$b = 300$ cm

P_1

$b_\alpha = 150$ cm

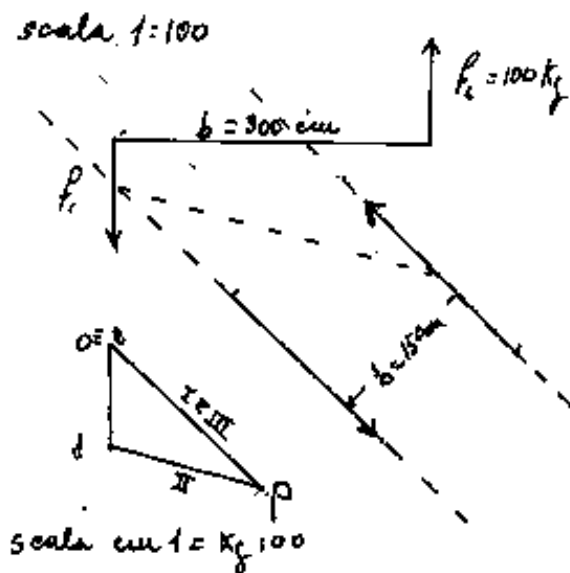
O≡2

I≡III

1

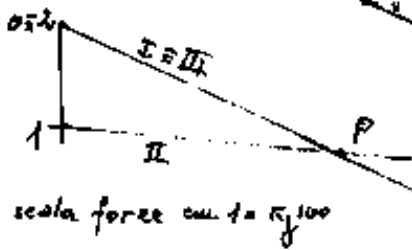
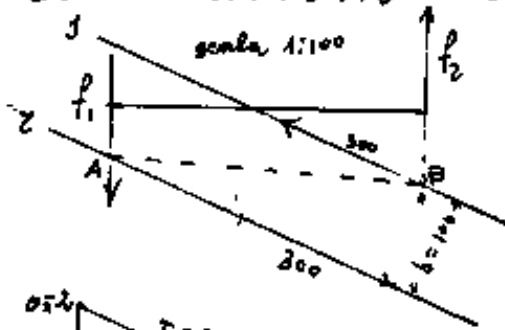
II

P

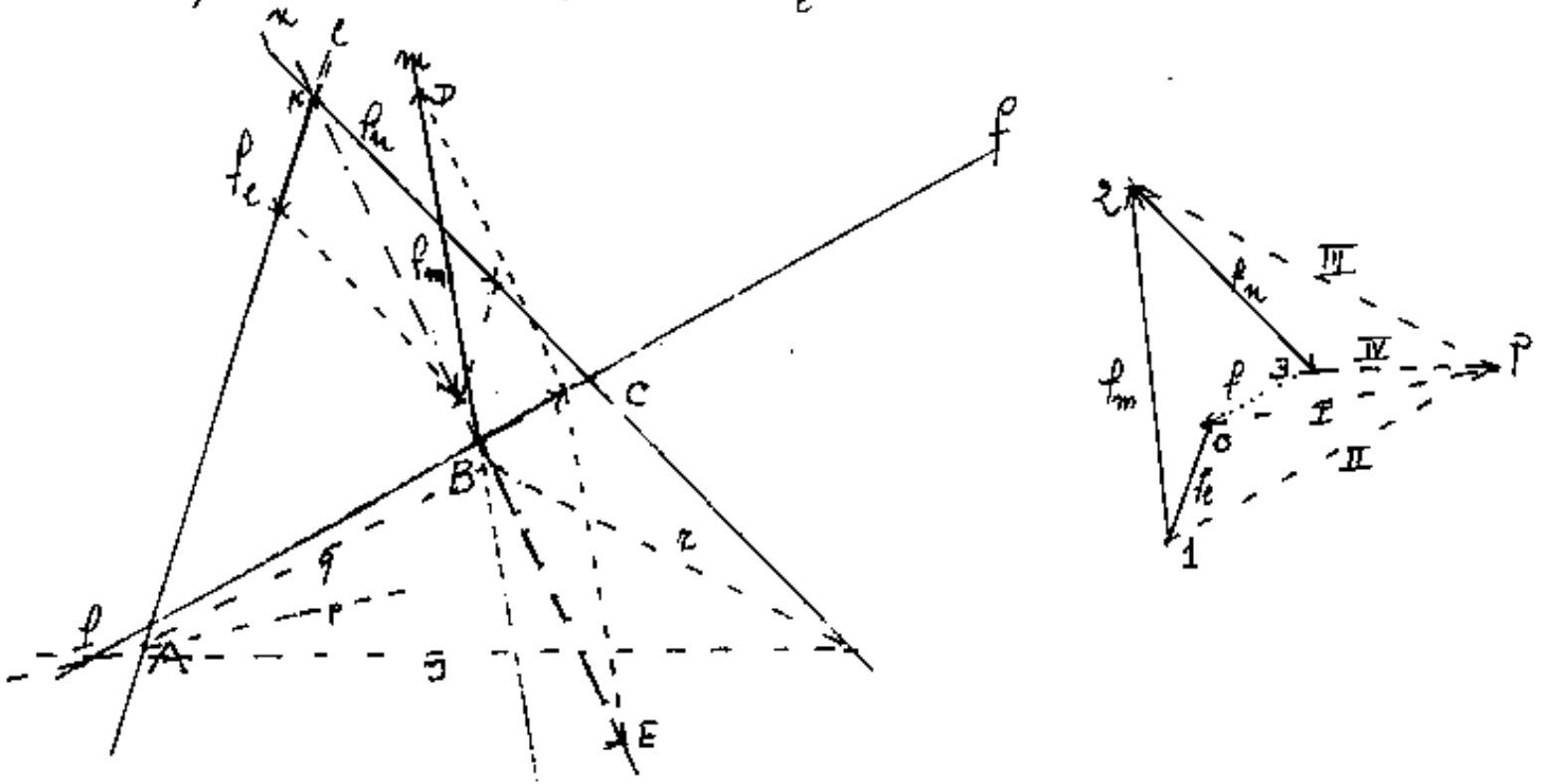
scala cm 1 = Kg 100

si vuole trasformarla in una coppia agente secondo le rette inclinate di α con intensità 200 Kg.

– Costruito il poligono delle forze, si nota che è chiuso cioè il I raggio ed il III sono coincidenti.

riportiamo da O≡2 la retta inclinata di α e su di essa, in scala, il I ≡ III raggio di 200 Kg, troviamo così il polo P e possiamo costruire il poligono funicolare (a tratti). Il primo e terzo lato

gono parallele (a tratti), il primo e terzo lato costituiscono la nuova coppia di braccio 150 cm.

Se invece vogliamo che la nuova coppia abbia per rette di azione r ed s di braccio noto, da 0≡2 la parallela ad r ed s e da 1 la parallela ad $\overline{AB}$ (II lato) si determina P e quindi l'intensità del I e III raggio. —

Scomposizione di una forza secondo tre direzioni non concorrenti

Siano l, m, n, le tre rette, (non concorrenti nello stesso punto), secondo le quali deve essere scomposta la forza agente secondo la f.

La "f" incontra l, m, n, nei tre punti A, B, C; scegliamo uno di questi 3 punti e colleghiamolo col punto comune alle altre due rette.

Sia B il punto che colleghiamo col punto comune

a ℓ ed m; riportiamo di piuma in B la forza e la scomponiamo secondo m e secondo la tratteggiata; la BE la riportiamo di piuma in K e la scomponiamo in f_m ed f_e.

Qualunque punto scegliamo inizialmente: A, B, oppure C il risultato della scomposizione non cambia, cioè: f_m, f_m, f_e avranno la stessa intensità.

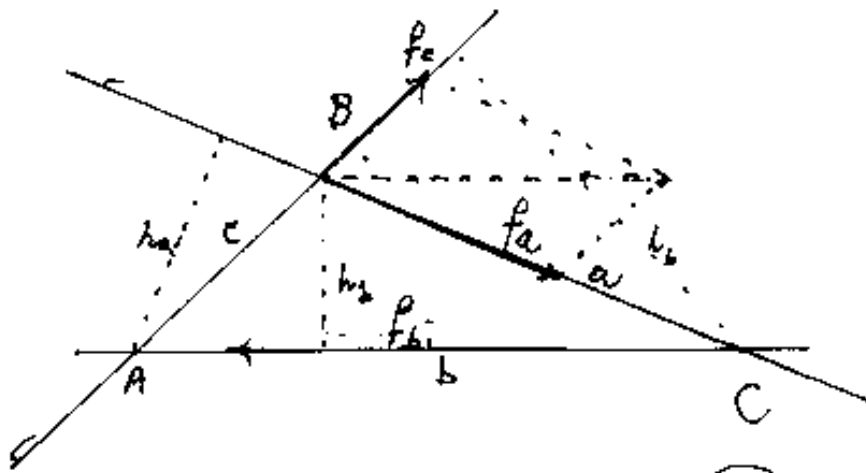
Se delle tre forze: f_e, f_m, f_n, ottenute dalla scomposizione facciamo il poligono delle forze e lo proiettiamo, possiamo costruire un nuovo poligono funicolare, eventualmente condizionato a passare per tre punti, od altri condizionamenti, il poligono funicolare agirà secondo 4 rette $(n+1)$ p, q, r, s le intensità delle forze sarà determinata dai raggi proiettanti: I, II, III, IV; letti in scala forze. Noteremo che il I e l'ultimo lato del poligono funicolare si incontrano sulla retta f che diventa asse centrale.

Se dei raggi proiettanti facciamo un poligono delle forze e costruiamo un nuovo poligono funicolare, questo avrà 5 lati $(n+1)$ e lo stesso asse centrale f del precedente ...

Potremmo continuare, avremo sempre dei sistemi equivalenti.

sistemi equivalenti.

Scomposizione di un momento secondo tre forze in tre direzioni non concorrenti.

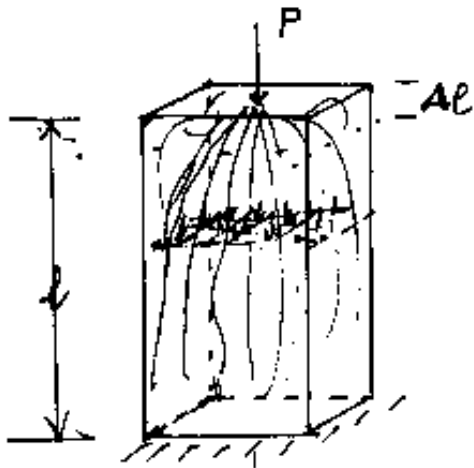
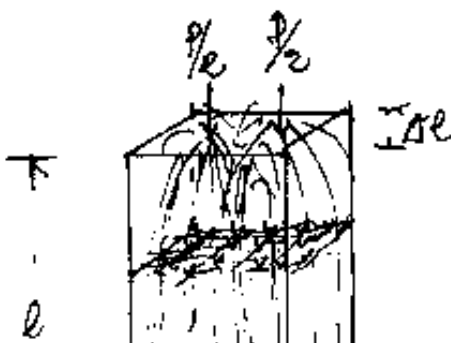
Sia $\overset{\frown}{M}$ il momento e sia ABC il triangolo delimitato dalle tre rette. Siano a, b, c, i tre lati del triangolo, e siano: h_a, h_b, h_c le tre altezze relative ai tre lati. Se dividiamo: $\frac{\overset{\frown}{M}}{h_b} = f_b$ otteniamo una forza che agisce sul lato b la cui forza parallela passa per B ed ha verso opposto. Se scomponiamo questa secondo "a" e secondo "c" otteniamo le altre due componenti che dovranno avere una intensità pari a: $\frac{M}{h_a}$ ed $\frac{M}{h_c}$. Cioè: $f_a h_a = f_b h_b = f_c h_c = M$ = doppio dell'area del triangolo di lati: f f f .

dell'area del triangolo di lati: f_a, f_b, f_c.
Poichè il triangolo delle forze e quello delimitato dalle rette di azione le forze sono proporzionali ai lati a, b, c, su cui giacciono: $a h_a = b h_b = c h_c = 2S$

$2S = KM$ da cui $K f_a = a$; $K f_b = b$; $K f_c = c$.

Le sollecitazioni

Si considerano in genere solidi astiformi, ove la lunghezza è preponderante rispetto alle dimensioni della sezione.

Sforzo Normale N

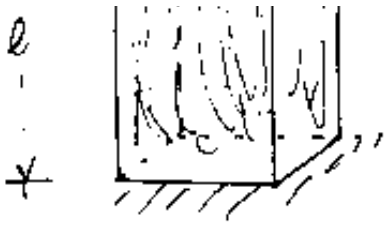
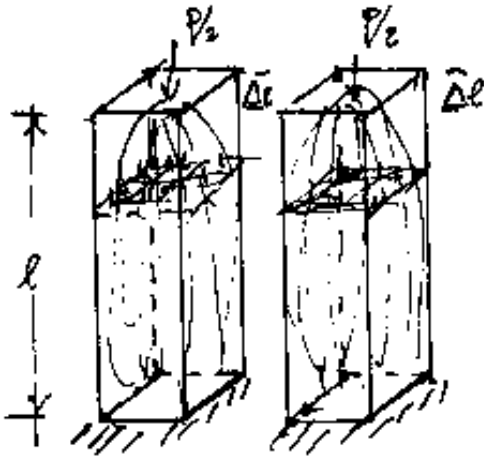
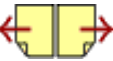
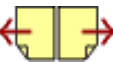
Positivo se di trazione, negativo di compressione. Consideriamo un pilastro soggetto ad un carico concentrato P, assiale e baricentrico nella sezione. Il solido si deforma elastica= mente. Una prima convenzione è che le sezioni si mantengono piane. (È ovvio che la sezione ove è applicato il carico concen= trato non si mantiene piano) Un altro principio detto di Saint-Venant per le travi sogget= te a carichi nelle sezioni estre

P

Δl

l

P/2 P/2

Δl

l

te a carichi nelle sezioni estre-
me, dice:
"Salvo un breve tratto di trave
in prossimità delle sezioni di appli
cazione del carico, il flusso delle
tensioni interne rimane lo stesso
comunque si distribuisca il
carico nella sezione."

Quando il flusso di tensioni si è distribuito lo sforzo normale N si identifica nel carico P. Chiameremo tensione normale σ il rapporto fra lo sforzo normale N e l'area A della sezione; cioè:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{N}{A} \; ; \; (\text{espressa in } Kg/cm^2)$$

In effetti σ è la tensione media anche se la riteniamo costante nella sezione.

La deformazione elastica principale è l'allungamento o l'accorciamento della trave o asta soggetta a sforzo normale. (Tratteremo a parte le contrazioni trasversali)

Indichiamo con Δl la variazione di lunghezza che sarà direttamente proporzionale ad N ed alla lunghezza ed inversamente proporzionale all'area e ad un modulo "E"

dipendente dal materiale di cui è costituita l'asta, ed è chiamato:

<u>modulo di elasticità normale.</u> (Kg/cm²)

$$\Delta l = \frac{N l}{E A}$$

però Δl è poco significativo sullo stato di tensione del solido, infatti un filo di ferro con diametro 2 mm,

lungo 100 metri la cui sezione è 0,0314 cm², si allunga di 0,1 cm con $N = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}0314 \cdot 2.100.000}{10000} \simeq 0{,}6597$ Kg

cioè con una tensione di 21 Kg/cm²

Lo stesso filo di ferro lungo 50 cm per farlo allungare di 0,1 cm, occorre uno sforzo normale di ≈ 132 Kg cioè una tensione ≃ 4200 Kg/cm² che, per il ferro ordinario, supera la rottura.

Quindi anziché Δl è molto più significativo l'allungamento (o accorciamento) per unità di lunghezza (cm/cm), si indica con ε e si chiama dilatazione:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Dividendo per l l'espressione di Δl:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA}$$ e sostituendo

$\frac{N}{A} = \sigma$ otteniamo:

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\ell \qquad E$$

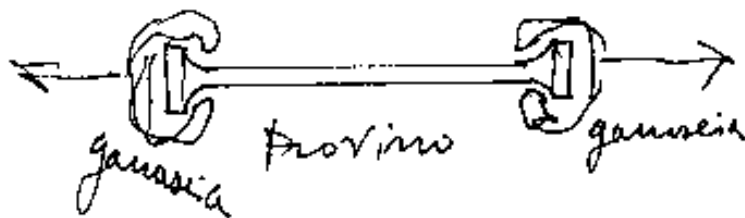
E questa la legge di Hooke che afferma essere proporzionali le tensioni e le dilatazioni. La formula può scriversi:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon} \quad ; \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon}} \quad ;$$

La legge di Hooke è fondamentale in tutta la scienza delle costruzioni.

Consideriamo un provino in ferro per le prove di trazione.

Un tempo i provini in ferro avevano, lunghezza e sezione fissati, gli estremi erano raccordati da ingrossamenti sui quali agivano le ganasce della macchina che provoca lo sforzo di trazione:

ganascia provino ganascia

Molte macchine erano fornite di un sistema scrivente che graficizzava il diagramma σ/ε. Riportiamo il grafico di un provino in ferro.

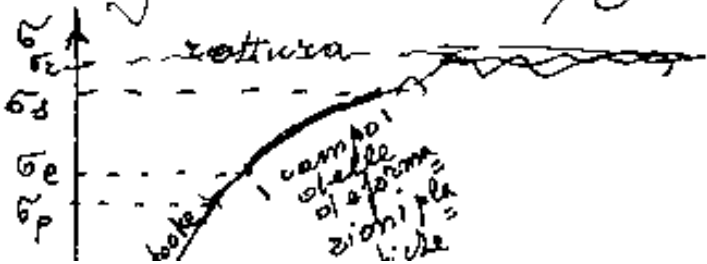
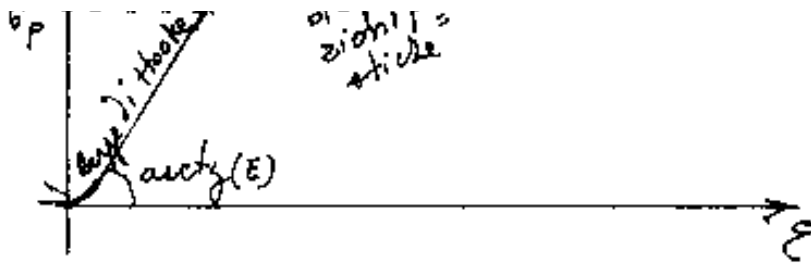
σ_r rottura

σ_s

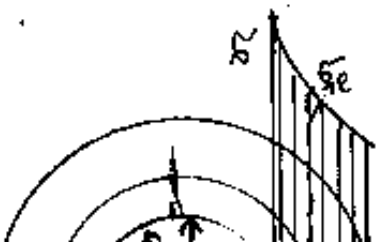
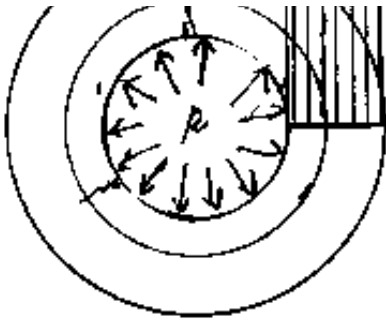
σ_e

σ_p

Hooke

campo delle deformazioni plastiche

σ_p = limite di proporzionalità (limite della legge di Hooke);

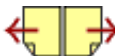
σ_e = limite di elasticità (lasciando la tensione il provino torna alla configurazione iniziale senza che si siano prodotte deformazioni permanenti); σ_s = limite di snervamento

Dal limite di elasticità, al limite di snerva=
mento, si ha il campo delle deformazioni
plastiche nel quale si verificano le defor=
mazioni permanenti, utili per le lavorazio=
ni delle lamiere per carrozzerie, per fare
pentole, tappini metallici ecc.
Avendo una strisciola metallica vincolata,
è facile vedere fino a quale carico rimane
inalterata e da quale carico risulta
deformata permanentemente.
Il fatto che oltre σ_e si verificano deforma=
zioni permanenti è stato utilizzato
per processi di autoblindatura nelle
bocche da fuoco dei cannoni e nei tubi
delle condotte forzate.

Un tubo soggetto ad una pressione
interna p ha una tensione σ
distribuita sulle circonferenze con

distribuito sulle circonferenze concentriche come il diagramma a fianco, ove è indicata la circonferenza soggetta a σ_e (limite di elasticità); il tubo interno si deformerà plasticamente restando di diametro maggiore, tolta la pressione p, il tubo esterno, rimasto elastico, comprimerà il tubo interno. (Autoblindatura)

Non solo, ma la deformazione plastica, implica anche un incrudimento del materiale, (di ciò ci si può rendere conto piegando un filo di ferro, difficilmente riusciamo a raddrizzarlo nel punto della piegatura, si raddrizzerà a fianco, perchè in quel punto il materiale è incrudito (più duro)).

Quindi la porzione interna del nostro tubo, dopo aver tolto la pressione generata dal fluido contenuto nel tubo, risulta di maggior diametro incrudita e precompressa dall'azione della porzione esterna di tubo, che, rimasta elastica, vorrebbe tornare al diametro iniziale.

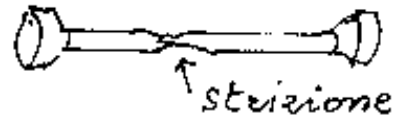
Rimettendo ora il fluido in pressione nel tubo, inizialmente dovrà sviluppare una pressione per riportare a zero lo sforzo normale della parte interna precompressa, poi comincerà a

tenderla. È evidente il miglioramento delle prestazioni dovute all'autoblindatura.
La blindatura può essere eseguita con due tubi coassiali, quello esterno montato a caldo, in modo che raffreddandosi comprima l'interno.

Dopo la fase di deformazione plastica, superata la σ_s (limite di snervamento), le fibre del materiale cominciano a rompersi, le deformazioni diventano notevoli, anche non aumentando il carico, perché ad ogni rottura diminuisce l'area resistente e quindi aumenta la deformazione che provoca nuove rotture. Se il diagramma σ/ε è fatto automaticamente fra σ_s e σ_r (rottura) la penna scrivente fa una serie di ondulazioni prima che si verifichi la rottura.

È bene precisare che il diagramma σ/ε è diverso per i diversi materiali ed è anche diverso fra prove di trazione e prove di compressione.

Nelle prove di trazione, il provino, poco prima della rottura, presenta una sezio=

prima della rottura, presenta una sezio=
ne di area notevolmente ridotta; il
fenomeno è detto "strizione"

strizione

Nelle prove di compressione l'area della
sezione tende ad aumentare e diventa
notevole per materiali plastici (un cilindro
di creta molle compresso gonfia lateralmente)

La sollecitazione a sforzo normale (N) è fondamentale perché dimostreremo che qualunque sia la sollecitazione o la somma di sollecitazioni composte, il flusso delle tensioni all'interno del materiale avviene secondo linee dette isostatiche che sono solo di trazione o di compressione; punto per punto perpendicolari fra loro – le cui direzioni in quel punto del materiale sono dette: direzioni principali e le tensioni σ che agiscono in quel punto sono dette: tensioni principali e sono la massima e la minima in quel punto.

Anche le prove di laboratorio sui materiali sono pressoché esclusivamente di trazione e di compressione, per individuare la tensione

di rottura σ_r che divisa per un certo grado g di sicurezza fornisce la $\sigma_{ammissibile} = \frac{\sigma_r}{g} = K$ spesso indicata con $K = \sigma_{amm}$.

In merito vi sono disposizioni di legge alle quali il progettista, il costruttore, ed il collaudatore debbono attenersi.

(Anche se tal volta, vecchie disposizioni risultano scientificamente più valide delle nuove)

Anche il modulo E di elasticità normale è stato determinato sperimentalmente (c.f.r. G Colonnetti - Scienza delle Costruzioni - Edizioni Scientifiche Einaudi - 1953 - (volume I cap III pag 408)) I valori mediamente accettati sono riportati in tutti i manuali tecnici.

Ferro - acciai $E \cong 2\,100\,000$ Kg/cm²

ferro $\sigma_r \simeq 3000 \div 4500$ $\frac{1}{m} \simeq 0{,}29$

acciaio $\sigma_r \simeq 3500 \div 7000$ $\frac{1}{m} \simeq 0{,}30$

gli acciai al nichel-cromo ed al silicio magnesio ed altri hanno $\sigma_r > 10000$ Kg/cm²

Rame $E \simeq 1200\,000 \div 1300\,000$ Kg/cm²

σ_r (trazione) $\cong 2000 \div 5000$ Kg/cm² $\frac{1}{m} \simeq 0{,}35$

σ_r (compressione) $\simeq > 15000$ Kg/cm²

Nichel $E \simeq 2\,300\,000$ Kg/cm²

$\sigma_r \simeq 3500 \div 8000$ Kg/cm² $\frac{1}{m} \simeq 0{,}325$

Zinco $E \simeq 800\,000 \div 900\,000$ Kg/cm²

$\sigma_r \simeq 600 \div 2000$ Kg/cm²

Legnami

Abete $E \simeq 90000 \div 95000$ Kg/cm²

σ_{r} (trazione) $= 600 \div 700$ Kg/cm²

σ_{r} (compressione) $= 250 \div 300$ Kg/cm.

Pino $E \simeq 100\,000$ Kg/cm²

σ_{r} (trazione) $= 700$ Kg/cm²

σ_{r} (compressione) $= 350$ Kg/cm²

Quercia $E \simeq 110\,000$ Kg/cm²

σ_t (trazione) $\simeq 950$ Kg/cm²

σ_{-t} (compressione) $\simeq 400$ Kg/cm²

Faggio $E \simeq 160\,000$ Kg/cm²

σ_t (trazione) $\simeq 1050$ Kg/cm²

σ_{-t} (compressione) $= 400$ Kg/cm²

Noce $E \simeq 140\,000$ Kg/cm²

σ_t (trazione) $\simeq 850$ Kg/cm²

σ_{-t} (compressione) $\simeq 400$ Kg/cm²

Pioppo $E = 75\,000$ Kg/cm²

σ_t (trazione) $= 550$ Kg/cm²

σ_{-t} (compressione) $= 250$ Kg/cm²

Pietrame
Arenaria $E \simeq 25000 \div 250\,000$ Kg/cm²

Arenarie

$\sigma_t \simeq 10 \div 40$ "

$\sigma_{-t} \simeq 500 \div 1000$ "

chimiche

$E \simeq 150000 \div 1000000$ Kg/cm²

$\sigma_t \simeq 20 \div 60$ "

$\sigma_{-t} \simeq 1000 \div 1800$ "

Mattoni

$E \simeq 50000 \div 150.000$ Kg/cm²

σ_t (compressione) $100 \div 500$ Kg/cm²

Vetro

$E \simeq 700000 \div 800.000$ Kg/cm²

σ_t trazione $\simeq 150 \div 300$ Kg/cm²

σ_t compressione $\simeq 400 \div 1500$ Kg/cm²

Detto K il carico di sicurezza o tensione ammissibile: $\sigma_{amm.} = K$ avremo:

$$\boxed{A = \frac{N}{K}} = \text{formula di progetto}$$

$$\boxed{\frac{N}{A} = \sigma \leq K} = \text{formula di verifica}$$

Formule valide per travi tese, o per travi tozze se compresse.

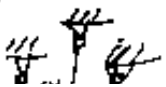
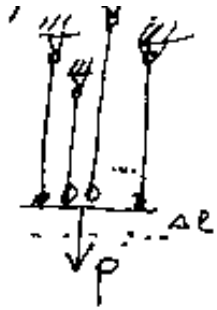
La dizione travi tozze travi snelle sarà meglio trattata con l'instabilità elastica, per ora consideriamo tozze le travi o aste (compresse) le cui lunghezze non superino ≃ "15" volte le dimensioni della sezione. un pilastro 0,30 x 0,30 m. diventa snello quando la sua lunghezza supera i m. 4,5, un altro pilastro, della stessa area di sezione però 0,2 x 0,45 m. diventa snello per $l > 3$ m.

La rigidezza a sforzo normale e la ripartizione dei carichi nelle aste

L'espressione: $\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{N}{\left(\frac{EA}{l}\right)} = \frac{N}{w_N}$

ci dice che la deformazione Δl è direttamente proporzionale ad N (sforzo Normale) ed inversamente proporzionale a $w_N = \frac{EA}{l}$ detta rigidezza a sforzo normale.

Quindi la rigidezza a sforzo normale, (w_N) dipende solo dalle caratteristiche dell'asta (area della sezione e lunghezza) e dal materiale di cui è fatta (E), ed è l'impedimento alla deformazione.

Vedremo che ogni sollecitazione ha una propria espressione della rigidezza che contrasta deformazione di quella sollecitazione.

Se si hanno n aste di diverse ...

Se si hanno n aste di diversa rigidezza w_{N_1}, w_{N_2}, ... w_{N_n} che sostengono il peso P e desideriamo sapere lo sforzo normale di ciascuna delle n aste, poiché Δl sarà uguale per tutte le aste, poiché $\sum_1^n N_i = P$ avremo che lo sforzo nella generica asta "i" sarà:

$$N_i = \frac{P\, w_{N_i}}{\sum w_{N_i}}$$

ove: $\left(\frac{P}{\sum_1^n w_{N_i}} = \Delta l = \frac{N_i}{w_{N_i}}\right)$.

Quindi la rigidezza di un'asta a sforzo normale può determinarsi : $\boxed{w_n = \frac{N}{\Delta l}}$ (Kg/cm)

infatti: $\frac{EA}{l} = \frac{Kg/cm^2 \cdot cm^2}{cm} = Kg/cm$

Una molla che avesse rigidezza 2 Kg/cm potrebbe essere utilizzata come dinamometro tarando i Kg ogni mezzo centimetro nella scala graduata.

Un comune elastico che con 100 gr si allunga di un centimetro (rigidezza = 0,1 Kg/cm) è affiancato ad un tondino di ferro ∅ 10 mm lungo m 4 cioè

$0,5^2\pi$ = Area = 0,785398 ; $w_N = \frac{2100000 \cdot 0,785398}{400} = 4123,34$

se entrambi sostengono il peso di una tonnellata = 1000 Kg quanto di questo peso tocca a ciascuna asta. $\Sigma w_N = 4123,34 + 0,1 = 4123,44$; $\frac{1000}{4123,44} = 0,24252$

0,2425 × 0,1 = 0,024252 ≅ gr. 24,25 sopportati dall'elastico

0,2425 × 4123,34 = 999,9757 e: 999,975748 + 0,024252 = 1000,=

La natura grava di più il più forte, quello che oppone più resistenza alla deformazione

(Un antico proverbio dice: "Iddio manda il freddo

(Un antico proverbio dice: "Iddio manda il freddo secondo i panni)

La deformazione : $\Delta l = \frac{1000 \cdot 400}{2100000 \cdot 0,785398} = 0,242252$ cm

la presenza dell'elastico influenza l'arrotondamento della 5ª cifra decimale.

Le Dilatazioni termiche

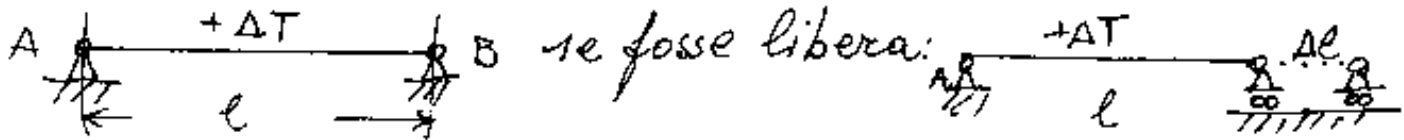
Lo sforzo normale può generarsi anche per variazioni di temperatura in aste iperstatiche. E' noto che i vari materiali hanno variazioni di volume al variare della temperatura.
A parte l'acqua che ha il massimo di densità a 4°C. (ciò che provoca lo sgretolamento superficiale della pietra serena, in particolare le soglie esposte all'intemperie, infatti la pioggia penetrando per capillarità nei microcretti che si sono prodotti con la scalpellatura, se successivamente gela, aumenta di volume e preme sulla pietra aumentando il microcretto e generandone dei nuovi fino a staccare gli strati superficiali.)
Gli altri materiali hanno un coefficiente di dilatazione medio, che può essere di dilatazione lineare: cm/cm°C. per grado celsius valido da 0° ÷100°

lineare: $\frac{cm}{cm}$ °C per grado celsius valido da 0° ÷ 100°.
oppure cubico ($\frac{cm^3}{cm^3}$ °C) valido a temperature ordinarie ≅ 20°C.

<u>Coefficienti di dilatazione lineare</u> α.

Acciaio-ferro	0,000012	legno (= fibre)	0,000004
Alluminio	0,000024	" (⊥ ")	0,000058
Argento	0,000020	Nichel	0,000013
Invar	0,0000015	oro	0,000014
		porcellana	0,000003
mattoni	0,000006	Rame	0,000017

Altri coefficienti possono trovarsi sui manuali tecnici.
Consideriamo un'asta vincolata agli estremi che subisca il salto termico ΔT,

A +ΔT B ℓ se fosse libera: +ΔT ℓ Δℓ

avrebbe un allungamento o accorciamento $\Delta \ell$ ove: $\underline{\Delta \ell = \alpha \ell \Delta T}$ per riportarla a posto occorre uno sforzo normale N che provochi, di verso opposto, lo stesso $\Delta \ell = \frac{N\ell}{EA}$; cioè:

$$\frac{N\ell}{EA} = \alpha \ell \Delta T \Rightarrow \frac{\sigma}{E} = \alpha \Delta T \quad : \quad \boxed{\sigma = E \alpha \Delta T}$$

per il ferro $E = 2100\,000$; $\alpha = 0{,}000\,12$ si ha

$$\underline{E\alpha = 25{,}2} = \frac{\sigma}{\Delta T} = \frac{Kg}{cm^2\ {}^\circ C}$$

vuol dire che un'asta in ferro iperstatica ha una variazione di tensione di 25, Kg/cm² per ogni grado di variazione termica; se consideriamo che la $\sigma_{amm} = K = 1200$ Kg/cm² per il ferro ordinario

basta un salto termico di 47°,519 gradi Celsius,
facilmente raggiungibile fra le temperature inverna-
li e le temperature in pieno sole estivo.
Un altro esempio si ha quando due aste uguali
affiancate, vincolate agli estremi, per una

di esse si verifica il salto termico ΔT. In questo caso le aste avranno lo stesso Δl peró di segno contrario:

$$\alpha l \Delta T - \frac{N l}{EA} = \frac{N l}{EA}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} = \frac{E \alpha \Delta t}{2}}$$

Se le due aste hanno rigidezza diversa W_1 e W_2 avremo:

$$\alpha l \Delta T - \frac{N}{W_1} = \frac{N}{W_2}$$

$$\alpha l \Delta t = N\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right)$$

$$\boxed{N = \frac{W_1 \cdot W_2}{W_1 + W_2} \alpha l \Delta t}$$

La variazione di lunghezza, Δl, puó essere generata meccanicamente, per esempio un bullone di rigidezza W_1 si avvita, dalla po=

sizione di contatto neutro su un corpo di rigidezza W_2, con $\frac{1}{n}$ di giro del dado, se p è il passo della vite avremo

$$\frac{p}{n} - \frac{N}{W_1} = \frac{N}{W_2}$$

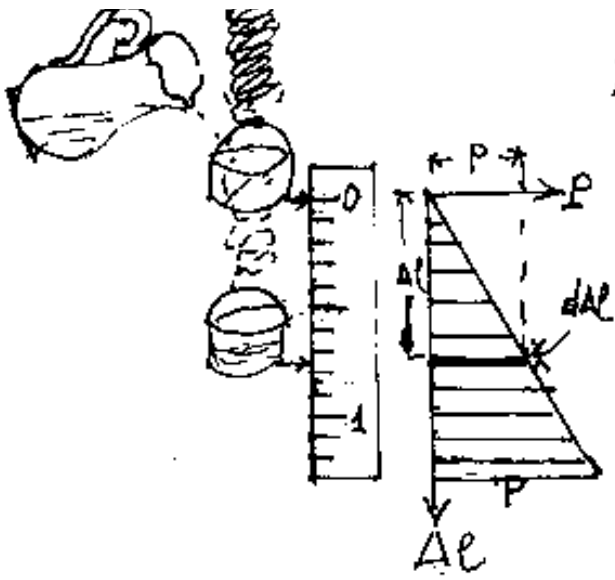
da cui lo sforzo normale del bullone teso e del corpo compresso è:

$$N = \frac{W_1 \cdot W_2}{W_1 + W_2}\left(\frac{p}{n}\right).$$

Il lavoro elastico

Il lavoro meccanico puó equipararsi al solle=
vamento di un peso (Kg) all'altezza h (m)
rispetto alla quota di partenza. Il lavoro
si misura in Kgm.

Inversamente un peso P che si trovi ad altezza
h dispone di una energia potenziale gravitazio=
nale capace di trasformarsi in lavoro mec=
canico minore del lavoro meccanico necessario
a sollevare il peso, per la quota di energia disper=
sa in calore per gli inevitabili attriti.

Consideriamo un elastico, o una molla, o
un qualunque corpo, che sostenga un recipiente
vuoto, munito di indice che, inizialmente segna zero
su apposita scala graduata per misurare il Δl del
sostegno quando si immettono
pesi nel recipiente. A fianco

pesi nel recipiente. A fianco riportiamo il diagramma che ha in ascisso i pesi P ed in ordinata le deformazioni Δl. Se versiamo, goccia a goccia, dell'acqua nel recipiente, il peso lo farà discendere, e, in una posizione generica

il lavoro infinitesimo dovuto a $d(\Delta l)$. Integrando abbiamo l'area del triangolo, ed essendo $P = N$

Lavoro elastico $\mathcal{L}_e = \frac{N \cdot \Delta l}{2} = \boxed{\mathcal{L} = \frac{N^2 l}{2EA}}$ che è l'energia elastica accumulata nel solido affinché questo, soggetto allo sforzo normale N e dilatato di $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$, possa sostenere il peso P.

L'energia elastica accumulata è energia potenziale, infatti, sganciando il peso, il corpo tornerá violentemente allo stato di quiete.

Una molla compressa esercita una azione spingente, una molla tesa esercita una azione traente; queste azioni sono chiamate forze in effetti il loro valore è solo istantaneo, poiché appena esercitano qualsiasi lavoro esterno, la energia elastica interna diminuisce e con essa l'intensitá dell'azione (forza).

Quindi l'equilibrio azione – reazione esiste.

Quindi l'equilibrio: azione – reazione esiste quando il corpo agente, cede una parte della sua energia al corpo che lo sostiene affinché posso generare una azione uguale e contraria.
(Non esistono i "corpi rigidi", esistono invece corpi più o meno elastici; un comune elasticino lungo ≃ 25 cm della sezione di mm. 2×1, con un peso di ≃ 150 gr. si allunga: $\Delta l \simeq 40$ mm;

Se fissate in alto un estremo di questo elasticino, che sostiene il peso, e provate con una mano a sollevare il peso di qualche centimetro, noterete che lo sforzo iniziale è praticamente nullo, poi via via che sollevate il peso esso graverà sempre di più sulla mano, e solo quando l'elasticino ritorna indeformato, avrete sulla mano l'intero peso. Quindi è l'entità della deformazione che dà la cosiddetta forza di sostegno; altro che corpo rigido! Non solo, avendo sollevato il peso fino a sostenere l'intero carico se "h" è l'altezza ($h = \Delta e$) che avete percorso, il lavoro è $\frac{Ph}{2}$ perché non era l'intero peso per tutto il percorso, ma partiva da zero e l'intero peso era solo alla fine).

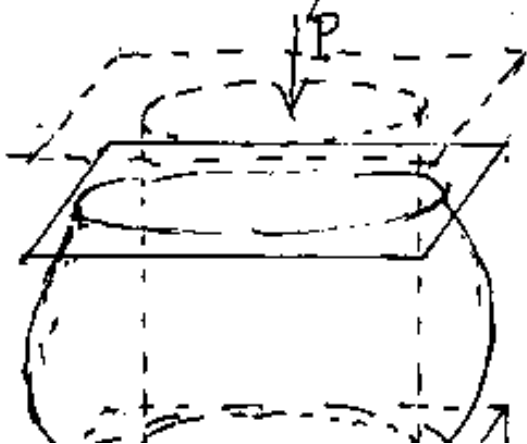
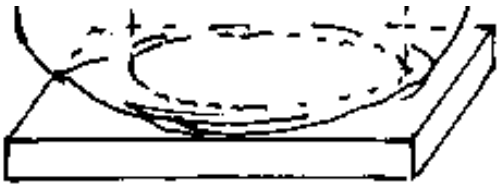
Quindi un vincolo allo sforzo normale di trazione o di compressione, si deforma fino ad immagazzinare l'energia elastica capace di produrre la reazione uguale e

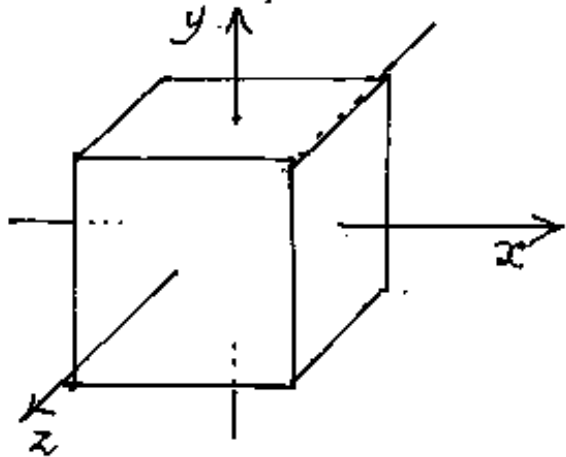
capace di produrre la reazione uguale e contraria!

L'osservazione è acuta e merita di essere esaminata più dettagliatamente nel concetto di energia interna di un corpo.

Le contrazioni trasversali

La legge di Hooke: $\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$, non prevede deformazioni trasversali, solo longitudinali. D'altra parte se prendiamo un cilindretto di creta molle, da formare e lo comprimiamo, assialmente, con due tavolette rigide, (per ripartire le tensioni), notiamo uno spanciamento trasversale, cioè un aumento del diametro oltrechè un accorciamento della lunghezza. S.

Se l'attrito fra tavolette e sezioni del cilindro è superiore all'attrito interno, la massima dilatazione si ha a metà altezza. Con opportuna lubrificazione fra creta e tavoletta è possi

bile ottenere che la defor=
mata sia ancora un
cilindro (accorciato e di maggior diametro)
Il Poisson studiò le contrazioni tras=
versali, a tal fine considerò un cu=
betto di materiale compresso fra due

facce opposte, a due a due con carichi diversi.

Poiché azioni dello stesso segno agenti sulle facce laterali provocano una diminuzione della deformazione assiale (Cioè un aumento della resistenza, per questo si cerchiano le colonne. Del resto, se consideriamo il nostro cilindretto di creta molle posto in un barattolo di latta, dello stesso diametro ed a perfetta tenuta, se con un pistone comprimiamo la creta, non si ha schiacciamento, prima che venga rotto l'involucro metallico, ovviamente la resistenza del cilindretto di creta è molte volte maggiore se è dentro un cilindro metallico di quel diametro.)

È bene subito chiarire che la resistenza di un materiale ... di elasticità

za di un materiale di modulo di elasticità E è possibile riferirla alle tensioni $\sigma < \sigma_{amm.}$ od alle $\varepsilon < \varepsilon_{ammissibile}$.

per Poisson abbiamo:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m}\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right)$$

si noti che le formule di Poisson sono anche la generalizzazione della formula di Hooke

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$$

per cui:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right) \\ &\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m}\right) \\ &\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right) \end{aligned}\right\}$$

dette tensioni ideali $\sigma_{id.}$

per la verifica si ha: $\boxed{\sigma_{id.} \leq \sigma_{amm.}}$

Il coefficiente "$\frac{1}{m}$" detto coefficiente di Poisson è stato determinato sperimentalmente da vari studiosi (vedi Colonnetti S. Vol I Scienza delle Costruzioni – ed. Einaudi 1953)

per il ferro. (mediamente) $\frac{1}{m} = 0,29$

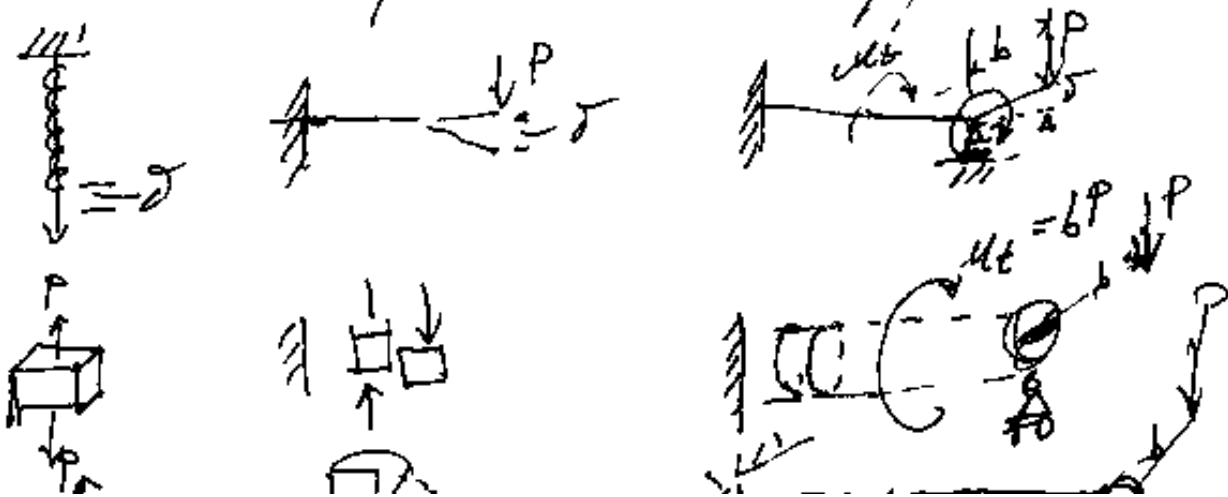
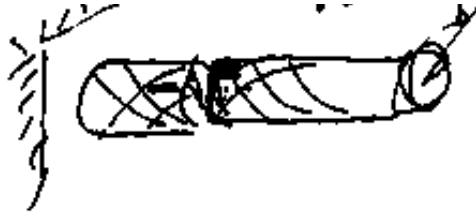
per l'acciaio (") $\frac{1}{m} = 0,29$

per il rame (") $\frac{1}{m} = 0,35$

Il Belluzzi considera m variabile fra $\frac{10}{3}$ e 4

Il Belluzzi considera m variabile fra $\frac{10}{3}$ e 4 cioè: $\frac{1}{m} = \frac{1}{4} \div \frac{3}{10} = 0,25 \div 0,3$. —

Vedremo nelle sollecitazioni a Taglio e torsione, l'importanza di "m" nell'elasticità tangenziale. Definito G il modulo di elasticità tangenziale: $G = \frac{m}{2(m+1)} E$ ove E = modulo di elasticità normale.

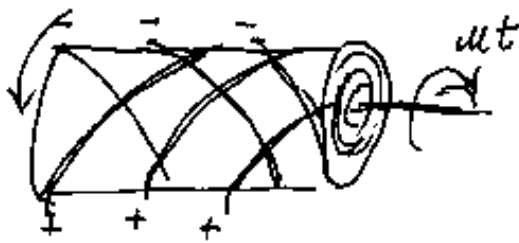
La deformazione implica movimento.
I moti sono di due tipi: traslativo e ruotativo da ciò le equazioni canoniche della statica: $\Sigma F = 0$; $\Sigma M = 0$
La deformazione apparente è la deformazione esterna, connessa alla deformazione interna, e la considerazione di quest'ultima in una sezione del solido ha portato a definire le sollecitazioni.
Per rendere più comprensibile la questione consideriamo alcune modalità per sostenere il peso P e supponiamo sia δ lo spostamento del suo punto di applicazione:

Il lavoro elastico "esterno" compiuto da P $\mathcal{L} = \frac{P\delta}{2}$

ed è lo stesso nei tre casi essendo costante P e δ.

Nel I caso è un allungamento, che può anche

avere una contrazione trasversale.

Nel II caso si ha inflessione, cioè rotazione delle sezioni e scorrimento dovuto al taglio.

Nel III caso che abbiamo voluto ridurre alla pura torsione, i dischetti delle sezioni scorrono l'uno sull'altro e non apparirebbe lo sforzo normale, ma se riguardiamo il solido come costituito da tante superfici cilindriche coassiali, (come i tronchi degli alberi) formate queste da due serie di fibre ad elica, inclinate $\pm 45°$ rispetto all'asse, notiamo che, col verso in figura le fibre + risultano tese, le fibre − risultano compresse.

Però, come abbiamo visto al capitolo del teorema di trasposizione o di Hüygens, oltre a fibre tese e compresse, un solido, ha reazioni a

tese e compresse, un solido, ha reazioni a deformarsi anche per sforzi tangenziali.
Comunque l'insieme delle deformazioni interne (di cui si apprezza solo la conseguente configurazione esterna) implica un im=magazzinamento di energia che equivale al lavoro esterno del carico agente.

Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria, il lavoro esterno equivale alla energia potenziale elastica interna: $\phi = \int \varphi \, dv$.
Se noi consideriamo che, nel caso generale, lo stato di deformazione elastica può dipendere da 21 Coefficienti avremo: che i 21 coefficienti possono esprimersi:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x^2} \; ; \; \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y^2} \; ; \; \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} \; ; \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_z} \; ; \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_z}$$

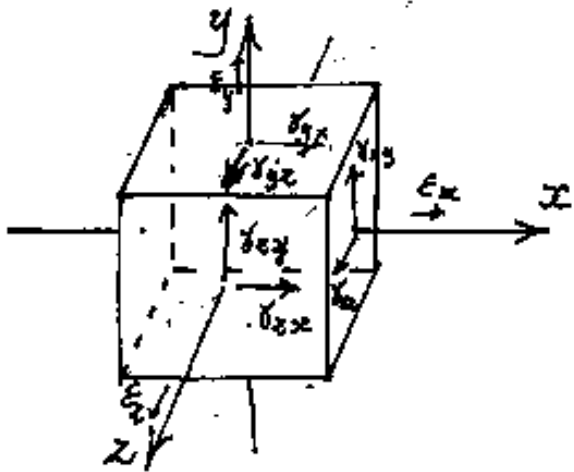
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}} \; ; \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xz}} \; ; \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{yz}}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xy}} \; ; \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xz}} \; ; \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{yz}}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xy}} \; ; \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{xz}} \; ; \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_z \partial \gamma_{yz}}$$

Questi 12 Coefficienti sono nulli per corpi isotropi perciò sono anche chiamati parametri della elasticità

ε_x, ε_y, ε_z ; sono le tre dilatazioni nelle direzioni degli assi.

γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} ; sono i tre scorrimenti sulle facce normali agli assi, ma occorre ricordare che per il principio dell'inversione degli indici: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$; $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$; così possiamo vedere come il primo indice è la giacitura dello faccia su cui avviene lo scorrimento, il secondo indice la direzione dello scorrimento supposto fermo il cubetto base.

Per capire le impostazioni base della teoria dell'elasticità occorre familiarizzarsi col concetto di "derivata parziale" (Vedi vol III) quando la variazione di una grandezza φ è

provocata da diverse variabili, la sua variazione infinitesima $d\varphi$ sarà espressa dal suo differenziale totale ove le derivate parziali sono i coefficienti moltiplicatori delle variazioni: dv_1, dv_2, dv_3... delle singole variabili ed il prodotto di ciascuna è il contributo che essa porta alla variazione della grandezza (+ o -).

cioè:

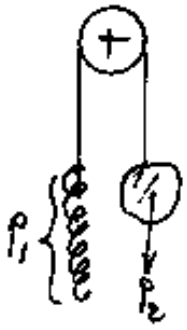
coefficienti moltiplicatori:

$$\left.\begin{matrix}\text{variazione}\\ \text{della}\\ \text{grandezza}\end{matrix}\right\} d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\right)(dv_1) + \left(\frac{\partial \varphi}{dv_2}\right)(dv_2) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_3}\right)(dv_3) + \cdots$$

variazioni delle variabili:

Poiché sappiamo che sono le deformazioni elastiche che provocano le tensioni (e non viceversa); infatti l'azione di un peso, (o di una forza) che compia lavoro perdendo; nel caso del peso, l'energia potenziale gravitazionale; (nel caso di una forza perderà energia cinetica, od elastica o altra forma di energia). Diceva-mo questa "azione", se non è impedita, provoca una accelerazione: $a = \frac{F}{m}$.

Qui il discorso si fa sottile; consideriamo una molla di peso P_1 connessa ad un corpo di peso P_2; attraverso un cavo di peso trascurabile.

(Vedi figura). Se: $P_1 = P_2$ vi è equi-

(Vedi figura). Se: $T_1 = T_2$ vi è equilibrio la molla però resta deformata. La deformazione dipende dal punto ove è connesso il cavo, e la sua deformazione deve essere tale da generare sul cavo una forza pari a P_2.

La molla sia lunga l e sia: $\Delta l = \frac{P_2 l}{EA} = \frac{P}{(EA/l)}$;
(nelle molle, al posto della rigidezza, in fisica, si ha un K detto: costante delle molle, o che: "K è la forza per la deformazione". L'energia elastica che sappiamo: $\frac{P_2^2 l}{2EA}$ diventa: $\frac{K\Delta l^2}{2}$; $P_2 = K\Delta l$)
Noi non usiamo il K dei fisici per evitare confusioni.

Questo problema è il problema dei pilastri soggetti al solo peso proprio (o dei cavi soggetti al solo peso proprio).

Se Q è il peso totale $q = Q/l$ è il peso per unità di lunghezza, nella Sezione y il peso è: qy, quindi il tronchetto dy si deformerà:
$d(\Delta l) = \frac{(qy)\,dy}{EA}$; integrando si ha

$$\Delta l = \frac{ql^2}{2EA} = \frac{Ql}{2EA}$$

Si noti i due casi:

1) $Q \rightarrow$ ▭ $\leftarrow Q$ lo stesso corpo è compresso

(o teso), dal carico concentrato Q' agente nelle due sezioni estreme : $\Delta l = Ql / EA$.

Il lavoro elastico accumulato è: $\mathcal{L} = \frac{Q^2 l}{2EA}$.

2) Il corpo è soggetto al suo peso distribuito "q" sostenuto in una delle sezioni estreme dal carico Q : $\Delta l = \frac{Ql}{2EA}$

Il lavoro elastico accumulato è $\mathcal{L} = \frac{Ql}{4EA}$

Se la molla fosse attaccata al cavo a metà altezza la sua lunghezza rimarrebbe invariata perchè l'accorciamento della zona compressa equivarrebbe all'allungamento della zona tesa.

Un corpo elastico, in assenza di gravità, venga spinto da una forza F; si hanno vari casi
se il corpo è impedito da banda opposta a muover= si la Forza compie il lavoro $\frac{F^2 l}{2EA}$ che si ac= cumula in energia elastica nel corpo stesso.

Affinché ciò si verifichi occorre un lasso di tempo più o meno breve. Ciò che compie il lavoro ela= stico è la differenza fra l'azione F e la reazione proporzionale al Δl provocato: $N = \frac{\Delta l \, EA}{l} = \varepsilon EA = \sigma A$
EA/l = cost., varia Δl e con ciò N quando $N = F$ si ha l'equilibrio $F - N$ = zero non può compiere più lavoro. quindi l'azione di F va decrescendo da F a zero linearmente, ed è l'ulteriore dimostrazione del perché il lavoro elastico compiuto (è) equi

del perché il lavoro elastico compiuto (ad equi= librio avvenuto) è: $\frac{1}{2} F \Delta l$ (quel diviso 2 perché il diagramma dei valori di F è triangolare).

Questi concetti appena accennati saranno svi= luppati dopo aver trattato la teoria dell'elasti= cità.

Altri aspetti dello sforzo normale si hanno nello studio delle curve funicolari.

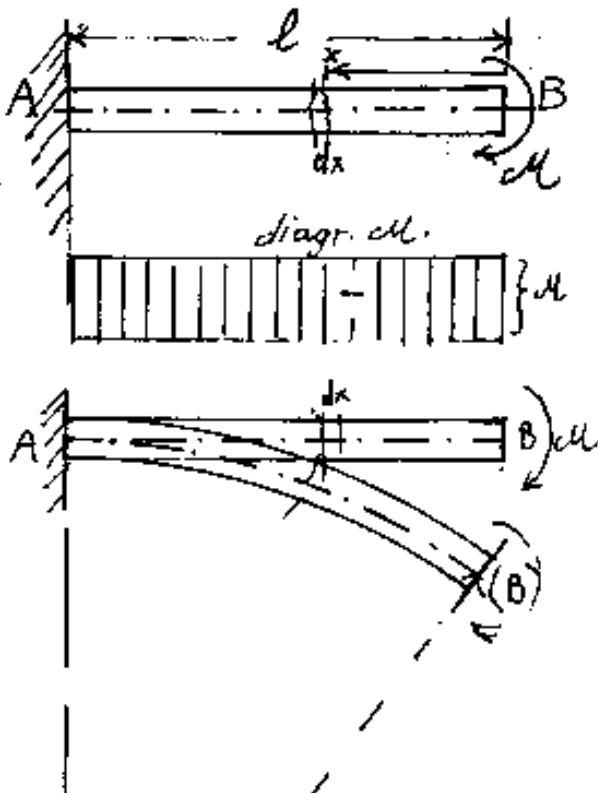
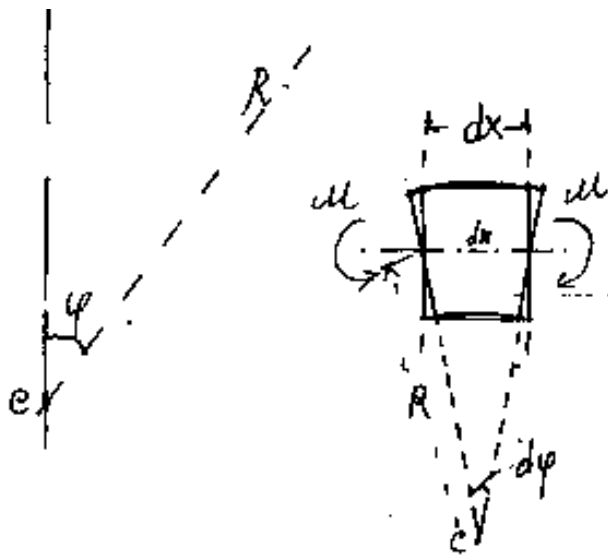
Cavi o funi sospese, curve catenarie e catenoidi, ecc, che ci riserviamo di trattare nel seguito.

Un importante argomento è l'instabilità statica e l'instabilità elastica, entrambe provocate dalla compressione, (mai per trazione). La prima è rilevabile da poligoni articolati (materializzazione dei poligoni funicolari) che abbiano gradi di labilità. La seconda, spesso chiamata "Carico di Punta", si verifica in aste compresse, piuttosto snelle, facenti parte di strutture reticolari, od anche aste singole, lunghe e di piccola sezione (piccolo J) compresse da carichi ba=

ricentrici. (vedi cap. carico di punta)
e cap. strutture reticolari.

Momento flettente $\mathcal{M}$

Positivo se tende le fibre inferiori delle travi orizzontali, o interne al telaio. (Può avvenire che in casi particolari il segno sia indeciso). Il diagramma dei momenti flettenti si disegna sempre dalla parte delle fibre tese.

Consideriamo una mensola, soggetta ad un momento nella sezione estrema: (abbiamo disegnato lo spessore in altezza della trave, anziché il solo asse, per evidenziare come, nella deformazione, l'asse si curva ma rimane di lunghezza invariata, mentre le fibre al di sopra si allungano ed inferiori

mente si accorciano; l'opposto se cambiamo verso ad M.) Consideriamo un tronchetto infinitesimo dx di trave, accettiamo la conservazione delle sezioni piane, il momento che grava sulle sezioni distanti dx provoca la rotazione relativa: $d\varphi$, poiché il tratto

dx di asse è rimasto di lunghezza invariata per la lunghezza dell'archetto dx possiamo scrivere

$$dx = R\,d\varphi \quad ; \quad R = \frac{dx}{d\varphi}$$

Poiché M = cost. lungo tutta la trave anche R è costante, cioè la deformata è un arco di cerchio, e la lunghezza dell'asse è rimasta l.

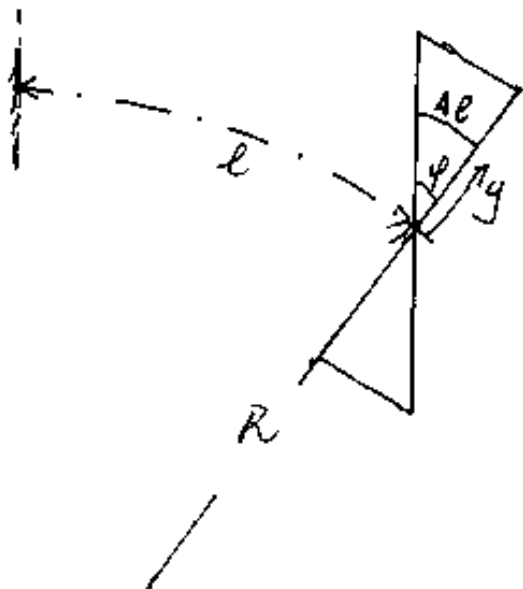
Consideriamo la sezione terminale B ruotata di φ e cerchiamo di misurare l'allungamento Δl di una fibra distante y dall'asse che chiameremo: "asse neutro" non essendo né teso, né compresso.

Per similitudine di triangoli avremo: $\Delta l : y = l : R$

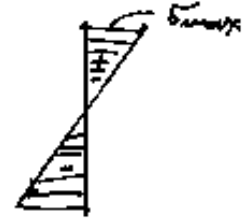
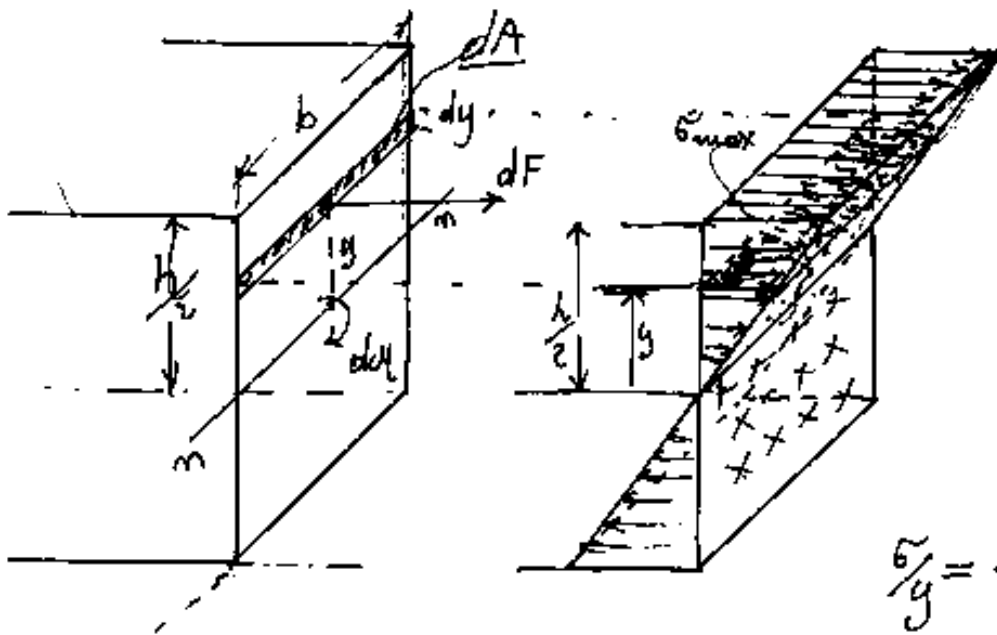
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}$$

per la legge di Hooke $\sigma = E\varepsilon$

$$\sigma = \frac{yE}{R}$$

formula che consente di calco

lare la tensione di una fibra distante y dall'asse neutro, in funzione di E e del raggio R di curvatura.

Quindi: un diagramma delle σ = (tensione normale) provocate da M è del tipo:

σ_{max}

Ma sezione, per sezione la coppia esterna deve essere equilibrata dalla coppia interna, ed avremo:

sezione: $(b \times h)$

$$\sigma : y = \sigma_{max} : h/2$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{max} \cdot y}{h/2}$$

$$\sigma/y = \frac{\sigma_{max}}{h/2} = \text{costante.}$$

Lo strato di fibre distanti y dall'asse neutro (n-n), di spessore dy, che, nella sezione coprono l'area $dA = b \cdot dy$; essendo ciascuna fibra soggetta alla tensione σ complessivamente con la loro deformazione hanno accumulato una energia elastica che genera la forza $dF = \sigma\, dA$

sostituendo: $$dF = \left(\frac{\sigma_{max}\, y}{h/2}\right) dA$$

ma la forza dF genera sull'asse neutro il

momento:

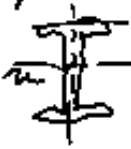
$$d\mathcal{M} = y \cdot dF$$

cioè:

$$\int d\mathcal{M} = \left(\frac{\sigma_{max}\, dx}{h/2}\right)\int y^2\, dA = \frac{\sigma}{y} J.$$

ove: $J = \int y^2\, dA$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro. Avremo quindi:

$$\boxed{\sigma = \frac{\mathcal{M} y}{J}}$$

Importantissima formula di Navier che consente calcolare la tensione σ.

Trova qui giustificazione la definizione di momento d'inerzia come il prodotto di "masse" (abbiamo definito cosa intendiamo per masse) per il quadrato delle distanze; Notate: più una fibra è lontana dall'asse neutro maggiore è la sua tensione, ma la tensione esercitata sull'area dA è una forza, quindi questa forza è proporzionale ad y, ma y è anche il braccio che genera il momento dell di dF. perciò la coppia interna è proporzionale al quadrato delle distanze dall'asse neutro, una volta perché cresce la forza, una volta perché cresce il braccio.

La materia in prossimità dell'asse neutro non contrasta il momento flettente dovuto ai carichi esterni (reagisce come braccio di coppia, cioè allo scorrimento che tratteremo col taglio). Ciò ha portato a sezioni della forma a doppio T ove

fortato a sezioni della forma a doppio T ove le ali sono impegnate con le σ_{max} a generare la coppia interna antagonista.

un doppio T, ai fini di J, equivale ad un tubolare che si otterrebbe sezionando lungo l'asse dell'anima e riattaccando le ali per le punte.

In natura, le nostre ossa, le canne, la paglia ecc sono esempi di distribuzione di materia al bordo sezione.

La formula di Navier: $\sigma = \frac{M y}{J}$ confrontata con: $\sigma = \frac{E y}{R}$ ci consente di ricavare R in funzione di M e delle caratteristiche del materiale e della sezione (costante) $\frac{E y}{R} = \frac{M y}{J}$ detta curvatura l'inverso del raggio avremo:

$$\text{curvatura} = \boxed{\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}}$$

<u>formula base della linea elastica.</u>

ma: $\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EJ}$ perciò la deformazione dovuta ad M diventa: $d\varphi = \frac{M dx}{EJ}$

c.

$$\boxed{\varphi = \int_0^l \frac{M dx}{EJ}}$$

se EJ è costante:

$$\boxed{\varphi = \frac{M l}{EJ}} \qquad \varphi = \frac{M}{(EJ/l)}$$

ove: $\frac{l}{EJ} = G$ = <u>peso elastico</u>

$\frac{\quad}{EJ} = \jmath$ = peso elastico

$\frac{1}{\jmath} = \left(\frac{EJ}{\ell}\right) = x' =$ rigidezza a flessione

attenzione ai simboli:

$w = \frac{EJ}{\ell}$ (rigidezza); $W = \frac{J}{y_{max}}$ = modulo di resistenza

In effetti:

$$\frac{\mathcal{M}}{w} = \varphi = \text{angolo in radianti}$$

$$\frac{\mathcal{M}}{W} = \sigma_{max} = \text{tensione massima in } Kg/cm^2$$

Il modulo di resistenza si trova tabulato per le sezioni dei profilati commerciali e serve:

Verifica:

$$\frac{\mathcal{M}}{W} = \sigma \leq K \quad (K = \text{tensione ammissibile})$$

Progetto

$$W \geq \frac{\mathcal{M}}{K} \quad (\text{dalle tabelle si risale al profilato})$$

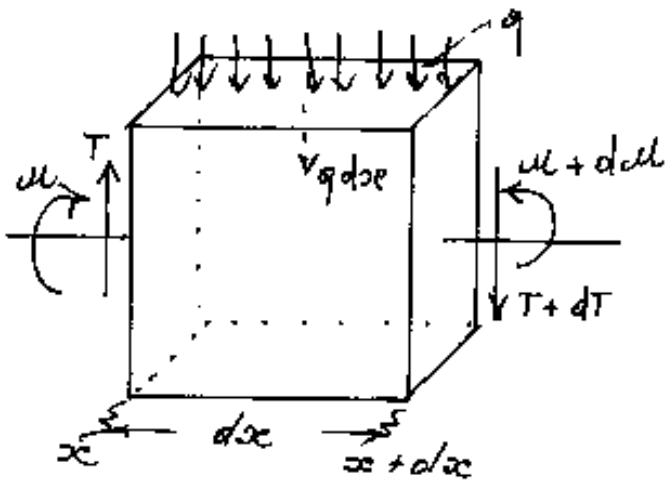
Queste formule sono sòlo indicative, e nella verifica, e nel progetto occorre tener conto di eventuali sollecitazioni composte e saranno trattate nel seguito. In particolare occorre accertare che la connessione interna assicuri il braccio della coppia

connessione interna assicuri il braccio della coppia reattiva (vedi teoremi di trasposizione o di Hüygens sui momenti d'inerzia).

Lavoro elastico

$$\mathcal{L} = \int \frac{\mathcal{M}\, d\varphi}{2} = \boxed{\mathcal{L} = \int_0^l \frac{\mathcal{M}^2 dx}{2EJ}}$$

Relazioni fra M; q; T.

Consideriamo un tronchetto di trave fra le sezioni (x) ed (x + dx), soggetto ad un carico ripartito "q", la cui risultante sarà "q dx".

Sulle facce delle sezioni il tronchetto è sollecitato da (M) ed (M + dM) ; da (T) ed (T + dT).

Se facciamo l'equilibrio alla traslazione verticale in y della sezione (x + dx), avremo:

$$T - q\,dx = T + dT$$

cioè :

$$\boxed{\frac{dT}{dx} = -q}$$

La derivata prima del taglio rispetto ad x, è il carico distribuito q preso di segno opposto.

Se facciamo l'equilibrio alla ruotazione della sezione (x + dx), avremo:

la sezione $(x+dx)$ si ha:

$$T\,dx + \cancel{M} - q\frac{(dx)^2}{2} = \cancel{M} + dM$$

si trascura dx^2 rispetto a dx e si ha:

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = T}$$

La derivata prima del momento rispetto ad x è il taglio.

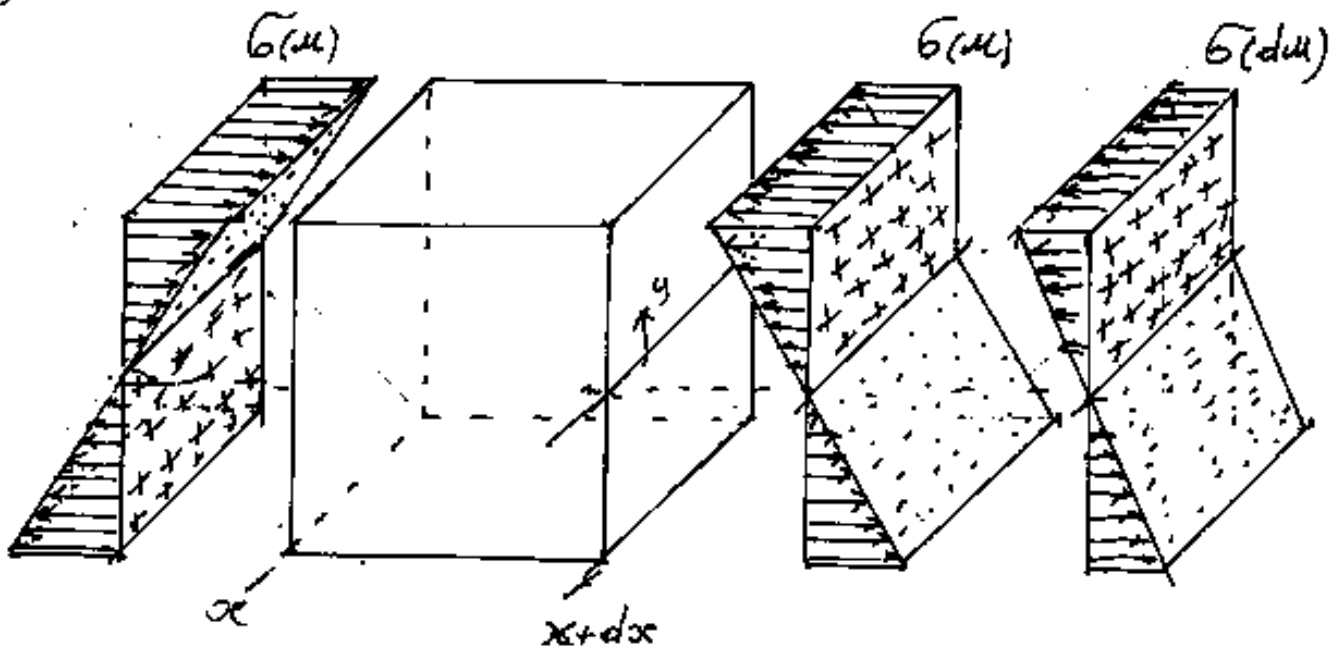
$$\frac{dT}{dx} = \boxed{\frac{d^2M}{dx^2} = -q}$$

La derivata seconda di M rispetto ad x due volte è il carico distribuito preso di segno opposto

Lo Sforzo di Taglio

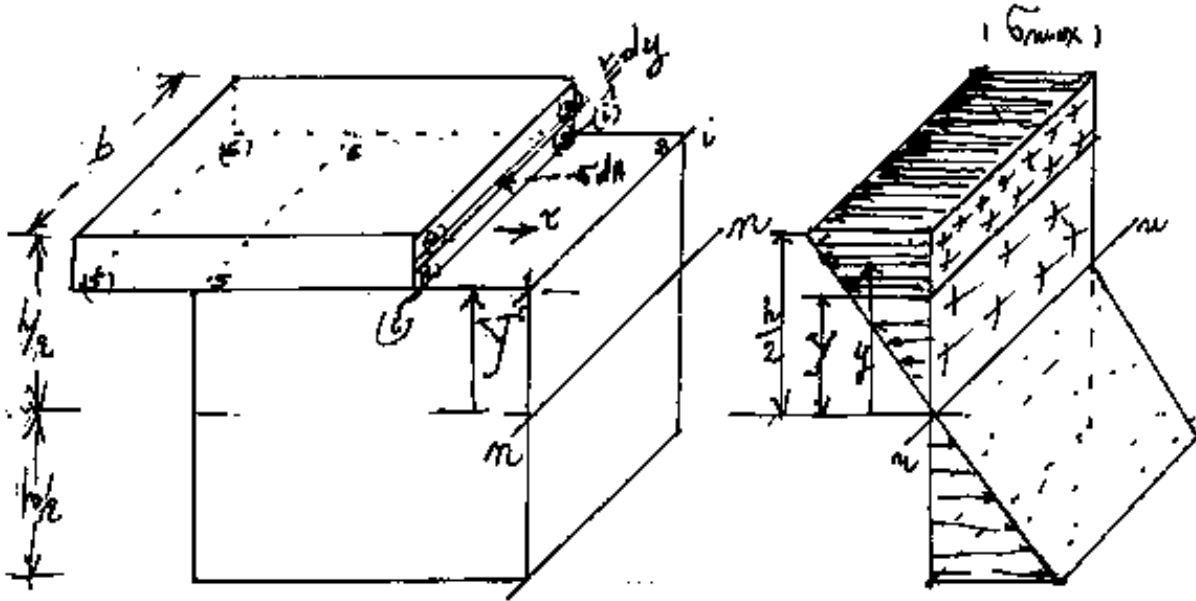
Consideriamo il tronchetto di trave fra le sezioni (x) ed (x + dx), e consideriamo i diagrammi delle tensioni normali agenti sulle sezioni che lo delimitano.

σ(M) σ(M) σ(dM)

x x+dx

Si nota che le tensioni σ dovute ad M agiscono sulle due facce del tronchetto, con versi opposti che si autoequilibrano, (in figura, le fibre superiori sono compresse le inferiori

rispetto all'asse neutro tese).

Ma le azioni delle tensioni σ dovute alla variazione di momento (dM) come si equilibrano? A tal fine consideriamo di sezionare il tronchetto con un piano orizzontale distante y dal piano neutro.

L'azione delle fibre dovuta alle tensioni $\sigma_{(dA)}$ faranno slittare le due parti di solido sul piano di sezione orizzontale di traccia ii

Le tensioni che agiscono sulla faccia superiore sono quelle che distano dall'asse neutro n n da $\bar{y}$ ad $\frac{h}{2}$. Lo strato generico distante y da n n avrà: $\sigma = \left(\sigma_{max} \frac{y}{h/2}\right)$ che agirà sull'area $dA_{1234} = b\,dy$ cioè la forza elementare $dF = \sigma\, dA_{1234}$ $= \frac{\sigma_{max}}{h/2} \cdot y\, dA_{1234}$; integrando la forza sarà:

$$F = \frac{\sigma_{max}}{h/2} \int^{h/2} y\, dA_{1234} =$$

$$I = \frac{\sigma_{max}}{h/2}\int_{y} y\, dA_{1234} =$$

Ma la σ è dovuta a dM perciò: $\sigma_{max} = \dfrac{dM\left(\frac{h}{2}\right)}{J}$
sostituendo e semplificando la spinta dovuta alle σ di dM sarà $F = \dfrac{dM}{J}\displaystyle\int_{y}^{h/2} y\, dA_{1234}$

L'integrale: $\displaystyle\int_{y}^{h/2} y\, dA_{1234} = S_{ii} =$ momento statico rispetto all'asse neutro dell'area $A(1\,2\,3\,4)$.

sostituendo: $$F_{(\sigma)} = \frac{(d\mathcal{M}) S_{ii}}{J}$$

a questa forza si oppone la forza dovuta alle tensioni tangenziali τ che agiscono sul piano di sezione ii, sull'area A_{1256} per impedire lo scorrimento, avremo:

$$F_{(\tau)} = \tau \cdot A_{1256} = \tau \cdot b\,dx$$

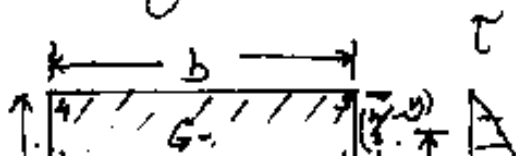
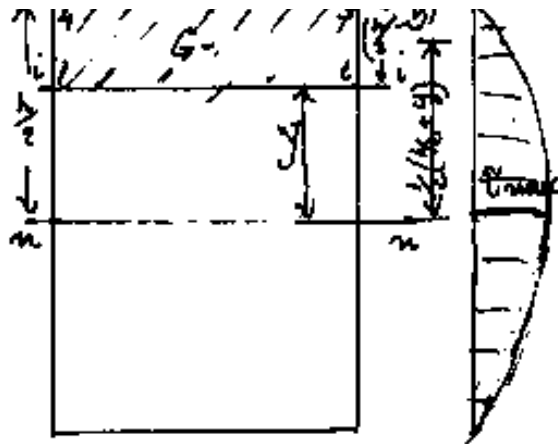
poiché, per l'equilibrio deve essere $F_{(\sigma)} = F_{\tau}$

$$\tau\, b\, dx = \frac{d\mathcal{M}\, S_{ii}}{J}$$

$$\tau = \frac{d\mathcal{M}}{dx} \frac{S}{bJ} \qquad \text{ma: } \frac{d\mathcal{M}}{dx} = T$$

$$\boxed{\tau = \frac{T S_{ii}}{J b}}$$

Formula classica che fornisce la tensione τ sul piano di traccia ii per sezioni rettangolari

Se consideriamo la sezione rettangolare, possiamo calco=

$$\text{lare: } S_{ii} = (A_{1234}) \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right) =$$

$$S_{ii} = b\left(\frac{h}{2}-y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right)$$

$$\boxed{S_{ii} = \frac{b}{2}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right)}$$

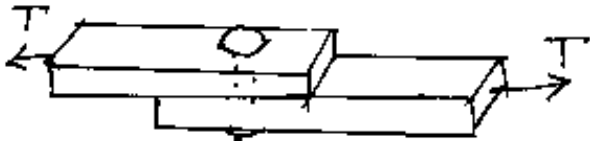
Poiché S_{ii} è l'unica variabile nella formula delle τ vuol dire che per $y = \frac{h}{2}$ la τ è nulla, per $y = 0$ cioè sull'asse neutro la τ è massima e varia

parabolicamente da 0 a τ_{max}:

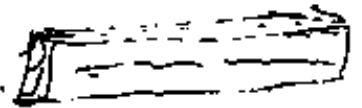
$$\tau_{max} = \frac{T \, \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}\right)}{\frac{bh^3}{12}\, b} = \frac{T \cdot bh^2/8}{bh \cdot bh^2/12} =$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\,\frac{T}{bh} \qquad \text{posto}: \left(\frac{T}{bh} = \tau_{media}\right)$$

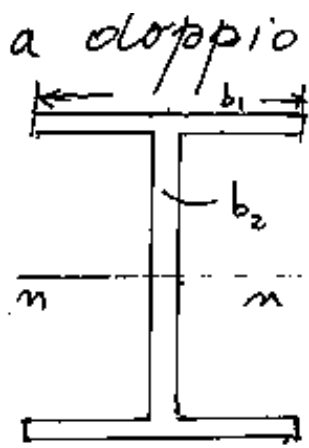
$$\boxed{\tau_{max} = \frac{3}{2}\,\tau_{media}}$$

La τ_{media} si usa per le chiodature:

T T A = area del gambo

$$\tau = \frac{T}{A} \leq \tau_{ammiss.}$$

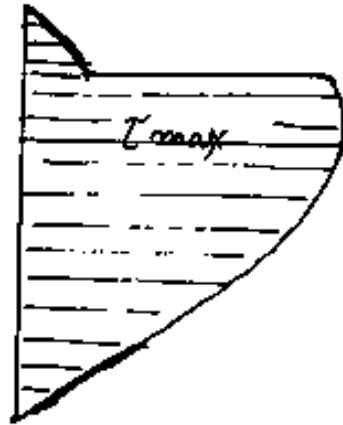
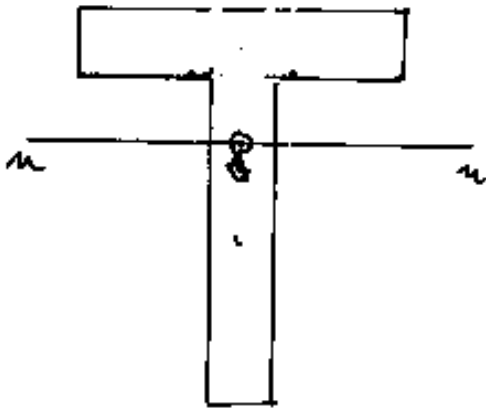
Che la τ sia massimo sull'asse neutro si può rilevare da quei cretti orizzontali a mezza altezza nelle travi di legno dei tetti:

La formula:

$$\boxed{\tau = \frac{T\,S}{J\,b}}$$

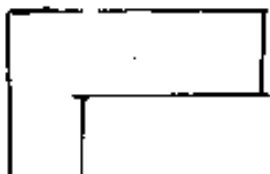
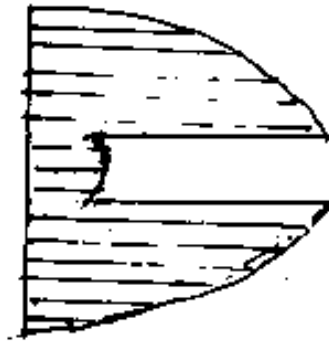
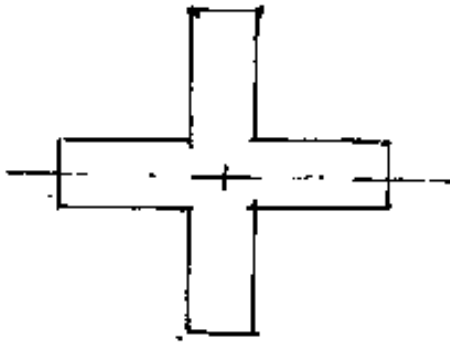
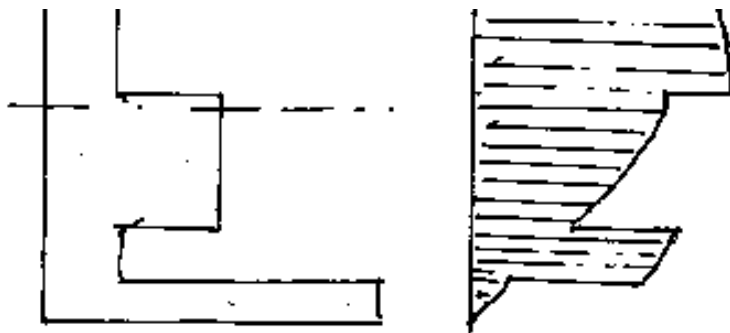
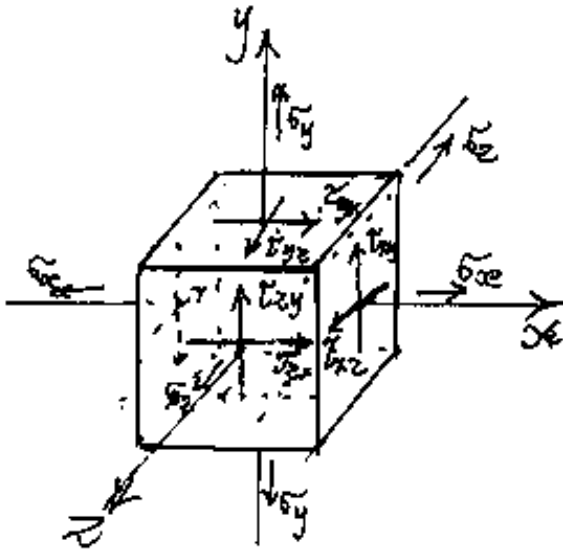
si estende alle strutture scomponibili in rettangoli, per esempio una trave a doppio T ove si hanno due larghezze b

a doppio I ove si hanno due larghezze b cioè b_1 e b_2 su cui si ripartisce l'azione che da la T, e quindi il diagramma τ

b_1 b_2 n n diag. τ

sarà come in figura:

- Si noti il brusco salto delle τ in corrispondenza del salto di larghezza b.

Presentiamo alcuni diagrammi di τ per sezioni scomponibili in rettangoli.

n n

τ_{max}

Tensioni normali e tangenziali

Se consideriamo un cubetto all'interno di un solido, e lo orientiamo secondo gli assi, le tensioni normali σ_x, σ_y, σ_z; agenti secondo il verso degli saranno positive e tenderanno le fibre del cubetto. Le tensioni tangenziali agenti sulle facce del cubetto, saranno affette da due indici: il primo indica la retta di giacitura, cioè se è x vuol dire tutte le facce perpendicolari ad x; il secondo indice è la direzione e sarà una delle due direzioni diverse dalla direzione della retta di giacitura. avremo cioè:

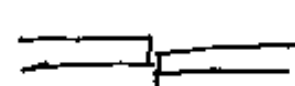
sulla faccia (x) : τ_{xy} e τ_{xz}

" " (y) : τ_{yx} e τ_{yz}

" " (y) : τ_{yx} e τ_{yz}

" " (z) : τ_{zx} e τ_{zy}

Per il principio di inversione degli indici si ha:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} .$$

Sulle facce opposte del cubetto le τ hanno versi

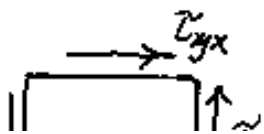
opposti; cioè due τ uguali per l'inversione degli indici sui tre spigoli delle facce positive si incontrano di punta sulle altre di piuma.

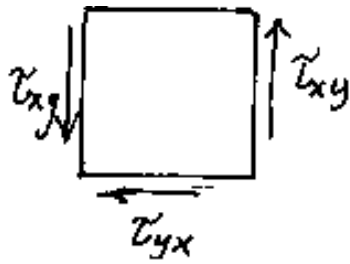
Il taglio propriamente detto si ha sulle facce normali all'asse del solido: cioè: τ_{xy}; (o τ_{xz}).

Il taglio che si verifica sui piani paralleli all'asse è chiamato scorrimento

Noi quindi, per le sezioni rettangolari, abbiamo ricavato la τ_{yx} che per l'inversione degli indici è uguale alla τ_{xy}.

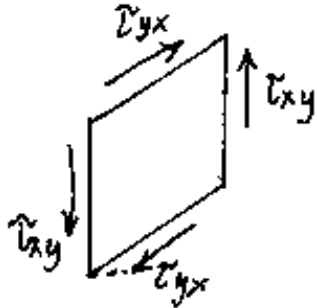
Tale uguaglianza è facile a dimostrarsi: consideriamo, nel piano il quadrato infinitesimo: dx; dy, e consideriamo agenti sui lati le tensioni: $+\tau_{xy}$; $-\tau_{xy}$; $+\tau_{yx}$; $-\tau_{yx}$

τ_{yx}

Le τ su facce opposte hanno

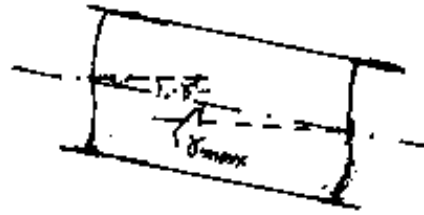
τ_{xy} τ_{xy} τ_{yx}

segni opposti per l'equilibrio alle traslazioni orizzontali e verticali, poiché formano: coppie di uguale braccio $dx = dy$, per l'equilibrio alla ruotazione devono essere di uguale intensità ed incontrarsi sui vertici o di piuma o di punta.

Le deformazioni dovute al taglio

Alle tensioni τ si accompagnano le deformazioni del nostro cubetto, (del nostro quadrato) la deformazione è considerata angolare ed è una variazione dell'angolo retto

τ_{yx} τ_{xy} τ_{xy} τ_{yx}

che si indica con gli stessi indici delle τ, cioè: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$. di cui abbiamo già fatto cenno.

La variazione della τ su una stessa faccia (max sull'asse neutro per sezioni rettangolari semplici) e le connesse deformazioni dell'angolo retto, implica che le sezioni non si possono più considerare piane. Se consideriamo una mensola caricata da un peso sull'estremo libero in modo che il taglio sia costante su tutta la lunghezza, le deformazioni dovute al momento, mascherano quelle dovute al taglio, che sono minori e spesso trascurabili,

ma se consideriamo un tronchetto in prossimità della sezione libera, ove il momento è piccolo, ed esageriamo le deformazioni dovute a T avremo:

(ingrandendo la sezione)

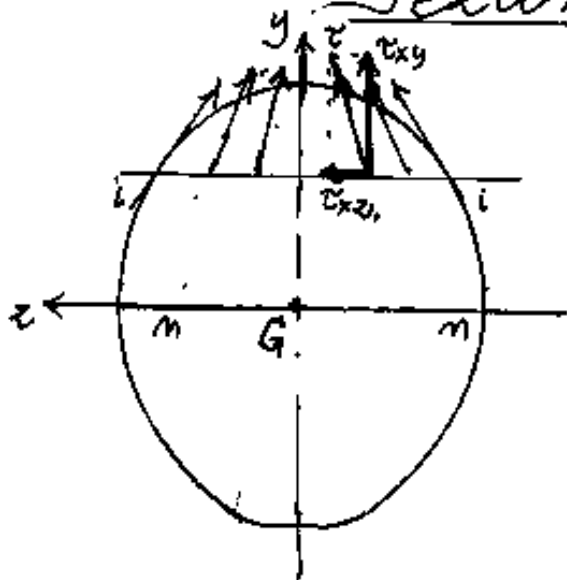
In analogia con la legge di Hooke: $\sigma = E\varepsilon$ poniamo: $\boxed{\tau = G\gamma}$ ove G è il coefficiente di elasticità tangenziale, legato al coefficiente E di elasticità normale dalla relazione:
(m = coeff. Poisson)

$$\boxed{G = E\frac{m}{(2m+2)}} \qquad 2Gm + 2G = mE$$

si può ricavare: $m = \frac{2G}{E-2G} = \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{E}{G}-1}$

cioè: $\boxed{\frac{1}{m} = \frac{1}{2}\frac{E}{G} - 1}$ ed anche: $\boxed{\frac{E}{G} = 2\left(1+\frac{1}{m}\right)}$

trattandosi di valori positivi E è più del doppio di G. —

Sezioni non rettangolari

Noi abbiamo esposto la teoria elementare del taglio, per semplicità consideriamo una sezione non rettangolare ma simmetri

rettangolare, ma simmetrica rispetto all'asse y (direzione che diamo a T)
Ogni τ può scomporsi in τ_{xy} e τ_{xz}, per sezioni simmetriche in y la τ_{xz} troverà simmetrica l'equilibrante sulla stessa retta ii mentre la τ_{xy} equivarrà alla τ_{yx}. Sul bordo le τ risultano tangenti. Se supponiamo la τ_{xy} costante su ii,

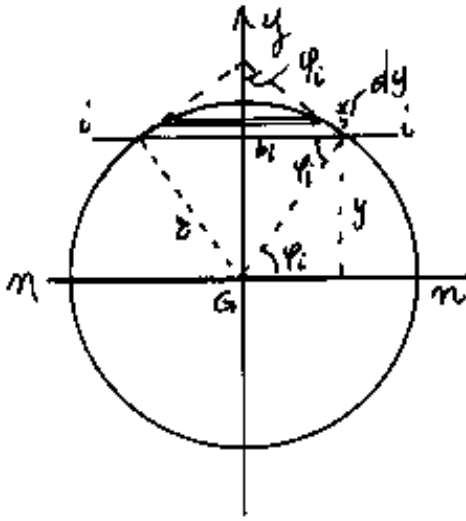
equivale a supporre che tutte le τ agenti su ii si incontrino sulla retta simmetrica y e le loro punte siano alla stessa distanza da ii. In questa ipotesi la τ su y equivale a τ_{xy} ed ha nulla la componente τ_{xz}; le τ sul bordo (tangenziali) hanno la max τ_{xz}; e per ogni ii possiamo avvalerci della relazione:

$$\tau = \frac{T S_i}{J b_i}$$

In questo caso la variazione di b non è brusca, come nel caso delle sezione composte di rettangoli e quindi il diagramma τ sarà continuo. E' come se considerassimo la sezione composta di rettangoli infinitesimi sovrapposti di base ii variabile, ed altezza dy.

Sezione circolare

Cerchiamo di applicare le nostre ipotesi alla

-sezione circolare di raggio r. La lunghezza della

corda generica $ii = b_i = 2r\cos\varphi_i$

lo spessore $dy = ds \cdot \cos\varphi = r\cos\varphi\, d\varphi$

$dA = b\, dy = 2r^2\cos^2\varphi\, d\varphi$;

la distanza da nn è: $y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$$dS = y\,dA = \int_{\varphi_i}^{90} 2r^3\cos^2\varphi \cdot \mathrm{sen}\varphi\, d\varphi =$$

$$\int_{\varphi_i}^{90} -2r^3\cos^2\varphi\, d\cos\varphi = -\frac{2}{3}r^3\cos^3\varphi\Big]_{\varphi_i}^{90} = \boxed{S = \frac{2}{3}r^3\cos^3\varphi_i}$$

Ricordiamo che: $J_{dd} = \frac{r^4 \pi}{4}$ quindi: $\tau = \frac{T S}{J b}$

diventa $\tau = \frac{T \frac{2}{3} r^3 \cos^3 \varphi_i}{\frac{r^4 \pi}{4} (2 r \cos \varphi_i)} =$ $\boxed{\tau = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \cos^2 \varphi_i}$

il diagramma delle τ varia con $\cos^2 \varphi_i$

sull' asse neutro $\varphi_i = 0$ si ha la $\boxed{\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{T}{A}}$

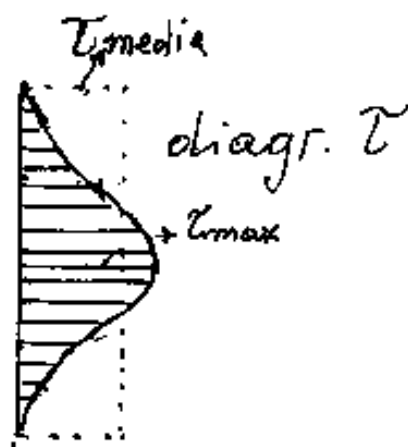
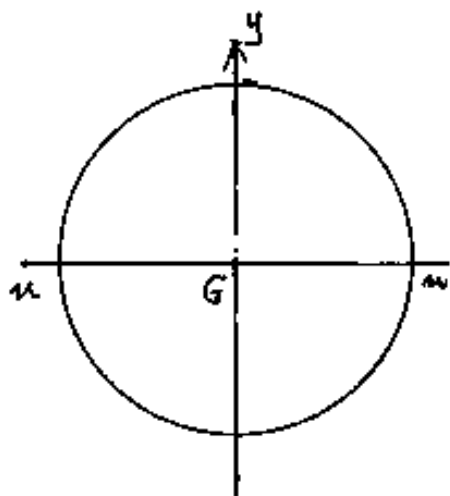
con variazione $(\cos^2 \varphi)$.

y

u G u

τ_{media}

diagr. τ

τ_{max}

si noti che per $\varphi_i = \pm 45° = \pm \pi/4$ la $\tau_{\pi/4} = \tau_{max}/2 = \frac{2}{3} \frac{T}{A}$ ed è un punto di flesso del diagramma delle τ.

E' bene tener presente che queste impostazioni sono solo approssimate e rimandiamo ad altra parte lo studio

rigoroso del problema del taglio.

Poichè le deformazioni dovute al taglio sono molto complesse, si è elementarizzata la questione introducendo un fattore: χ (leggi "chi" con la "c" toscana) detto <u>fattore taglio</u> dipendente dalla forma della sezione e facendo l'analogia con lo sforzo normale

ove $\Delta l = Nl/EA$ per il taglio avremo:

$$\gamma = \int \chi \frac{T\,dx}{GA}$$

cioè il lavoro elastico diventa:

$$\boxed{\mathcal{L} = \int \chi \frac{T^2 dx}{GA}}$$

$$\boxed{L = \chi \frac{T^2 l}{GA}}$$

Il lavoro elastico interno può scriversi:

$$\mathcal{L} = \int_V \frac{\tau_{xy}\gamma_{xy}}{2} dV = \int_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int_l dx \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dA$$

, avendo considerato solo τ_{xy}, il ragionamento è valido solo per le sezioni rettangolari ove sostituendo $\tau_{yx} = \frac{TS_i}{Jb_i}$, abbiamo:

$$\boxed{\mathcal{L} = \int_l dx \int_A \left(\frac{TS_i}{J\,b_i}\right)^2 \frac{dA}{2G}}$$

Evidenziando le costanti si ha:

$$\mathcal{L} = \int_l \frac{T^2 dx}{2GJ^2} \int_A \frac{S_i^2}{b_i^2} dA \quad ; \quad \text{essendo } dA = b_i\, dy,$$

possiamo esprimere $J = \rho^2 A$ da cui: $J^2 = \rho^4 A^2$

se y' e y'' sono le distanze delle ii

$$\mathcal{L} = \int_l \frac{T^2 dx}{2GA} \cdot \frac{1}{\rho^4 A} \int_{y'}^{y''} \frac{S_i^2}{b_i} dy$$

e ponendo

$$\chi = \frac{1}{\rho^4 A} \int_{y'}^{y''} \frac{S_i^2}{b_i} dy$$

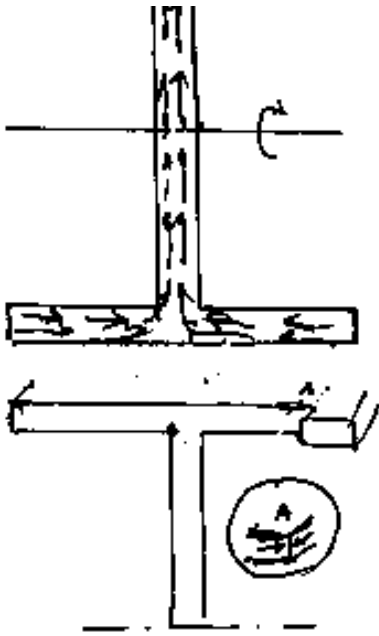
$$\mathcal{L} = \chi \frac{T^2 l}{GA}$$

Il fattore taglio χ per il rettangolo: $\chi = 6/5$
per il cerchio "si dà comunemente: $\chi = 10/9$" $= 1,111\ldots$
mentre lo studio rigoroso porta $\chi = 1,175$. —

Questi dati sono stati ripresi da O. Belluzzi - scienza delle costruzioni - vol. I. — ed Zanichelli .. . - Bologna - 1948.

Come si vede, per sezioni convesse χ varia poco sopra l'unità; 1,2 per il rettangolo e quadrato 1,111 per il cerchio e l'ellisse, ma sale per sezioni miste per un doppio T: I del 16 il Belluzzi calcola $\chi = 2,28$.

Importantissimo lo studio sul flusso delle τ nella sezione sopratutto se non simmetriche.

Tratteremo l'argomento

al Centro di Taglio o di Torsione
dopo aver fatto il capitolo
sulla sollecitazione a
torsione. –

La Torsione

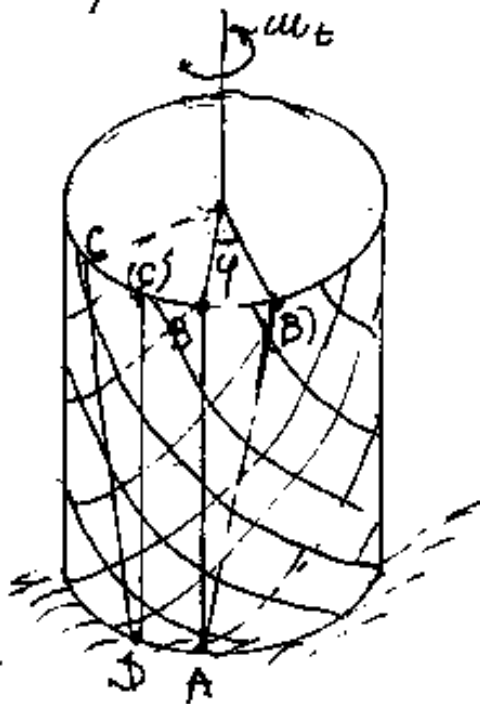
La sollecitazione a torsione è provocata da un momento (M_t = momento torcente) che ha per asse, l'asse dell'asta soggetta a torsione. M_t si considera positivo quando le sezioni dell'asta soggetta a torsione tendono a muoversi come nello svitamento della vite destrogira fra dado e bullone.

Le sezioni, su cui si affacciano le due parti contigue di asta, tenderebbero a slittare l'una sull'altra, se la coesione del solido non generasse tensioni tangenziali che ne impediscono lo slittamento, ma subiscono uno scorrimento elastico capace di generare momenti interni equilibranti; e

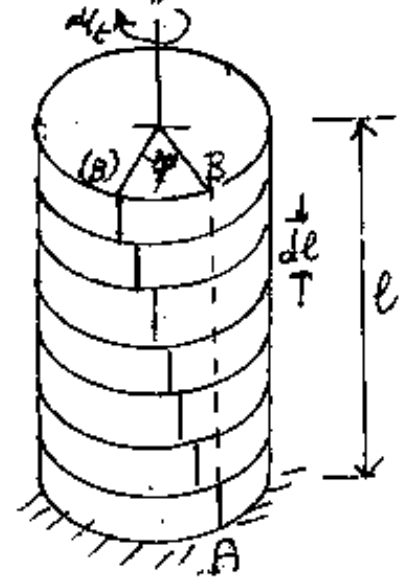
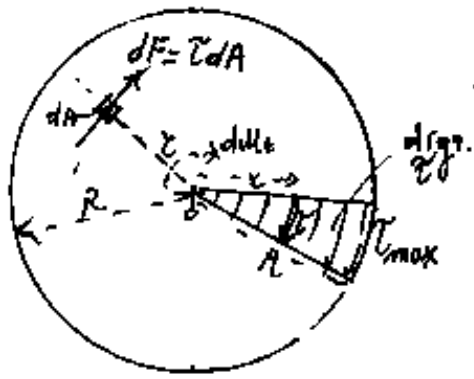
ciò si verifica quando, (se φ è l'angolo di rotazione della sezione libero), si genera nel solido una energia elastica capace di equilibrare il $\mathcal{M}_t$ - agente.

E' bene rilevare subito che $\mathcal{M}_t$ non è una sollecitazione riferibile ad un sistema piano di Forze.

Aste cilindriche di sezione circolare

Basta pensare al lavoro trasmesso dagli assi dei motori, per rilevare l'importanza di questa trattazione. (alberi di trasmissione).

Consideriamo un cilindro incastrato alla base e notiamo le fibre sulla superficie laterale; per effetto di M_t, la fibra $\overline{AB}$ andando in $A(B)$ si è allungata, mentre la $\overline{DC}$ andando in $D(C)$ si è accorciata, cioè le fibre inclinate come la $\overline{DC}$ si accorciano mentre le fibre inclinate di verso opposto si allungano, e poiché, in ogni superficie cilindrica coassiale, ad ogni fibra con una certa inclinazione corrisponde una fibra inclinata di verso opposto, per

effetto della torsione, il solido non si è complessivamente né allungato, né accorciato; e quindi non ha subito neppure le contrazioni trasversali, (radiali).

La deformazione interna è quindi un puro scorrimento elastico, si può pensare ad una pila di dischetti circolari, connessi fra loro con materiale elastico. Se materializziamo questi dischetti (come tante monete), vedremo una linea come la $\overline{AB}$, per effetto del momento torcente in figura (negativo) frammentarsi in tanti segmenti con B che finisce in (B), e si nota come ogni dischetto ruoti rispetto al dischetto sottostante di un angolo: $d\varphi$; lo scorrimento delle tensioni tangenziali, fa accumulare nel cilindro l'energia elastica capace di produrre un M_t uguale e di segno opposto che equilibra l'M_t agente.

Consideriamo quindi una

sezione circolare di raggio R, ed un raggio r variabile da zero ad R. Se consideriamo le τ (tensioni tangenziali) proporzionali al loro scorrimento, possiamo fare il diagramma delle τ, ove la τ_{max} sarà sul bordo e la tensione

τ in posizione generica sarà: $\tau = \frac{\tau_{max} \cdot r}{R}$.

Ma la τ agendo sull'area dA provoca la forza $dF = \tau\, dA$ e tale forza che si trova distante r dall'asse provoca il momento torcente $dM_t = r\, dF$

sostituendo: $dM_t = r\,\tau\, dA = \frac{\tau_{max}}{R} r^2 dA$.

Per la proporzionalità: $\frac{\tau_{max}}{R} = \frac{\tau}{r}$ = costante indipendente dalla variabile r, perciò integrando, e ricordando che: $\int_0^R r^2 dA = J_p$ = momento d'inerzia polare

$$\int dM_t = M_t = \int \frac{\tau_{max}}{R} r^2 dA = \frac{\tau_{max}}{R} \int r^2 dA = \frac{\tau_{max}}{R} J_p$$

$M_t = \frac{\tau}{r} J_p$ da cui la tensione

tangenziale: $\boxed{\tau = \frac{M_t \cdot r}{J_p}}$

Formula che calcola la tensione τ a distanza r dall'asse; ed è l'analoga della formula di Navier per la flessione semplice, ove, la tensione normale σ a distanza y dall'asse

la tensione normale σ a distanza y dall'asse neutro, abbiamo visto: $\sigma = \frac{\mathcal{M} y}{J}$; ove J era il momento d'inerzia assiale rispetto all'asse neutro.

Ricordando che, il modulo di elasticità per deformazioni tangenziali è $G = \frac{m}{2(m+1)} E$, e che la deformazione φ per flessione semplice era $\varphi = \int \frac{\mathcal{M} dx}{EJ}$ la deformazione per torsione:

$$\boxed{\varphi = \int \frac{\mathcal{M}_t \, dl}{G J_p}}$$

Lavoro elastico per solidi cilindrici a se= zione circolare, soggetti a torsione é:

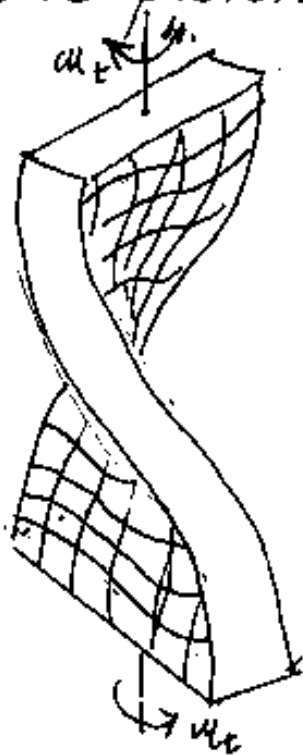
$$\mathcal{L} = \int_0^l \frac{M_t^2 \, dl}{2 G J_p}$$

E' appena il caso di ricordare le bilance a torsione di Coulomb per misurare le forze debolissime di attrazione o repulsione di corpi elettrizzati o magnetizzati, o addirittura gravitazionali.

Solidi di sezione non circolare

Per i solidi di sezione diversa dalla sezione circolare le formule trovate non sono più applicabili. Infatti, mentre per le sezioni circolari, nella torsione, le sezioni stesse si mantengono piane, le sezioni diverse dalle sezioni circolari non si mantengono

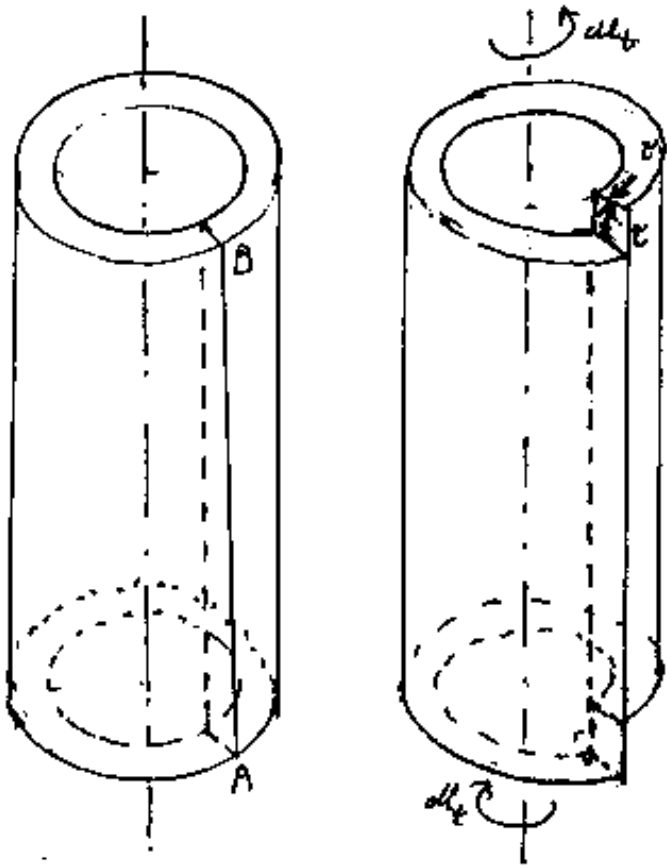
dalle sezioni circolari, non si mantengono
piane, lo studio rigoroso viene fatto con
la teoria dell'elasticità.
Che le sezioni non si mantengono piane.
si può verificare sperimentalmente pren=
dendo un prisma parallelepipedo, molto

elastico, e disegnare sulle facce laterali una quadrettatura, quindi applicare alle sezioni estreme un momento torcente di verso opposto (a seconda che l'azione è di svitamento o di avvitamento della vite destrogira avremo torsione positiva o negativa, in figura è negativo M_t)

Vedremo le fibre longitudinali parallele agli spigoli diventare eliche cilindriche, mentre le linee parallele ai segmenti di base diventano ondulate.

Però anche la teoria dell'elasticità, pur riuscendo a simboleggiare in complesse formule il fenomeno, pure da tali formule non è stato possibile esplici-

tare le tensioni tangenziali τ o gli scorri=
=menti γ ove sappiamo: $\boxed{\tau = G\gamma}$ che è
l'analogo della legge di Hooke: $(\sigma = E\varepsilon)$
Però le formule che correlazionano la
la τ, la γ e gli elementi della sezione
sono uguali a formule che correlazionano
gli elementi della sezione con altre grandezze

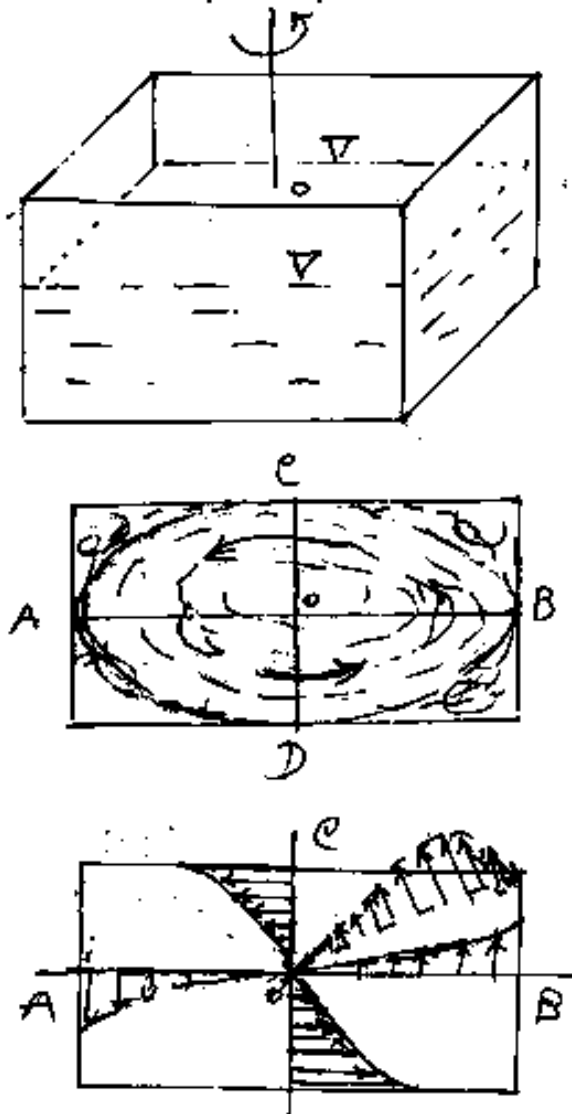
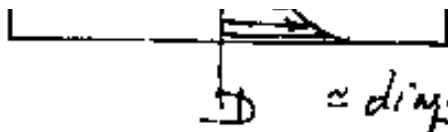
fisiche; nascono così dei procedimenti di calcolo detti per analogia.

Nella torsione vale per le τ il principio dell'inversione degli indici, cosa che, al solito, è possibile constatare sperimentalmente.

Infatti se consideriamo una corona circolare (per la quale valgono ancora le formule della sezione circolare) che presenti un taglio secondo un piano longitudinale, il modello può essere di cartoncino avvolto a cilindro, se noi agiamo alle estremità come i momenti in figura, il nostro cartoncino si deformerà come disegnato, ove le τ indicate sono uguali.

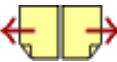
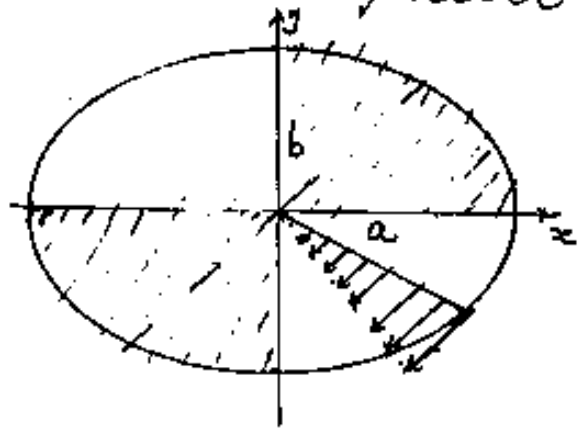
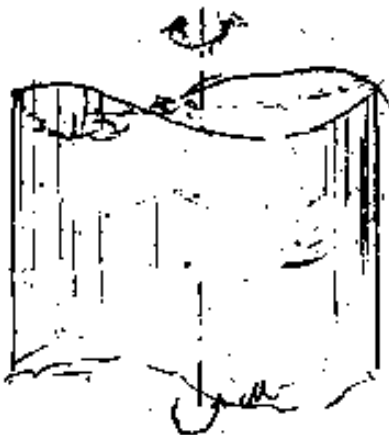
segnati, ove se i indicate sono uguali.
Anche un foglio di carta avvolto a cilindro fa vedere lo scorrimento se lo sollecitiamo agli estremi con M_t.
L'analogia più conosciuta è forse l'analogia idrodinamica ove la tensione τ, che, come abbiamo detto, non era esplicitabile,

tiene il posto della velocità di un fluido che ruoti in un serbatoio identico alla sezione del solido.

Analogia idrodinamica.

Consideriamo una sezione rettangolare di un solido astiforme soggetto a torsione; e consideriamo una vasca rettangolare, nelle stesse proporzioni della sezione.

La vasca contenga un liquido che ruota, mantenendo costante il livello. Poiché la portata, attraverso le varie sezioni, deve mantenersi costante, avendo lo stesso livello, (stessa altezza), il liquido attraverso la sezione $\overline{OC}$, (più stretta della sezione $\overline{OA}$)

≃ diagr. τ

dovrà avere in $\overline{OC}$ una velocità maggiore.

Poiché per il moto dei fluidi, pur con difficoltà si possono misurare velocità, e quindi circa tracciarne il diagramma, che proporzionalmente è il digramma τ.

Più facile la determinazione per sezioni ellittiche ove il fluire del liquido pur avendo velocità diverse (minore quando attraversa il semidiametro a, maggiore quando attraversa il semidiametro b, essendo a > b) tuttavia non incontra gli ingorghi che si verificano ai vertici del rettangolo.

Per l'ellisse la teoria dell'elasticità trova che le linee di flusso sono ellissi <u>omotetiche</u> (simili e similmente disposte), ed essendo al bordo la τ con direzione tangenziale, all'interno su un diametro le τ saranno dirette come il diametro coniugato.

Nell'ellisse le sezioni non si mantengono piane.

L'area dell'ellisse $A = ab\pi$.

La tensione in un punto ge=

merico della sezione:

$$\tau = \frac{M_t}{A/2}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}$$

Si noti che dividendo la sezione in quattro quadranti, due quadranti opposti al centro fanno curvatura verso il basso, gli altri due verso l'alto.

Se scomponiamo la tensione tangenziale massima (che si trova agli estremi del diametro minore dell'ellisse) secondo due fibre inclinate di ±45° rispetto alla direzione dell'asse longitudinale, abbiamo su una trazione, sull'altra compressione cioè quelle tese si allungano e quelle compresse si accorciano, ciò fa vedere come le sezioni non restano piane e come invertendo il segno di Mt. si invertono le curvature nei quadranti dell'ellisse.

$$\tau_{max} = \frac{2M_t}{\pi a b^2}$$

Agli estremi del diametro maggiore, per l'analogia idrodinamica la τ sarebbe minima fra le tensioni tangenziali, non minima in assoluto, (il Belluzzi la indica con τ_1)

$$\tau_1 = \frac{2M_t}{\pi a^2 b}$$

L'angolo di quanto hanno ruotato intor

so all'asse due sezioni di un'asta lunga l e con sezione ellittica di diametri $2a$; $2b$; è dato da:

$$\vartheta = \frac{M_t l}{\pi G} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^3 b^3}$$

Il lavoro elastico:

$$\mathcal{L}_c = \frac{M_t^2 \cdot l}{2\pi G} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^3 b^3}$$

Per la <u>sezione rettangolare</u>, Barré di De Saint Venant ha calcolato, in funzione del rapporto dei lati: $a/b = n$ con $a > b$ opportune tabelle di valori che applicati nelle rispettive formule consentono di calcolare τ_{max} che si trova a metà del lato maggiore (come si può vedere dai diagrammi τ già riportati) ed anche l'angolo θ/l riferito alla lunghezza unitaria.

$n = a/b$	1	1,1	1,2	1,25	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,75	1,8
α	4,804	4,67	4,57	4,52	4,48	4,40	4,33	4,27	4,21	4,18	4,16
β	7,114	6,49	6,02	5,82	5,65	5,35	5,11	4,91	4,74	4,67	4,60

$n = a/b$	2	2,25	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10	20	∞
α	4,07	3,97	3,88	3,74	3,55	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00
β	4,37	4,16	4,01	3,80	3,56	3.43	3,35	3,26	3,20	3,10	3,00

$$\tau_{max} = \alpha \frac{M_t}{a b^2}$$

$$\tau_{max} = \alpha \frac{\ldots}{a b^2}$$

$$\theta = \beta \frac{M_t l}{G a b^3}$$

e la τ_{max} in funzione di θ

$$\tau_{max} = \frac{\alpha}{\beta} G b \cdot \theta$$

Poiché spesso si usano bilance di torsione, od

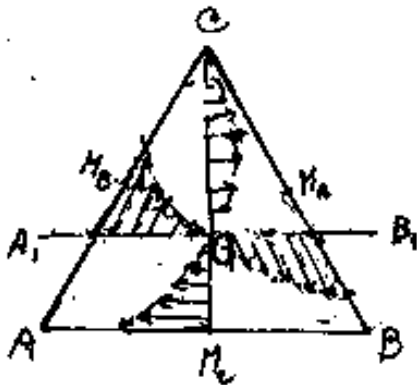
orologi ove un braccio, con due pesi agli estremi, è sostenuto da una linguetta elastica di sezione rettangolare con $a \gg b$ (basta $a > 4b$) per vedere dalle tabelle che per $n > 4$, $\alpha = \beta$, cioè:

$$\boxed{\tau_{max} = G b \vartheta}$$

con $G \cong 800\,000$ Kg/cm²

$b \cong \frac{1}{100}$ cm $\qquad \tau_{max} = 800$ Kg/cm²

$\vartheta = 2$ rad.

$l = 20$ cm

Sezioni triangolari equilatere

Se pensiamo al liquido che circola, a livello costante, in una vasca triangolare il centro è G e la velocità in $\overline{MG}$ deve essere mediamente doppia di quella occorrente a far passare la stessa quantità di liquido dalla sezio-

ne $\overline{GC}$. Ogni altro segmento uscente da G è maggiore di GM affinché arrivi al perimetro; perciò nelle mezzerie M dei lati si ha la τ_{max}. Per simmetria una volta individuato il diagramma τ su una mediana, deve essere valido anche per le altre, eventualmente rovesciati se cambia segno M_t. (abbiamo ripreso il diagramma esposto dal Belluzzi)

Occorre ricordare che la trattazione della solle=
citazione a torsione, è qui solo approssimata
(come lo è stata per lo sforzo di taglio), ci ri=
serviamo una trattazione più organica per
quando avremo esposti i principi ed i consequen=
ti metodi di calcolo necessari.
(Il Belluzzi avverte che le soluzioni del problema della
torsione nei prismi di sezione ellittica, rettangolare, trian=
golare e di altre forme, furono date da B. De Saint
Venant: "Memoire sur la torsion des prismes ..eee..")
Notiamo dal diagramma riportato (cfr. O. Belluzzi
Scienza delle Costruzioni Vol I) che il diagramma
sulla mediana CM_c deve essere identico a quello
sulla mediana AM_c; vien fatto di domandarci:
com'è che nella breve variazione da $\overline{GM_A}$ a $\overline{GB_1}$ il
diagramma cambia curvatura? E la cambia fra C ed M_a.
Siamo spiacenti, almeno per ora, di non poter
chiarire il dubbio; pensare che il diagramma non

chiarire il dubbio; pensare che il diagramma non sia esatto, è difficile, vista la cura con cui il Belluzzi espone i dati nel suo testo; d'altra parte la logica della simmetria farebbe prevedere rotori nei vertici.

Il fattore di torsione

Analogamente a quanto già detto sul fattore taglio come coefficiente, dipendente solo dalla forma della sezione, da applicarsi a formule semplici, anche per la torsione consideriamo un fattore "q" detto fattore di torsione e dipendente solo dalla forma della sezione.

L'analogia delle formule è con la flessione, ricordando infatti che l'angolo $\varphi = \frac{M\,l}{E\,J}$, l'angolo θ di rotazione in torsione diventa

$$\theta = q \frac{M_t\, l}{G\, J_p}$$

Per sezioni circolari piene o cave: $q = 1$, come abbiamo già visto.

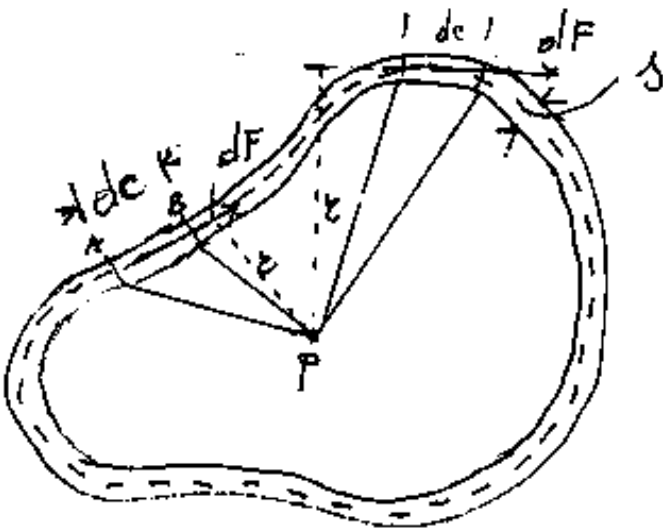
Saint Venant suggerì: $q = 40 \frac{J_p^2}{A^4}$ per sezioni di profilati.

... di progetto.

per l'ellisse $q = 4\pi^2 = 39,48$; per il rettangolo varia da quadrato ($q = 42,7$) a segmento ($q = 36$) ; per il triangolo equilatero $q = 45$.

Il lavoro elastico:

$$\mathcal{L} = \frac{M_t \theta}{2} = q \frac{M_t^2 \, l}{2 G J_p}$$

Travi tubolari con parete sottile

Si abbia una trave con sezione cava, cioè tubolare di spessore s piccolo e costante.

Il diagramma delle τ ci dice che la tensione è massimo sul bordo esterno e minima sul bordo interno. Noi consideriamo una τ media agente sul bordo medio (tratteggiato). Se consideriamo un tratto "dc" di contorno la cui area $dA = s\,dc$ moltiplicata per τ dà la forza $dF = \tau\,dA = \tau s\,dc$.

Se consideriamo un punto P interno alla sezione e distante r da dc, dF provoca in P il momento torcente elementare: $dM_t = r\,dF$

$dM_t = \tau s r\,dc$, ma: $r\,dc = 2d\Omega$ è il doppio dell'area

$dM_t = i_s\, r\, dc$, ma: $r\, dc = 2d\Omega$ è il doppio dell'area elementare ABP. Ciò si verifica per tutti i triangoli di vertice P e base dc. Estendendo dc a tutto il bordo medio (integrando dc) si ottiene il doppio delle aree dei triangoli di base dc, cioè il doppio dell'area Ω delimitata dal bordo medio. e l'insieme delle dF che equilibra M_t.

$dM_t = \tau s\, r\, dc = \tau s \cdot 2 d\Omega$ integrando e risolvendo τ

$$\boxed{\tau = \frac{M_t}{2\Omega s}}$$

Formula di Bredt che fornisce la τ per le travi a sezione tubolare sottile

L'energia elastico accumulata in una trave lunga l è pari al lavoro esterno di M_t

$L_e = \frac{M_t \theta}{2}$ ove θ è l'angolo di rotazione delle due sezioni terminali distanti l (preferiamo indicare θ/l l'angolo per unità di lunghezza)

Poiché: $G\frac{\theta}{l} = \tau$; $\frac{\theta}{l} = \frac{\tau}{G}$; $dL_i = \frac{\tau}{2} \cdot \theta/l \; dV$

$$L_i = \frac{1}{2}\int \frac{\tau^2}{G} dV = \frac{1}{2G}\int_c \tau^2 l\, s\, dc = \frac{l}{2G}\int \frac{M_t^2}{4\Omega^2 s} dc = \frac{M_t \theta}{2}$$

$$\theta = \frac{M_t l}{4G\Omega^2}\int_c \frac{dc}{s} \qquad \boxed{\theta = \frac{M_t\, l\, c}{4G\Omega^2 s}}$$

Per la τ ammissibile vi sono varie teorie:

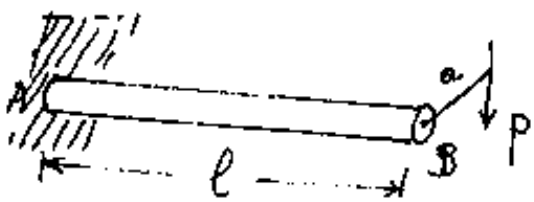
detta K la σ ammissibile a sforzo normale

per Saint Venant: $\left(\frac{m+1}{m}\right)\tau \leq K$

cioè: $\tau \leq \frac{mK}{m+1}$

secondo Mohr: $\tau \leq 0{,}5\,K$

Prove sperimentali per trovare m, G, E.

Un metodo veramente ingegnoso è stato proposto da Kirchhoff.

All'estremo libero di un'asta incastrata, lunga l e di sezione circolare, è applicato, con un braccio rigido a un peso P.

Perciò l'asta è soggetta al momento torcente costante $\mathcal{M}_t = Pa$; al taglio costante $T = P$, al momento flettente linearmente variabile $\mathcal{M} = Px$, fino al massimo $\mathcal{M}_{max} = \mathcal{M}_A = Pl$.

Per misurare gli angoli φ e θ dovuti ad $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{M}_t$ utilizziamo il metodo Poggendorff, poniamo cioè in B uno specchietto come in figura orizzontalmente.

Sappiamo che un raggio di

luce che cada normalmente sullo specchietto quando lo specchio ruota, si riflette con angolo doppio di quello dello specchio. Perciò applicato il carico, il raggio riflesso darò le coordinate dello spostamento.

Sappiamo che $\varphi = \frac{Pl^2}{2EJ}$; $\theta = \frac{Pal}{GJ_p}$

$$\frac{E}{G} = \frac{Pl^2/2\varphi J}{Pal/\theta J_p} \qquad (2J = J_p)$$

cioè: $\boxed{\frac{E}{G} = \frac{\theta}{\varphi}\frac{l}{a}}$

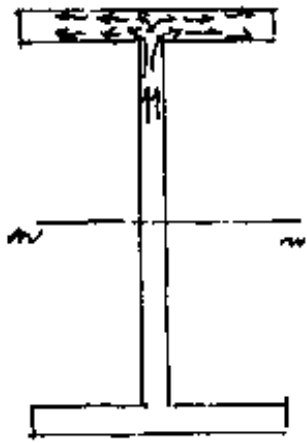
Se la tavola su cui si riflette il raggio luminoso dista d dallo specchietto, le coordinate $y = 2\varphi d$ $x = 2\theta d$ cioè il rapporto delle coordinate è il rapporto degli angoli.

Posto: $\omega = E/G$ avremo: $\boxed{m = \frac{2}{\omega - 2}}$

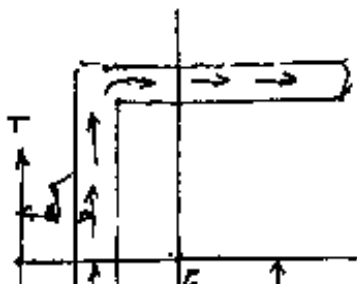
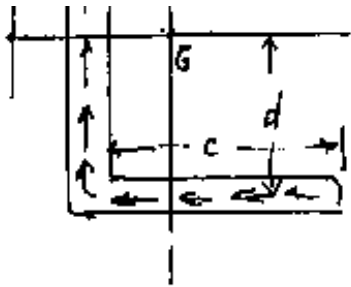
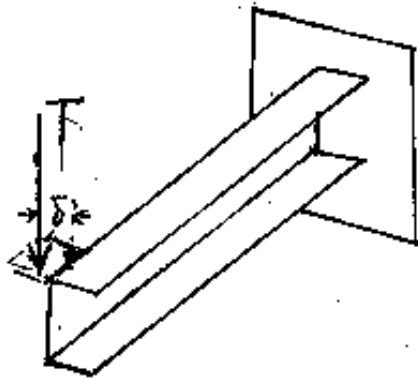
$$E = Pl^2/2\varphi J \qquad ; \qquad G = Pal/\theta I_p$$

però i valori di E e G risultano più difettosi perchè sono funzioni di più grandezze, mentre il loro rapporto è proporzionale al rapporto $\frac{\theta}{\varphi}$.

Il flusso delle τ nelle sezioni dei profilati

Per sezioni simmetriche soggette a taglio, non vi sono particolari problemi. Per esempio un doppio T reagisce a taglio quasi esclusivamente con l'anima. Le τ che percorrono le ali si attenuano notevolmente via via che si allontanano dall'anima.

Ali molto larghe diventano inefficienti anche a flessione

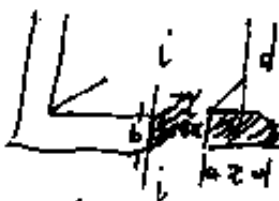
Il centro di taglio o di torsione

Quando la sezione non è simmetrica, per esempio un C, la continuità delle τ genera una coppia nelle ali del profilato,

G d c

coppia nelle ali dei profilati; se caricato baricentricamente, o anche sull'anima la trave si torce. Per rendersene conto basta piegare a C una striscia di cartoncino e da un lato incastrarla, se premiamo sulla

sezione libera si ha torsione, occorre premere su una linguetta esterno come K per equilibrare M_t.

Tale punto esterno distante δ dall'anima è detto centro di taglio o di torsione.

Riferiamo il solido a tre assi cartesiani, x longitudinale y secondo l'anima, z secondo le ali.

Sezioniamo un'ala secondo una retta i i parallela ad y. Sulla i i si affacceranno le $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ed agirà la forza:

$$\tau_{zx}\, b\, dx$$

ove b è lo spessore dell'ala quindi analogamente a quanto già fatto, si ha la nota formula $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{T S_i}{\;}$

ha la nota formula $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{T S_i}{J b_i}$

sia $b_i = b =$ costante $S_i = A_i \cdot d$; $S_i = b z d$

$\tau_{zx} = \frac{T z' d}{J}$ varia con z, se la lunghezza dell'ala è c, la risultante delle τ sull'ala: $H = \frac{T b c^2 d}{2 J}$

ed $H \cdot 2d = M_t$. perciò T dovrà essere posto a distanza δ dall'anima affinché $T\delta$ generi un M_t uguale e contrario

$$\delta = \frac{H \cdot 2d}{T} = \frac{d^2 c^2 b}{J}$$

Tavola riepilogativa delle Sollecitazioni

Sollecitazione	Tensione	Deformazione	Lavoro	Note
sforzo Normale N	$\sigma = \frac{N}{A}$	$\Delta l = \int \frac{N\,dx}{EA}$	$L_e = \int \frac{N^2\,dx}{2EA}$	dilatazione $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$; $\sigma = E\varepsilon$ (legge di Hooke); E = modulo di elasticità normale
Momento flettente M	$\sigma = \frac{M y}{J}$ (Navier)	$\varphi = \int \frac{M\,dx}{EJ}$	$L_e = \int \frac{M^2\,dx}{2EJ}$	
sforzo di Taglio T	$\tau = \frac{T S}{J b}$	$\gamma = \int \chi \frac{T\,dx}{GA}$	$L_e = \int \chi \frac{T^2\,dx}{2GA}$	χ = fattore taglio; G = modulo di elasticità tangenziale $G = E\frac{m}{[2(m+1)]}$
Momento torcente M_t	$\tau = \frac{M_t\, r}{J_p}$	$\varphi = \int \frac{M_t\,dx}{G J_p}$	$L_e = \int \frac{M_t^2\,dx}{2 G J_p}$	Vale solo per sezioni circolari cilindriche.

				driche.
		$\varphi = \int \frac{q M_t \, dx}{G J_p}$	$L_e = \int \frac{q M_t^2 \, dx}{2 G J_p}$	q = fattore torsione; vale per sezioni qualsiasi
	$\tau = \frac{M_t}{2 \Omega s}$	vale per (Bredt.)	sezioni tubolari sottili	

La Linea Elastica

Dicesi "linea elastica" la configurazione di equilibrio dell'asse di un solido astiforme, elastico, soggetto a carichi.

Dall'analisi matematica abbiamo che il raggio R di curvatura in un punto di una linea $y = f(x)$ è dato da:

$$R = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{y''}$$

quindi la curvatura: $(1/R)$;

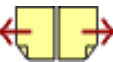
$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

Sappiamo che y' è la tangente trigonometrica dell'angolo di ruotazione della sezione, $\simeq \varphi$ (circa uguale all'angolo, trattandosi di angoli piccolissimi), trascurabile rispetto all'unità, ed a maggior ra=

trascurabile rispetto all'unità, ed a maggior ragione trascurabile il suo quadrato.

Quindi la formula (approssimata) diventa:

$$\frac{1}{R} = y''$$

L'aver trascurato y' equivale a trascurare le deformazioni dovute allo sforzo di taglio.

In matematica la $y = f(x)$ è ordinariamente positiva verso l'alto, noi porremo positiva la direzione verso il basso dei carichi in campo gravitazionale cioè poniamo: $\eta = -y$; e la nostra equazione diventa:

$$\frac{1}{R} = -\eta''$$

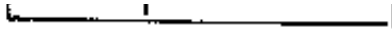
Nel trattare la flessione abbiamo ricavato:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}$$

sostituendo:

$$\eta'' = \frac{-M}{EJ}$$

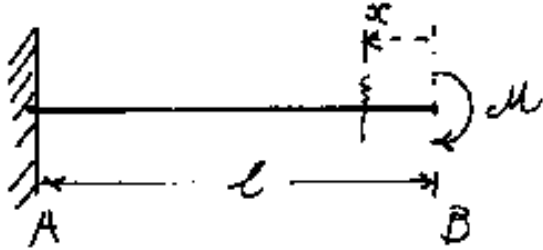
Equazione della linea elastica, che nel caso di: $EJ = cost$, può scriversi:

$$EJ\eta'' = -M$$

È una equazione differenziale del secondo ordine, incom=pleto (mancano η e η') per cui basta una doppia integrazione per risolverla.

Le due costanti arbitrarie di integrazione: C_1 e C_2 si calcolano ai limiti.

Esempi di calcolo

$$\mathcal{M}_{(x)} = -\mathcal{M}$$

$$EJ\eta'' = \mathcal{M}$$

integrando: $EJ\eta' = \mathcal{M}x + C_1$

Sappiamo che $\eta' \simeq \varphi$; per $x = l \rightarrow \varphi_A = 0$; per cui:

$$0 = \mathcal{M}l + C_1 \quad ; \quad C_1 = -\mathcal{M}l$$

e l'equazione diventa:

$$EJ\eta' = \mathcal{M}(x-l) \; ; \quad \boxed{\varphi = \frac{\mathcal{M}}{EJ}(x-l)}$$

integrando di nuovo:

$$EJ\eta = \frac{\mathcal{M}x^2}{2} - \mathcal{M}lx + C_2)$$

per $x = l \rightarrow \eta_A = 0$

$$0 = \frac{\mathcal{M}l^2}{2} - \mathcal{M}l^2 + C_2$$

$$C_2 = \frac{\mathcal{M}l^2}{2}$$

e l'equazione diventa:

$$\eta = \frac{\mathcal{M}}{EJ}\left(\frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2}\right)$$

che può scriversi:

$$\eta = \frac{M}{2EJ}(l-x)^2$$

Si noti che questa curva è una parabola, mentre trattando la flessione avevamo trovato una circonferenza che è osculatrice di questa parabola, la differenza è dovuta ad aver trascurato y'.

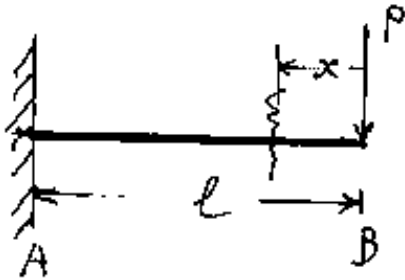
$$-M_x = P \cdot x$$

$$EJ\eta'' = Px$$

$$EJ\eta' = \frac{Px^2}{2} + C_1$$

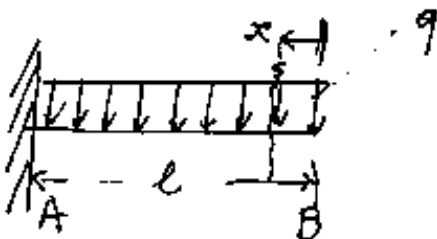
per $x = l$, $\eta' = 0$

$$EJ\eta' = \frac{Px^2}{2} - \frac{Pl^2}{2}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{P}{2EJ}(x^2 - l^2)} \qquad \left(\varphi_B = \frac{Pl^2}{2EJ}\right)$$

$$EJ\eta = \frac{Px^3}{6} - \frac{Pl^2 x}{2} + C_2$$

per $x = l$; $\eta = 0$

$$C_2 = \frac{Pl^3}{2} - \frac{Pl^3}{6} = \frac{Pl^3}{3}$$

$$\boxed{\eta = \frac{P}{EJ}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2 x}{2} + \frac{l^3}{3}\right)} \qquad \left(\eta_B = f = \frac{Pl^3}{3EJ}\right)$$

$$M_x = -\frac{qx^2}{2} \; ; \; EJ\eta'' = \frac{qx^2}{2}$$

$$EJ\eta' = \frac{qx^3}{6} + C_1 \qquad (x = l \rightarrow \eta' = 0)$$

$$EJ\eta' = \frac{qx^3}{6} - \frac{ql^3}{6} \qquad \left(\varphi_B = -\frac{ql^3}{6EJ}\right)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{q}{6EJ}\left(x^3 - l^3\right)}$$

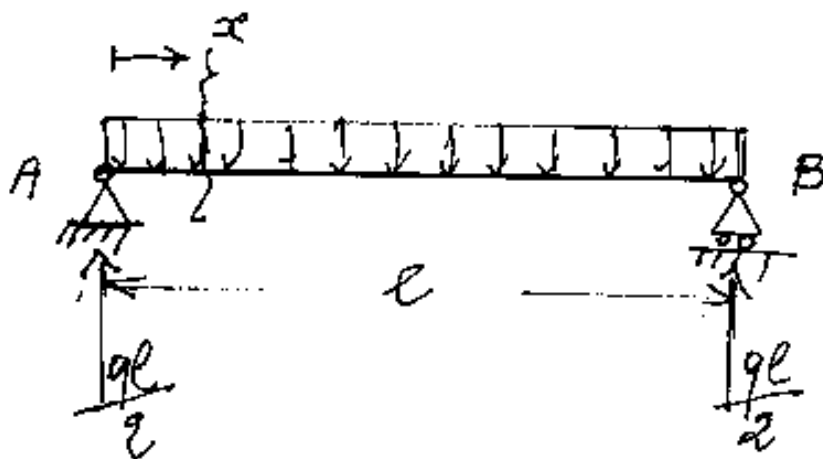
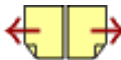
$$EJ\eta = \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3}{6}x + C_2 \qquad \left(x = l \,;\; \eta = 0\right)$$

$$C_2 = \frac{4-1}{24}ql^4 = \frac{ql^4}{8}$$

$$\boxed{\eta = \frac{q}{EJ}\left(\frac{x^4}{24} - \frac{l^3}{6}x + \frac{l^4}{8}\right)} \qquad \left(\eta_B = \frac{ql^4}{8EJ}\right)$$

A B x l $\frac{ql}{2}$ $\frac{ql}{2}$

$$M_x = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

$$EJ\eta'' = \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2}$$

$$EJ\eta' = \frac{qx^3}{6} - \frac{qlx^2}{4} + C_1$$

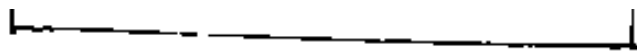
$$EJ\eta = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + C_1x + C_2$$

per $x = 0$; $\eta = 0 \longrightarrow C_2 = 0$

per $x = l$; $\eta = 0$ $C_1 = \frac{ql^3}{12} - \frac{ql^3}{24} = \frac{ql^3}{24}$

$$\varphi = \frac{1}{EJ}\left(\frac{qx^3}{6} - \frac{qlx^2}{4} + \frac{ql^3}{24}\right)$$

$$\eta = \frac{1}{EJ}\left(\frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{ql^3}{24}x\right)$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$\varphi = 0$ per $x = \frac{l}{2}$

$$\eta_{max} = \eta_{\frac{l}{2}} = \frac{q l^4}{EJ\, 24}\left(\frac{1}{16} - \frac{2}{8} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$\boxed{\eta_{max} = \frac{5}{384}\frac{q l^4}{EJ}}$$

Analogia del Mohr

La linea elastica è superata dall'analogia di Mohr.

Ricordiamo le relazioni: fra q, T, M; e confrontiamole con l'equazione della linea elastica, avremo:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} \quad ; \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \varphi = \int \frac{M}{EJ}\,dx \quad ; \quad \frac{dM}{dx} = T$$

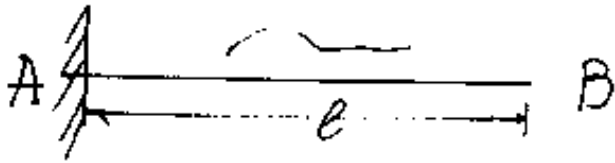
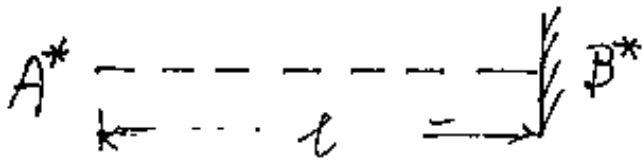
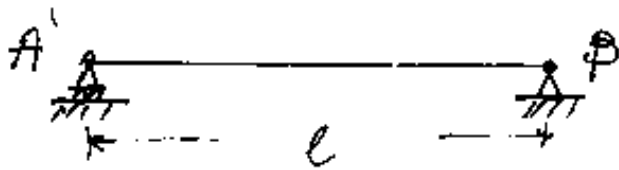
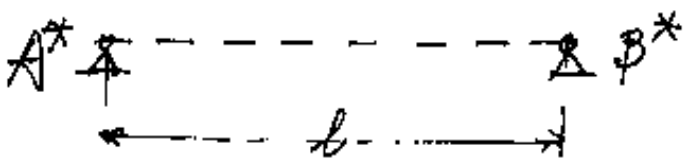
Dalle prime due si nota che dato il carico "q" sappiamo calcolare M.

Ma se consideriamo: $\frac{M}{EJ} = q^*$ come fosse un carico (carico fittizio), il momento

fittizio che calcoleremmo per tale carico fittizio è la linea elastica. $\left(\frac{M^*}{EJ} = \eta\right)$
(I valori fittizi si asteriscono.)

Il taglio fittizio: $\frac{T^*}{EJ} = \varphi$.

Però dobbiamo ricordare che ciò vale solo sulle travi di Mohr.

Le travi di Mohr si disegnano a tratteggio in corrispondenza della trave reale.
Esse sono:

A B l — trave reale (mensola)

A^* B^* l — trave di Mohr per la mensola ha la sezione libera al posto dell'incastro e l'incastro al posto della sezione libera.

A B l — trave reale

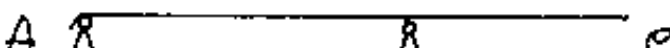
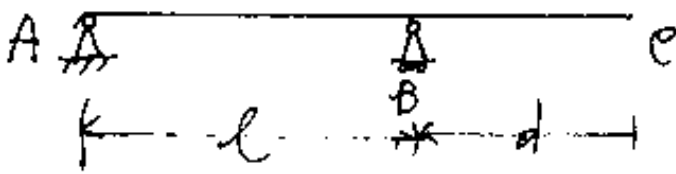
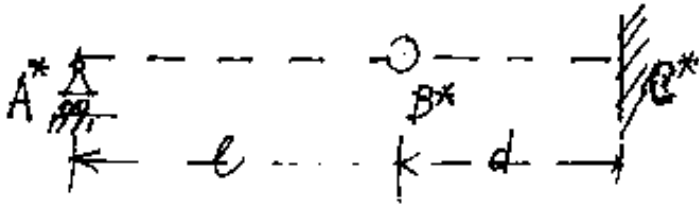
A^* B^* l — trave di Mohr

Per la trave appoggiata la trave reale e quella di Mohr sono uguali.

A — trave reale

A B C l d

trave reale

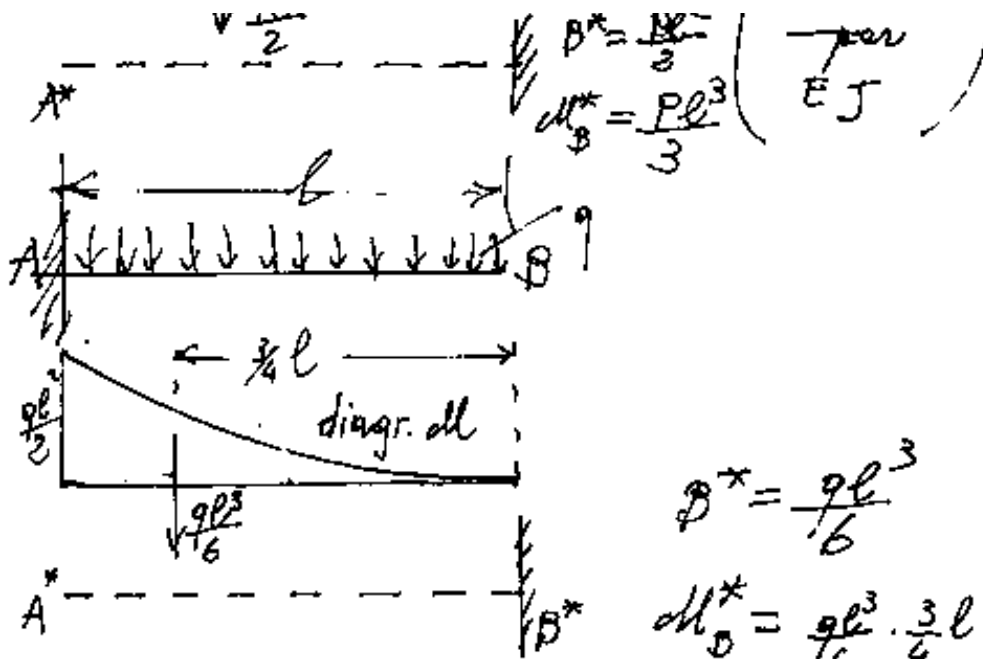
A* B* C* l d

trave di Mohr

Per la trave a sbalzo poiché sulla trave di Mohr la sezione libera diventa un incastro, la mensola di Mohr $\overline{C^*B^*}$ sarà portante la trave A^*B^* cioè in B^* avremo

una cerniera che interrompe la struttura.
La trave di Mohr deve rimanere isostatica.
L'applicazione è veramente semplice:
Se EJ = cost. ci riserviamo di dividere dopo.
Caricata la trave di Mohr col diagramma dei momenti flettenti (carico fittizio), si calcola la M^* e T^*; $\frac{M^*}{EJ} = \eta$; $\frac{T^*}{EJ} = \varphi$

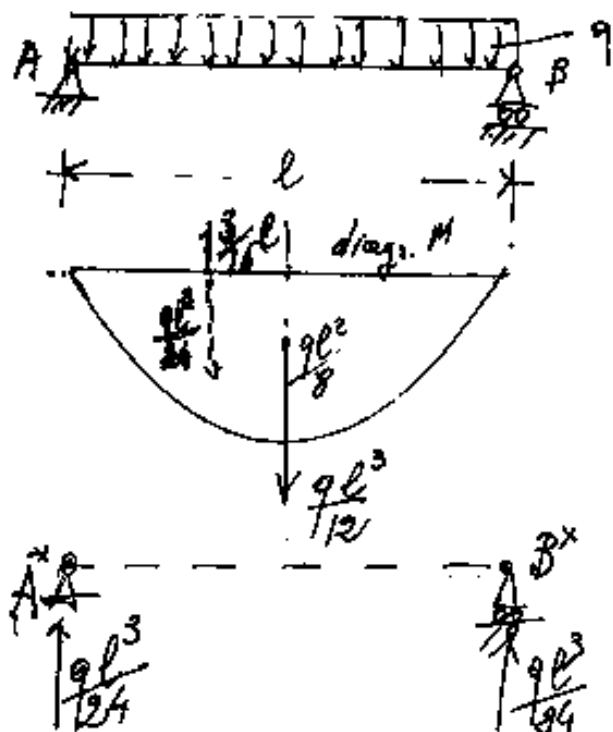
---

facciamo degli esempi

$$\frac{B^*}{EJ} = \varphi_B = \frac{M\ell}{EJ}$$

$$\frac{M^*_B}{EJ} = \eta_B = \frac{M\ell^2}{2EJ}$$

$$\varphi_B = \frac{P\ell^2}{2EJ}$$

$$A^* = B^* = \frac{q\ell^3}{24} \quad ; \quad \varphi_A = \varphi_B = \frac{q\ell^3}{24\,EJ}$$

$$M^*_{\ell/2} = +\frac{q\ell^3}{24}\cdot\frac{\ell}{2} - \frac{q\ell^3}{24}\cdot\frac{3}{16}\ell = \frac{5}{384}q\ell^4$$

$$f = \eta_{\ell/2} = \frac{5}{384}\,\frac{q\ell^4}{EJ}$$

Abbiamo ripetuto gli stessi esempi calcolati con la linea elastica, per rendere evidente la snellezza del metodo di Mohr, oltre a risparmiare per ogni esercizio una doppia integrazione oltre al calcolo delle costanti di integrazione.

Il metodo di Mohr porta anche a vedere

come da "q" = carico, con una sequenza di integrazioni si arrivi ad $EJ\eta$, e viceversa da $EJ\eta$ con una sequenza di derivazioni si arrivi a q.

$T = \int q\,dx$; $-M = \int T\,dx$; $EJ\eta' = \int M\,dx$; $EJ\eta = \int EJ\eta'\,dx$

$\frac{d\eta}{dx} = \eta'$ $\frac{d\eta'}{dx} = \eta'' = \frac{-M}{EJ}$; $\frac{d\eta''}{dx} = \eta''' = \frac{T}{EJ}$; $\frac{d\eta'''}{dx} = \eta^{IV} = \frac{-q}{EJ}$

Se ricordiamo che ove la derivata prima è zero si ha un max o min della funzione, ed ove la derivata seconda è zero si ha un flesso; una semplice scorsa delle derivate ora scritte ci dice che, ove il momento flettente è zero, la linea elastica presenta un flesso, e la ruotazione della sezione è max o min. Ciò si poteva arguire anche dalle curvature e considerare le fibre tese e le fibre compresse. Se estendiamo queste osservazioni a tutta la sequenza delle derivate, troveremo interessantissimi riscontri.

η = linea elastica

$\eta' = tg\,\varphi \simeq \varphi$ = ruotazioni delle sezioni

$\eta'' = \frac{-M}{EJ} = \frac{1}{R}$ = curvatura

$\eta''' = \frac{-T}{EJ}$ = Taglio riferito all'unità di rigidezza a flessione

$\eta^{IV} = +q/EJ$ = Carico distribuito riferito c.s.

Per EJ = unitario :

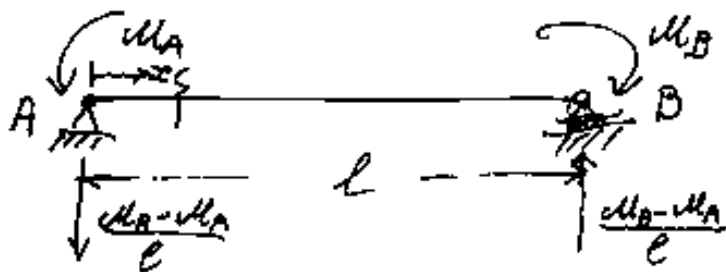
η

$\eta' = \varphi$

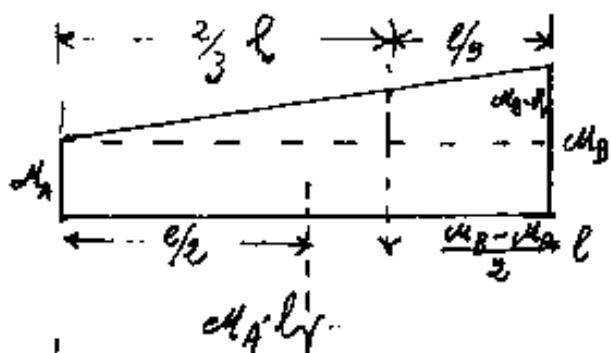
$\eta'' = \varphi' = -\mathcal{M}$

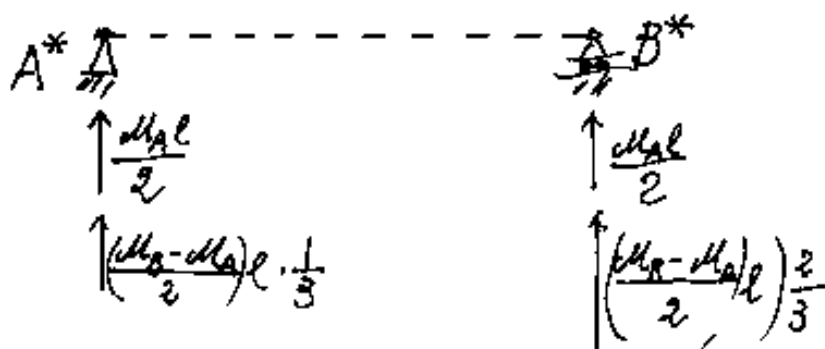
$\eta''' = \varphi'' = -\mathcal{M}' = -T$

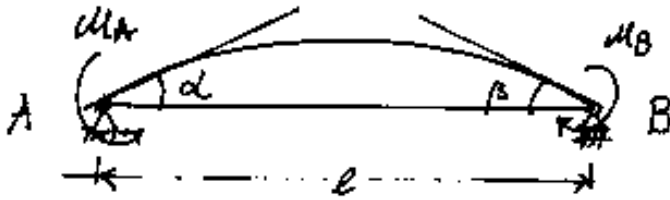
$\eta^{IV} = \varphi''' = -\mathcal{M}'' = -T' = q$

Una importante applicazione dell'analogia di Mohr.

Sia $|M_B| > |M_A|$

Trave semplicemente appoggiata soggetta, nelle sezioni terminali, ai momenti M_A ed M_B per cui: $R_A = -R_B = \frac{M_B - M_A}{l}$

$$M_x = -M_A - \left(\frac{M_B - M_A}{l}\right)x$$

considieriamo il diagramma M un carico fittizio e ne carichiamo la trave di Mohr.

Avremo le reazioni vincolari:

$$A^* = \frac{3M_A l}{6} - \frac{M_A l}{6} + \frac{M_B l}{6} \; ; \quad \boxed{A^* = \frac{l}{6}(2M_A + M_B)}$$

$$B^* = \frac{3\mathcal{M}_A l}{6} - \frac{2\mathcal{M}_A l}{6} + \frac{2\mathcal{M}_B l}{6} ; \qquad \boxed{B^* = \frac{l}{6}\left(\mathcal{M}_A + 2\mathcal{M}_B\right)}$$

quindi gli angoli di rotazione delle sezioni terminali sono:

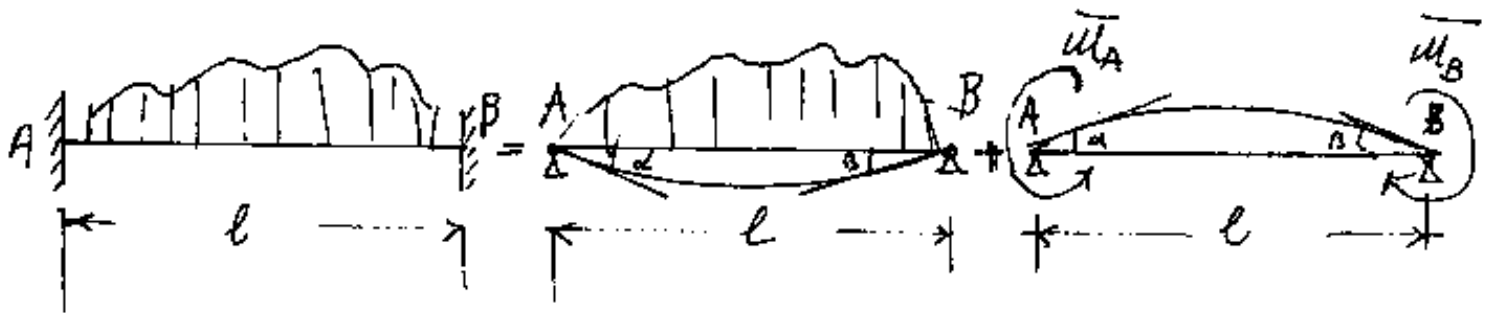
formula importante per l'equazione dei tre momenti sulla trave continua

$$\alpha = \frac{l}{6EJ}\left(2\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B\right)$$

$$\beta = \frac{l}{6EJ}\left(\mathcal{M}_A + 2\mathcal{M}_B\right)$$

Riduzione alla trave perfettamente incastrata

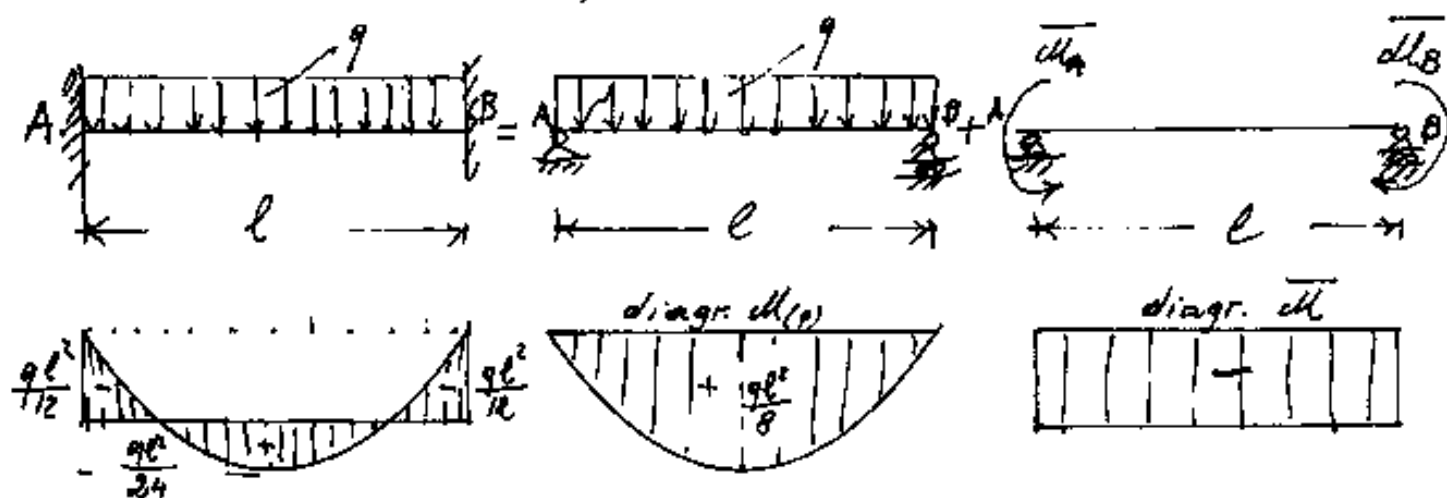
Si dicono: momenti d'incastro perfetto (per distinguerli si sopralineano: $\overline{M}_A$; $\overline{M}_B$) quei momenti che rendono nulle le ruotazioni delle sezioni terminali, avute per effetto dei carichi sulla trave semplicemente appoggiata. Cioè $\overline{M}_A$ ed $\overline{M}_B$ da soli sulla trave semplicemente appoggiata, generano in A e B gli stessi angoli α e β (di verso opposto) di quelli dovuti ai carichi.

A β = A B + $\overline{M}_A$ $\overline{M}_B$ A B α β α β
ℓ ℓ ℓ

Tutto ciò implica che, se interessano le ruotazioni delle sezioni terminali per effetto di un carico, e per quel carico conosciamo i momenti d'incastro perfetto, basta applicare la formula

[illegible], basta applicare la formula

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{-l}{6EJ}\left(2\bar{\mathcal{M}}_A + \bar{\mathcal{M}}_B\right) \\ \beta = \dfrac{-l}{6EJ}\left(2\bar{\mathcal{M}}_B + \bar{\mathcal{M}}_A\right) \end{cases}$$

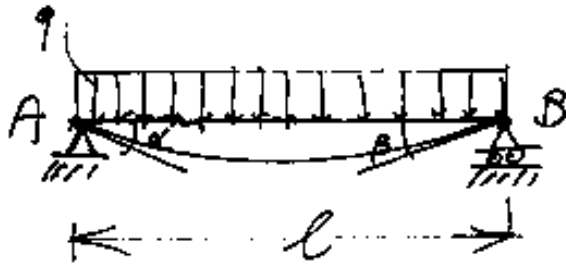
Il segno meno per indicare che $\bar{\mathcal{M}}_A$ ed $\bar{\mathcal{M}}_B$ devono prendersi di segno opposto.

Facciamo un esempio

Sovrapponendo i due diagrammi: $M_{(q)}$ ed $\overline{M}$, i segni più e meno sovrapposti si elidono, i restanti costituiscono il digramma del momento sulla trave incastrata.

Le aree dei due diagrammi M_q ed $\overline{M}$ debbono essere uguali ed opposte affinché la trave di Mohr abbia reazioni nulle:

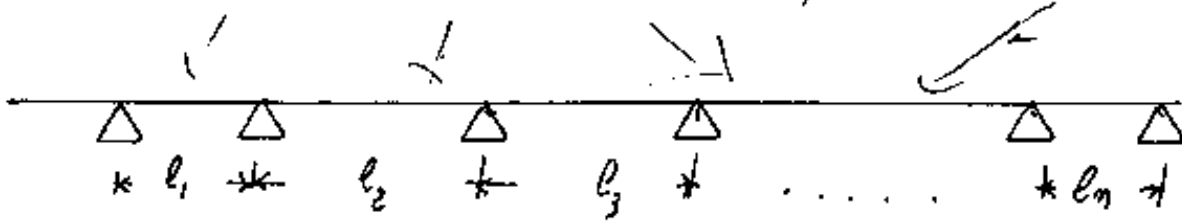
$$-\overline{M}\,l = \frac{ql^2}{8}\,l\cdot\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\overline{M} = -\frac{ql^2}{12}}$$

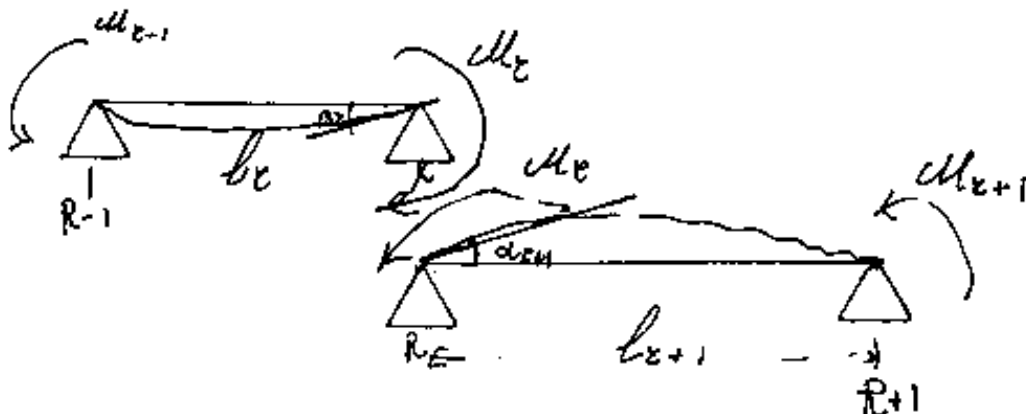
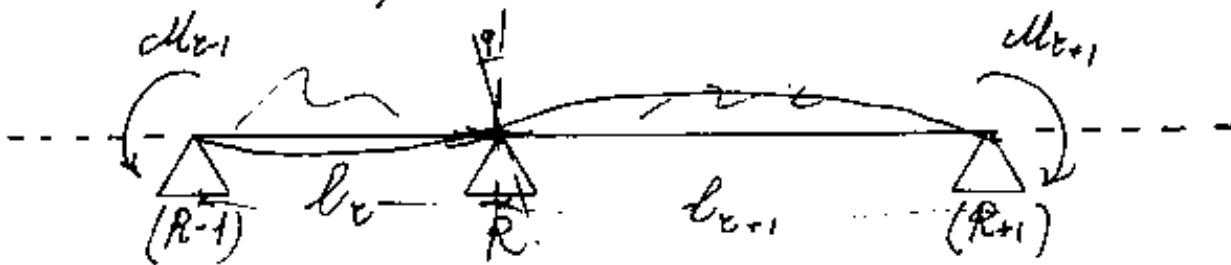
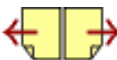
valore del momento d'incastro perfetto per un carico distribuito.

$$\alpha = \frac{l}{6EJ}\left(2\frac{ql^2}{12} + \frac{ql^2}{12}\right) = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\beta = \frac{l}{6EJ}\left(\frac{ql^2}{12} + \frac{2ql^2}{12}\right) = \frac{ql^3}{24EJ}$$

valori che avevamo giá calcolato con diversi procedimenti.

L'equazione dei tre momenti e la trave continua a più campate

Una trave continua su n appoggi (di cui uno è una cerniera, e gli altri carrelli) è (n-2) volte iperstatica; quindi occorrono (n-2) equazioni.

Consideriamo due generiche campate consecutive (prese a due a due consecutive ve ne sono tante quante volte è iperstatica: n-2)

$R+1$

La restante trave a sinistra trasmette il momento M_{r-1}
la restante trave a destra trasmette il momento M_{r+1}
Sull'appoggio intermedio R, le due campate si
trasmettono il momento M_R, per la continuità
della trave: $\boxed{\beta_r = -\alpha_{r+1}}$ (forma base dell'equazione dei tre momenti)

Infatti la ruotazione della sezione su R sarà:

$\varphi = \beta_r''$ se consideriamo la sezione R appartente ad (l_r)

$\varphi = \alpha_{r+1}''$ se consideriamo la sezione R appartenente ad (l_{r+1})

Sviluppiamo l'equazione : $\boxed{\beta_r = -\alpha_{r+1}}$ per ogni campata si possono calcolare le ruotazioni delle sezioni terminali utilizzando l'applicazione di Mohr, e distinguendo le rotazioni dovute ai momenti nelle sezioni terminali, da quelle dovute ai carichi sulla campata (che trasformiamo in momenti d'incastro perfetto)

dovute ai momenti sulle sez. term. — (dovute ai carichi)

$$\beta_r = \frac{l_r}{6E_r J_r}\left[\left(2M_r + M_{r-1}\right) - \left(2\overline{M}_r + \overline{M}_{r-1}\right)\right]$$

$$\alpha_{r+1} = \frac{l_{r+1}}{6E_{r+1} J_{r+1}}\left[\left(2M_r + M_{r+1}\right) - \left(2\overline{M}_r + \overline{M}_{r+1}\right)\right] \qquad \left(\beta_r = -\alpha_{r+1}\right)$$

$$\frac{l_r}{6E_r J_r}\left[\left(2M_r + M_{r-1}\right) - \left(2\overline{M}_r + \overline{M}_{r-1}\right)\right] = -\frac{l_{r+1}}{6E_{r+1} J_{r+1}}\left[\left(2M_r + M_{r+1}\right) - \left(2\overline{M}_r + \overline{M}_{r+1}\right)\right]$$

È questa l'equazione dei tre momenti in forma estesa.

Facciamo alcuni esempi.

Un esempio semplice

A ℓ C ℓ B

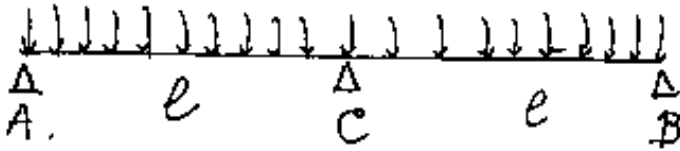
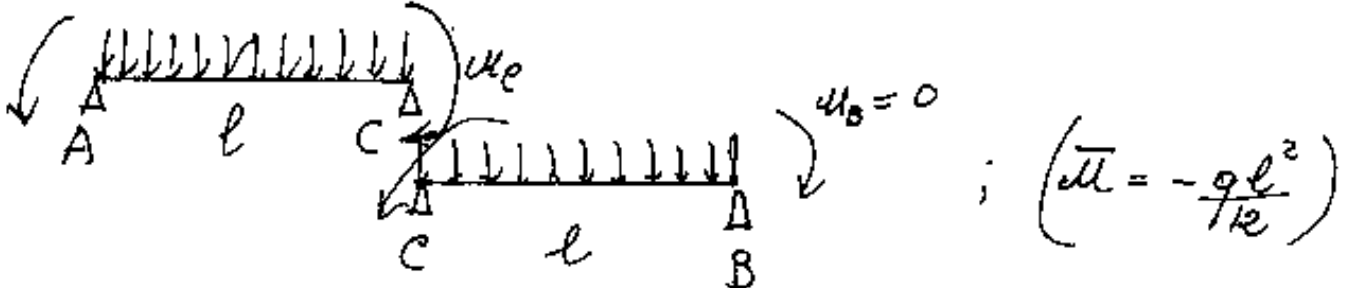
$\mathcal{M}_A = 0$

$\mathcal{M}_C$

A ℓ C

$\mathcal{M}_B = 0$

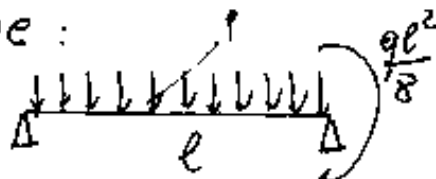
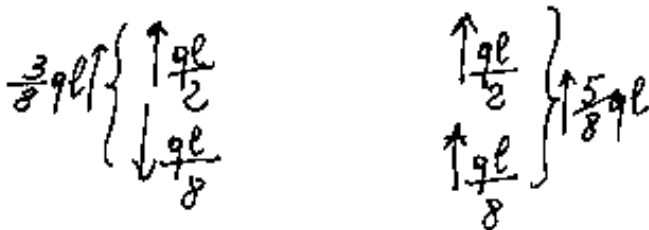
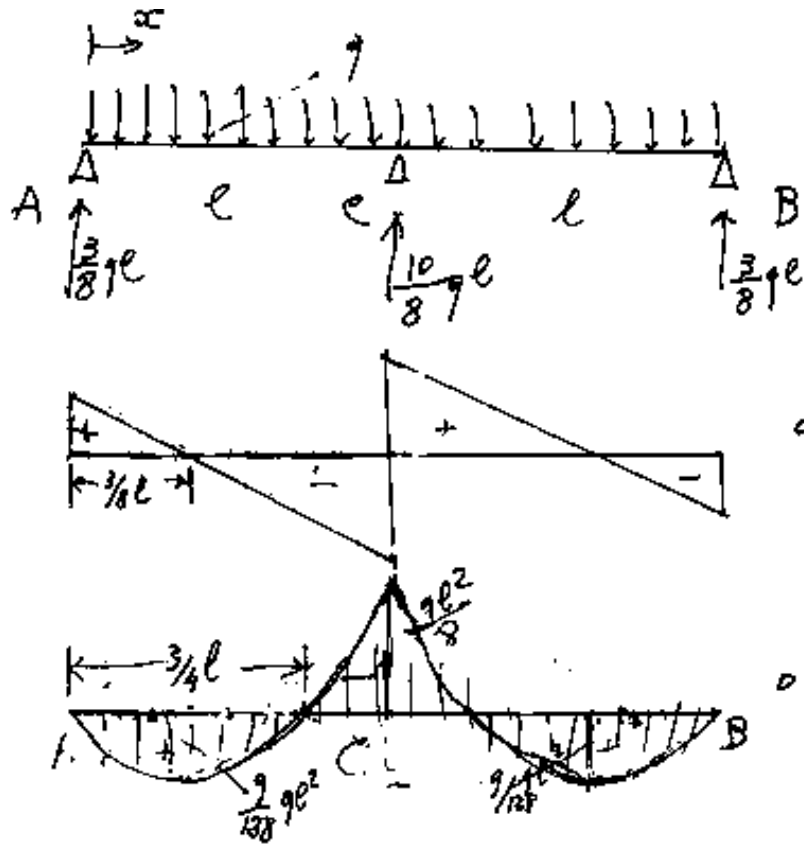
C ℓ B

; $\left(\overline{\mathcal{M}} = -\frac{q\ell^2}{12}\right)$

essendo $\ell_r = \ell_{r+1}$ ed $EJ = \text{cost}$ l'equazione si riduce:

$$\left[(2\mathcal{M}_C + 0) + \left(2\frac{q\ell^2}{12} + \frac{q\ell^2}{12}\right)\right] = -\left[(2\mathcal{M}_C + 0) + \frac{q\ell^2}{4}\right]$$

$$4\mathcal{M}_C = -\frac{2q\ell}{4}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_C = -\frac{q\ell^2}{8}}$$

La trave su tre appoggi è ridotta così a due isostatiche:

$\frac{q\ell^2}{8}$

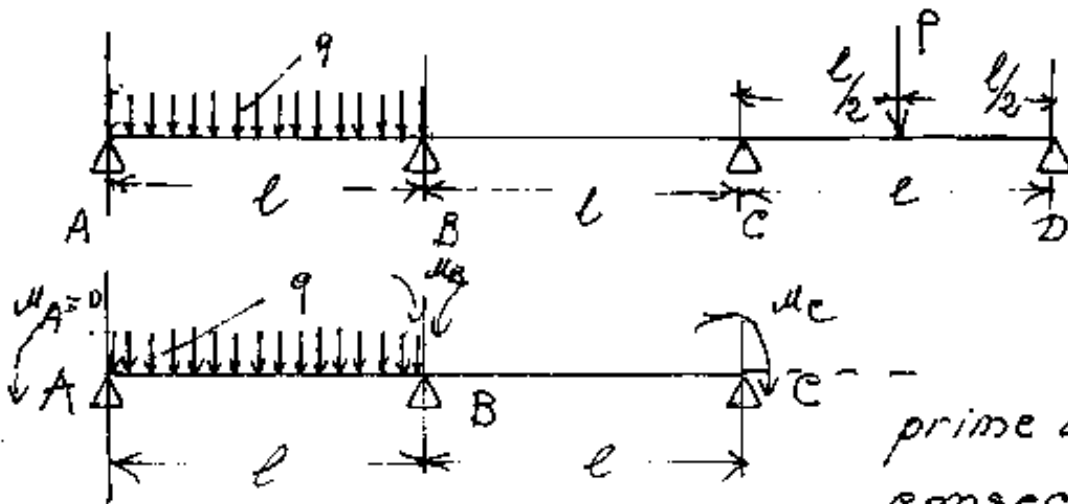
ℓ

id simmetrica

$\frac{3}{8}q\ell \uparrow \begin{cases} \uparrow \frac{q\ell}{2} \\ \downarrow \frac{q\ell}{8} \end{cases}$

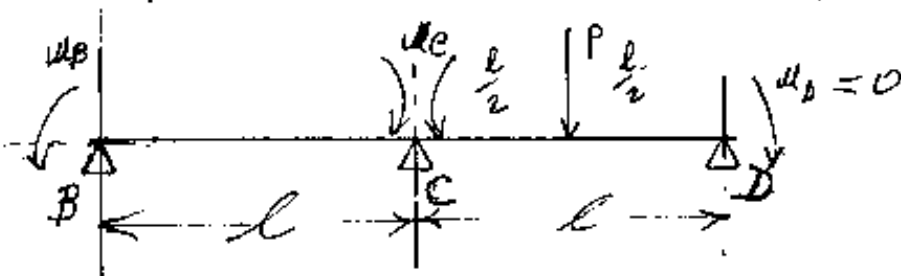
$\begin{rcases} \uparrow \frac{q\ell}{2} \\ \uparrow \frac{q\ell}{8} \end{rcases} \uparrow \frac{5}{8}q\ell$

$\mapsto x$

Facciamo un esempio a 3 campate, (occorrono due equazioni) ($\ell / EJ = cost$)

prime due campate consecutive.

$$(\mathcal{M}_A + 2\mathcal{M}_B) - (\overline{\mathcal{M}}_A + 2\overline{\mathcal{M}}_B) = -(2\mathcal{M}_B + \mathcal{M}_C) - (2\overline{\mathcal{M}}_B + \overline{\mathcal{M}}_C)$$

$$2\mathcal{M}_B + \frac{q\ell^2}{12} + \frac{2q\ell^2}{12} = -\left(2\mathcal{M}_B + \mathcal{M}_C - (0+0)\right)$$

$$\boxed{4\mathcal{M}_B + \mathcal{M}_C = -\frac{q\ell^2}{4}}$$

I^a equazione.

$$\left(\overline{\mathcal{M}}_C = \overline{\mathcal{M}}_D = \frac{P\ell}{8}\right)$$

$$(\mathcal{M}_B + 2\mathcal{M}_C) - (0+0) = -\left[(2\mathcal{M}_C + \mathcal{M}_D) + \left[2\frac{P\ell}{8} + \frac{P\ell}{8}\right]\right]$$

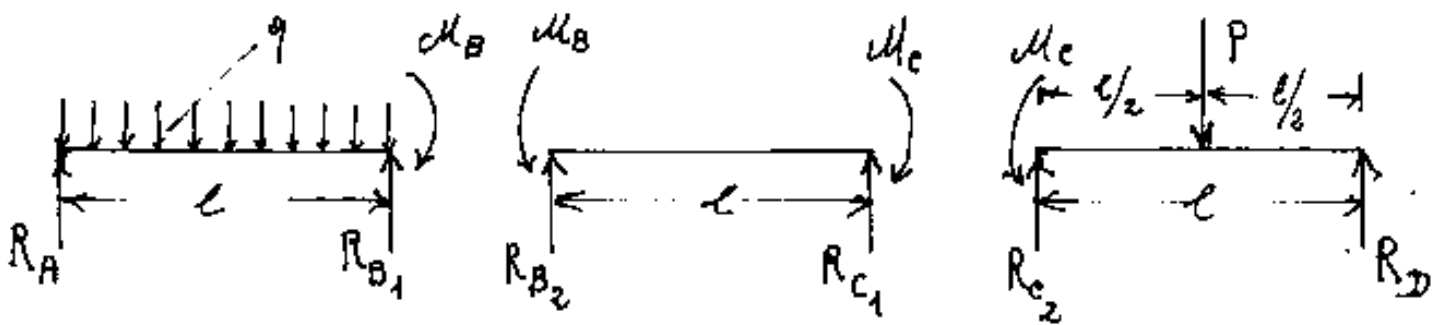
$$4M_C + M_B = -\frac{3}{8}pl$$

II^a equazione

$$\Delta \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15 \; ; \quad \begin{vmatrix} -\frac{ql^2}{4} & 1 \\ -\frac{3}{8}pl & 4 \end{vmatrix} = \left(-ql^2 + \frac{3}{8}pl\right) ; \quad M_B = \frac{1}{15}\left(-\frac{ql^2}{4} + \frac{3}{8}pl\right)$$

$$\begin{vmatrix} 4, & -\frac{ql^2}{4} \\ 1 & -\frac{3}{8}pl \end{vmatrix} = -\frac{3}{8}pl + \frac{ql^2}{4} = \frac{l}{4}(ql - 6p) \qquad M_C = \frac{l}{60}(ql - 6p)$$

Una volta risolto qualunque problema, prima di dare i risultati, è bene verificarli. (Ciò soprattutto in scienza delle costruzioni).

Nel nostro caso abbiamo ridotto la trave continua su quattro appoggi, a tre travi isostatiche semplicemente appoggiate:

ove con l'equazione dei tre momenti abbiamo calcolato $\mathcal{M}_B$ ed $\mathcal{M}_C$ e restano da calcolare le residue reazioni isostatiche:

R_A ; $R_B = R_{B_1} + R_{B_2}$; $R_C = R_{C_1} + R_{C_2}$; R_D.

Per verificare occorre un diverso procedimento di calcolo. Cogliamo l'occasione per presentare un procedimento di calcolo, direi universale, applicabile in statica ed in scienza, sia per il calcolo delle incognite sia per il calcolo delle de

calcolo delle incognite, sia per il calcolo delle de-
formazioni. È Il principio dei Lavori Virtuali
Per il quale, Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813) non ha esi-
tato ad affermare che le leggi dell'equilibrio trovate,
o quelle che verranno trovate in futuro, non sono altro
che il principio dei lavori virtuali diversamente espresso. !
Cfr. Colonnetti - Scienza delle costruzioni - Cfr. Enciclopedia delle Matematiche Elementari III₂

Il principio dei Lavori Virtuali

$$\sum L_v = 0$$

Condizioni di validitá del principio:

Affinché la somma di tutti i lavori virtuali sia nulla:

Il sistema delle forze: deve:

essere equilibrato

Il sistema degli spostamenti: deve:

a) nel caso isostatico (corpi indeformabili o rigidi)

essere compatibile coi vincoli

b) nel caso iperstatico o interessante l'elasticitá dei corpi,

essere congruente

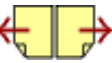
e cio' comprende essere compatibile coi vincoli.

Congruo = adeguato, esprime che le deformazioni elastiche interne debbono essere "adeguate" alle deformazioni esterne (frecce nelle travi e rotazioni di sezione)

La Constatazione base.

La considerazione base.

Il sistema delle forze (equilibrato) è indipendente dal sistema degli spostamenti (congruente).

Questa affermazione può lasciare perplessi.
Perciò facciamo qualche considerazione.
Un sistema di forze equilibrato, rimane equilibrato

qualunque sia la struttura od il corpo cui è applicato. Il sistema degli spostamenti varia con la struttura o corpo cui è applicato lo stesso sistema di forze equilibrato.

Due forze unitarie, uguali e contrarie, agenti sulla stessa retta di azione, sono applicate nelle sezioni estreme di due diversi corpi; uno avente per asse un segmento, l'altro avente per asse un semicerchio:

È ovvio che le deformazioni elastiche interne dei due corpi sono molto diverse fra loro anche se lo spostamento delle sezioni A, B fosse lo stesso nei due casi.

Se, ai fini del principio dei Lavori Virtuali, il sistema delle forze ed il sistema degli spostamenti sono indipendenti fra loro, uno dei

menti, sono indipendenti fra loro, uno dei due può essere quello reale, l'altro arbitrariamente possiamo sceglierlo noi, e non essendo reale lo diremo "Virtuale". Abbiamo le seguenti possibilità, che commentiamo in tabella.

sistema delle forze (equilibrato)	sistema degli spostamenti	NOTE
Reale	Reale	Si usa pochissimo solo per verifiche.
Reale	Virtuale (compatibile coi vincoli)	si usa in statica, (corpi rigidi) per il calcolo delle reazioni vincolari o di certe sollecitazioni in sezioni prefissate
Virtuale	Reale (certamente congruente)	Si usa in scienza delle costruzioni per il calcolo { delle reazioni iperstatiche / delle deformazioni
Virtuale	Virtuale	Si possono fare studi speciali (non si usa mai)

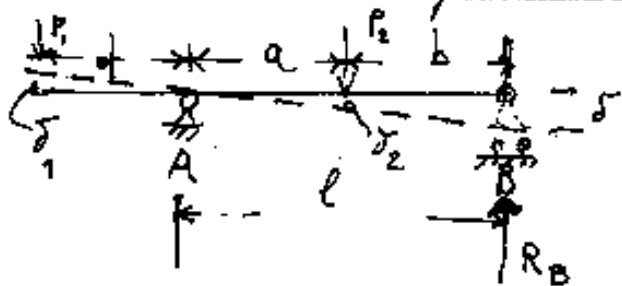
Applicazione del principio dei lavori virtuali ai sistemi rigidi

Si attribuisce uno spostamento virtuale piccolissimo nella sezione e nella dire= zione dello sforzo (forza, momento, sollecitazione)

agente in quel punto.

Per dare lo spostamento virtuale abbiamo dovuto sopprimere il vincolo attraverso il quale si esercitava lo sforzo cercato.
Ciò ha reso labile la struttura, ove i singoli pezzi rigidi hanno spostamenti mutui dipendenti dallo spostamento virtuale.

Queste possibilità di movimenti sono dette: "cinematismi" ove, noto uno spostamento, possono dedursi tutti gli altri.

Alcuni esempi di cinematismi

Tolto il vincolo (carrello in B) posso attribuire a B lo spostamento: δ.

Per similitudine di triangoli: $\delta : l = \delta_2 : a = \delta_1 : d$

da cui $\delta_1 = \frac{d}{l}\delta$; $\delta_2 = \frac{a\delta}{l}$; δ

Calcolati gli spostamenti possiamo applicare i Lav. Vir. tenendo presente che il lavoro è positivo se forza e spostamento hanno lo stesso verso, negativo se la direzione della forza è opposta a quello dello spostamento. Perciò

$-P_1\delta_1$ (negativo perché direzioni opposte)

$+P_2\delta_2$ (positivo perché direzioni concordi)

$-R_B\delta$ (negativo perché abbiamo arbitrariamente

attribuito ad R_B verso opposto a δ)

$$\sum \mathcal{L}^{P}_{\alpha an.\, 1/12} = 0 = -P_1\left(\frac{d}{l}\delta\right) + P_2\left(\frac{a}{l}\delta\right) - R_B\,\delta = 0$$

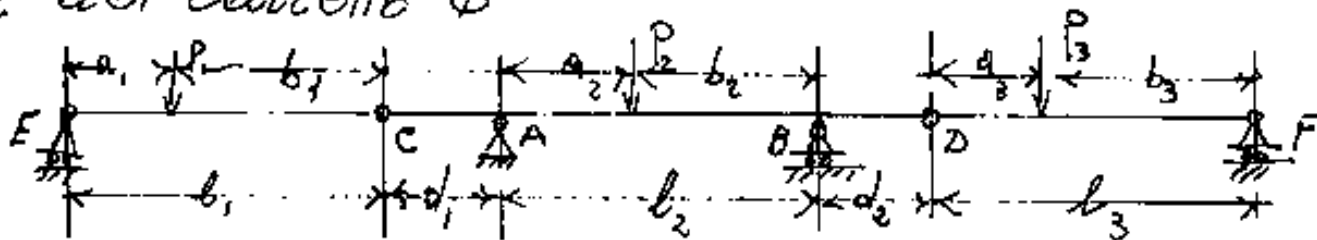
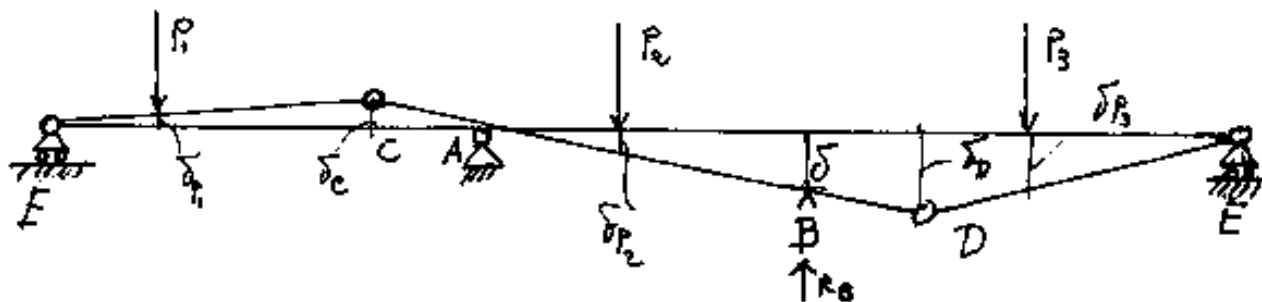
$$\boxed{R_B = \frac{aP_2 - dP_1}{l}}$$

Notiamo che il verso da noi attribuito ad R_B è giusto se: $\boxed{aP_2 > dP_1}$

se: $(aP_2 = dP_1)$ si ha: $R_B = 0$.

Consideriamo una trave di Gerber.

(È detta trave di Gerber, una trave a più campate complessivamente isostatica)

Supponiamo, per la trave in figura, di volere la reazione del carrello B

togliamo il carrello B ed attribuiamo a B uno spostamento arbitrario piccolissimo δ (spostamento virtuale), ovvero:

$$\delta : l_2 = \delta_C : d_1 \quad , \quad \delta_C = \frac{\delta d_1}{l_2}$$

$$\delta_C : l_1 = \delta_{P_1} : a_1 \quad , \quad \delta_{P_1} = \frac{a_1 \delta_C}{l_1} \quad , \quad \boxed{\delta_{P_1} = \delta \frac{(d_1 a_1)}{(l_1 l_2)}}$$

$$\delta_D : (l_2 + d_2) = \delta : l_2 \quad , \quad \delta_D = \frac{\delta\,(l_2 + d_2)}{l_2}$$

$$\delta_D : l_3 = \delta_{P_3} : b_3 \qquad \delta_{P_3} = \frac{\delta_D\, b_3}{l_3} \quad , \quad \boxed{\delta_{P_3} = \delta\,\frac{b_3\,(l_2 + d_2)}{(l_2\, l_3)}}$$

$$\delta_{P_2} : a_2 = \delta : l_2 \qquad \boxed{\delta_{P_2} = \delta\,\frac{a_2}{l_2}}$$

$$\boxed{-P_1\,\delta\left(\frac{d_1\, a_1}{l_1\, l_2}\right) + P_2\,\delta\left(\frac{a_2}{l_2}\right) - R_B\,\delta + P_3\,\delta\left(\frac{b_3\,(l_2 + d_2)}{l_2\, l_3}\right) = 0} = \Sigma L_v$$

$$\boxed{R_B = \frac{+P_3\, l_1\, b_3\,(l_2 + d_2) + P_2\, l_1\, l_3\, a_2 - P_1\, d_1\, a_1\, l_3}{l_1 \cdot l_2 \cdot l_3}}$$

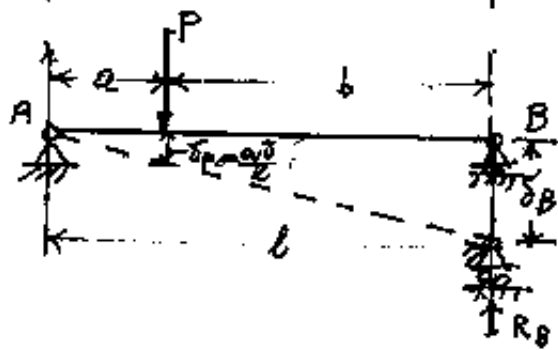
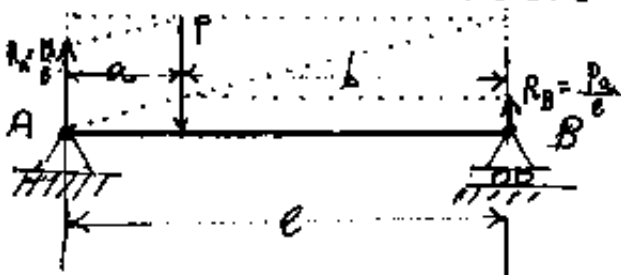
L'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali ai Sistemi rigidi, cioè assumendo "virtuale" il sistema degli spostamenti, implica una trattazione assai più complessa di quella ora esposta e che ci riserviamo di esporre. Ma seguendo lo stile di ... "ripartire da zero"... esponiamo un esempio ancora più semplice di quelli esposti, perché rimanga nella mente lo "spostamento virtuale" della forza reale incognita.

Trovare le reazioni vincolari della trave semplicemente appoggiata e soggetta ad un carico concentrato verticale P, ed osserviamo le analogie con altri metodi di calcolo che già abbiamo esposto.

P — a — b — A — B — $R_B = \frac{Pa}{l}$ — l

P — a — b — A — B — l — R_B

$\delta_B = \delta$ = (spostamento virtuale)

$\Sigma L_V = 0$:

$-R_B \cdot \delta_B + P\delta_P = 0$

$-R_B \delta + P\frac{\delta a}{l} = 0$

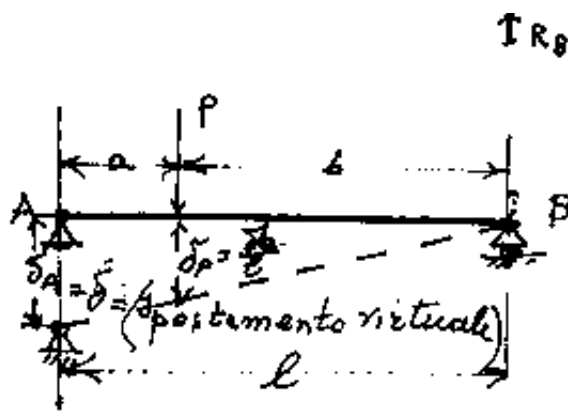
$R_B = \frac{Pa}{l}$

$(\delta_P : \delta = a : \ell)$ $\quad R_B = \frac{Pa}{\ell}$

$\sum \mathcal{L}_V = 0 \; ; \; (-R_A \delta_A + P \delta_P) = 0$

$-R_A \delta + \frac{P \delta b}{\ell} = 0 \quad R_A = \frac{Pb}{\ell}$

$(\delta_P : \delta = b : \ell)$

$\delta_A = \delta$ (spostamento virtuale)

Passiamo ai sistemi elastici.

Applicazione del principio dei Lavori Virtuali ai sistemi elastici

Si hanno due casi di applicazione che trattiamo separatamente :

a) Per il calcolo delle incognite iperstatiche,

b) Per il calcolo delle deformazioni

Calcolo delle incognite iperstatiche.

Assumiamo come "Sistema delle forze fittizie o virtuali" Una forza unitaria (= 1) posta nella sezione e nella direzione dell'incognita cercata.

Poiché trattasi di strutture iperstatiche, esse possono sbloccarsi togliendo il vincolo (od i vincoli) eccedenti e sostituendoli con le loro azioni che indicheremo con X' X"

le loro azioni che indicheremo con X', X''
X'''.... ecc. (Questo simbolismo è quello utilizzato dal
Belluzzi: O. Belluzzi - Scienza delle Costruzioni - Vol I - Zanichelli - Bologna;
X' = prima incognita iperstatica, (le derivate non c'entrano))
Si hanno così strutture isostatiche equivalenti, e se togliamo i carichi e le incognite iperstatiche otteniamo le strutture dette isostatiche principali.

E' sempre bene evidenziare, disegnando, la struttura data, le possibili strutture equivalenti, e le conseguenti isostatiche principali.

—

Il lavoro Virtuale si distingue in lavoro esterno: (che è il prodotto della forza fittizia per il suo spostamento reale); ed in lavoro interno (che è il prodotto delle sollecitazioni fittizie per le deformazioni reali). Poiché: Lavoro esterno = Lavoro interno, hanno segni opposti la loro somma è sempre zero.

Le deformazioni reali le calcoliamo in funzione delle sollecitazioni reali.

$$\Delta l = \sum \frac{N l}{EA} \; ; \; \varphi = \int \frac{M\,dx}{EJ} \; ; \; \gamma \int \chi \frac{T\,dx}{GA} \; ; \; \gamma = \int \varphi \frac{M_t\,dx}{G J_p}$$

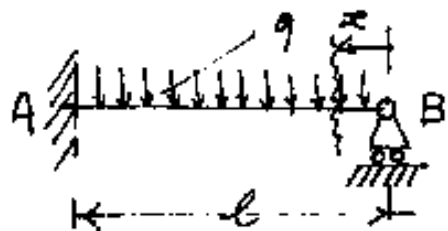
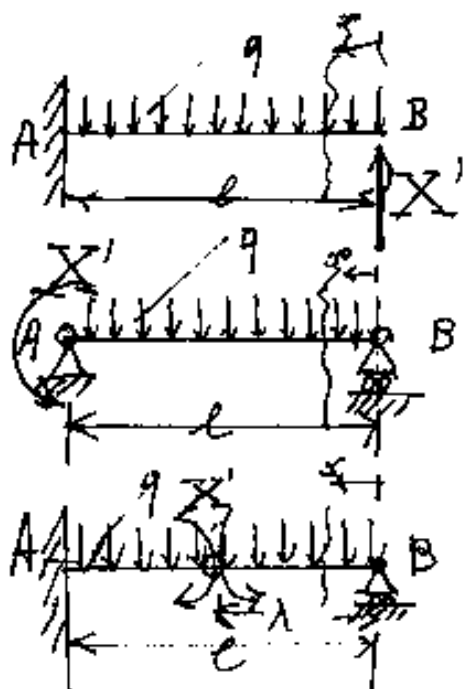
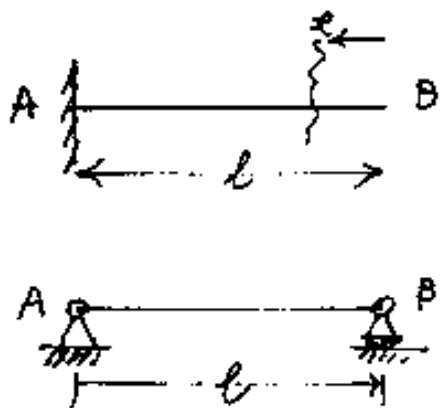
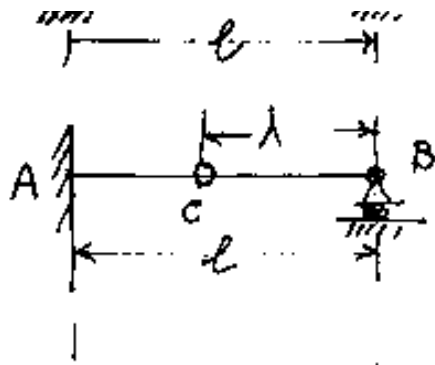
Al fine di semplificare i calcoli, se sblocchiamo a terra, la forza fittizia = 1, non ha spostamento, per cui: Lavoro virtuale esterno = zero = L_v interno.

... $= dV$ interno.

Se indichiamo con M' la sollecitazione fittizia, avremo l'espressione che si usa comunemente nei lavori virtuali in campo elastico:

$$\sum \int \frac{M' M \, dx}{EJ} = 0$$

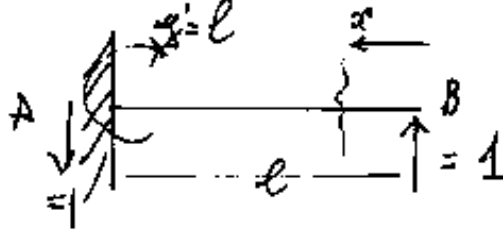
$\sum$ estesa a tutte le aste della struttura.

Facciamo un esempio assai semplice che permette di far capire più semplicemente il procedimento.

(struttura data)

strutture equivalenti

isostatiche principali

Scelta una isostatica principale (per esempio la prima) nel sistema delle forze fittizie la carichiamo con la sola forza = 1 nella sezione e nella direzione della incognita cercata; calcoliamo

le reazioni, equilibrando il sistema, e calcoliamo le sollecitazioni fittizie: N'; T'; M'; M'_t. prodotte dalla forza fittizia = 1

Indicheremo con A', A'', A'''... il sistema forze fittizie.

<u>A' (sistema forze fittizie)</u>

$x = l$; x ; A ; B ; $= 1$; $=1$; l

$N'_{BA} = 0$; $T'_{BA} = -1$; $M'_{BA} = +x$

$M'_{t\,BA} = 0$

Indichiamo con B il sistema degli spostamenti reali (è uno solo qualunque siano le incognite)

Le sollecitazioni reali si calcolano per sovrapposizione degli effetti e cioè quelle dovute ai soli carichi esterni (si indicano N_0, M_0, T_0, M_{t_0}) e quelle dovute alle incognite X', X'', ..X^n che saranno X' volte; X'' volte ... X^n volte quelle calcolate con la <u>forza unitaria</u> in A'; A''... A^n. cioè:

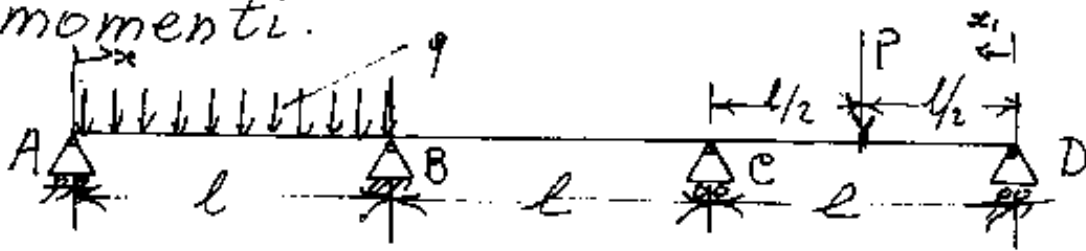
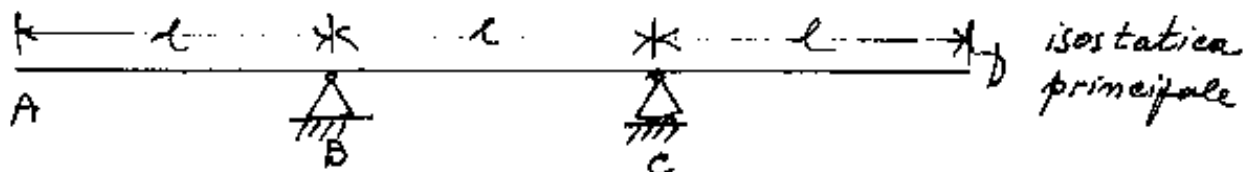
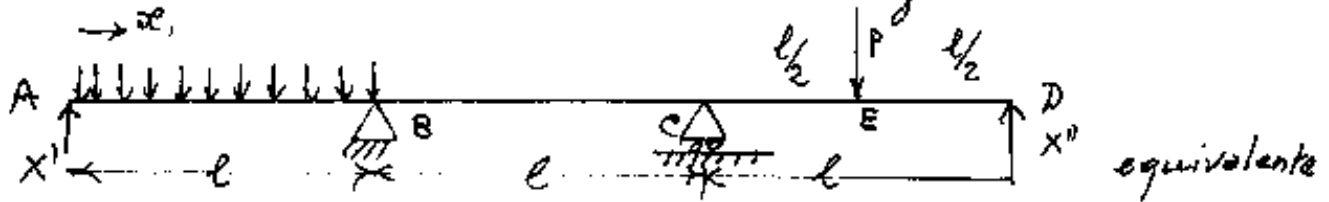
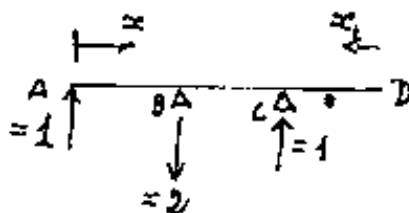
M . . . M , cioè :

$$N = N_0 + N' X' + N'' X'' + \ldots N^n X^n$$

$$T = T_0 + T' X' + T'' X'' + \ldots T^n X^n$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}' X' + \mathcal{M}'' X'' + \ldots \mathcal{M}^n X^n$$

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_{t_0} + \mathcal{M}_t' X' + \mathcal{M}_t'' X'' + \quad \mathcal{M}_t^n X^n$$

Supponiamo di voler risolvere coi lavori virtuali la trave continua a tre campate che abbiamo risolto con l'equazione dei tre momenti.

Fra le tante isostatiche principali, noi scegliamo quella che sopprime gli appoggi A e D e li sostituisce con le incognite X' ed X''

equivalente

isostatica principale

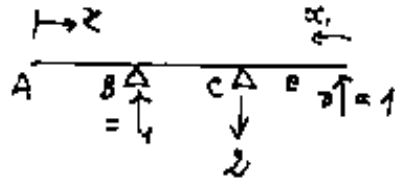
A') s.f.f.

$$\mathcal{M}'_{x\,AB} = +x$$

$$\mathcal{M}'_{x\,BC} = x - 2x + 2l = (3l - x)$$

$$\mathcal{M}'_{x_1\,DE} = \mathcal{M}'_{x\,EC} = 0$$

DE EC

A'') s.f.f.

$\mathcal{M}''_{AB} = 0$

$\mathcal{M}''_{BC} = (x - \ell)$

$\mathcal{M}''_{x_1, DE, EC} = x_1$

Il lavoro virtuale interno è perciò nullo.
Essendo: EJ = cost possiamo scrivere:

$$\Sigma \int \mathcal{M}' \mathcal{M}\, dx = 0$$

calcoliamo $\mathcal{M}'\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}'_{BC}\mathcal{M}_{BC} = \frac{q\lambda}{2}\frac{x^2}{\lambda} - \frac{qx^3}{2\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2}X' = \boxed{\frac{qx^2}{2} - \frac{qx^3}{2\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2}X'}$$

$$\mathcal{M}'_{CA}\mathcal{M}_{CA} = \boxed{\frac{qx^2}{2} - \frac{qx^3}{2\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2}X'}$$

$$\int_{0}^{\lambda}{}_{BC}\left(\frac{qx^2}{2} - \frac{qx^3}{2\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2}X'\right)dx = +\frac{q\lambda^3}{6} - \frac{q\lambda^3}{8} + \frac{\lambda}{3}X'$$

$$= \boxed{\frac{q\lambda^3}{24} + \frac{\lambda}{3}X'}$$

$$\int_{\lambda}^{l}{}_{CA}\left(\frac{qx^2}{2} - \frac{qx^3}{3\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2}X'\right)dx \quad \frac{ql^3}{6} - \frac{ql^4}{8\lambda} + \frac{l^3}{3\lambda^2}X'$$

$$-\frac{q\lambda^3}{6} + \frac{q\lambda^3}{8} - \frac{\lambda X'}{3}$$

$$\therefore \mathcal{L}_{CA} = \frac{ql^3}{6} - \frac{ql^4}{8\lambda} - \frac{q\lambda^3}{24} + \frac{l^3}{3\lambda^2}X' - \frac{\lambda X'}{3}$$

$$\mathcal{L}_{BC} = q\lambda^3 + \lambda X'$$

$$\alpha_{BC} = \frac{q\lambda}{24} + \frac{\lambda X'}{3}$$

$$\mathcal{L}_i = 0 = \frac{q\ell^3}{6} - \frac{q\ell^4}{8\lambda} + \frac{\ell^3}{3\lambda^2} X'$$

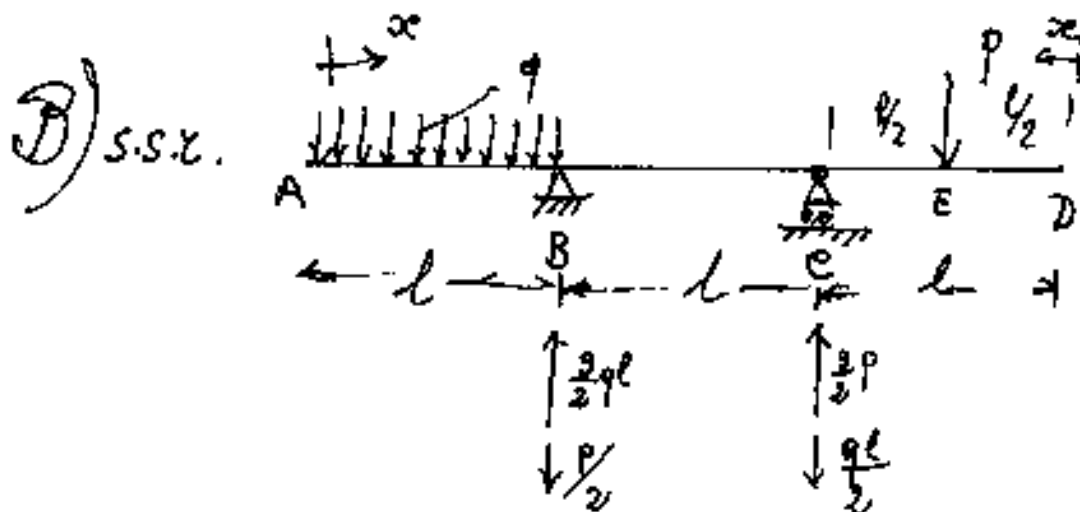
$$X' = -\frac{q\lambda^2}{2} + \frac{3q\ell\lambda}{8} = \boxed{\frac{q\lambda}{8}(3\ell - 4\lambda)} = X'$$

per $\lambda = 0 \rightarrow X' = 0$

$\lambda = \ell \rightarrow X' = -\frac{q\ell^2}{8}$ — valori che già conosciamo.

$\lambda = \frac{3}{4}\ell \rightarrow X' = 0$

$\lambda = \frac{3}{8}\ell \rightarrow X' = +\frac{9}{128} q\ell^2$

B) s.s.r.

$$\mathcal{M}^{o}_{AB} = -\frac{qx^2}{2}$$

$$\mathcal{M}^{o}_{BC} = \frac{ql^2}{2} - qlx + \frac{3}{2}qlx - \frac{3}{3}ql^2 - \frac{P}{2}x + \frac{P}{2}l =$$

$$= -ql^2 + \frac{qlx}{2} - \frac{P}{2}x + \frac{P}{2}l$$

$$\mathcal{M}^{o}_{DE} = 0$$

$$\mathcal{M}_{o\,EC} = -Px_1 + P\frac{l}{2}$$

$$\mathcal{M}_{AB} = -\frac{qx^2}{2} + xX' + 0$$

$$\mathcal{M}_{BC} = -ql^2 + \frac{qlx}{2} - \frac{P}{2}x + \frac{P}{2}l + (2l-x)X' + (x-l)X''$$

$$\mathcal{M}_{DE} = 0 + 0 + x_1 X''$$

$$\mathcal{M}_{EC} = -Px_1 + \frac{Pl}{2} + 0 + x_1 X''$$

$$\mathcal{M}'\mathcal{M}_{AB} = -\frac{qx^3}{2} + x^2 X'$$

$$\mathcal{M}'\mathcal{M}_{BC} = (2l-x)\left[-ql^2 + \frac{qlx}{2} - \frac{Px}{2} + \frac{Pl}{2} + (2l-x)X' + (x-l)X''\right]$$

$$\mathcal{M}'\mathcal{M}_{DE,\,EC} = 0$$

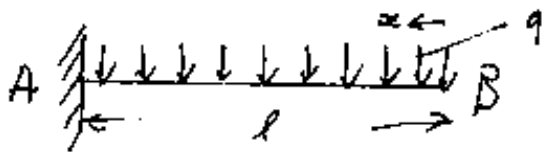
Il principio dei Lavori Virtuali applicato al calcolo delle deformazioni

Per il calcolo delle deformazioni la struttura deve essere già resa isostatica.

Nel sistema delle forze fittizie si pone una forza (od un momento) uguale ad uno, nella sezione e nella direzione dello spostamento (od angolo di ruotazione) cercato.

Per esempio, si vuol conoscere la freccia in B della struttura:

A ... B, carico q, luce l, ascissa x

A) s.f.f. $M' = -1x = -x$

B) s.s.r. $M^o = M_{vero} = -\frac{qx^2}{2}$

Lavoro Esterno $\eta_{(B)} \cdot (1)$

Lavoro interno $\int_0^l \frac{M' M \, dx}{EJ} = \int_0^l \frac{q x^3}{2EJ} dx = \boxed{\eta_B = \frac{q l^4}{8EJ}}$

Della stessa struttura l'angolo di rotazione in B

A) 1 · φ · A ——— l ——— B = 1 $M' = -1$

$$\varphi_B = \int_0^l \frac{M' M \, dx}{EJ} = \int_0^l (-1)\left(\frac{-q x^2}{2EJ}\right) dx = \boxed{\varphi_B = \frac{q l^3}{6EJ}}$$

In scienza delle costruzioni, occorre continuamente verificare, e, via via correggere gli eventuali errori.

Le verifiche si operano con le due equazioni canoniche della statica, durante gli sviluppi algebrici occorre verificare che le espressioni siano "dimensionalmente" omogenee.

ora verifichiamo: $\Sigma F = 0$ cioè: $V_A + V_B + V_C + V_D = ql + P$.

$$V_A = \frac{13}{30} ql + \frac{P}{40} = +\frac{26}{60} ql + \frac{1}{40} P$$

$$V_B = \frac{13}{20} ql - \frac{3}{20} P = +\frac{39}{60} ql - \frac{6}{40} P$$

$$V_C = -\frac{1}{10} ql + \frac{29}{40} P = -\frac{6}{60} ql + \frac{29}{40} P$$

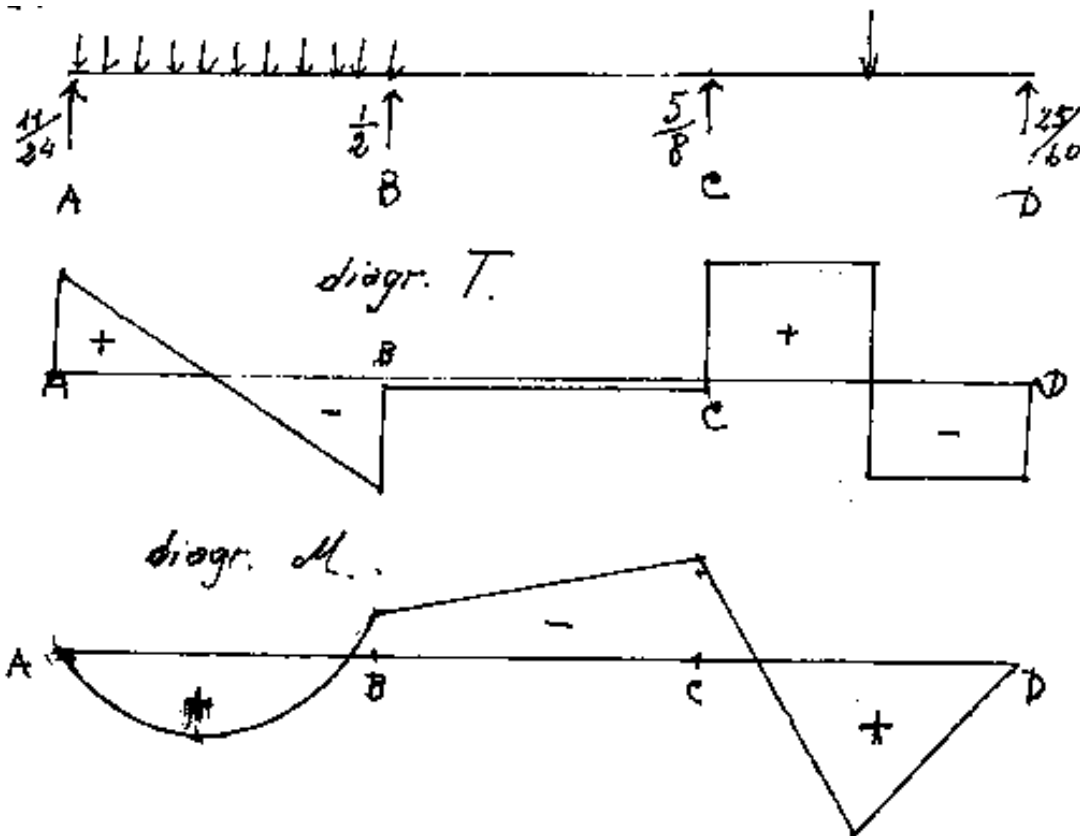
$$V_D = +\frac{ql}{60} + \frac{2}{5} P = +\frac{1}{60} ql + \frac{16}{40} P$$

$$= +\frac{60}{60} ql + \frac{40}{40} P$$

Se: $P = ql = 1$

$\frac{11}{24}$ A $\frac{1}{2}$ B $\frac{5}{8}$ C $\frac{25}{60}$ D

diagr. T.

diagr. M.

delle reazioni sulle singole compote, oppure direttamente dall'isostatica principale.
Poiché sappiamo che per calcolare le reazioni sulla trave isostatica si uguagliano i momenti calcolati nello stesso sezione per forze a destra con quelli calcolati per forze a sinistra si ha:

$$\mathcal{M}_{(B)\,(sin)} = -\frac{ql^2}{15} + \frac{Pl}{40}$$

$$\mathcal{M}_{B\,dest.} = +\frac{ql}{60}2l + \frac{2}{5}P\cdot 2l - P\frac{3}{2}l + V_C l =$$

$$= +\frac{ql}{30} - \frac{7}{10}P + V_C = -\frac{ql}{15} + \frac{P}{40}$$

$$V_C = -\frac{2ql}{30} - \frac{ql}{30} + \frac{28}{40}P + \frac{P}{40}$$

$$\boxed{V_C = -\frac{ql}{10} + \frac{29}{40}P}$$

$$\mathcal{M}_{C\,dest.} = \frac{ql^2}{60} - \frac{Pl}{10}$$

$$\mathcal{M}_{C\,sin.} = \frac{13}{30}ql\cdot 2l + \frac{P}{40}2l - ql\frac{3l}{2} + V_B l$$

$$m_{fin}^{C} = \frac{11}{30} ql \cdot 2l + \frac{P}{40} 2l - ql \frac{3l}{2} + V_B \, l$$

$$= -\frac{19}{30} ql + \frac{P}{20} + V_B = \frac{ql}{60} - \frac{P}{10}$$

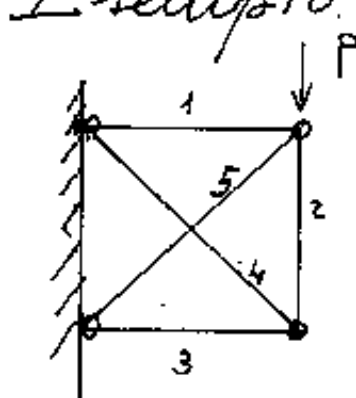
$$V_B = \frac{39}{60} ql - \frac{3}{20} P$$

$$\boxed{V_B = \frac{13}{20} ql - \frac{3}{20} P}$$

Il principio dei lavori virtuali nelle strutture reticolari iperstatiche

Si seziona l'asta (o le aste), pendoli eccedenti, presso le cerniere d'attacco. Nel taglio si pone la forza fittizia = 1 (che non farà lavoro esterno se il taglio ha spessore nullo, trattandosi di forza mutua.

(Conviene esporre i calcoli in tabelle)

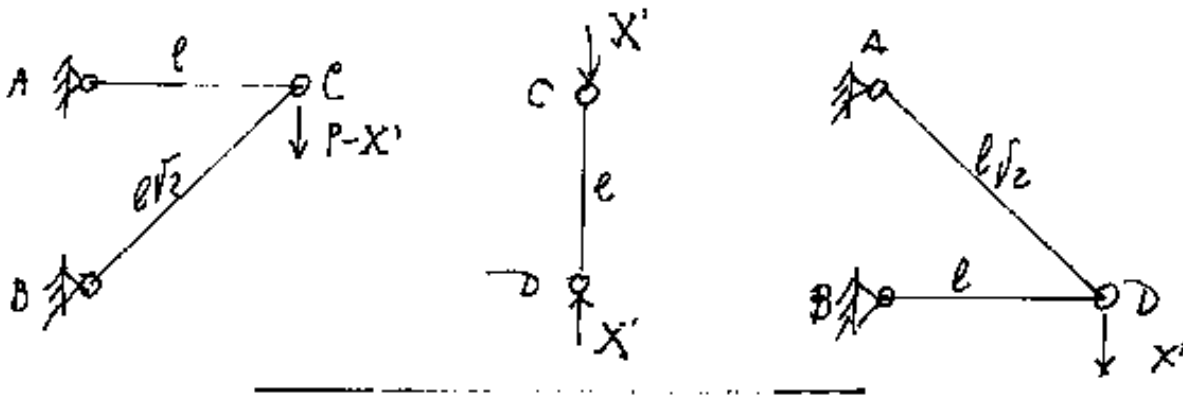
Esempio:

struttura: data — equivalente — isostatica principale

asta	l	N'	$N°$	N	$\mathcal{L} = \frac{N'N\,l}{EA}$	Note
1	1	-1	$+P$	$P - X'$	$\frac{l}{EA}(-P+X')$	
2	1	-1	0	$-X'$	$\frac{l}{EA} \quad +X'$	$\mathcal{L}_e = 0$ (forza mutua)

					$\frac{l}{EA}$	(forza mutua)
3	1	-1	0	$-X'$	$\frac{l}{EA}$ $+X'$	
4	$\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$	0	$+X'\sqrt{2}$	$\frac{l}{EA}$ $2X'\sqrt{2}$	
5	$\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	$(-P\sqrt{2}+X'\sqrt{2})$	$\frac{l}{EA}2\sqrt{2}(-P+X')$	

$$\mathcal{L}_i = \frac{l}{EA}\left[\left(3+4\sqrt{2}\right)X' - P\left(1+2\sqrt{2}\right)\right] = 0$$

$$X' = P\,\frac{1+2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}} = P\,\frac{13-2\sqrt{2}}{23} = (0,4422)P$$

Facciamo un discorso diverso, (anche se la struttura potrà essere verificata con uno dei teoremi sul Lavoro elastico, che esporremo dopo i Lavori Virtuali) cioè consideriamo le deformazioni delle strutture isostatiche:

$$N'_{AC} = +1 \;;\; N'_{CD} = -\sqrt{2} \;;\quad N_{AC} = (P-X') \;;\; N_{CB} = -(P-X')\sqrt{2} \;;\quad \eta_C = \frac{(P-X')l}{EA} + \frac{2(P-X)\sqrt{2}\,l}{EA}$$

$$\Delta l_{\overline{CD}} = \frac{Xl}{EA}$$

$$N'_{BD} = -1 \;;\; N'_{AD} = +\sqrt{2} \;;\quad N_{BD} = -X' \;;\; N_{AD} = +X'\sqrt{2} \;;\quad \eta_D = \frac{X'l}{EA} + \frac{2X'\sqrt{2}\,l}{EA}$$

poiché deve essere: $\left(\eta_C = \Delta l_{CD} + \eta_D \right)$ avremo:

$$\frac{Pl - X'l}{EA} + \frac{P2\sqrt{2}\,l}{EA} - \frac{X'2\sqrt{2}\,l}{EA} = \frac{X'l}{EA} + \frac{X'l}{EA} + \frac{2X'\sqrt{2}\,l}{EA}$$

$$P(1+2\sqrt{2})l = (3+4\sqrt{2})l\,X'$$

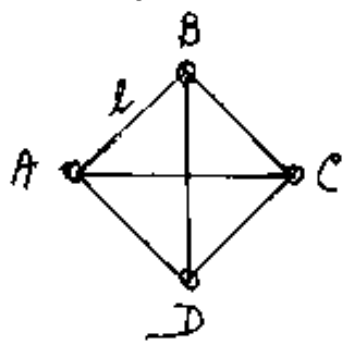
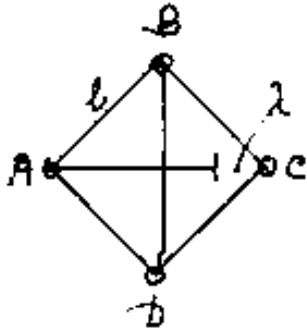
$$P(1+2\sqrt{2})c = (3+4\sqrt{2})c\,X$$

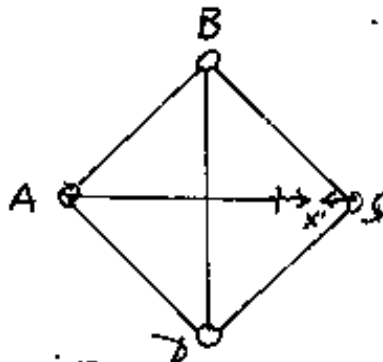
da cui:

$$X' = \frac{(1+2\sqrt{2})}{(3+4\sqrt{2})}\,P$$

che verifica il calcolo precedente.

Dilatazioni termiche o difetti di montaggio.

Se in una struttura reticolare iperstatica, una o più aste sono più lunghe o più corte della distanza fra le cerniere di attacco; la diversità di lunghezza può essere provocata per dilatazione termica ($\Delta l = \alpha l \Delta t$) oppure può essere un difetto di fabbricazione, in ogni caso se svincoliamo l'asta irregolare in una delle cerniere di attacco, si può ridurre ad isostatica la struttura, e quindi applicare i lavori virtuali ove il lavoro esterno non sarà nullo, ma il prodotto della forza fittizia unitaria per Δl.

Consideriamo la maglia quadrata ABCD di lato l e completa di diagonali AC e BD. (una volta

internamente iperstatica).

Supponiamo che la diagonale $\overline{AC}$ sia stata fornita più corta di λ (oppure subisca un raffreddamento $-\Delta t$ tale che: $\lambda = \alpha (l\sqrt{2}) \Delta t$; α = coefficiente di dilatazione termica (per il ferro $\alpha = 0,000012$) (la lunghezza di $\overline{AC} = l\sqrt{2}$).

La struttura equivalente evidenzia lo sforzo X' che si deve compiere per montare l'asta fornita più corta, e dimostro come la diversa temperatura in una asta rispetto alle altre (salto termico Δt) provochi autotensioni in tutte le aste della struttura iperstatica, mentre provoca un leggera configurazione diversa se la struttura è isostatica, ma non provoca tensioni; infatti se la struttura quadrata ABCD se non avesse la diagonale BD, la diagonale $\overline{AC}$ più corta di $\ell\sqrt{2}$ farebbe diventare un rombo la configurazione di ABCD, ma nessuna asta entrerebbe in tensione.

Applichiamo i Lavori Virtuali:

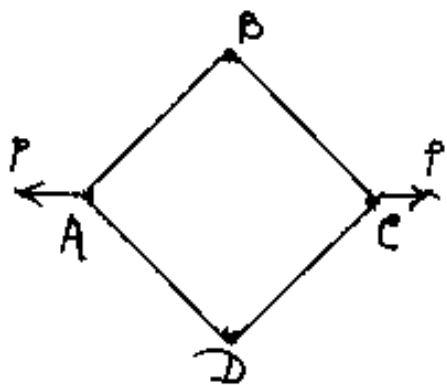
Asta	ℓ	N'	N	$\frac{\ell}{EA} N'N$	Note
AB	1	$-1/\sqrt{2}$	$-X'/\sqrt{2}$	$X'/2 \frac{\ell}{EA}$	

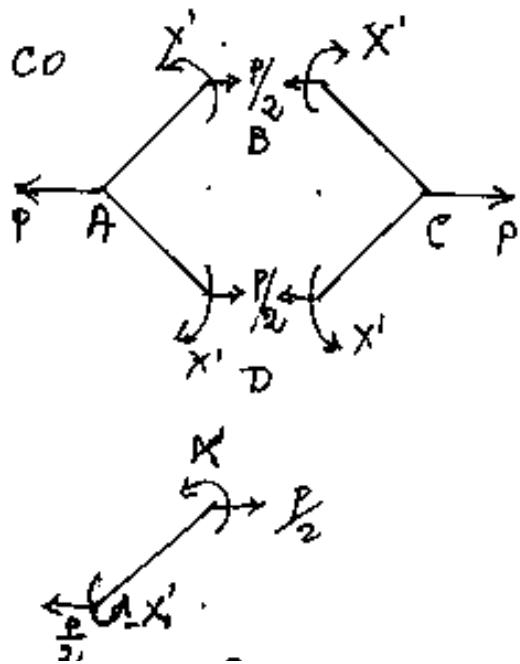
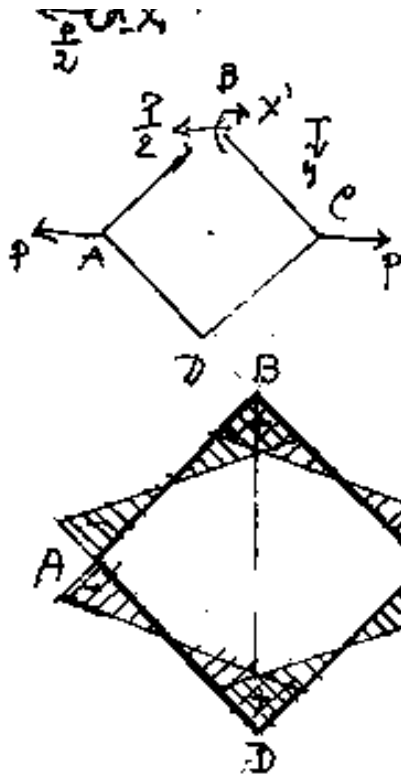
AB	1	$-1/\sqrt{2}$	$-X'/\sqrt{2}$	$X'/2$	$\frac{l}{EA}$
BC	1	$-1/\sqrt{2}$	$-X'/\sqrt{2}$	$X'/2$	$\frac{l}{EA}$
CD	1	$-1/\sqrt{2}$	$-X'\sqrt{2}$	$X'/2$	$\frac{l}{EA}$
DA	1	$-1/\sqrt{2}$	$-X'\sqrt{2}$	$X'/2$	$\frac{l}{EA}$
BD	$\sqrt{2}$	$+1$	$+X'$	$X'\sqrt{2}$	$\frac{l}{EA}$
AC	$\sqrt{2}$	$+1$	$+X'$	$X'\sqrt{2}$	$\frac{l}{EA}$

se λ è la diversità in lunghezza $\Delta l = \lambda$

lavoro esterno $\mathcal{L}_e = 1 \cdot \lambda$

$$\mathcal{L}_i = X\left(\frac{4}{2} + 2\sqrt{2}\right)\frac{l}{EA} = \lambda$$

$$X = \frac{\lambda EA}{l}\left(\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}\right)$$

Consideriamo il nostro telaio quadrato ABCD coi vertici collegati a incastro anziché cernierati e togliamo le diagonali, sia caricato in AC con due forze uguali e contrarie, P.

Una struttura chiusa è 3 volte internamente iperstatica infatti attraverso una sezione si trasmette : N, T, M. In questo caso tenendo conto delle simmetrie della struttura e del carico

l'incognita si riduce alla sola M. Basta considerare metà od anche $\frac{1}{4}$ di struttura ove la coppia $\frac{P}{2}\frac{l}{\sqrt{2}}$ deve essere equilibrata da due momenti uguali $X' = \frac{Pl}{4\sqrt{2}}$

$$4\sqrt{2}$$

Coi Lavori virtuali, rilevato che le sezioni ABCD per simmetria non ruotano avremo $\mathcal{L}_e = 0$. ; $M_y = -\left(\frac{P}{2}y + X'\right)$

$$0 = \int_0^{\ell/\sqrt{2}} \left(X' - \frac{P}{2}y\right)dy = \left(X'\frac{\ell}{\sqrt{2}} - \frac{P\ell^2}{8}\right) = 0 \qquad \boxed{X' = \frac{P\ell}{4\sqrt{2}}}$$

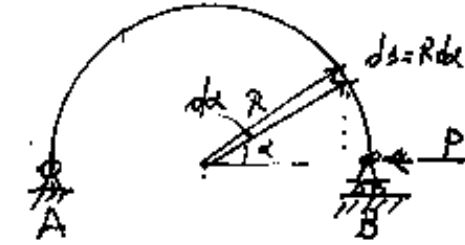
diagr. M.

Strutture archiformi (curve)

È necessario che le sezioni, nelle strutture in genere, siano individuate da un solo parametro. Poiché il tronchetto elementare ha per basi le dimensioni della sezione e per lunghezza il differenziale della lunghezza della struttura. Così le aste rettilinee hanno per asse longitudinale l'asse x (o l'asse y o z o s). avranno il differenziale: dx ($o\ dy, dz, ds$).

Nelle strutture circolari, con raggio costante, le sezioni sono individuate dall'angolo α, che, un raggio variabile forma con un raggio preso come origine. Il differenziale della lunghezza dell'arco è $\boxed{ds = R\,d\alpha}$

Poiché il differenziale della lunghezza di una curva qualsiasi espressa Cartesianamente in $y = f(x)$, ha : $ds = \sqrt{(y')^2 + 1}\ dx = \boxed{ds = \sqrt{(f'_{(x)})^2 + 1}\ dx};$

questa formula è valida in generale.

Trovare lo spostamento del carrello B;

$M' = -1(R \operatorname{sen}\alpha)$; $M = -P(R \operatorname{sen}\alpha)$

$$\delta = P\int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen}^2\alpha \frac{R\,d\alpha}{EJ} = \frac{R^3 P}{EJ}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\alpha\, d\alpha =$$

$$\delta = \frac{PR^3}{EJ}\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \alpha}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{\delta = \frac{PR^3\pi}{2EJ}}$$

Arco cernierato alla base e caricato simmetricamente al centro C.

Trascurando le deformazioni dovute a T ed N sblocchiamo la cerniera B

$$\mathcal{M}' = -1\,(R\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$\mathcal{M} = +\frac{P}{2}R(1-\cos\alpha) - X(R\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$\mathcal{L}_e = 0 \;;\; \mathcal{L}_i = \int \frac{\mathcal{M}'\mathcal{M}\,ds}{EJ} = 0$$

$$2\int_0^{\pi/2}\left[(-R\,\text{sen}\,\alpha)\left(\frac{P}{2}R - \frac{P}{2}R\cos\alpha\right) + XR\,\text{sen}^2\alpha\right]R\,d\alpha$$

$$2R^3\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{P}{2}\text{sen}\,\alpha + \frac{P}{2}\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + X\,\text{sen}^2\alpha\right)d\alpha = 0$$

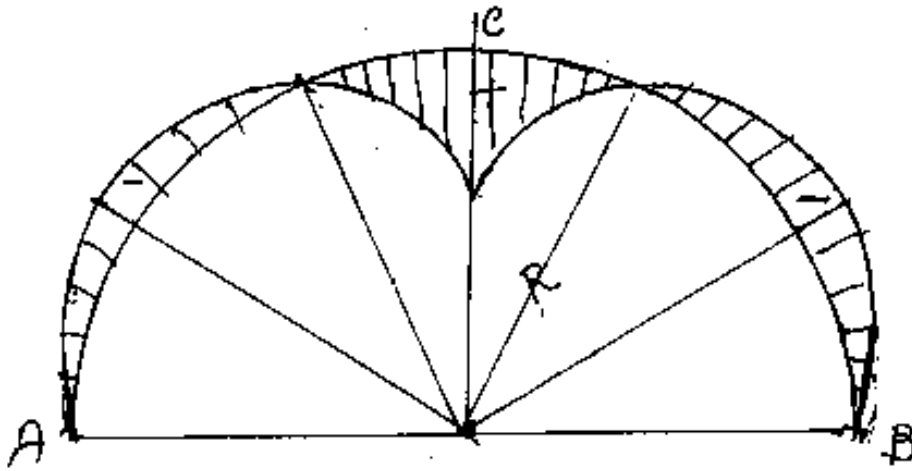
$$\left[\frac{P}{2}\cos\alpha + \frac{P}{2}\frac{\text{sen}^2\alpha}{2} + X\frac{-\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \alpha}{2}\right]_0^{\pi/2} = 0$$

$$\left[\frac{P}{2}(-1) + \frac{P}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + X\frac{0+\pi/2}{2}\right] = \quad +\frac{P}{4} = X\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X' = \frac{P}{\pi}}$$

Il diagramma dei momenti diventa:

$$\mathcal{M} = PR\left[\frac{1-\cos\alpha}{2} - \frac{\text{sen}\,\alpha}{\pi}\right] = 0 \text{ per } \alpha = 64°51'47{,}1''$$

$$\frac{dM}{d\alpha} = PR\left[\frac{\sin\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha}{\pi}\right] = 0 \text{ per } \alpha = 32°28'53,''9$$

$$M_{max} = -PR(0{,}09272..) \quad ; \quad M_C = +PR(0{,}329058..)$$

Le strutture reticolari

Sono in genere strutture portanti costitui=
te di aste cernierate agli estremi, quasi sem=
pre isostatiche internamente ed esternamente.
Le aste sono spesso metalliche, ma possono es=
sere in legno, od anche in altri materiali.
Sono reticolari le capriate per le coperture
dei tetti, le mensole per coperture in ag=
getto, le strutture di certi ponti, fino alla
costruzione di volte e cupole, oppure gru, ecc.
Se analizziamo punto per punto le tensioni
interne di una struttura piena (trave pie=
na) troviamo delle linee di flusso delle tensio=
ni normali di trazione e compressione, normali
fra loro ove il taglio è nullo, tali tensioni so=
no dette <u>tensioni principali</u> le loro direzioni,
in quel punto, sono dette <u>direzioni principali</u>,

[illegible] quel punto, sono dette direzioni principali, l'insieme delle linee di trazione e delle linee di compressione sono dette: linee isostatiche.
Torneremo su questo argomento, trattando il cerchio di Mohr.
Caratteristica delle strutture reticolari è che le aste, in genere, sono solo tese o solo

compresse (come le linee isostatiche).

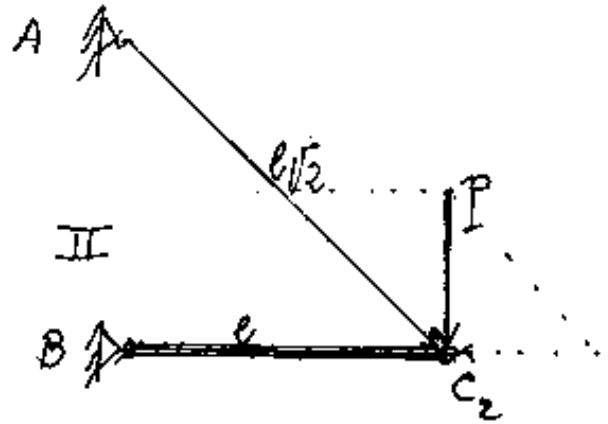
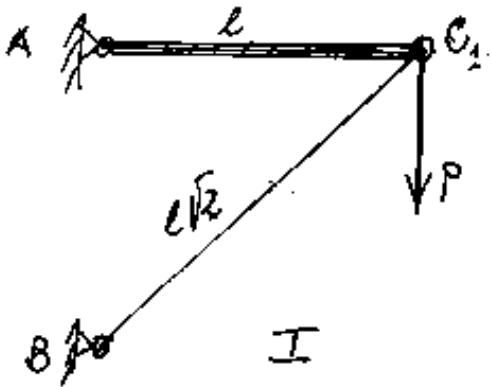
Però dobbiamo evidenziare subito la notevole diversità fra aste tese ed aste compresse, infatti, mentre un'asta tesa non presenta anomalie o instabilità, qualunque sia la lunghezza dell'asta; per le aste compresse invece c'è una lunghezza limite oltre la quale l'asta si rompe prima per inflessione dovuta all'instabilità elastica, spesso chiamata carico di punta, nel senso che data una lunghezza dell'asta superiore alla lunghezza limite (travi snelle) esiste un carico limite (carico di punta) oltre il quale si verifica l'instabilità elastica. Invece per travi più corte della lunghezza limite (travi tozze) la rottura avviene per compressione, per travi snelle con carico inferiore al carico di

punta, non si verifica l'instabilità e la compressione è molto lontana dalla rottura. (Tratteremo dettagliatamente l'instabilità).

Allo scopo di esercitare l'occhio del progettista, presentiamo i due casi più semplici di struttura reticolare costituita da una mensola, di due sole aste, caricata

nel nodo. Essendo fissi i vincoli A e B di

A l C_1 $l\sqrt{2}$ P B I

A $l\sqrt{2}$ P II B l C_2

ancoraggio delle aste che debbono sostenere il peso P, queste possono essere disposte in due modi: come in I o come in II.

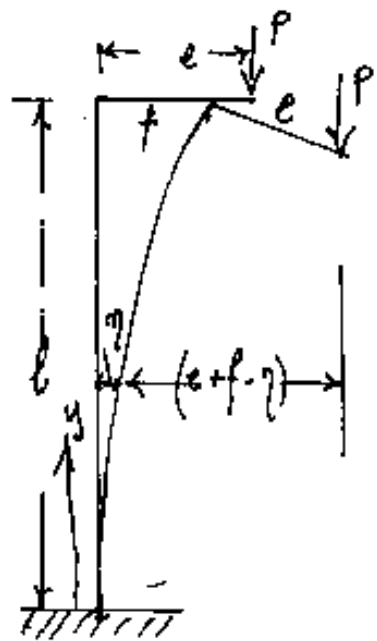
Scomponendo il carico P nelle due direzioni delle aste si nota che nel primo caso l'asta piu corta: AC_1 (lunga l) è soggetta alla componente minore del carico (P) ed è tesa; mentre l'asta più lunga $\overline{C_1B}$ (lunga $l\sqrt{2}$) è soggetta alla componente maggiore del carico ($P\sqrt{2}$) ed è <u>compressa</u> ove la lunghezza ed il carico dovrebbero essere limitati per evitare ...

per evitare ...

Nel II caso avviene l'opposto ed è quindi più economica e più rassicurante per la stabilità. Abbiamo ingrossato l'asta più corta perché destinata ad essere compressa e perché l'occhio si abitui a vedere, anche prima dei calcoli, l'inflettersi del filo $\overline{BC_1}$.

L'instabilità elastica (carico di punta)

Per poter trattare compiutamente le strutture reticolari, trattiamo subito il carico di punta, riservandoci nel seguito un capitolo sull'instabilità (argomento sviluppato dal Belluzzi nel IV Volume della sua Scienza delle Costruzioni, ma già introdotto nel I° Vol)

Consideriamo la mensola in figura caricata eccentricamente, essa deformandosi sposta la retta di azione del carico tanto che il momento nella sezione generica distante y diventa:

$$-\mathcal{M} = P(e+f-\eta)$$

Se applichiamo la linea elastica si ha:

$$\eta'' = \frac{-\mathcal{M}}{EJ} = \frac{P}{EJ}(e+f-\eta)$$

cioè:

$$\eta'' + \frac{P}{EJ}(\eta - e - f) = 0$$

$$\eta'' + \frac{P}{EJ}(\eta - e - f) = 0$$

Equazione differenziale del secondo ordine, incompleta, lineare, non omogenea.

Risolvendo questa equazione ed imponendo (vi sono due costanti di integrazione) che il carico P sia tale da portare al collasso a terra la struttura

si ha il carico critico di Eulero:

$$P_E = \frac{\pi^2 E J}{4 \ell^2}$$

Si noti che nella formula di Eulero non figura l'eccentricità "e" quindi si può pensare (con Eulero) che il collasso a terra si avrebbe anche con e=0 (o infinitesimo). Cioè quando il carico baricentrico sull'asta raggiunge il valore di P_E, si ha lo scatto improvviso d'inflessione fino alla rottura. È ovvio che se la sezione dell'asta ammette J diversi, l'inflessione avviene secondo il J_{minimo}.

Eulero chiamò carico critico questo carico:

$$P_{crit\,(E)} = \frac{\pi^2 E J_{min.}}{4 l^2}$$

Prendendo una stecca da disegno diritta, flessibile, piuttosto lunga, si può comprimere

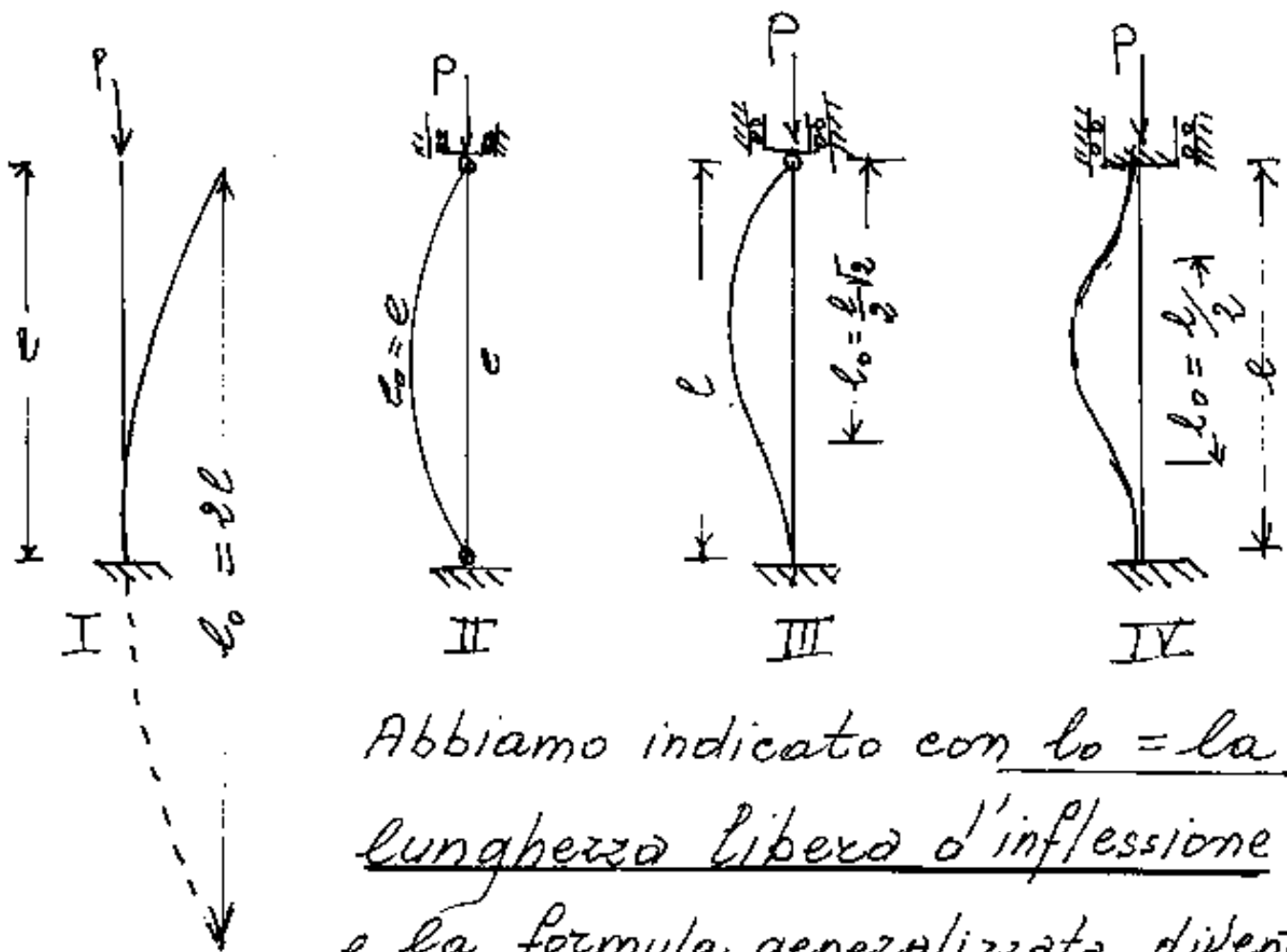
assialmente con una mano aumentando via, via, il carico, ad un certo punto avverrà lo scatto dell'inflessione e bisogna essere pronti a cessare la compressione per non rompere la stecca, poichè il momento flettente aumenta con la deformazione che aumenta con M.

La formula di Eulero può essere generalizzata, si considerano quattro tipi di vincolo:

I: l, $l_0 = 2l$

II: l, $l_0 = l$

III: l, $l_0 = l/\sqrt{2}$

IV: l, $l_0 = l/2$

Abbiamo indicato con l_0 = la lunghezza libera d'inflessione e la formula generalizzata diventa:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l_0^2}$$

applicandola al I caso torna Eulero.

17

Limiti di validità della formula di Eulero.

Poniamo: $J_{min} = \rho^2_{min} A$

ove: ρ = raggio giratore d'inerzia (minimo)

A = area della sezione:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E \rho^2_{min} A}{l_0^2}$$

La formula può scriversi:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E A}{l_0^2/\rho^2_{min}}$$

ove ponendo:

$$\frac{l_0}{\rho_{min}} = \lambda = \text{rapporto di snellezza.}$$

l'equazione diventa:

$$P_{crit} = \frac{E \pi^2 A}{\lambda^2}$$

e dividendo per A

$$\frac{P_{crit.}}{A} = \boxed{\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$ tensione critica

detta σ_r la tensione di rottura a compressione semplice si ha: $\boxed{\sigma_{crit} \gtreqless \sigma_r}$

cioè la rottura per instabilità elastica può precedere la rottura per compressione semplice oppure essere circa contemporanea, oppure la

rottura a compressione semplice può avvenire prima che si verifichi l'instabilità elastica.

Poiché π ed E sono costanti tuttociò dipende dal rapporto di snellezza λ

Chiameremo: "torre" le travi che hanno un piccolo rapporto di snellezza: l_o = piccolo; ρ_{min} = grande,

per esse σ_{crit} è grande e maggiore di σ_r cioè aumentando il carico si arriva prima al carico di rottura che al carico critico.

Diremo invece "snelle" le travi per le quali si ha un rapporto di snellezza grande: l_o = grande, ρ_{min} = piccolo, per esse σ_{crit} è piccolo e molto minore di σ_r; cioè, un piccolo carico anche molto minore del carico ammissibile a compressione, provoca l'instabilità elastica. (una striscia di un foglio di carta, che teso può sostenere alcuni grammi, compressa spesso si inflette per il proprio peso.)

Abbiamo paragonato la σ_{crit} alla σ_r (tensione di rottura per compressione semplice, in effetti prima di σ_r si verifica σ_s = (tensione di snervamento) e prima ancora σ_e =

(tensione di snervamento) e prima ancora σ_e = (tensione limite di elasticità) ed infine σ_p = (tensione limite di proporzionalità) cioè limite di validità della legge di Hooke; ed il Belluzzi, confronta: $\sigma_E = \sigma_{crit} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \leq \sigma_p$ con σ_p e ricava:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \lambda_{lim.}$$

Il limite del rapporto di snellezza.

Formule per il calcolo di travi corte compresse

Lo sviluppo industriale e sopratutto lo sviluppo delle reti ferroviarie, ove la necessitá di costruire tettoie e tralicci realizzati con travi reticolari in ferro, portó presto l'interesse per il calcolo delle aste compresse che, per economia, avrebbero avuto un alto rapporto di snellezza, mentre per la sicurezza occorreva distribuire l'area di ferro in modo da evitare l'instabilitá elastica.

Gli studi in materia furono molteplici, si ricordano le formule di Tetmajer (Zurigo 1896) di tipo lineare: $\sigma_{crit.} = a - b\lambda$ che riassume i valori:

ferro omogeneo: $\sigma_{crit} = 3100 - 11.4\,\lambda$ con $\lambda \leq 105$

ferro saldato: $\sigma_{crit} = 3030 - 12,9\,\lambda$ " $\lambda \leq 112$

legno: $\sigma_{crit} = 293 - 1,94\,\lambda$ " $\lambda \leq 100$

Ghisa: $\sigma_{crit} = 7760 - 120\,\lambda + 0,53\,\lambda^2$ " $\lambda \leq 80$

Le Ferrovie Italiane nel 1916 emettono le norme per le costruzioni metalliche, ed impongono per il ferro omogeneo un carico di sicurezza ridotto

$\sigma_{amm} = K = K$ per $\lambda \leq 30$

" $= K(1,207 - 0,0069\lambda)$ per $30 \leq \lambda \leq 105$

" $= K(5300/\lambda^2)$ per $\lambda > 105$

Il metodo ω

Il metodo è stato introdotto nelle norme ufficiali tedesche nel 1925 e modificato nel 1940, è il metodo a tutt'oggi riconosciuto valido in Italia ed all'estero, per il calcolo delle travi caricate di punta.

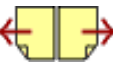
ω è il coefficiente riduttore della tensione di sicurezza ammissibile per compressione semplice per avere la σ ammissibile a carico di punta $\sigma_{a.p.}$

$$\sigma_{a.p.} = \sigma_{amm}/\omega = K/\omega$$

ω è tabulato in funzione di λ.

Per il ferro omogeneo ed acciaio da tempo si usavano i simboli:

Aq 37 = ferro omogeneo con tensione di rottura

$$\sigma_r = 3700 \ Kg/cm^2 \ ; \quad \sigma_{amm} = 1200 \ Kg/cm^2$$

Aq 48 = ferro semi duro con tensione di rottura

$$\sigma_r = 4000 \ Kg/cm^2 \ ; \quad \sigma_{am} = 1600 \div 1800 \ Kg/cm^2$$

Aq 52 = acciaio con $\sigma_r = 5200$ Kg/ ; σ = 1800÷2000 Kg/

Aq 52 = acciaio con $\sigma_r = 5200\ Kg/cm^2$; $\sigma_{amm} = 1800 \div 2000\ Kg/cm^2$

per questi tre tipi di Acciaio di qualità il Belluzzi, nel I volume della sua scienza delle costruzioni, riporta le tabelle di ω in funzione di λ riferite alle Norme tede= sche, ed una seconda tabella sempre riferita

alle norme tedesche, corretta nel 1940 ove i valori di ω sono in genere più piccoli dei corrispondenti nella precedente tabella.

Nel "Colombo" - Manuale dell'Ingegnere - edizione Hoepli 66ª-70ª dell'anno 1939 a pag 599 sono riportate due tabelle di coefficienti ω in funzione di λ, la prima relativa alle aste compresse in acciaio colato e riporta gli stessi valori delle prime norme tedesche relative ad Aq 37.

La seconda tabella è relativa alle aste compresse in acciaio ad elevato limite elastico e corrispondono alla prima tabella delle norme tedesche per l'Aq 52. (Le tabelle del Colombo variano λ di uno in uno, le tabelle del Belluzzi variano λ di 10 in 10)

La legislazione italiana, dopo la seconda guerra mondiale ha prescritto le "norme per la disciplina delle opere in conglomerato cementizio armato normale e precompresso ed a struttura

armato normale e precompresso, ed a struttura metallica" con questo titolo la Libreria dello Stato riporta un fascicolo del 1972 ove sono riportate le leggi: 5-XI-1971 n° 1086 e D.M. 30/5/1972 ove figurano tabelle che riportano i valori di ω.

Successivi aggiornamenti delle norme si tro=
vano nel DM. 30-5-1974.
Le definizioni degli acciai sono variate infatti
Aq 34 viene definito $F_e B22$ ove 22 è la tensione
di snervamento in Kg/mm². (2200 Kg/cm²)
Fe B 32 con $\sigma_r \geq 5000$ Kg/cm². Ma viene anche
definito: A 38 ove 38 si riferisce allo snervamento.
(A = acciaio ; Aq = Acciaio di qualità). Nel successivo
decreto $F_e B22$ diventa $F_e B22K$.
Poiché la normativa imposta per legge varia
il progettista dovrà aggiornarsi all'ultima normativa
pervenuta. (È un problema tecnologico).
Noi, riferendosi ad aste compresse nel=
le quattro condizioni di vincolo già precisa=
te e per sezioni costanti e simmetriche
rispetto agli assi principali d'inerzia,
noto lo sforzo normale N per progettare

noto lo sforzo normale N, per progettare l'asta compressa, caricata di punta, si prefissa un λ_m arbitrario (per es. 120 per il ferro) e dalle tavole si ricava ω quindi essendo nota la $\sigma_{amm.}$ (per il ferro ordinario 1200 Kg/cm^2) si trova la tensione ammissibile a carico di punta $\sigma_{c.p} = K = \frac{\sigma_{amm}}{\omega}$, quindi dividendo: $\frac{N}{K} = A$ si trova l'area

della sezione del profilato necessaria allo scopo. Però i profilati in commercio presentano aree diverse maggiori o minori di quella calcolata sulla base del λ arbitrario proposto. Si sceglie il profilato che abbia un'area immediatamente superiore; dalle tabelle del profilato si trova ρ_{min} e si calcola λ_{n+1}, quindi si riparte assumendo per λ un intermedio fra λ_n e λ_{n+1} (per es $\frac{\lambda_n+\lambda_{n+1}}{2}$) si ripete il calcolo finché $\lambda_n \cong \lambda_{n+1}$.

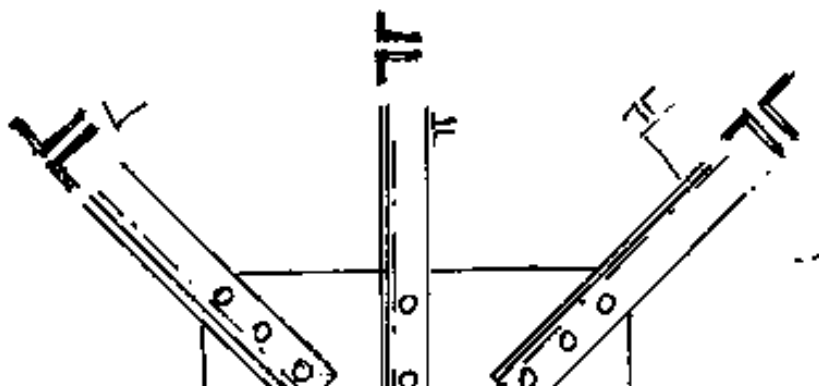
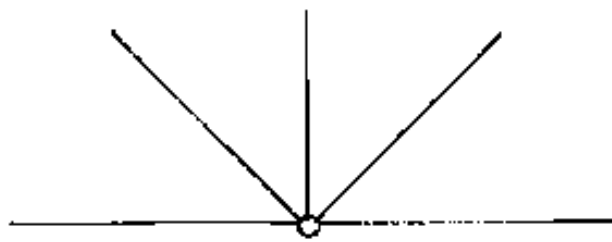
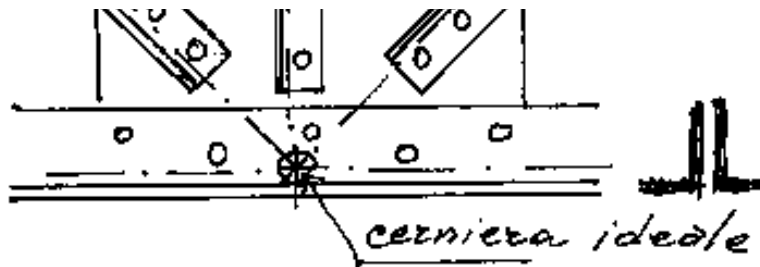
Cioè si compila la tabella:

N = noto ; σ_{amm} = nota ; l_0 = nota :

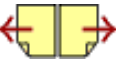
λ_n	ω	$\sigma_p = K$	A = area calcolata	A_p area del profilato	ρ_{min}	λ_{n+1}
λ_n (arbitraria)	ω dalle tabelle	$K = \frac{\sigma_{amm}}{\omega}$	$A = \frac{N}{K}$	—	—	—
-	—	—	—	dalle tabelle A_p	dalle tabelle ρ_{min}	$\lambda_{n+1} = \frac{l_0}{\rho_{min}}$
$\left(\frac{\lambda_n+\lambda_{n+1}}{2}\right)$	id	id	id	-	-	-
-	—	—	—	id	id	id

$i\bar{\sigma}$	$i\bar{\sigma}$	$i\bar{d}$	$i\bar{d}$	$i\bar{d}$	$i\bar{d}$	$i\bar{d}$

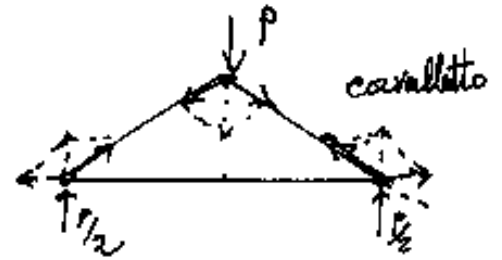
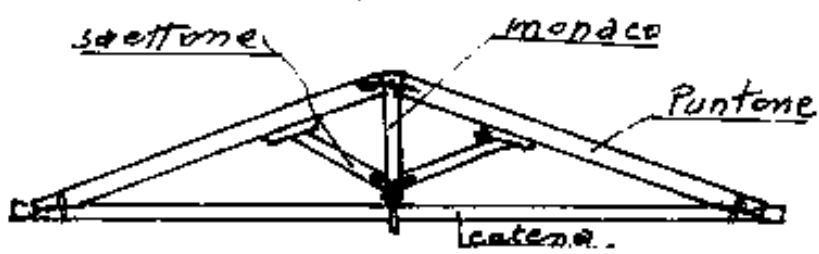
Naturalmente, in modo più grossolano la progettazione può ridursi al Pcrit/grado di sicurezza ove Pcrit sia minore del Rammissibile).
Il grado di sicurezza g non inferiore a 5 data la pericolosità.

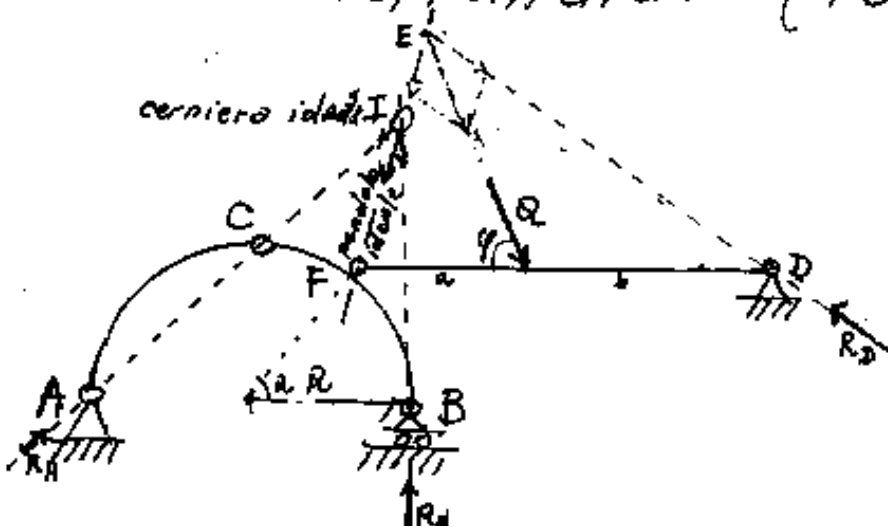
Poiché le incavallature metalliche sono co-
stituite di profilati, le cui giunzioni possono
essere saldate o chiodate, nei nodi viene
posta una lastra di collegamento detta
fazzoletto. I profilati sono doppi e stanno
simmetricamente dalle due parti del fazzolet-
to. Gli assi baricentrici alle sezioni dei pro-
filati che concorrono sullo stesso fazzoletto,
debbono incontrarsi in un punto che sarà
considerato, ai fini del calcolo, la cerniera
(ideale) di collegamento

realizzo

cerniera ideale

schema:

cerniera corrispondente a quella ideale

Metodi di calcolo degli sforzi normali nelle aste delle strutture reticolari

Consideriamo strutture reticolari isostatiche, con aste scariche, cernierate nei nodi, dove sono i carichi. Cioè composte di pendoli.
Il calcolo può effettuarsi graficamente, o analiticamente per i vari tipi di struttura.
Le capriate, o incavallature, destinate a sostenere le falde pendenti dei tetti di larghi capannoni o chiese; partono da un semplice triangolo costituito da due puntoni ed una catena (tesa). Spesso i due puntoni, al colmo, premono contro un corto trave verticale detto monaco, ove all'altra estremità ha un reggi-catena. Talvolta al monaco si aggiungono due saettoni per limitare l'inflessione dei puntoni. Queste capriate, in legno

dei puntoni. Queste capriate, in legno sono comuni nelle nostre chiese francescane.

La scomposizione del carico ci da' la grandezza degli sforzi di trazione e compressione.

Ai fini del calcolo è bene ricordare che in una struttura reticolare isostatica, con aste qualsiasi, (curve o rettilinee), purché cernierate agli estremi, cariche o scariche, le aste cariche possono essere considerate una alla volta, le restanti aste scariche corrispondono ad un vincolo ideale di grado tre, costituito da un vincolo di grado uno e da un vincolo di grado due, cioè l'asta carica diventa come una trave semplicemente appoggiata di facile risoluzione. Per sovrapposizione degli effetti si calcola l'intera struttura. (Per esempio): data la struttura isostatica ABCDE carica sull'asta FD del carico Q, per quanto detto, poiché

R_A

quanto detto, poiché
in D c'è un vincolo di grado due (cerniera)
in F la struttura ACB deve! corrispondere
ad un vincolo di grado uno (reale o ideale).
Le azioni del pendolo (a terra) $\overline{AC}$ e del carrello
(a terra) B equivalgono alla cerniera ideale a terra I

Per cui la trave $\overline{FD}$ risulta vincolata (a terra) dalla cerniera reale D (vincolo di grado due direttamente a terra) e dal pendolo ideale $\overline{IF}$ (vincolo di grado uno, a terra tramite il pendolo $\overline{AC}$ e l'azione del carrello B).

Poiché ogni asta può idealmente equiparsi ad una trave isostatica, semplicemente appoggiata; poiché un insieme di carichi comunque complesso e agente su una trave, può sempre ridursi (ai soli fini del calcolo delle reazioni isostatiche) ad un sistema equivalente costituito da una sola forza risultante; aplicando la regola generale per la risoluzione grafica delle reazioni vincolari, la quale dice: "prolungare le rette di azione del vincolo di grado uno (reale o ideale) e della retta di azione della risultante dei carichi fi

no a determinare il punto comune E (punto di equilibrio). Tracciare da E la retta di azione del vincolo di grado due, riportare in E la risultante dei carichi e scomporla secondo le rette di azione dei due vincoli"

Considerando cariche una alla volta le aste, per sovrapposizione degli effetti si equilibra la struttura.

Il Diagramma Cremoniano

Il Diagramma Cremoniano, detto anche diagramma reciproco, è, in scala forze, il diagramma degli sforzi normali delle aste della struttura cui il diagramma si riferisce.

Ad ogni "nodo" della struttura, corrisponde una "maglia" (poligono) sul cremoniano, e viceversa.

Le aste che concorrono in un nodo della struttura, sono ivi disegnate in scala lunghezze, esse, intorno al nodo, si susseguono in un certo ordine ciclico che corrisponde all'ordine ciclico con cui si susseguono i segmenti della maglia che, in scala forze, ne rappresentano lo sforzo normale.

Le aste del nodo ed i corrispondenti segmenti delle maglie sono paralleli.

segmenti delle maglie sono paralleli.

Per distinguere le aste compresse dalle aste tese, si usa ingrossare lo spessore del segno dei segmenti che ne rappresentano lo sforzo, e: del segno delle aste stesse.

I carichi debbono essere nei nodi della struttura internamente ed esternamente isostatica.

Per realizzare il diagramma cremoniano di una struttura, occorre:

I) Disegnare con la massima precisione perché in fondo il diagramma deve chiudere.
La struttura disegnata in scala lunghezze, il diagramma in scala forze.

Disegnata la struttura con i carichi occorre:

I) Numerare i nodi in ordine ciclico (per esempio con verso orario)

II) Fare il poligono delle forze rispettando l'ordine dei nodi includendovi le reazioni vincolari che devono essere precalcolate

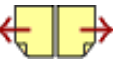
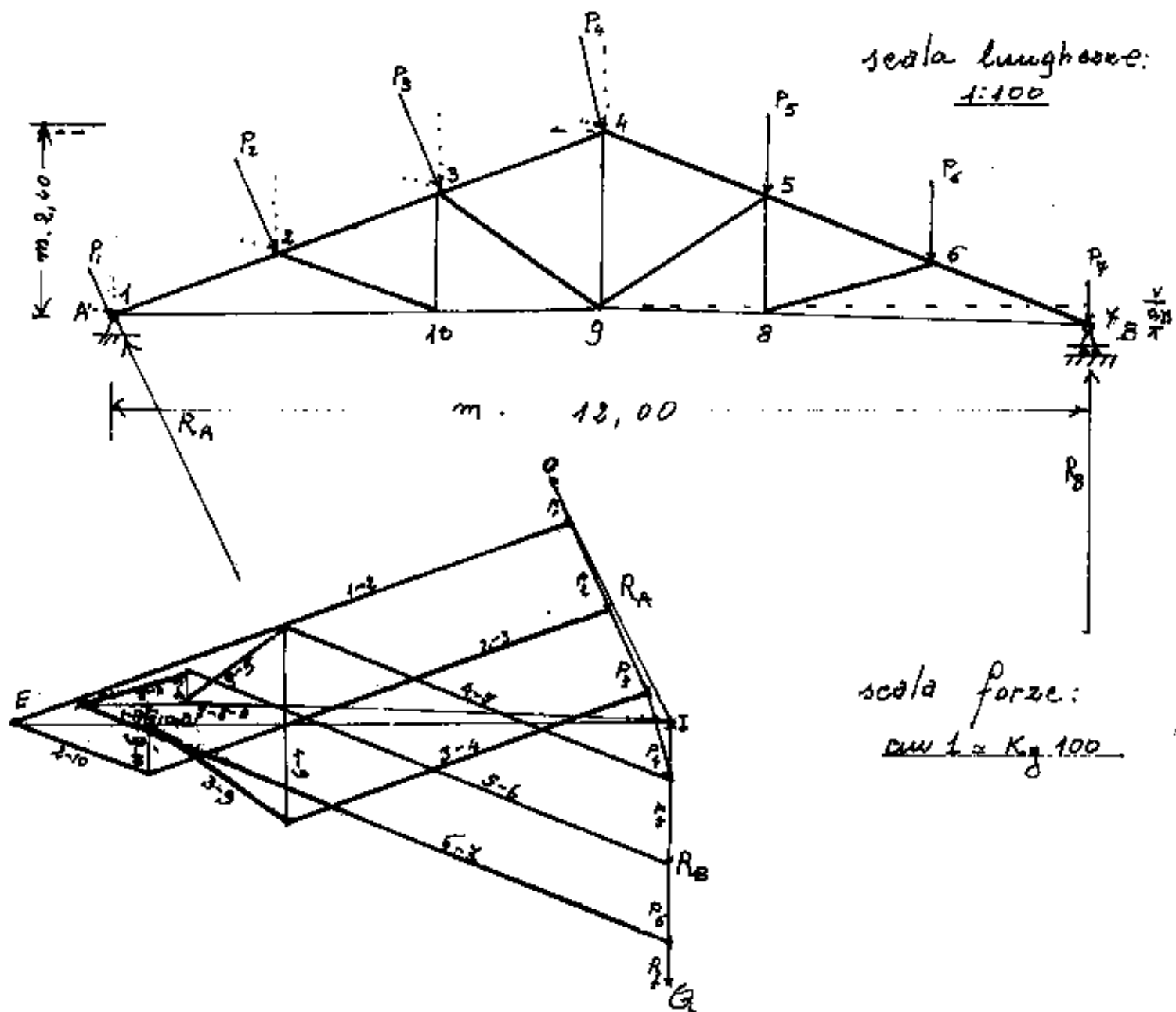
III) Iniziare l'esame del primo nodo della struttura ove le aste e le forze che vi concorrono debbono essere esaminate in sequenza ciclica (per esempio oraria)

lasciando per ultime le due aste
ove lo sforzo è ancora incognito.
Se le aste incognite sono più di due
si passa ad un nodo adiacente
che permetta di ridurre a due le
aste incognite.

IV). Ogni forza ed ogni asta che hanno in comune il nodo, considerate nel= l'ordine ciclico prefissato deve avere nello stesso ordine con la stessa sequen= za un segmento parallelo nella maglia del cartesiano, che deve essere chiusa.

V) Ripercorrendo in sequenza i lati della maglia, se per esempio percor= riamo il segmento parallelo ad una asta, dobbiamo riguardare sul nodo come se ci muovessimo sull'asta, anziché sul segmento della maglia, e se il nostro moto "va verso il nodo" l'asta è un puntone ed il segmento in scala forze il valore della compressione. Se sfugge dal nodo è un tirante la cui intensità è la lunghezza del segmento in scala forze.

la lunghezza del segmento in scala forze.
(Il nostro percorrere è il verso delle forze
agenti).

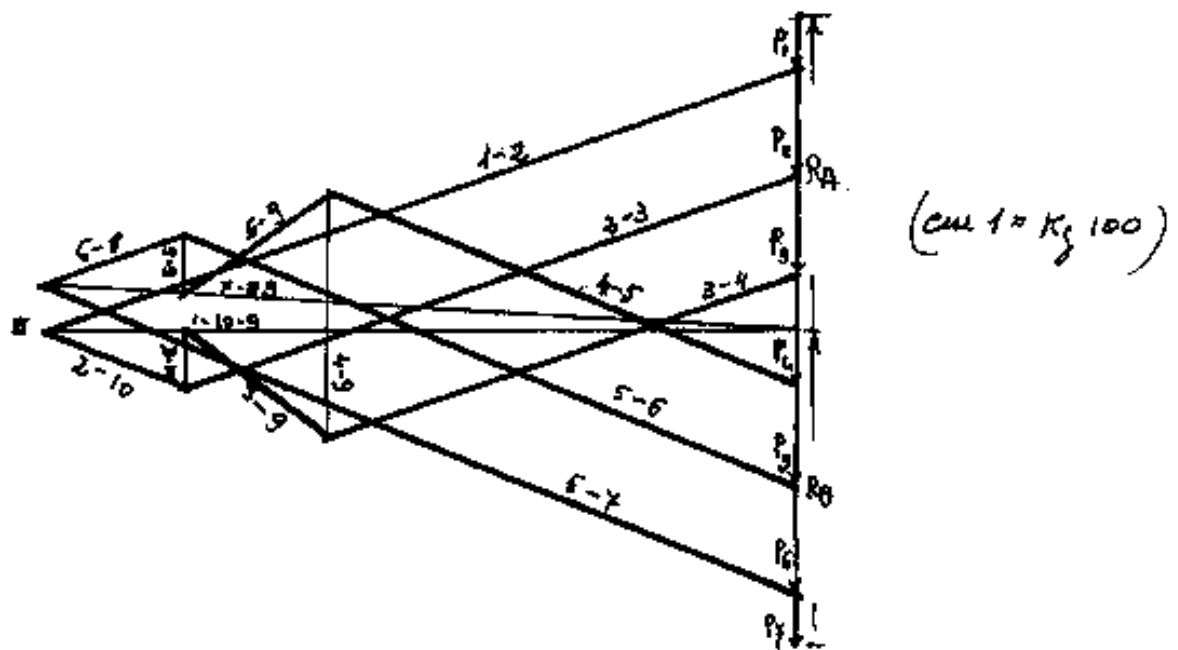
Allo scopo di chiarire meglio, diamo il
dettaglio per la realizzazione del diagram=
ma Cremoniano di una capriata inglese sog=
getta nei nodi al peso del tetto ed alla spinta
del vento.

Cremoniano per una Capriata Inglese

Tracciato il poligono delle forze OQ, chiuso dalle reazioni $R_B = \overline{QI}$ ed $R_A = \overline{IO}$; nel nodo 1 troviamo in ordine ciclico R_A, P_1, asta 1-2, asta 1-10; perciò iniziando da I si percor=

re R_A fino ad 0, quindi si percorre P_1, poi tracciamo la parallela all'asta 1-2 e chiudiamo la maglia tracciando da I la parallela ad 1-10. Notiamo che percorrendo la parallela ad 1-2 verso E sulla struttura la percorrenza è verso il nodo 1, perciò 1-2 è puntone; mentre da E ad I per chiudere la maglia, sfuggiamo dal nodo 1 perciò l'asta 1-10 è tirante. Passiamo al nodo 2 ove in

ordine ciclico troviamo: asta (1-2) compressa, forza P_2, asta (2-3), asta (2-10). Dovendo spingere verso il nodo 2 iniziamo a percorrere lo sforzo dell'asta 1-2 sulla maglia a partire da E, poi troviamo l'intensitá (in scala) della forza P_2 e da qui tracciamo la parallela alla (2-3), e chiudiamo la maglia in E con una parallela alla (2-10); la (2-3) vá verso il nodo 2 (puntone), la (2-10) sfugge da 2 (tirante). (I puntoni si disegnano con segno ingrossato). Non possiamo andare nel nodo 3 perché vi sono tre aste incognite: in ordine ciclico la (3-4), la (3-9), la (3-10); Nel nodo 10 vi sono solo due aste incognite, in ordine ciclico abbiamo: (10-1), (10-2), (10-3), (10-9). La (10-1) che noi abbiamo calcolato come (1-10), ha una intensitá che per <u>tirare</u> il nodo 10 inizia da I e va fino ad E, ove troviamo la (2-10) che comprime il nodo 10, quindi tracciamo il tirante parallelo alla (10-3) che richiude la maglia

col tirante FI. Ora possiamo andare nel nodo 3, ove, per lasciare per ultime le aste incognite, ciclicamente dobbiamo iniziare dalla (3-10), che, essendo un tirante, inizia in F, poi troviamo già predisposta la (2-3), poi la forza P_3 da qui la parallela alla (3-4) puntone e chiude in F la parallela alla (3-9) pure puntone. Si continua così fino a chiudere il cremoniano.

E' interessante confrontare il cremoniano della struttura soggetta ai carichi ed alla spinta del vento, con la struttura soggetta ai soli carichi verticali (esclusa anche la componente verticale della spinta del vento).
Fatto il poligono delle forze, si procede esattamente come descritto

(cm 1 = Kg 100)

Si nota come l'azione del vento diminuisce lo sforzo normale di alcune aste e lo aumenta in altre

(per esempio diminuisce sulla (1-2) ed aumenta sulla (6-7).) ciò provoca una contrazione del diagramma cremoniano. Se il vento tirasse dall'altra parte si avrebbe il diagramma simmetrico cioè gli sforzi della (1-2) e della (6-7) si scambierebbero come tutte le altre aste simmetriche.

(scala lunghezze 1:100)

(scala forze cm 1 = Kg 700)

Consideriamo la tettoia ad una falda (Pensilina) in figura e tracciamo il cremoniano, ove si nota come le aste seguono le tensioni delle linee isostatiche che si avrebbero se la struttura fosse piena.

Consideriamo un altro metodo di calcolo:

Metodo di Ritter (o sezioni di Ritter)

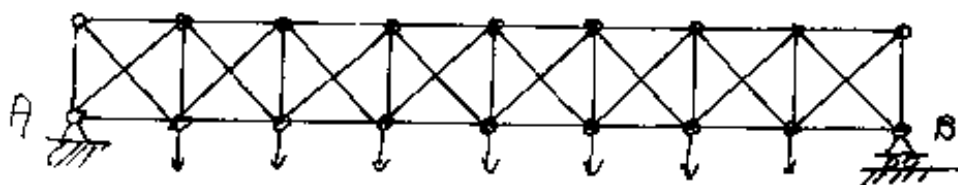
Le sezioni di Ritter dividono la struttura in due parti tagliando tre aste non concorrenti nello stesso nodo.

Il nodo comune a due aste tagliate è detto polo della terza asta.

Se vogliamo conoscere lo sforzo in una asta col

Se vogliamo conoscere lo sforzo in una asta calcoliamo (per forze a sinistra, o per forze a destra) il momento nel polo dell'asta e lo dividiamo per la distanza del polo dall'asta. Per esempio l'asta (7-6) ha per polo il nodo 3 distante cm 90 (circa), il momento nel nodo 3 = $M_3 = -50 \times 2 - 100 \times 1 = -200$ Kgm; $N_{7-6} = \frac{200}{0,9} = 222$ Kg. (valori misurati graficamente)

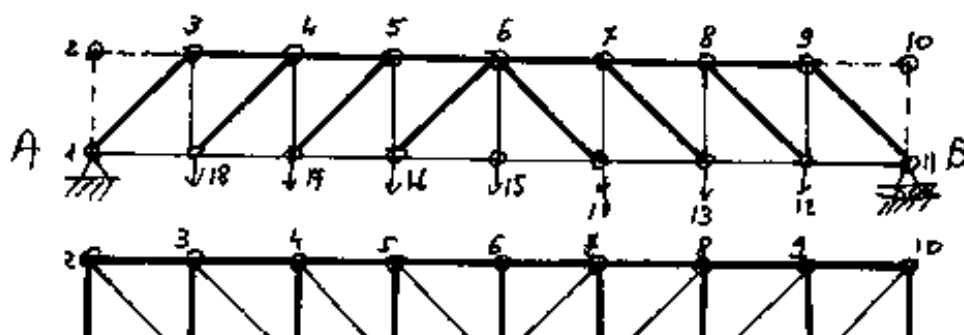
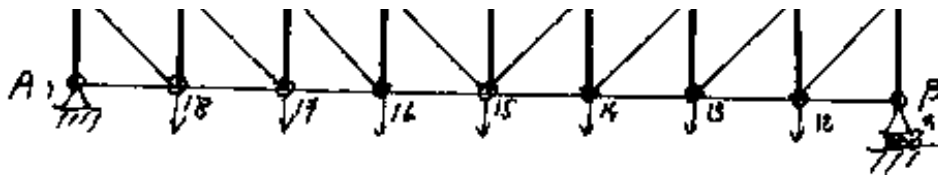
Una struttura molto interessante è la trave a correnti orizzontali, spesso costituita da elementi quadrati con diagonali, che si possono fra loro commettere in modo da poter essere utilizzata per ponti di emergenza.

A B

La trave si presenta come in figura e sarebbe tante volte iperstatica quante sono le aste eccedenti; tuttavia, condizioni di simmetria, consentono di scindere la struttura in due isostatiche alle quali assegnamo metà carichi per poi ricomporre la struttura una volta calcolate le aste.

2 3 4 5 6 7 8 9 10

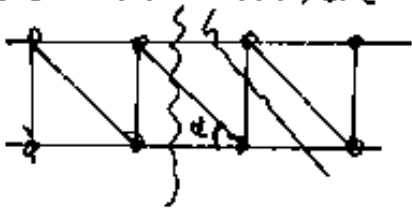
A 1 18 19 16 15 14 13 12 11 B

2 3 4 5 6 7 8 9 10

A 18 17 16 15 14 13 12 B

Si noti che la seconda trave (trave di Mohnie') è più razionale perché le aste compresse (i ritti) sono più corte delle aste tese (le diagonali), per le verifiche a carico di punta sono meno snelle. Viceversa la prima trave. (trave di Howe) (diagonali tozze)

Nelle travi a correnti paralleli le aste di parete hanno il polo all'infinito, per esse non è applicabile il metodo di Ritter, che calcola i momenti nel polo. Però possiamo considerare due casi:

I) La sezione divide la diagonale inclinata di α sui correnti orizzontali

II) La sezione divide il ritto.

Poiché attraverso la sezione deve trasmettersi lo sforzo di Taglio, cioè la componente verticale della risultante delle forze a destra, deve equilibrarsi con la componente verticale della risultante delle forze a sinistra e non possono trasmettersi coi correnti orizzontali, ma solo con le aste di parete. Perciò lo sforzo sulla diagonale sarà: $S_d = T/\cos$

lo sforzo sulla diagonale sarà : $S_d = T/\operatorname{sen}\alpha$
mentre lo sforzo sul ritto, (asta verticale): $S_v = T$.
Il segno del taglio ci dice se tali aste sono tese o compresse.

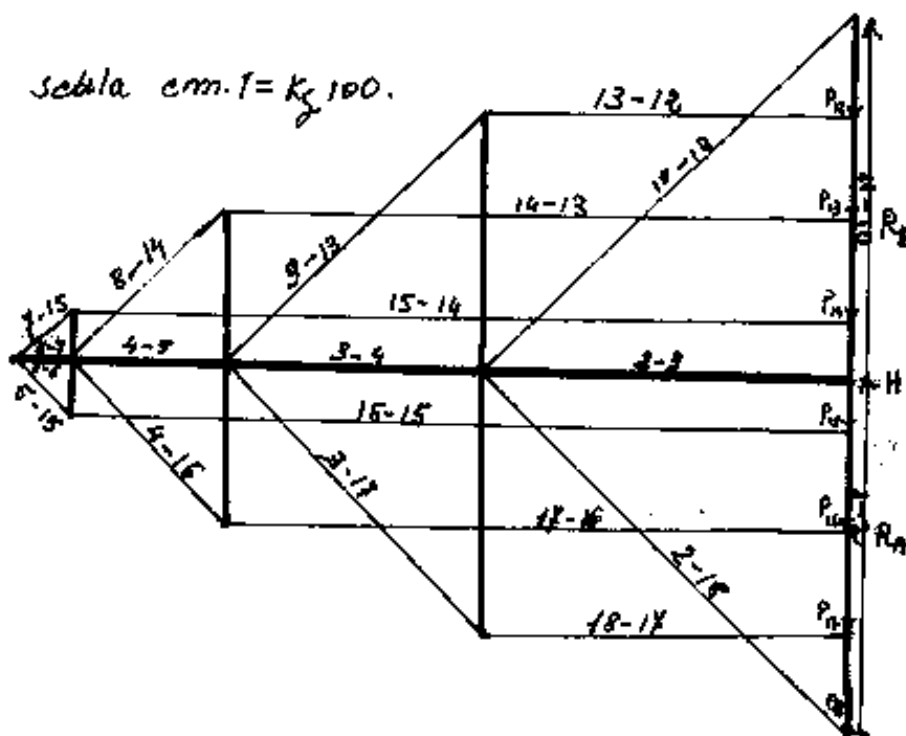
Un altro metodo è

L'equilibrio dei nodi

ove nodo per nodo la somma delle azioni dovute ai carichi ed agli sforzi delle aste deve

essere nulla. Se nella struttura iniziale in ogni modo vi sono aste di sforzo incognito in numero maggiore di due, non possiamo partire col cremoniano, per cui occorre trovare metodi diversi (Ritter, equilibrio dei nodi, Culman, situazioni particolari ecc.)

Facciamo il cremoniano della trave di Mohnié con carichi verticali sul corrente inferiore. (già disegnata) Si noti che le aste (1-2) ed (11-10) sono compresse da R_A ed R_B; che le aste: (1-18); ed (11-12) non hanno sforzo, servono solo ad evitare la labilità delle aste (1-2) ed (11-10). Notare che l'asta

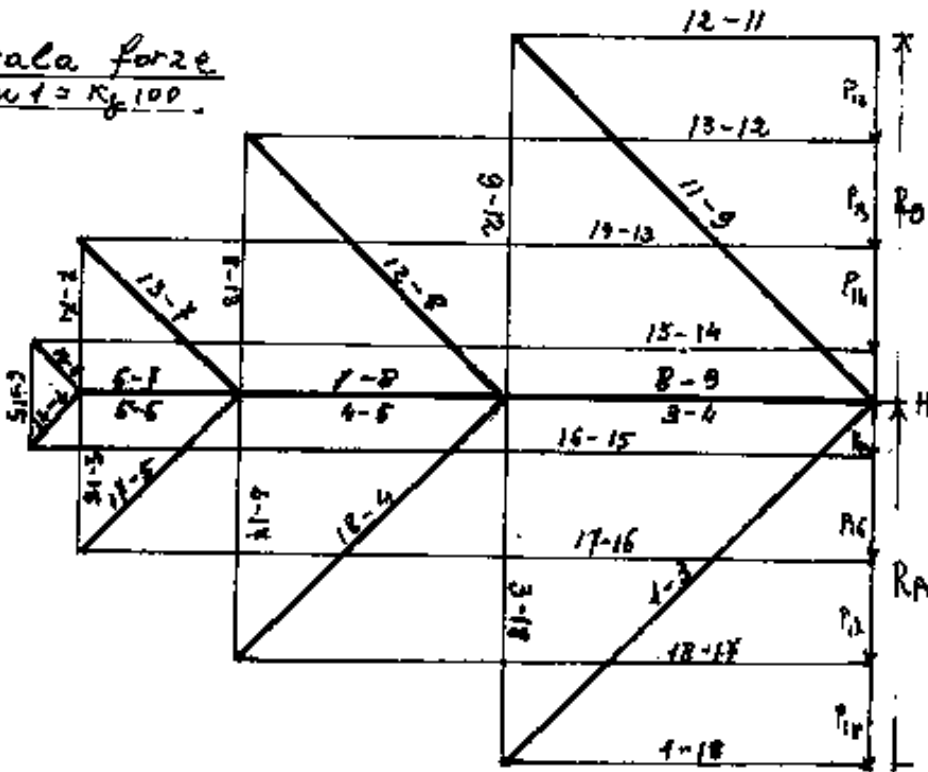
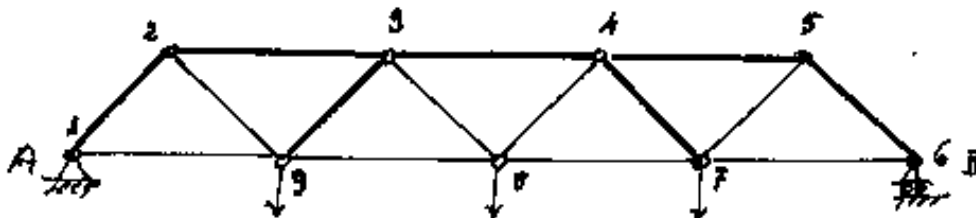
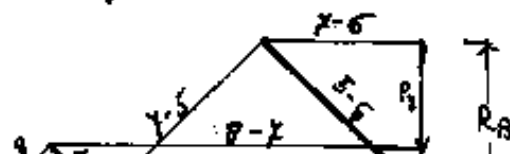
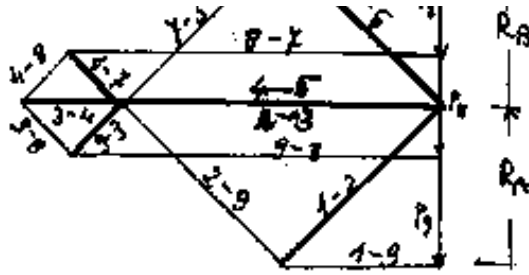
scala cm. 1 = Kg 100.

rilevare che l'asta

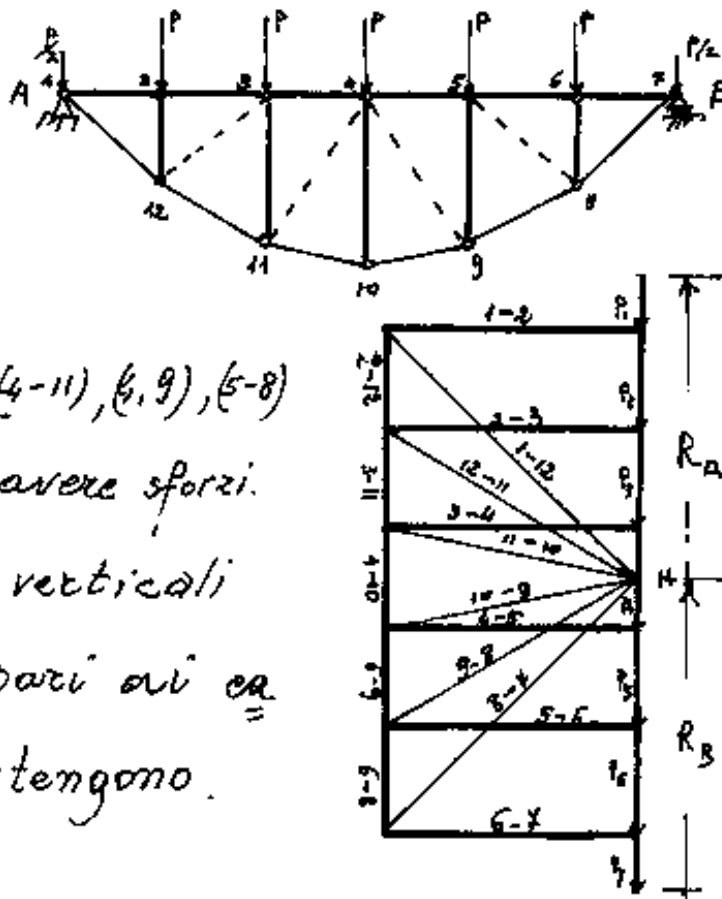
(6-15) ha sforzo nullo (Taglio = zero), mentre le aste (5-6) e (6-7) hanno il massimo assoluto di tensione (compressione). Nel diagramma, mentre gli sforzi di trazione, asta per asta hanno il loro segmento rappresentativo della intensità; gli sforzi di compressione delle aste del corrente superiore sono tutti esposti sullo stesso retta a partire da H.

Cremoniano della trave in figura

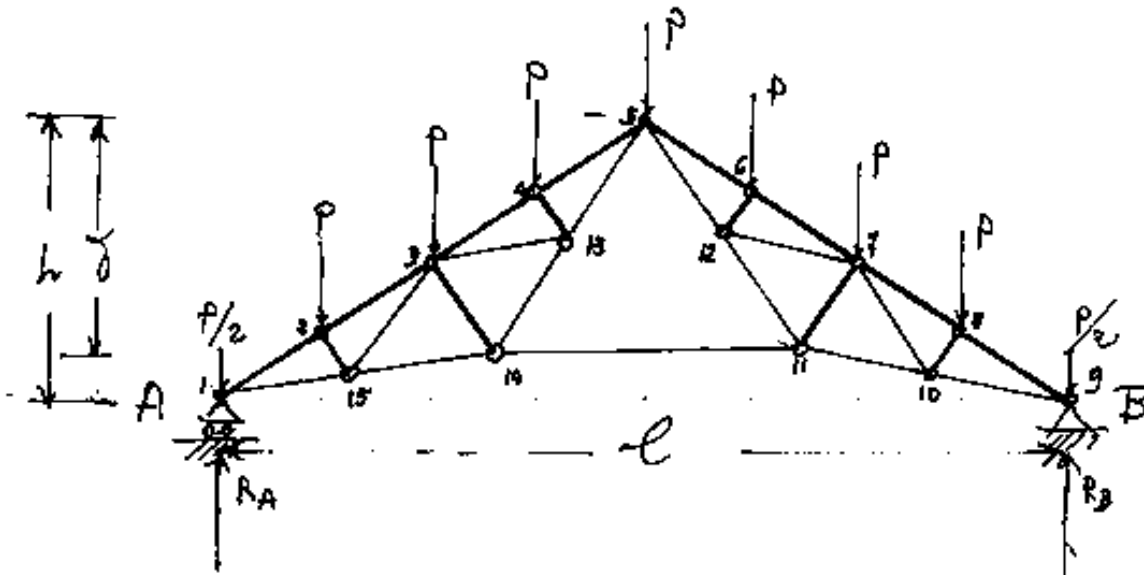
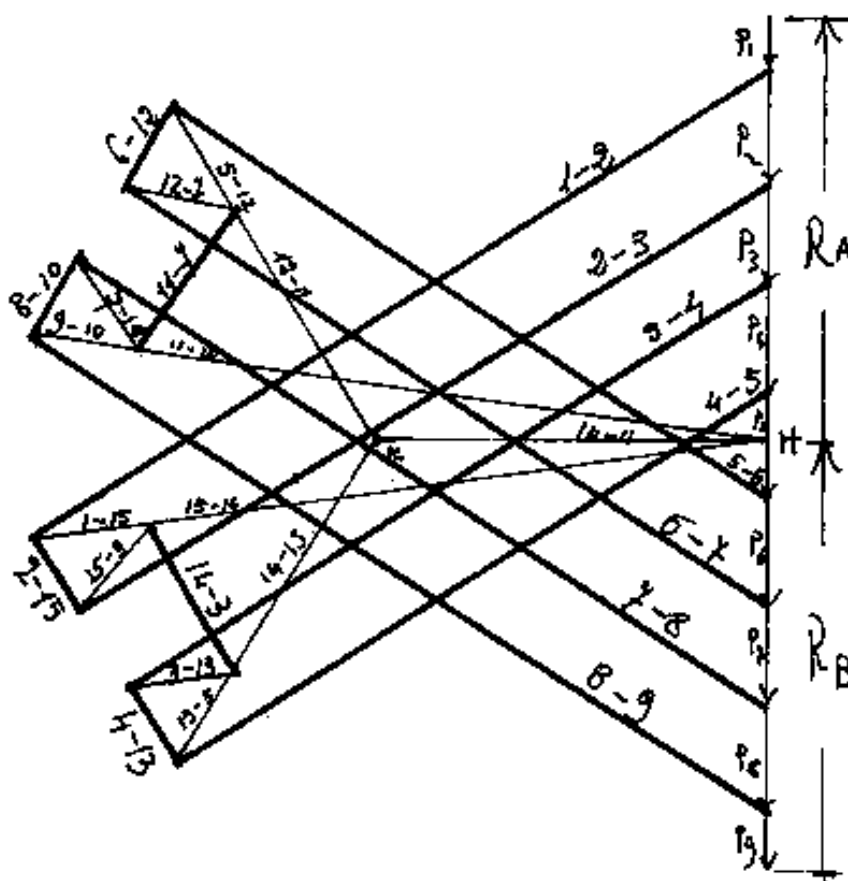
scala 1:100

scala forze cm 1 = Kg 100

da confrontare con la trave di Mohnie'.

Interessante il cremoniano della trave: tipo Warren

spesso le maglie triango

spesso le maglie triango-
lari sono isosceli od
anche equilatere.

si noti come il segno dello sforzo normale cor-
risponda a quello delle isostatiche sulla trave
a parete piena..

<u>Travi funicolari</u> dette anche travi paraboliche, sono quelle travi le cui aste inferiori (o superiori) hanno la stessa pendenza dei lati del corrispondente poligono funicolare, ove la retta di chiusa corrisponde al corrente orizzontale e le rette di azione dei carichi ai ritti (aste verticali). Le aste di parete non hanno sforzi.

Le aste (3-12), (4-11), (4,9), (5-8) risultano non avere sforzi. mentre le aste verticali hanno sforzi pari ai carichi che sostengono.

Analoga trave può essere disegnata per

Trave Polonceau (o capriata Poloneeau)

valori approssimati

aste	N (kg)
(1-2) (8-9)	- 820
(2-3) (7-8)	- 765
(3-4) (6-7)	- 718
(4-5) (5-6)	- 655
(1-15) (9-10)	+ 700
(2-15) (8-10)	- 83
(3-15) (7-10)	+ 100
(3-14) (7-11)	- 155
(3-13) (7-12)	+ 105
(15-14) (10-11)	+ 585
(14-13) (11-12)	+ 250
(4-13) (6-12)	- 83
(13-5) (12-5)	+ 360
(14 - 11)	+ 365

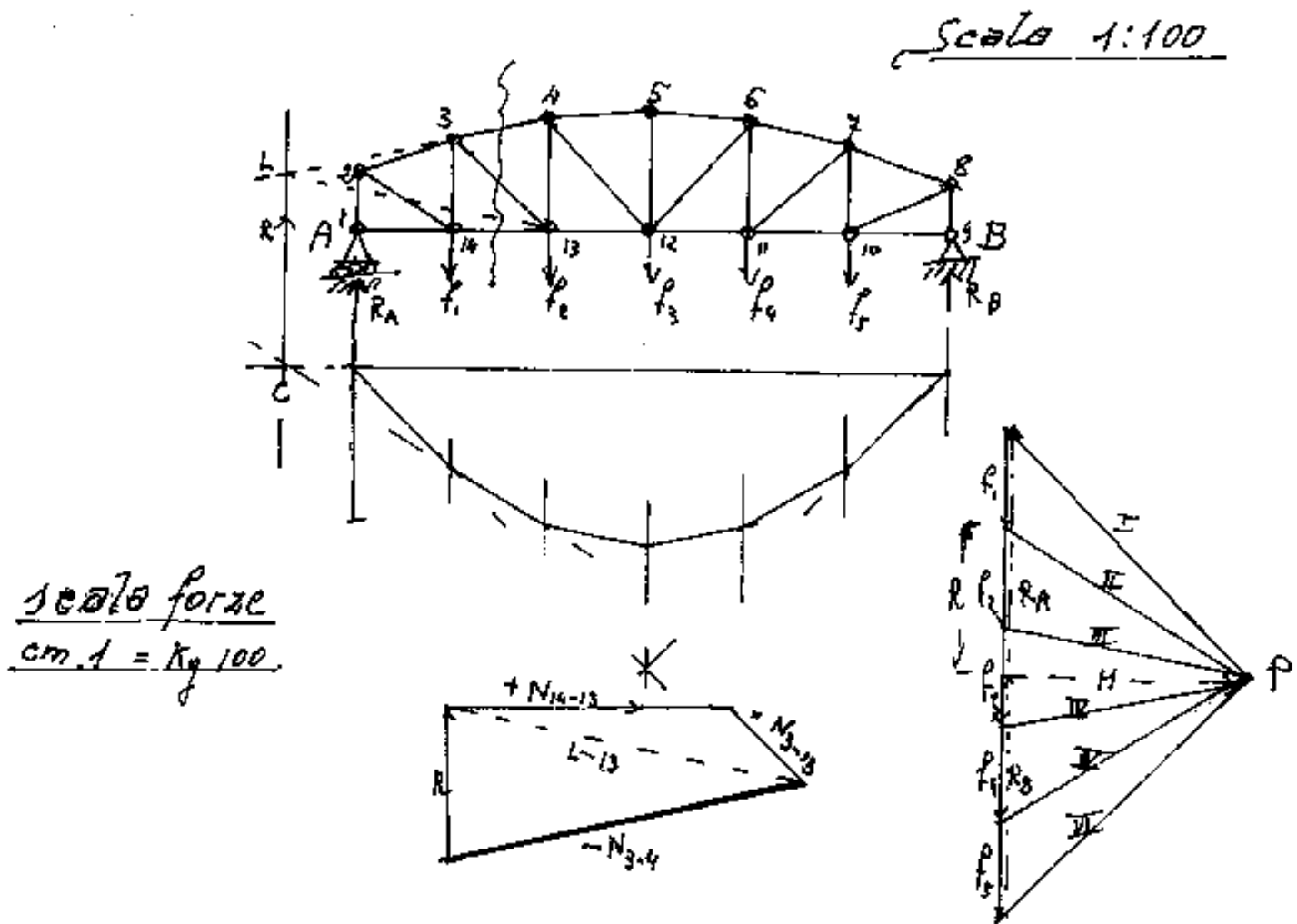
Il cremoniano per la capriata Poloneeau presenta difficoltà dopo il nodo 2 infatti i nodi 3 e 14 presentano tre aste incognite, però con una sezione di Ritter possiamo calcolare lo sforzo nell'asta (14-11) infatti: $\mathcal{M}_5 = 0$

$$N_{(14-11)} = \left[\left(+R_A - \frac{P}{2}\right)\frac{4l}{8} - P\frac{3}{8}l - P\frac{2}{8}l - \frac{Pl}{8}\right]\frac{1}{\delta}$$

che riportata in (H-K) permette di completare il Cremoniano.

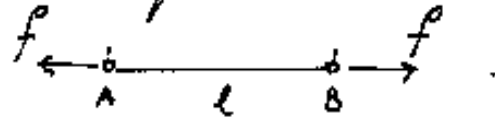
Metodo di Culmann

Scala 1:100

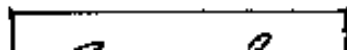
scala forze
cm.1 = Kg 100.

Data la trave in figura e tracciato il relativo poligono funicolare, il metodo di Culmann consiste nella divisione di una forza in tre direzioni, ove le direzioni sono date da tre aste, non concorrenti, che, sezionate, dividono in due la trave. Mentre ricordando che la retta

due la trave. Mentre ricordando che la retta di chiusa del poligono funicolare è la parallela alla retta H che, nel poligono delle forze separa R_B da R_A, quindi il punto C comune alla retta di chiusa ed al lato del poligono funicolare interessato dalla sezione è il punto ove passa la risultante R delle forze a sinistra. Prolungando l'asta 3-4 possiamo trovare le direzioni per scomporre R.

Teoremi sul lavoro elastico

Consideriamo un corpo elastico ed un sistema equilibrato di forze che agisca su di esso. Per fare un esempio semplice, consideriamo un'asta soggetta nelle sezioni terminali da due forze assiali uguali e contrarie. f ←A——l——B→ f .

L'esempio è semplice perché trascuriamo le contrazioni trasversali e consideriamo la f uniformemente ripartita in tutte le sezioni $\sigma = \frac{f}{A} = \frac{N}{A}$. E non consideriamo le possibili dispersioni di energia per effetto termico all'atto di applicazione o di remozione della forza.

Detti : L_e = Lavoro esterno compiuto dalla forza,

L_i = Lavoro = energia elastica, interna accumulata nel solido elastico.

avremo:

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$$

Il lavoro elastico interno, od energia elastica interna può essere riferito ad elementi di volume infinitesimi nei quali può dividersi il corpo, con ciò si può tener conto delle tensioni e delle deformazioni in tutte le direzioni, cioè dalle contrazioni trasversali.

Abbiamo già dimostrato che il lavoro elastico è la metà del prodotto dello spostamento per il valore finale dell'azione.

Quindi l'espressione completa di $\mathcal{L}_i$ è:

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2}\int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz})\, dV$$

per la legge di Hooke : $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$; per le contrazioni trasversali $\varepsilon_x = \frac{-1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)$; $\varepsilon_y = \frac{-1}{m}(\sigma_x + \sigma_z)$; $\varepsilon_z = \frac{-1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)$; e che: $G\gamma = \tau$ avremo:

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2}\left[\int_V \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{E}\right) dV - \frac{1}{mE}\int_V (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_z\sigma_y)\, dV + \frac{1}{2G}\int_V (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)\, dV\right]$$

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2E}\int_V (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)\, dV - \frac{1}{mE}\int_V (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)\, dV + \frac{1}{2G}\int_V (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\, dV.$$

Se invece di sostituire le deformazioni sosti=

Se invece di sostituire le deformazioni sostituiamo le tensioni si ha: $(e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$

$$\mathcal{L}_i = G \iiint_V \left[\frac{e^2}{m-2} + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2 \right) \right] dV$$

In funzione delle sollecitazioni:

$$\mathcal{L}_i = \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \int \frac{M^2 ds}{2EJ} + \int \chi \frac{T ds}{GA} + \int q \frac{M_t ds}{G J_p}$$

Nelle travi ove si possono trascurare (o non vi sono) le deformazioni dovute ad N ed a T di fronte alle deformazioni dovute ad M; e conosciamo l'equazione della linea elastica, il lavoro interno elastico può esprimersi:

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2}\int EJ\,\eta''^2\,dx$$

Nelle travi reticolari, estendendo la Σ a tutte le aste:

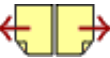
$$\mathcal{L}_i = \Sigma \frac{N^2 l}{2EA}$$

Il teorema di Clapeyron

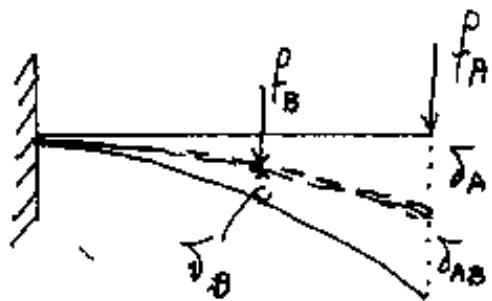
"Il lavoro compiuto dalle forze agenti su una struttura in equilibrio è indipendente dall'ordine con cui sono applicate le forze e vale la metà della somma dei

prodotti delle forze per i loro spostamenti finali cioè misurati dopo l'applicazione dell'ultima forza."

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2} \sum P\delta + M\varphi$$

Ove P ed M sono agenti esterni applicati.

Teorema di Betti

Detto anche del lavoro mutuo o indiretto.

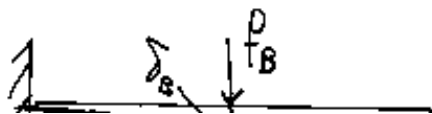
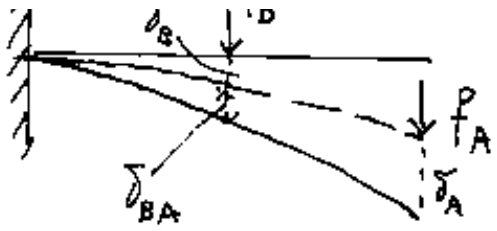
Il teorema di Clapeyron parla di spostamenti finali, cioè già considera che un sistema di forze A, ottenuto l'equilibrio, si sposti ulteriormente per effetto della successiva applicazione del sistema di forze B.

Consideriamo due sole forze $\vec{f}_A$ i $\vec{f}_B$ prima applichiamo $\vec{f}_A$ poi $\vec{f}_B$.

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2}\vec{f}_A\delta_A$$

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}\vec{f}_B\delta_B$$

$$\mathcal{L}_{AB} = \frac{1}{2}\vec{f}_A\delta_{AB}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_e = \frac{1}{2}\left(\vec{f}_A\delta_A + \vec{f}_B\delta + \vec{f}_A\delta_{AB}\right)}$$

La formula esprime che nel lavoro elastico non vale la sovrapposizione degli effetti perché c'è il lavoro mutuo: $\mathcal{L}_{AB} = \frac{1}{2}\vec{f}_A\delta_{AB}$.

Invertendo l'ordine delle forze si ha:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} f_B \delta_B$$

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} f_A \delta_A$$

$$\mathcal{L}_{BA} = \frac{1}{2} f_B \delta_{BA}$$

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2}\left(f_A \delta_A + f_B \delta_B + f_B \delta_{BA}\right)$$

Ma il teorema di Clapeyron assicura che il lavoro elastico finale è indipendente dal l'ordine con cui sono applicate le forze, perciò:

$$\frac{1}{2}\left(f_A \delta_A + f_B \delta_B + f_A \delta_{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(f_A \delta_A + f_B \delta_B + f_B \delta_{BA}\right)$$

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_{(A)} + \mathcal{L}_{(B)} + \mathcal{L}_{(A,B)} = \mathcal{L}_{(A)} + \mathcal{L}_{(B)} + \mathcal{L}_{(B,A)}$$

– cioè:

$$\boxed{\mathcal{L}_{(A,B)} = \mathcal{L}_{(B,A)}}$$

È questo il teorema di Betti:

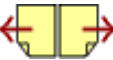
"Il lavoro indiretto che compie il sistema di forze A per effetto dell'applicazione del sistema di forze B è uguale al lavoro indiretto che compirebbe il sistema B applicato per primo, per effetto della successiva applicazione del sistema A"

sistema A."

Il teorema di Betti implica già che:

$$f_A \delta_{AB} = f_B \delta_{BA}$$

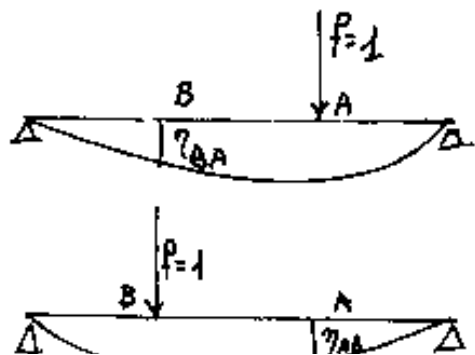
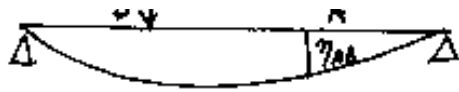
qualora f_A ed f_B fossero unitarie o anche semplicemente uguali si avrebbe:

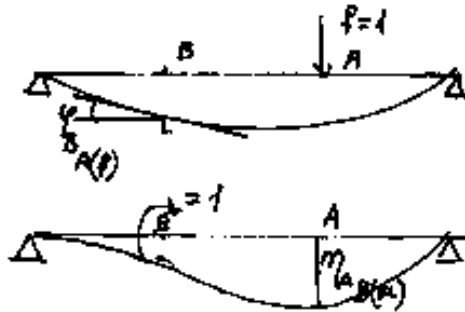
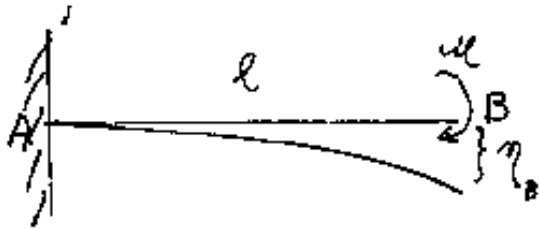
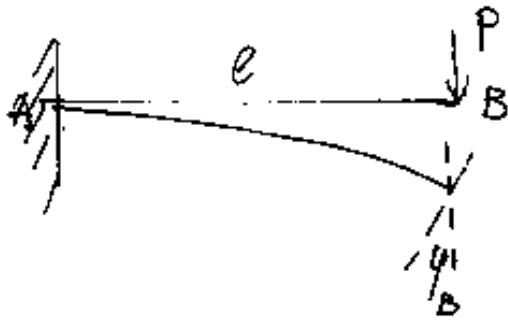
$$\delta_{AB} = \delta_{BA}$$

Il teorema di Maxwell.

Per un corpo elastico fissato a vincoli non cedevoli anelasticamente, esprime:

"Lo spostamento di un punto A valutato in direzione α, provocato da una forza unitaria agente in un punto B in direzione β, è uguale allo spostamento di B in direzione β quando in A agisca una forza unitaria in direzione α."

È facile vedere come il teorema di Maxwell sia un caso particolare del teorema di Betti.

Il teorema di Maxwell è fecondo di applicazioni in particolare per le sue estensioni.

$$\eta_{AB} = \eta_{BA}$$

Estensioni del teorema di Maxwell.

$$\varphi_{BA(F)} = \eta_{AB(M)}$$

La ruotazione di una sezione B per effetto di una forza unitaria in A equivale alla freccia in A provocata da un momento unitario in B.

$$\eta_B = \frac{\mathcal{M} l^2}{2EJ} \quad \text{per } \mathcal{M} = 1 \quad \eta_{B_{(1)}} = \frac{l^2}{2EJ}$$

$$\varphi_B = \frac{P l^2}{2EJ} \quad \text{per } P = 1 \quad \varphi_{B_1} = \frac{l^2}{2EJ}$$

$$\varphi_{B_{(P=1)}} = \eta_{B_{(\mathcal{M}=1)}}$$

I teoremi delle condizioni di minimo

I fenomeni naturali sono tali che la Natura tende ad ottenere il massimo risultato col minimo sforzo o dispendio. Da ciò derivano una molteplicità di teoremi:

Teorema di Menabrea

Esprime "In una struttura iperstatica a vincoli rigidi i valori che assumono le incognite iperstatiche sono tali da rendere minimo il lavoro elastico"

Un altro teorema molto simile al teorema di Menabrea è il teorema di Castigliano.

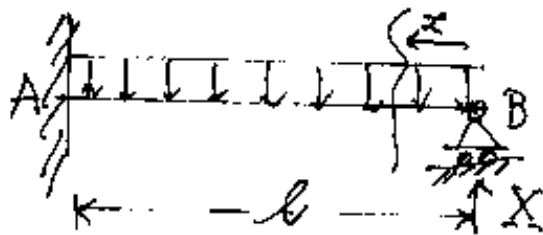
Il Teorema di Castigliano

Che dice: "La derivata parziale del lavoro di deformazione, espresso in funzione delle forze esterne, fatta rispetto ad una di tali forze, è uguale allo spostamento del suo punto di applicazione, valutato nella direzione e verso della forza stessa"

Qualora la forza sia l'incognita iperstatica di un vincolo rigido esterno, il δ è nullo per cui:

$$\frac{\partial L_i}{\partial X} = \delta = 0$$

ma uguagliare a zero la derivata è una condizione di massimo o di minimo per cui applicando il teorema di Menabrea avremo la stessa formula.

Per esempio volendo calcolare la X su una trave a noi nota:

$$\mathcal{L}_i = \int \frac{\mathcal{M}^2 dx}{2EJ} \; ; \; \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial X} = \int \frac{\mathcal{M} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X} dx}{EJ}$$

$$\mathcal{M} = \left(X \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) \; ; \; \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X} = x$$

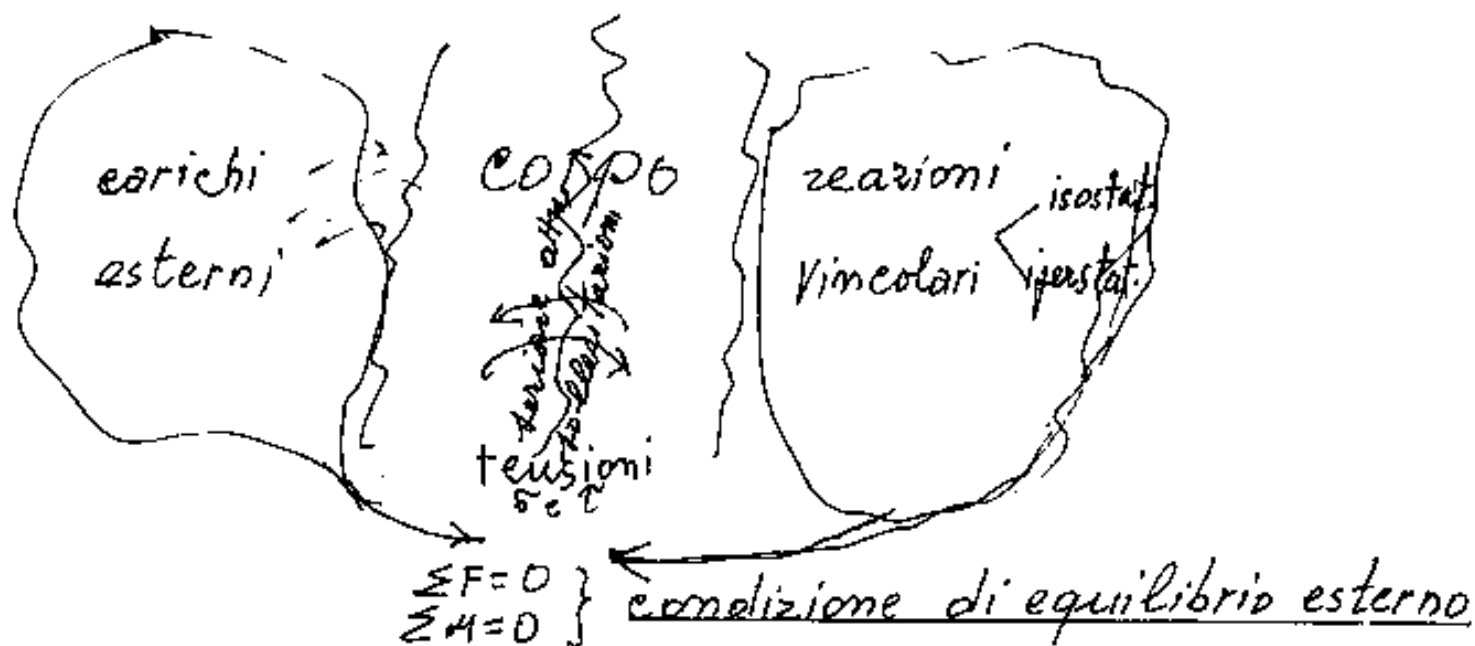
$$\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial X} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(X x^2 - \frac{qx^3}{2} \right) dx = \frac{1}{EJ} \left(\frac{X l^3}{3} - \frac{q l^4}{8} \right) = \delta = 0$$

$$X = \frac{3}{8} q l \quad \text{(risultato noto)}.$$

Le Sollecitazioni Composte

carichi esterni — corpo — reazioni vincolari (isostat., iperstat.)

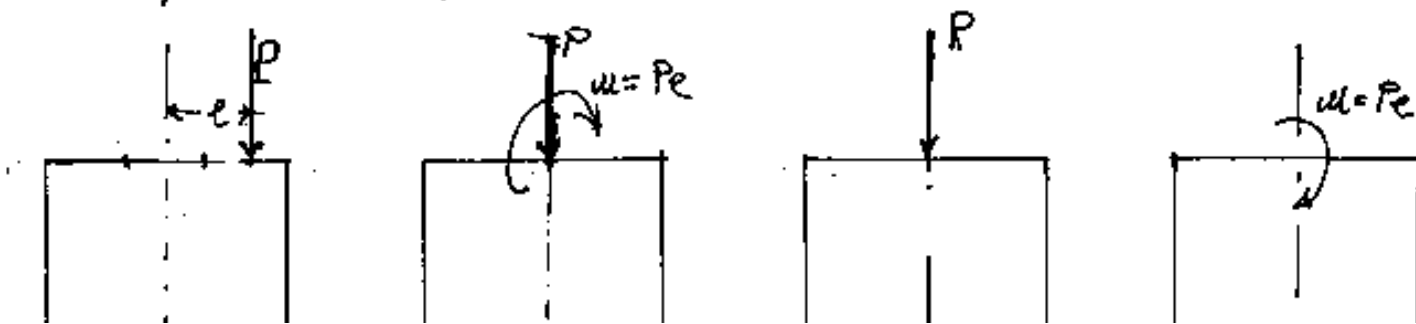
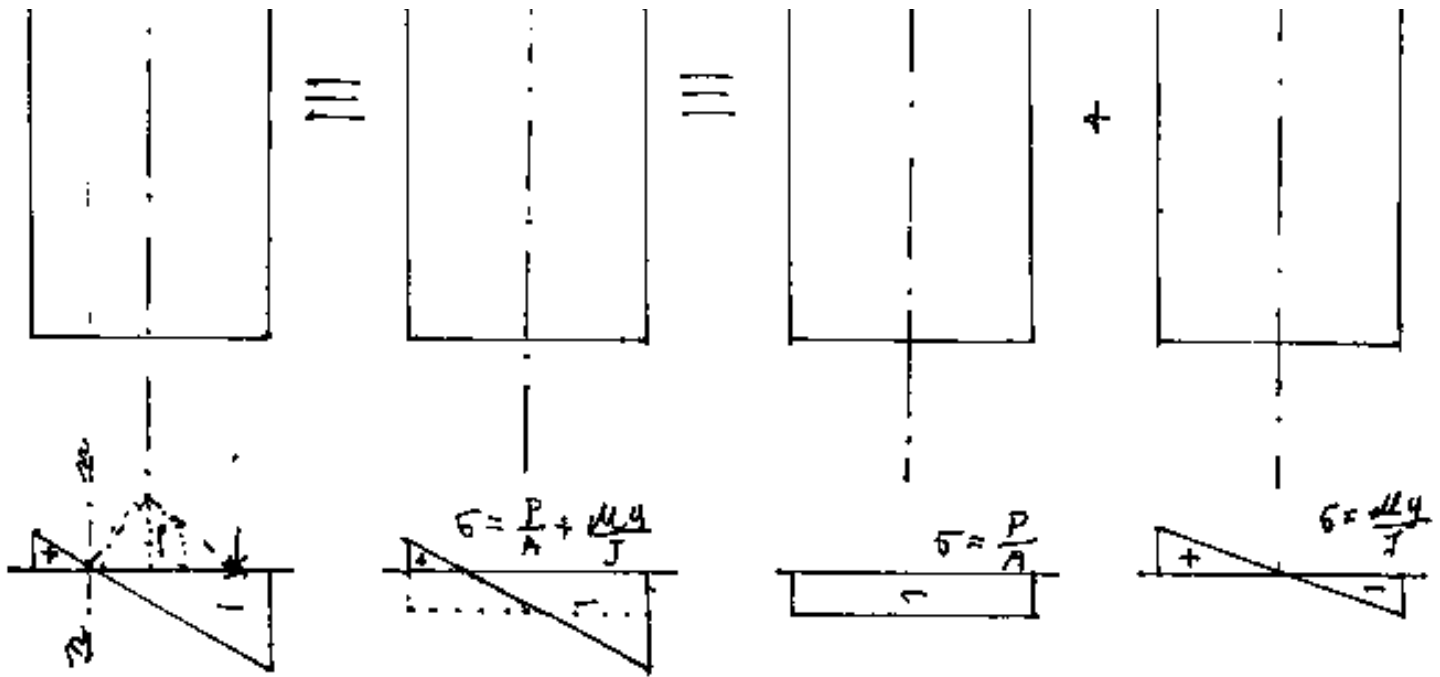
tensioni σ e τ (tensioni di taglio, tensioni normali)

$\Sigma F = 0$
$\Sigma M = 0$ } condizione di equilibrio esterno

Le quattro sollecitazioni N, M, T, M_t, provocano due tipi di tensioni σ e τ.

$$\sigma = \frac{N}{A} \; ; \; \sigma = \frac{M y}{J} \; ; \; \tau = \frac{T S}{J b} \; ; \; \tau = \frac{M_t r}{J_p} \text{ o } \frac{M_t}{2 \Omega s}.$$

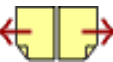
La pressoflessione

P, e; P, $M = Pe$; P; $M = Pe$

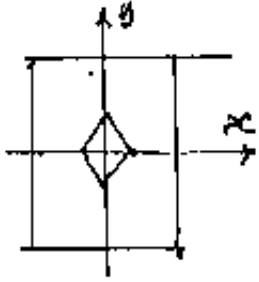
$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M y}{J} \qquad \sigma = \frac{P}{A} \qquad \sigma = \frac{M y}{J}$$

si noti l'asse neutro costruito con l'antipolarità rispetto all'ellisse d'inerzia (V. geometria delle masse).

Quando in un pilastro il carico non è baricentrico, ma presenta una eccentricità "e" oltre allo sforzo normale si verifica flessione: (se il carico è P, $M = Pe$).
Poiché entrambe le sollecitazioni producono tensioni normali σ, queste si sommano algebricamente: $\sigma = \left(\frac{P}{A} \pm \frac{My}{J}\right)$ che possiamo scrivere: $\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{(Pe)y}{A\rho^2} = \sigma = \frac{P}{A}\left(1 \pm \frac{ey}{\rho^2}\right)$

da cui si ricava per $\sigma = 0$, (asse neutro)

$y_n = \rho^2/e$ cioè: $\boxed{y_n : \rho = \rho : e}$ che è la condizione di antipolarità rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.

Poiché i pilastri in muratura non resistono a trazione, il caso limite lo abbiamo quando l'asse neutro n-n è tangente la sezione, se la sezione è alta h abbiamo: $\rho = \frac{h}{6}\sqrt{3}$; $\rho^2 = \frac{h^2}{12}$

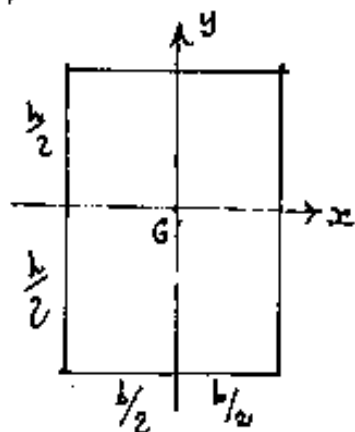
$y = \frac{h}{2}$; $e = \rho^2/y = \frac{h^2}{12} \cdot \frac{1}{h/2}$; $\boxed{e = h/6}$ ritroviamo

$y = \frac{h}{2}$; $e = \Gamma / y = \frac{h^2}{12} \cdot \frac{1}{h/6}$; $\boxed{e = h/3}$ ritroviamo così la zona detta <u>nocciolo</u>, che è entro il terzo medio nelle sezioni rettangolari.

L'eccentricità può essere in x ed in y, per cui avremo due momenti M_x, ed M_y ed ai fini

delle verifiche a presso flessione interessano le massime tensioni per cui:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

ove W è il modulo di resistenza che è dato dal momento d'inerzia diviso per la distanza della fibra più lontana dall'asse d'inflessione baricentrico.

per il rettangolo:

$$W_x = \frac{J_{xx}}{h/2} = \frac{bh^3}{12}\frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6}$$

$$W_y = \frac{J_{yy}}{b/2} = \frac{hb^3}{12}\frac{2}{b} = \frac{hb^2}{6} = \frac{Ab}{6}$$

Quindi per il rettangolo la σ_{max} può scriversi:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{P y_{(e)}}{Ah/6} + \frac{P x_{(e)}}{Ab/6}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{6 y_{(e)}}{h} + \frac{6 x_{(e)}}{b}\right)$$

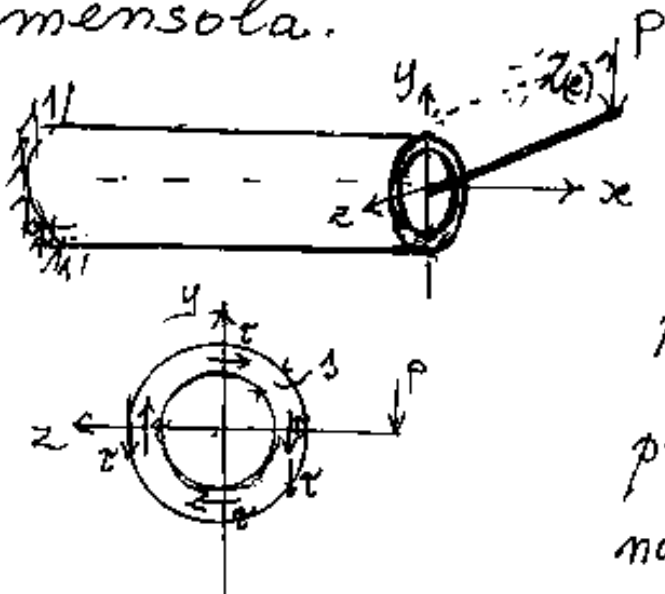
$$\sigma_{max} = \frac{1}{A}\left(1 + \frac{6\, y_{(e)}}{h} + \frac{6\, x_{(e)}}{b}\right)$$

ove: $e \equiv (x_{(e)}; y_{(e)})$ sono le coordinate di "e".

Se il carico è di trazione si ha la tensoflessione.

Per questa parte è opportuno riguardare la geometria delle masse che abbiamo trattato.

Le sollecitazioni composte di taglio e momento torcente, che entrambe generano le tensioni tangenziali τ, ci portano fuori dai sistemi piani, quindi ci limitiamo ad un cenno.

Considieriamo una mensola con sezione a corona circolare, gravata da un carico eccentrico rispetto all'asse della mensola.

$$\mathcal{M}_t = P \cdot Z_{(e)}$$

$$\mathcal{M}_f = Px$$

$$T = P$$

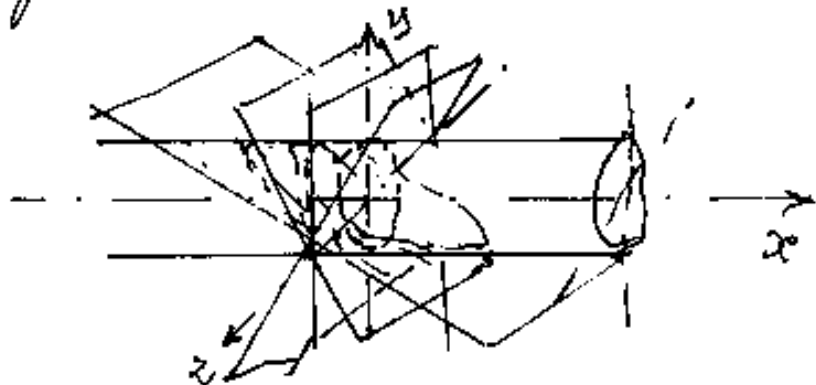
Possiamo definire la τ_{media} per i tubolari sottili $\tau = \frac{\mathcal{M}_t}{2\omega s}$ notiamo che la τ dovuta ad $\mathcal{M}t$ è diretta normalmente al raggio del tubo mentre la τ dovuta a T è in direzione y avremo quindi, agli estremi del diametro su z, la τ_{max} e la τ_{min}. Inoltre la mensola è anche inflessa.

τ_{min}. Inoltre la mensola è anche inflessa, dovremo combinare la tensione τ tangenziale nella sezione con la σ normale alla sezione. Nasce così il problema che viene risolto dal cerchio di Mohr.

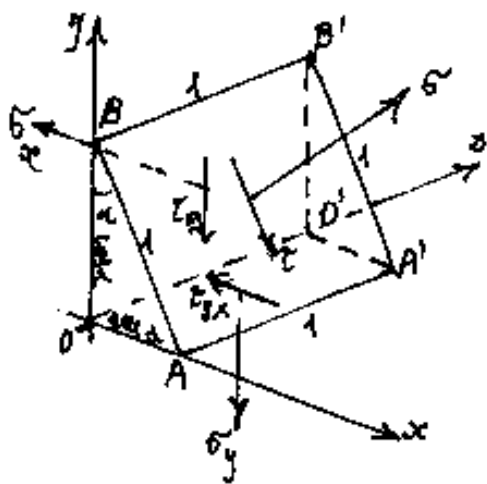
Il cerchio di Mohr

Il cerchio detto di Mohr, per i sistemi piani di forze sarebbe stato primo proposto da Rankine, mentre il Mohr ne avrebbe esteso l'applicazione ai sistemi di forze spaziali.

I) Per i sistemi piani di forze

Considerato un solido astiforme, con l'asse coincidente con l'asse x, e gli assi y e z giacenti sui diametri principali d'inerzia della sezione. In una qualsiasi sezione definita dalla coordinata x, consideriamo il fascio di piani passante per l'asse z, varianti con l'angolo α che essi formano col piano di sezione normale

alla x. Nei nostri calcoli, delle tensioni abbiamo considerato un cubetto ove le tensioni normali erano σ_x, σ_y, σ_z, mentre le tensioni tangenziali erano $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; che per i sistemi piani di forze si ridu=cono a: σ_x, σ_y; $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; ove la σ_x è nor=male ai piani di giacitura x; σ_y è normale ai

piani di giacitura y. Se facciamo ruotare l'asse x fino a sovrapporsi alle y, ad ogni angolo α corrisponde una retta in= clinata, che è retta di giacitura dei pia= ni delle nostre sezioni e dei loro paralleli.

Consideriamo il piano generico di giacitura definita dalla retta inclinata di α e spostia= molo parallelamente a se stesso in modo che nel I° quadrante xy, la traccia sul piano xy inter= cettata fra gli assi x ed y sia un segmento unita= rio $\overline{AB}$ come pure unita= ri siano i segmenti AA' e BB' estratti dalle tracce sui piani xz ed yz; avre= mo così un prismetto a base triangolare retta e di altezza unitaria sulle cui facce laterali agiscono $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{yx}, \sigma, \tau$.

e precisamente:

su OBB'O' di area $(1)(\cos\alpha) = \cos(\alpha)$, agiscono σ_x e τ_{xy}

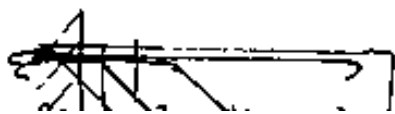
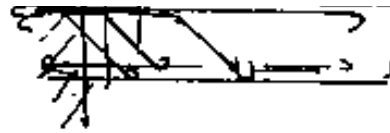
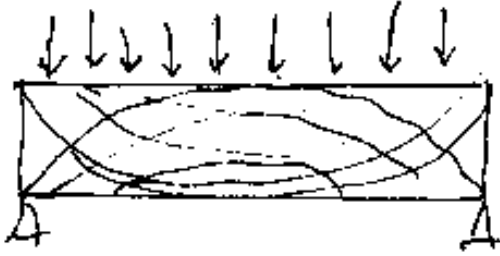
su OAA'O' di area $(1)(\operatorname{sen}\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$, agiscono σ_y e τ_{yx}

su AA'B'A di area $(1)(1) = 1$, agiscono σ e τ

Se moltiplichiamo le tensioni (Kg/cm^2) per le aree su cui agiscono (cm^2) otteniamo un sistema di forze che scomponiamo in direzione $\sigma_{(\alpha)}$ e τ, per equilibrarle.

Le linee isostatiche

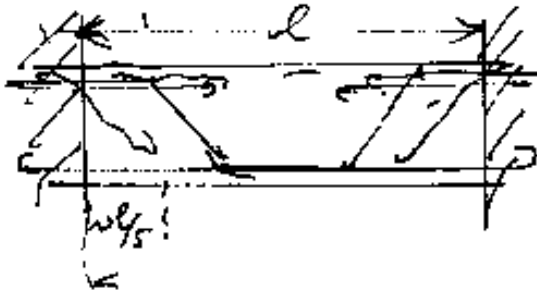
Se, per ciascun punto di ciascuna sezione del nostro solido, tracciamo il cerchio di Mohr, e da esso rileviamo le direzioni principali rispetto alle direzioni dei nostri assi x ed y, possiamo riportare tali direzioni nel punto considerato tracciandovi una crocetta ortogonale. Poiché $\sigma_y = 0$, σ_ξ e σ_η hanno segni opposti, raccordando i tratti di crocetta dello stesso segno (trazione o compressione) otteniamo delle linee chiamate: isostatiche che indicano il fluire delle tensioni all'interno del solido e sono indispensabili per decidere la configurazione dei ferri nel cemento armato.

compressione P

ferri in C.A.

trazione

ferri in C.A.

linee di trazione

linee di compressione

l

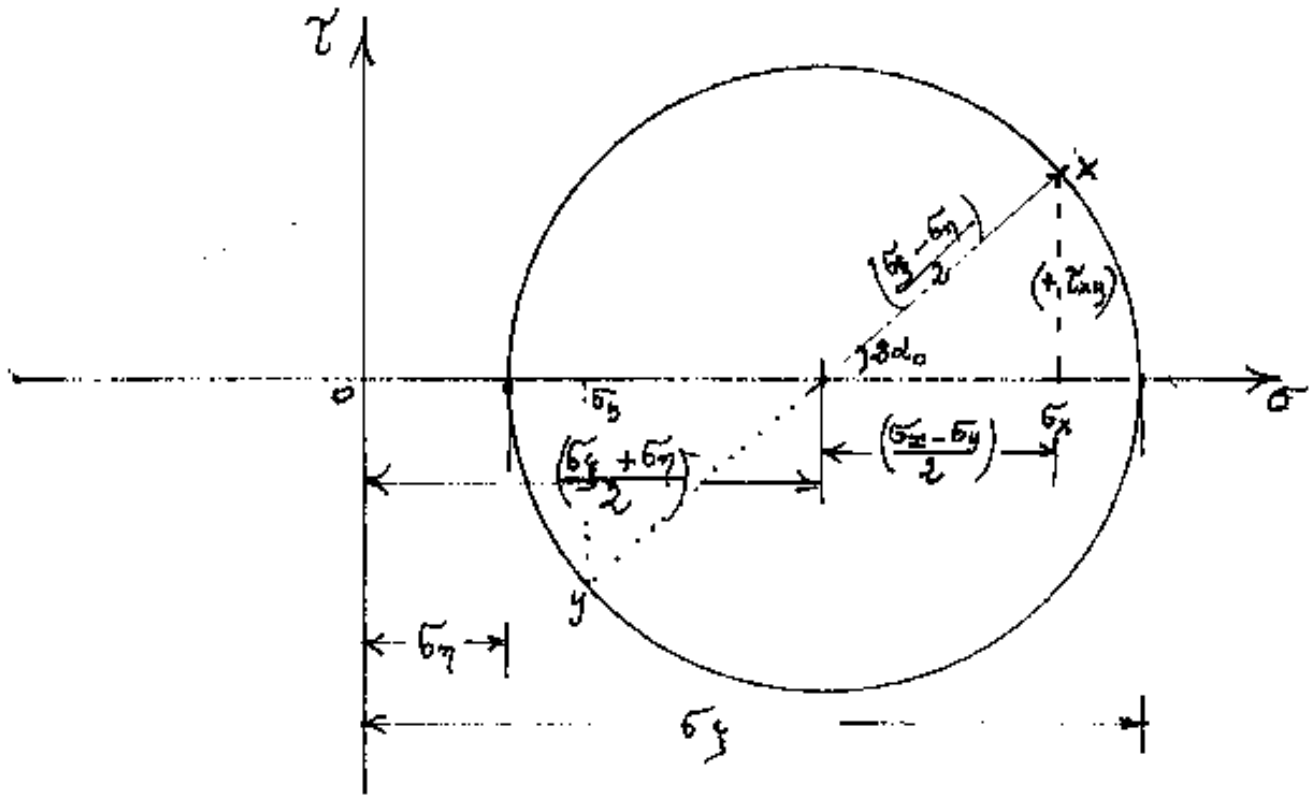
wl/5 !

ferri in una trave incastrata

Poiché ad ogni punto della circonferenza di Mohr corrisponde una giacitura, noi considereremo direzione ξ il punto della σ_ξ e la normale a ξ sará la direzione "η"

Come caso pratico supponiamo di conoscere $\sigma_y = 0$; σ_x (che riportiamo in ascisse) ove $\sigma_x/2$ è il centro del cerchio e consideriamo $-\tau_{xy}$, avremo:

Ove unendo il punto x di coordinate: $(\sigma_x ; \tau_{xy})$ col punto η di coordinate: $(-\sigma_\eta ; 0)$ otteniamo α_0 e considerando n come nuovo centro assi traslati:

e considerando η come nuovo centro assi traslati (le direzioni non cambiano), ritroviamo le direzioni degli assi principali ξ ed η e le direzioni degli assi del nostro solido.
(L'equazione del cerchio è riferita agli assi principali σ e τ.)

Nasce così il cerchio di Mohr

Un generico punto x sulla circonferenza determinato dalle coordinate σ_x, τ_{xy}; implica che il punto diametralmente opposto sia y determinato dalle coordinate σ_y; τ_{yx}. Notiamo che $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_\xi+\sigma_\eta}{2}$ permettono di individuare il centro del cerchio. Si noti come l'angolo al centro sia:

$$tg(2\alpha_0) = \frac{(+\tau_{xy})}{(\sigma_x-\sigma_y)/2}$$. (discuteremo sul segno)

Poichè l'angolo al centro è doppio delle direzioni definite dai punti sulla circonferenza, due punti diametralmente opposti hanno l'angolo al centro di 180°, perciò i punti sulla circonferenza ($180°/2 = 90°$) sono indicativi di giaciture fra loro ortogonali (come ξ ed η o come x ed y).

Ricordiamo che:

$$\cos 2\beta = (\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta) \begin{cases} = (1 - 2\operatorname{sen}^2\beta) \\ = (2\cos^2\beta - 1) \end{cases}$$

da cui:

$$\operatorname{sen}^2\beta = \frac{1 - \cos(2\beta)}{2} \quad ; \quad \cos^2\beta = \frac{1 + \cos(2\beta)}{2}$$

sostituendo nella formula della σ si ha:

$$\sigma = \sigma_\xi \left(\frac{1 + \cos(2\beta)}{2}\right) + \sigma_\eta \left(\frac{1 - \cos(2\beta)}{2}\right)$$

sviluppando per evidenziare $\cos(2\beta)$

$$\sigma = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2} + \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2}\right)\cos(2\beta)$$

che possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \left[\sigma - \left(\frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2}\right)\right] = \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2}\right)\cos(2\beta) \\ \tau = \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2}\right)\operatorname{sen}(2\beta) \end{cases}$$

Elevando a quadrato le due uguaglianze e sommando membro a membro, poiché $(\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta) = 1$ si ha:

$(\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta) = 1$ si ha:

$$\left[\sigma - \left(\frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2}\right)\right]^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2}\right)^2$$

equazione di un cerchio del tipo:

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2$$

cioè spostato di a in ascisse. $\left[a = \left(\frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta}{2}\right)\right]$; $\left[R = \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2}\right)\right]$

se in ascisse poniamo le σ ed in ordinate le τ.

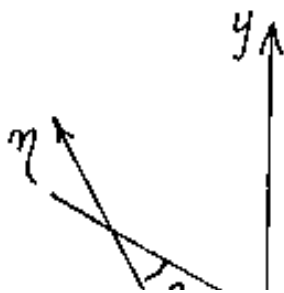
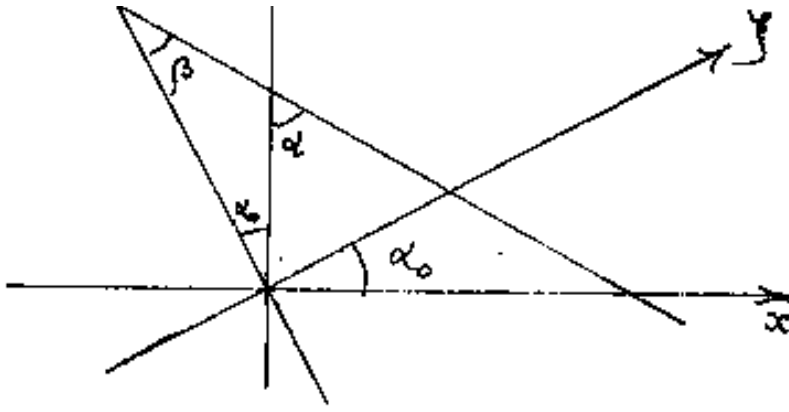
rispettivamente di α_0 e $90°+\alpha_0$ ove la σ è massima, nell'altro minima, su entrambi $\tau = 0$.

Assumiamo le rette di giacitura di questi piani come nuovi assi di riferimento che indicheremo con ξ ed η, sarà un sistema di assi ruotato di α_0 rispetto agli assi x, y e le direzioni ξ ed η saranno dette:

<u>direzioni principali</u>

e le tensioni σ_ξ e σ_η saranno dette

<u>tensioni principali</u>

Volendo riferire le tensioni su sezioni ad angolo variabile rispetto a questi nuovi assi, indicheremo con β tale angolo (da non confondere con α) infatti come si vede $\beta = (\alpha - \alpha_0)$

y

η

Le formule della σ e della τ diventano: $(\tau_{\xi\eta}=0)$

$$\sigma = \sigma_\xi \cos^2\beta + \sigma_\eta \operatorname{sen}^2\beta$$

$$\tau = \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2}\right) \operatorname{sen} 2\beta$$

Ci domandiamo se fra tutti i possibili α non vi sia un particolare α_0 nel quale la σ diventa massima o minima; a tal fine uguagliamo a zero la derivata di σ rispetto ad α.

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = -2\sigma_x \operatorname{sen}\alpha_0 \cos\alpha_0 + 2\sigma_y \operatorname{sen}\alpha_0 \cos\alpha_0 + \tau_{xy}\, 2\cos(2\alpha_0) = 0$$

cambiando i segni e dividendo per due si ha:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \operatorname{sen}(2\alpha_0) - \tau_{xy} \cos(2\alpha_0) = 0$$

Espressione identica a quella della τ, cioè il valore α_0 di α, che annulla la derivata e cioè rende max o min la σ, per quel valore di α_0 la τ si annulla.

Si può dire più semplicemente che nella sezione ove la σ è max o min la τ è zero.

$$\tan(2\alpha_0) = \frac{+\tau_{xy}}{\;}$$

$$\tan(2\alpha_0) = \frac{+\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

Sappiamo che $tg(\varphi) = tg(180+\varphi)$; cioè $\tan(2\alpha) = \tan[2(90°+\alpha)]$

per cui:

$$\left.\begin{matrix}\alpha_0 \\ 90°+\alpha_0\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\,arctg\left(\frac{+\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)/2}\right)$$

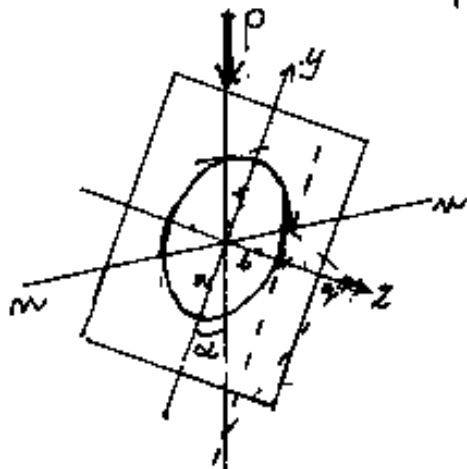
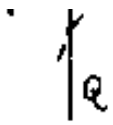
Esistono quindi due piani ortogonali inclinati

La flessione deviata

Quando la direzione dei carichi non coincide con uno dei diametri principali dell' ellisse d'inerzia della sezione del solido inflesso, si ha la flessione deviata.

Sono soggetti a flessione deviata gli arcarecci (o terzere), cioè le travi dei tetti che hanno l'asse perpendicolare alle linee di massima pendenza della falda.

Spesso sostengono puntoni. Se i carichi agiscono secondo la retta $\overline{PQ}$, l'asse neutro è il diametro coniugato al diametro giacente su $\overline{PQ}$. ...

Q

$\overline{PQ}$. In figura si è accennata la costruzione del diametro coniugato dell'ellisse per tracciare l'asse neutro n-n. (v. II vol.)

Se α è l'angolo della retta PQ dei carichi con l'asse y ed M è il momento dei carichi

$M_y = M\cos\alpha$; $M_z = M\operatorname{sen}\alpha$; la σ_{max} sarà

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}} = M\left(\frac{\cos\alpha}{W_y} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{W_z}\right).$$

ove W_y e W_z sono i moduli di resistenza.
È notevole che se l'inflessione avviene solo secondo z o solo secondo y l'asse della trave e la sua linea elastica ri= mangono nello stesso piano. Invece nella flessione deviata la deformazione è spaziale. (Basta provare con una stecca flessibi= le).

Se un arcareccio ha un momento massimo dovuto ai carichi di 1480 Kgm = 148000 Kgcm ed è su una falda inclinata di 30° per cui cos α = 0,866 ; sen α = 0,5 ; se la sezione del= l'arcareccio in legno è cm 20 × 30 avremo

$W_y = \frac{20 \cdot 30^2}{6}$; $W_z = \frac{30 \cdot 20^2}{6}$.

$$\sigma_{max} = 148000 \left(\frac{0,866}{\frac{20 \cdot 30^2}{6}} + \frac{0,5}{\frac{30 \cdot 20^2}{6}} \right) =$$

$$\sigma_{max} = 1480\left(\frac{0,866}{30} + \frac{0,5}{20}\right) = 1480\,(0,05386)$$

$$\sigma_{max} = 79,7 \ \text{Kg/cm}^2 \ \text{(ammissibile per il legno)}$$

Le verifiche di resistenza

I) Per i sistemi piani di forze

Consideriamo una sezione ove si verificano i seguenti diagrammi di tensione:

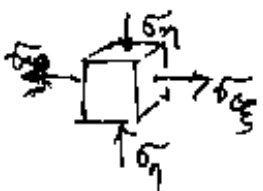
$\sigma = N/A$ $\sigma = \frac{My}{J}$ $\tau = \frac{TS}{Jb}$ $\sigma_x = \sigma_{(N)} + \sigma_{(M)}$

(In questo caso prevale la tensoflessione: $(\sigma_n + \sigma_M)$)

Per aggiungere le τ ci avvaliamo del cerchio di Mohr e riteniamo più cimentati i punti sotto l'ala superiore.

$\sigma_y = 0$. Il raggio R del cerchio di Moh: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$

Le tensioni principali, σ_ξ e σ_η (di segno opposto) sono date da:

$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_x}{2} + R \quad ; \quad \sigma_\eta = \frac{\sigma_x}{2} - R$$

Sul cubetto all'intorno del punto più cimentato [diagramma: cubetto con σ_η, σ_ξ] si verifica l'azione di σ_ξ e σ_η, secondo le direzioni principali e possiamo addizionare la loro azione secondo la tensione ideale: $\sigma_{id} = \left(\sigma_\xi - \frac{\sigma_\eta}{m}\right)$; ma essendo $\sigma_\eta < 0$ si sommano e dovrà essere $\boxed{\sigma_{id} \leq \sigma_{amm}}$.

II) Per i sistemi spaziali

Indichiamo con 1, 2, 3 le direzioni principali lasciando x, y, z all'asse ed ai diametri principali dell'ellisse, nelle sezioni del nostro solido. $(\sigma_\xi = \sigma_1)$; $(\sigma_\eta = \sigma_2)$; $(\sigma_\zeta = \sigma_3)$.

Le verifiche di resistenza consistono nel l'imporre una limitazione che può essere nelle tensioni, ma più propriamente può essere nelle dilatazioni, perciò avremo:

$$
(1) \quad \begin{cases}
\varepsilon_1 = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_1 - \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right) \\[2ex]
\varepsilon_2 = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_2 - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{m}\right) \\[2ex]
\varepsilon_3 = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_3 - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}\right)
\end{cases}
$$

chiameremo tensioni ideali:

$$
\sigma_{1\,id} = E\varepsilon_1 = \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right)
$$

$$\begin{cases} \sigma_{2id} = E\varepsilon_2 = \left(\sigma_2 - \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{m}\right) \\ \sigma_{3id} = E\varepsilon_3 = \left(\sigma_3 - \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{m}\right) \end{cases}$$

Le equazioni (1) possono scriversi:

$$\begin{cases} m\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = mE\varepsilon_1 \\ -\sigma_1 + m\sigma_2 - \sigma_3 = mE\varepsilon_2 \\ -\sigma_1 - \sigma_2 + m\sigma_3 = mE\varepsilon_3 \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti sarà:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ -1 & m & -1 \\ -1 & -1 & m \end{vmatrix} \text{ (simmetrico rispetto alla diagonale)}$$

Togliendo alla I^a e III^a riga la II^a riga ed aggiungendo alla II colonna la I^a e III^a colonna abbiamo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m+1) & 0 & 0 \\ -1 & (m-2) & -1 \\ 0 & 0 & (m+1) \end{vmatrix} = (m+1)^2(m-2)$$

I tre determinanti delle incognite σ_1 ; σ_2 ; σ_3 sono:

$$(Em)\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & -1 & -1 \\ \varepsilon_2 & m & -1 \\ \varepsilon_3 & -1 & m \end{vmatrix} = \Delta_1 ; \quad (Em)\begin{vmatrix} m & \varepsilon_1 & -1 \\ -1 & \varepsilon_2 & -1 \\ -1 & \varepsilon_3 & m \end{vmatrix} = \Delta_2 ; \quad (Em)\begin{vmatrix} m & -1 & \varepsilon_1 \\ -1 & m & \varepsilon_2 \\ -1 & -1 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \Delta_3$$

Risolvendo otteniamo:

$$\begin{cases} \Delta_1 = (mE)(m+1)\left[\varepsilon_1(m-1) + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right] \\ \Delta_2 = (mE)(m+1)\left[\varepsilon_1 + (m-1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_2 = (mE)(m+1)\left[\varepsilon_1 + (m-1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3\right] \\ \Delta_3 = (mE)(m+1)\left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (m-1)\varepsilon_3\right] \end{cases}$$

per cui si ha:

$$\sigma_1 = \frac{mE}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right]$$

$$(2) \quad \sigma_2 = \frac{mE}{(m+1)(m-2)}\left[\varepsilon_1 + (m-1)\varepsilon_2 + \varepsilon_3\right]$$

$$\sigma_3 = \frac{mE}{(m+1)(m-2)}\left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (m-1)\varepsilon_3\right]$$

Posto: $G = \dfrac{E m}{2(m+1)}$ e sostituendo:

$$(2\,bis)\qquad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{2G}{(m-2)}\left[(m-1)\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right] \\ \sigma_2 = \dfrac{2G}{(m-2)}\left[\varepsilon_1 + (m-1)\,\varepsilon_2 + \varepsilon_3\right] \\ \sigma_3 = \dfrac{2G}{(m-2)}\left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (m-1)\,\varepsilon_3\right] \end{cases}$$

Sommando le (2) si ha:

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{E m}{(m+1)(m-2)}(m+1)\left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right]$$

ed essendo: $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = e$ = dilatazione cubica

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{E m}{(m-2)}\, e$$

le (2 bis) possono scriversi:

$$\sigma_1 = \frac{2G}{(m-2)}\left[(m-2)\,\varepsilon_1 + e\right] = \sigma_1 = 2G\left[\varepsilon_1 + \frac{e}{(m-2)}\right]$$

$$\begin{cases} \sigma_e = \frac{2G}{(m-2)}\left[(m-2)\,\varepsilon_2 + e\right] = \sigma_\eta = 2G\left[\varepsilon_\eta + \frac{e}{(m-2)}\right] \\ \sigma_3 = \frac{2G}{(m-2)}\left[(m-2)\,\varepsilon_3 + e\right] = \sigma_\zeta = 2G\left[\varepsilon_\zeta + \frac{e}{m-2}\right] \end{cases}$$

cioè:

$$\sigma_1 = 2G\left[\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right]$$

$$\sigma_2 = 2G\left[\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2}\right]$$

$$\sigma_3 = 2G\left[\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2}\right]$$

(Vedasi anche Belluzzi - Scienza delle Costruzioni - Vol III pag. 5)

Se K' e K'' sono rispettivamente i carichi di sicurezza a trazione ed a compressione, la condizione di resistenza sarà in generale

$$\sigma_{1id} \leq \left\{ \begin{matrix} K' \\ K'' \end{matrix} \right. \quad ; \quad \sigma_{2id} \leq \left\{ \begin{matrix} K' \\ K'' \end{matrix} \right. \quad ; \quad \sigma_{3id} \leq \left\{ \begin{matrix} K' \\ K'' \end{matrix} \right.$$

se $K' = K'' = K$

$$\sigma_{1id} \leq K \quad ; \quad \sigma_{2id} < K \quad ; \quad \sigma_{3id} < K$$

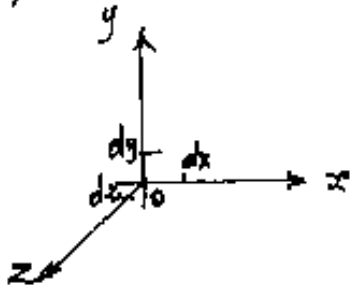
Però nelle prove a rottura di vari materiali è stata notata una diversità di comportamento fra i materiali fragili e non fragili. (Per esempio la strizione nei provini di ferro a trazione; o scorrimenti a 45° o addirittura elicoidali per prove a compressione) Ciò fece supporre l'azione degli sforzi tangenziali e poiché, nel piano, dal cerchio di Mohr è rilevabile che la τ_{max} è a 45° (90° al centro) e vale: $\tau_{max} = \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)$ fu proposta dal Mohr e dal Guest, per lo

"spazio" tridimensionale, la verifica di sicurezza sul carico di sicurezza per scorrimento K_s,

cioè: $\left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right| \leq K_1$; $\left|\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right| \leq K_1$; $\left|\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right| \leq K_1$

Ma anche questa verifica non è accettata da altri, ordinariamente si adotta una tensione principale ideale da verificare ammissibile ($\leq K$).

Distribuzione delle tensioni intorno ad un punto (cenni di teoria dell'elasticità)

Come sappiamo sull'elemento infinitesimo di materiale (punto materializzato) si verificano tre dilatazioni: (ε_x, ε_y, ε_z) e tre scorrimenti mutui (γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}) riferiti agli assi di riferimento: x, y, z.

Consideriamo il punto "O" al centro assi, vertice di un cubetto infinitesimo che costituisce il punto materializzato (cioè a meno di infinitesimi di ordine superiore tutti i vertici del cubetto coincidono con O).

Siano: ξ, η, ζ, le componenti secondo x, y, z dello spostamento di O, ma anche gli spigoli del cubetto infinitesimo si defor-

mano per cui avremo in x per un estremo:

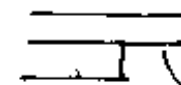
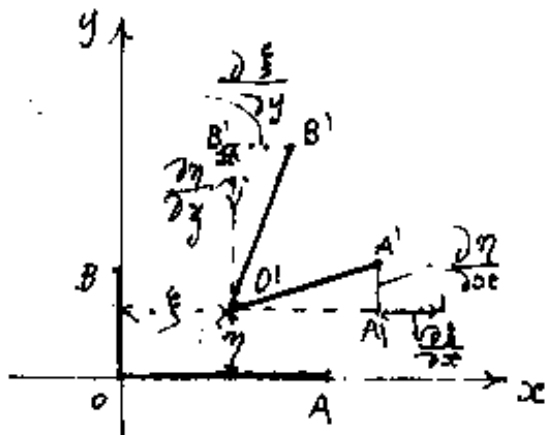
$$\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

in altre parole:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}}$$

analogamente:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

Ma le tre componenti dello spostamento variano da punto a punto, perciò avremo che la componente ξ oltre: $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ avrà anche: $\frac{\partial \xi}{\partial y}$; e $\frac{\partial \xi}{\partial z}$ ed analogamente le altre.

Consideriamo due segmenti $\overline{OA}$, ed $\overline{OB}$ piccolissimi, quando O va in O' (non consideriamo la z) il segmento $\overline{OA}$ è divenuto $\overline{O_1'A_1'}$ per la variazione $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, ma anche η ha subito oltre che la variazione $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ di $\overline{OB}$ in $O_1'B_1'$ anche la variazione $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ per cui $\overline{O_1'A_1'}$ diventa $O_1'A'$

si noti lo scorrimento relativo in x che

avviene per effetto di $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ [diagram] $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ - e lo scorrimento relativo per effetto di $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ - $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ [diagram] , e si noti come ciò implichi la variazione dell'angolo retto ADB = A'O'B' che diventa: A'O'B'. cioè l'angolo retto fra le direzioni x e y è variato di

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}}$$

Riepilogando avremo:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad ;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

Se definiamo la dilatazione cubica come il rapporto fra l'incremento di volume Δ_V ed il volume stesso V, cioè $e = \frac{\Delta_V}{V}$; se considerià-mo che un cubetto di spigoli x, y, z, per aumentare di volume (o diminuire) dovrà variare gli spigoli di Δx, Δy, Δz, avremo che:

$$\Delta_V = (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z) - (x \cdot y \cdot z)$$

sviluppando e semplificando si ha:

$$e = \frac{\Delta_V}{V} = \frac{\Delta x\, yz + \Delta y\, xz + \Delta z\, xy + \Delta x \Delta y z + \Delta x \Delta z y + \Delta y \Delta z x}{x \cdot y \cdot z}$$

$$e = \frac{\Delta x}{} + \frac{\Delta y}{} + \frac{\Delta z}{} + \frac{\Delta x \Delta y}{} + \frac{\Delta x \Delta z}{} + \frac{\Delta y \Delta z}{}$$

$$e = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} + \frac{\Delta x \Delta y}{x \cdot y} + \frac{\Delta x \Delta z}{x\, z} + \frac{\Delta y \Delta z}{y\, z}$$

cioè:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z .$$

e trascurando i prodotti fra le dilatazioni, viene assunto:

$$\boxed{e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$

Ciò vale solo se trattasi di spostamenti infinitesimi.

Nelle relazioni che generalizzano la legge di Hooke fra deformazioni e tensioni:

$$\begin{cases} E\varepsilon_x = \left(\sigma_x - \dfrac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right) \\ E\varepsilon_y = \left(\sigma_y - \dfrac{\sigma_x + \sigma_z}{m}\right) \\ E\varepsilon_z = \left(\sigma_z - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} G\gamma_{xy} = \tau_{xy} \\ G\gamma_{xz} = \tau_{xz} \\ G\gamma_{yz} = \tau_{yz} \end{cases}$$

figurano le tre "costanti elastiche": E, m, G, determinate approssimativamente da vari sperimentatori, con risultati diversi, cioè di largo approssimazione. Le tre costanti sono legate dalla relazione:

$$\boxed{G = \frac{m}{2(m+1)} E} \quad ; \quad \boxed{m = \frac{2G}{E - 2G}}$$

ed anche:

$$E(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - \frac{2\sigma_x + 2\sigma_y + 2\sigma_z}{m}\right)$$

$$\boxed{Ee = \left(\frac{m-2}{m}\right)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}$$

Relazione che abbiamo già trovato per:

relazione che abbiamo già trovato prima:

$$(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \frac{e\,m\,E}{m-2}$$

che esprime: essere costante in un punto la somma delle tensioni, qualunque sia il sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali cui si riferiscono le tensioni. Se: $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=p$

$$e = \frac{\pm 3p(m-2)}{E(m)}$$

Lo stato di tensione in un punto è determinato se conosciamo le tensioni: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}$, che si verificano sui piani normali agli assi x, y, z in un intorno di un punto.

Per il punto consideriamo un piano definito dai coseni direttori della retta di giacitura (comune ai suoi paralleli).

Gli angoli che la retta di giacitura (normale al piano) forma con gli assi $x; y; z$ siano: α, β, γ. (Ricordando che l'angolo formato da due piani è uguale all'angolo delle rette di giacitura, e ricordando che l'area di un intorno del punto se proiettata è moltiplicata per il coseno.) Se consideriamo unitaria l'area sul piano all'intorno del punto, l'area proiettata sui piani normali ad x, y, z, diventa $1 \cdot \cos\alpha$, $1 \cdot \cos\beta$, $1 \cdot \cos\gamma$ e se moltiplichiamo le tensioni agenti su tali

moltiplichiamo le tensioni agenti su tali piani per le aree su cui agiscono otterremo le forze: $\sigma_x \cos\alpha$, $\sigma_y \cos\beta$, $\sigma_z \cos\gamma$, $\tau_{xy} \cos\alpha$ $\tau_{xz} \cos\alpha$, $\tau_{yz} \cos\beta$. Se Proiettiamo tali forze sulla normale al piano e la dividiamo per l'area (unitaria) si ha $\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma +$ $+ \tau_{xy} \cos\alpha \cos\beta + \tau_{xz} \cos\alpha \cos\gamma + \tau_{yz} \cos\beta \cos\gamma$. —

L'espressione: $E_e = \left(\frac{m-2}{m}\right)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ che può scriversi:

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \text{cost.}$$

cioè che per ogni terna di direzioni ortogonali all'intorno del punto, <u>è costante la somma delle tensioni.</u>

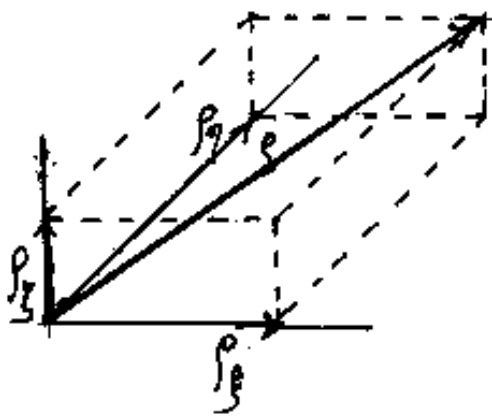
Fra tutte le possibili terne ortogonali all'intorno del punto consideriamo una terna: $\xi, \eta, \zeta,$ (<u>direzioni principali</u>) caratterizzata dall'assenza di tensioni tangenziali sui piani di giacitura $\xi, \eta, \zeta,$. Le tensioni normali: $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta,$ che spesso vengono indicate con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,$ sono dette: <u>tensioni principali</u>, ed abbiamo una σ_ξ (σ_1) che è <u>massima</u>; σ_ζ (σ_3) che è <u>minima</u>; σ_η (σ_2) intermedia, fra tutte le possibili tensioni in direzione generica.

Se assumiamo come assi di riferimento le direzioni principali: $\xi, \eta, \zeta,$; se $\alpha_\xi, \beta_\eta, \gamma_\zeta,$ sono gli

angoli che una retta di giacitura forma ora con le direzioni: ξ, η, ζ, (anziché x, y, z), la tensione sul piano di tale retta di giacitura sarà:

$$\sigma = \sigma_\xi \cos^2\alpha_\xi + \sigma_\eta \cos^2\beta_\eta + \sigma_\zeta \cos^2\gamma_\zeta$$

essendo nulle: $\tau_{\xi\eta} = 0$; $\tau_{\xi\zeta} = 0$; $\tau_{\eta\zeta} = 0$.

Possiamo arrivare alla stessa formula avendo assunti: ξ, η, ζ, come assi di riferimento. Moltiplicando le tensioni per le aree su cui agiscono, abbiamo le componenti dell'azione sul piano avente per giacitura $\alpha_\xi, \beta_\eta, \gamma_\zeta$, cioè: $\rho_\xi = \sigma_\xi \cos\alpha_\xi$; $\rho_\eta = \sigma_\eta \cos\beta_\eta$; $\rho_\zeta = \sigma_\zeta \cos\gamma_\zeta$

$$\rho^2 = \sigma_\xi^2 \cos^2\alpha_\xi + \sigma_\eta^2 \cos^2\beta_\eta + \sigma_\zeta^2 \cos^2\gamma_\zeta$$

proiettando gli sforzi sulla normale al piano e dividendo per l'area unitaria si ha:

$$\sigma = \rho_\xi \cos\alpha_\xi + \rho_\eta \cos\beta_\eta + \rho_\zeta \cos\gamma_\zeta$$

$$\sigma = \sigma_\xi \cos^2\alpha_\xi + \sigma_\eta \cos^2\beta_\eta + \sigma_\zeta \cos^2\gamma_\zeta$$

e la τ sul piano generico

$$\tau = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2}$$

esprimendo i coseni come rapporto fra sforzi e

esprimendo i coseni come rapporto fra sforzi e tensioni poiché: $\cos^2\alpha_\xi + \cos^2\beta_\eta + \cos^2\gamma_\zeta = 1$

avremo anche:

$$\frac{\rho_\xi^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{\rho_\eta^2}{\sigma_\eta^2} + \frac{\rho_\zeta^2}{\sigma_\zeta^2} = 1$$

essendo gli sforzi variabili con gli angoli possiamo scrivere:

$$\frac{\xi^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2} + \frac{\zeta^2}{\sigma_\zeta^2} = 1$$

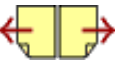
che è l'equazione dell'ellissoide delle tensioni, o di Lamé.

con centro nel punto considerato, coinciden=
te col centro assi: ξ, η, ζ, pensiamo una
sfera di raggio unitario. Ogni punto della
superficie sferica avrà per coordinate:

$$x_P = \cos(\alpha_\xi) \quad ; \quad y_P = \cos(\beta_\eta) \quad ; \quad z_P = \cos(\gamma_\zeta)$$

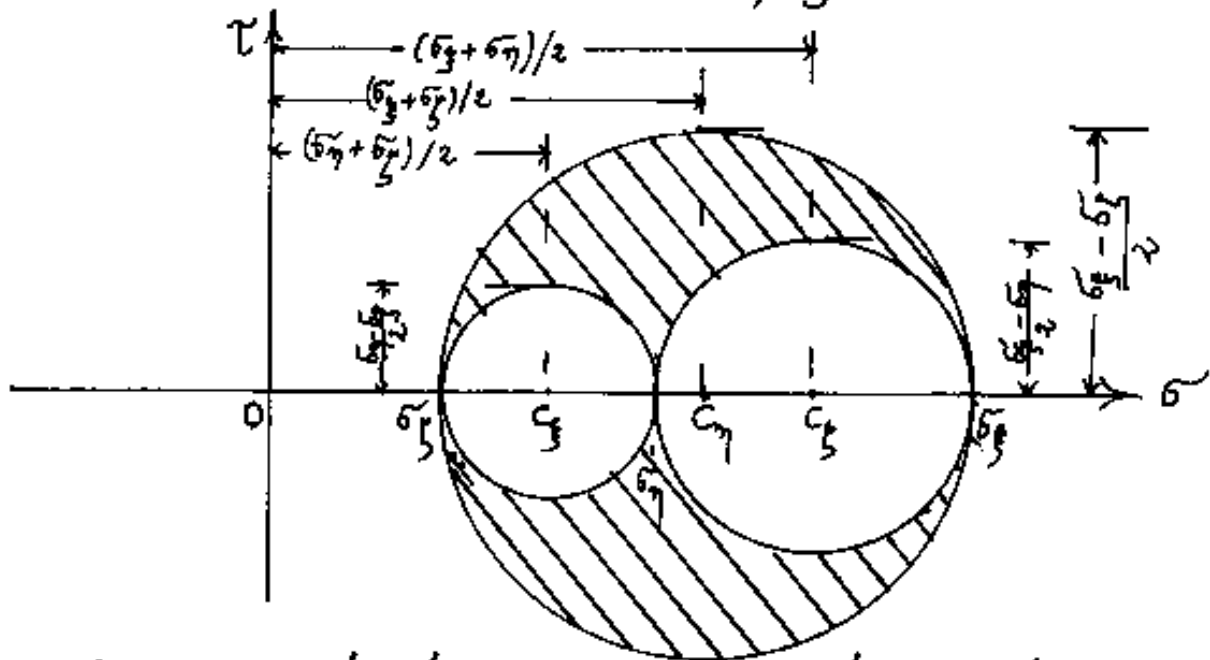
Il raggio che unisce il centro con P, insiste
su una retta, che è retta di giacitura del
piano per O e dei suoi paralleli, compreso il
piano tangente in P.

Se a noi sono note: σ_ξ, σ_η, σ_ζ; (tensioni
principali) e vogliamo le tensioni σ e τ su
un piano generico definito dai coseni direttori
$\cos\alpha_\xi$, $\cos\beta_\eta$, $\cos\gamma_\zeta$, della suo retta di giaci=
tura, possiamo avvalerci dei cerchi di Mohr
nello spazio, che si ottengono sovrapponendo
nel sistema piano di assi: σ, τ, i tre cer=
chi di Mohr per il piano relativi alle cop=
pie: σ_ξ, σ_η ; $\sigma_\zeta, \sigma_\zeta$; $\sigma_\eta, \sigma_\zeta$.

pie : σ_ξ, σ_η ; σ_ξ, σ_ζ ; $\sigma_\eta, \sigma_\zeta$.

I tre cerchi avranno il centro sulle ascisse σ rispettivamente : $\frac{\sigma_\xi+\sigma_\eta}{2}$; $\frac{\sigma_\xi+\sigma_\zeta}{2}$; $\frac{\sigma_\eta+\sigma_\zeta}{2}$;

e per raggio : $\frac{\sigma_\xi-\sigma_\eta}{2}$; $\frac{\sigma_\xi-\sigma_\zeta}{2}$; $\frac{\sigma_\eta-\sigma_\zeta}{2}$

Per costruirli basta riportare in ascisse σ

i tre valori σ_ξ , σ_η , σ_ζ ed avremo i tre cerchi di Mohr per lo spazio, fra loro tangenti la zona tratteggiata in figura è <u>detta Arbelo di Mohr</u>, a ciascun punto di essa corrisponde una direzione. Per capirne il funzionamento occorre ricordare alcune proprietà degli angoli della retta di giacitura:

$$\cos^2(\alpha_\xi) + \cos^2(\beta_\eta) + \cos^2(\gamma_\zeta) = 1$$

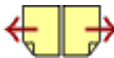
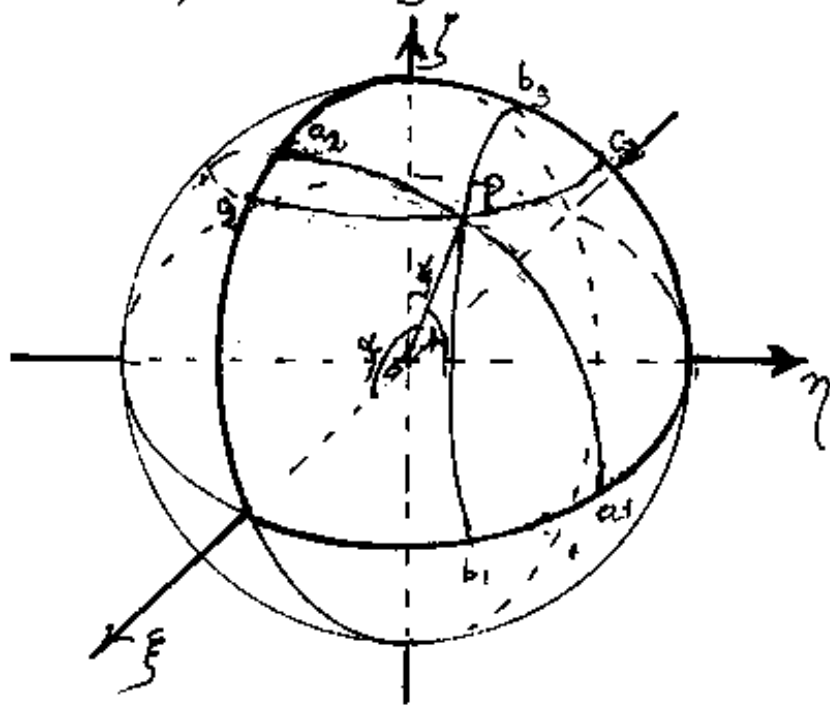
ogni angolo deve essere maggiore del comple= mentare di ciascuno degli altri due, cioè:

$\alpha > (90 - \beta)$; $\alpha > (90 - \gamma)$;

$$\alpha_\xi > (90 - \beta_\eta) \; ; \quad \alpha_\xi > (90 - \gamma_\zeta) \; ;$$

$$\beta_\eta > (90 - \alpha_\xi) \; ; \quad \beta_\eta > (90 - \gamma_\zeta) \; ;$$

$$\gamma_\zeta > (90 - \alpha_\xi) \; ; \quad \gamma_\zeta > (90 - \beta_\eta) \; ;$$

Infatti se due angoli fossero complementari giacerebbero nello stesso piano; e se fossero inferiori, non potrebbero incontrarsi sulla stessa retta.

Per capire meglio, torniamo alla nostra sfera e consideriamo un punto P sulla sua superficie.
Il raggio $\overline{OP}$ è sulla retta di giacitura che forma gli angoli α_ξ, β_η, γ_ζ con gli assi.
Consideriamo le superfici coniche di vertice O, generate dalle rette che hanno costante un angolo direttore, tali superfici coniche incontrano la sfera secondo tre circonferenze passanti P, ciascuna luogo geometrico di angolo direttore costante.
A noi interessa il primo ottante della superficie sferica, che incontra i piani: $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ secondo tre cerchi che hanno in comune i

secondo tre cerchi che hanno in comune i punti $a_1 a_2$, $b_1 b_3$, $c_2 c_3$ coi cerchi passanti per P. (P è definito da tre archi di cerchio che passano rispettivamente per $a_1 a_2$ ad $\alpha_\xi = \text{cost}$; per $b_1 b_3$ per $\beta_\eta = \text{cost}$; per $c_2 c_3$ per $\gamma_\zeta = \text{cost}$.)

Nel cerchio di Mohr per sistemi piani abbiamo visto che a ciascun punto della circonferenza corrisponde una giacitura; che l'angolo al centro fra i raggi di due punti di giacitura è doppio dell'angolo fra le due rette di giacitura (o i due piani). Da ciò due punti diametralmente opposti nel cerchio di Mohr riflettono rette di giacitura (piani) ortogonali; gli angoli alla circonferenza, essendo metà degli angoli al centro possono individuare le giaciture.

(Vedi: verifiche di resistenza per i sistemi piani)

Nel caso delle tre circonferenze di Mohr per i sistemi spaziali: $(\alpha_\xi + \beta_\eta) > 90° \left(\frac{\pi}{2}\right)$ i punti corrispondenti a giaciture non sono più sulle circonferenze, ma sarà lo spazio compreso fra le circonferenze stesse. Se in questo spazio fissiamo un generico punto P relativo ad una certa giacitura

una certa giacitura, e per P facciamo passare i tre ar= chi di cerchio (ad angolo di giacitura costante) di centri: C_ξ, C_η, C_ζ, notiamo

che l'arco di cerchio di centro C_ξ incontrerà le altre due circonferenze di Mohr nei punti a_1 ed a_2; analogamente, l'arco di centro C_η determinerà b_1 e b_3 ed infine l'arco di centro C_ζ darà c_2 e c_3. (gli indici: 1, 2, 3; individuano i cerchi). Però la determinazione non è unica, infatti abbiamo una coppia di a_1, una coppia di a_2, ... ecc. cioè una coppia di ciascuna lettera, perché gli archi prolungati intersecano i cerchi in altri due punti. Poiché i cerchi di Mohr possono considerarsi proiettati sui tre piani: $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$, ove ciascun asse figura quindi appartenente a due piani diversi cioè a due cerchi diversi, anche gli angoli dei coseni direttori con tale asse saranno doppi al centro di due cerchi diversi. In altre parole unendo $a_1 a_2$ la retta deve essere allineata con σ_ξ e gli angoli: $\sigma_\xi \hat{C}_\zeta a_1 = \sigma_\xi \hat{C}_\eta a_2 = 2\alpha_\xi = 2(65°) \rightarrow \cos^2(65°) = 0{,}1786$ analogamente $b_1 b_3$ allineato con σ_η (b_1 e b_3 da banda opposta)

analogamente $b_1 b_3$ allineato con σ_η . (b_1 e b_3 sia pure opposti)

$$\sigma_\eta \hat{C_\zeta} b_1 = \sigma_\eta \hat{C_\xi} b_3 = 2\beta_\eta = 2(52°) \rightarrow \qquad \cos^2(52°) = 0{,}3790$$

ed ancora C_2 e C_3 allineati con σ_ζ

$$\sigma_\zeta \hat{C_\eta} C_2 = \sigma_\zeta \hat{C_\xi} C_3 = 2\gamma_\zeta = 2(48°,31) \qquad \cos^2(48°,31) = 0{,}4424$$

e dovrà essere : $\qquad \cos^2(\alpha_\xi) + \cos^2(\beta_\eta) + \cos^2(\gamma_\zeta) = 1{,}0000$ -

Avendo preso a caso, sul grafico, un punto P, interno al cerchio maggiore ed esterno ai due cerchi interni, possiamo graficamente determinare gli angoli $\alpha_\xi, \beta_\eta, \gamma_\zeta$, (verificare che la somma dei quadrati dei loro coseni è uno) che sono gli angoli della retta normale ad un piano per "O" ove si verifica σ_p e τ_p. (Supponiamo che la direzione $\overline{OP}$ sia l'asse x)
Notiamo che σ_p ha una direzione determinata, ma che se spostiamo l'asse τ salvo l'aumento costante delle σ non cambia altro, ciò è giustificato dal fatto che: $(\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta) = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ come abbiamo dimostrato. Ma $(\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta)$ aumenterebbe del triplo di σ_p che è unica per ogni P.
Nel piano di P c'è una τ rilevabile dai cerchi di Mohr e che andrà scomposta in τ_{py} e τ_{pz} avendo preso $\sigma_p = \sigma_x$.

Consideriamo: $\sigma_x = 7$; $\sigma_y = 3$; $\sigma_z = 1$;

Consideriamo: $\sigma_\xi = 7$; $\sigma_\eta = 3$; $\sigma_\zeta = 1$;

$\sigma_\xi \cos\alpha_\xi = 2{,}958327832$; $\sigma_\xi \cos^2\alpha_\xi = 1{,}250243366$; $(\sigma_\xi \cos\alpha_\xi)^2 = 8{,}75170356_3$

$\sigma_\eta \cos\beta_\eta = 1{,}846984426$; $\sigma_\eta \cos^2\beta_\eta = 1{,}137117157$; $(\sigma_\eta \cos\beta_\eta)^2 = 3{,}41135147$

$\sigma_\zeta \cos\gamma_\zeta = 0{,}665100031$; $\sigma_\zeta \cos^2\gamma_\zeta = 0{,}442358052$; $(\sigma_\zeta \cos\gamma_\zeta)^2 = 0{,}44235805_2$

$\sigma_p = 2{,}829718575$; $\rho_p^2 = 12{,}60541308$

$\tau_p = \sqrt{\rho_p^2 - \sigma_p^2} = 2{,}144319442$ $\rho_p = 3{,}550410207$

Valori confortati dalla verifica sul grafico.

Le Deformazioni

Lo studio delle deformazioni é fondamentale, non solo in scienza delle costruzioni, ma anche in una molteplicitá di fenomeni fisici di cui faremo cenno.
Dovremo considerare le deformazioni nelle travi, sui solidi non astiformi, sulle strutture, a telaio o reticolari.

Per introdurre il problema partiamo da osservazioni molto semplici. Consideriamo un elastico al quale si appenda un peso che inizialmente sosteniamo con una mano. Poi gradualmente abbassiamo la mano, l'elastico si allungherá, noi sentiremo diminuire il peso nella mano, e l'elastico continuerá a deformarsi finché non avrá accumulato al suo interno l'energia elastica necessaria a

suo interno l'energia elastica necessaria a sostenere il peso.

In questo esperimento, noi vediamo ciò che ordinariamente viene chiamata "forza" come l'azione di energia elastica vincolata.

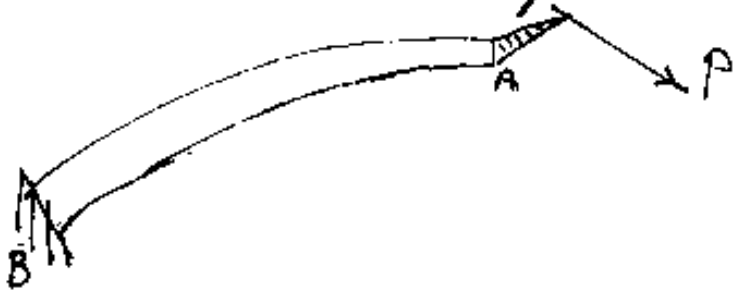
Lo stesso avviene se comprimiamo (o tendiamo) una molla. Nascono così gli strumenti detti dinamometri

ove un indice si sposta su una scala graduata in unità di peso, o di forza, e quindi indica il peso o la forza che ha provocato lo spostamento.
L'azione forza può essere centrifuga, elettrica, magnetica, ecc.

Abbiamo già studiato la deformazione a flessione con la linea elastica, con l'analogia di Mohr ed abbiamo ripetuto i calcoli con i lavori virtuali, consideriamo ora altri modi.

L'ellisse di elasticità

L'ellisse di elasticità si basa sulla proporzionalità fra sforzi e deformazioni, si applica a travi curvilinee a sezione variabile. (leggermente curviline con piccola variazione di sezione) soggette ad una forza P agente in una sezione

della trave, mantenendo, in genere, la retta di azione di P fuori della sezione. Come si vede in figura la forza P agisce nella sezione A della trave, tramite un braccio rigido.

A P B

Spesso la trave è una mensola e la forza "P" agisce nella sezione terminale. La retta di azione di "P" è complanare all'asse della trave, e parallela ad uno dei diametri principali d'inerzia affinché l'asse deformato, resti complanare.

La traccia della sezione A sul piano sia in (A) dopo la deformazione ovviamente dovrà esistere un punto C intorno al quale ha ruotato.

Il centro C dipende solo dalla retta di azione l'angolo φ dipende dalla intensità di P.

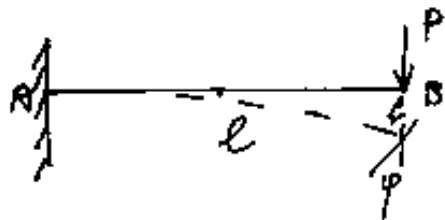
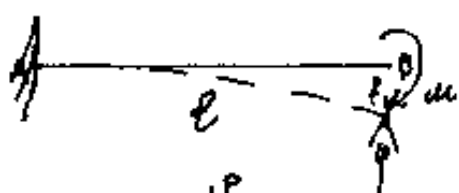
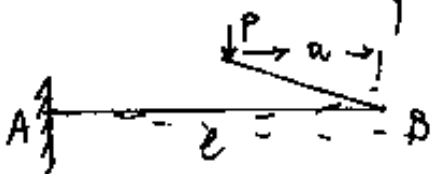
<u>Esiste quindi una corrispondenza biunivoca fra i centri C e le rette di azione di P.</u>

Intorno a C avviene una ruotazione, quindi la retta di P corrispondente a C non potrà mai passare per C. (la corrispondenza non ha elementi autoconiugati)

Se per C facciamo passare un'altra retta r, corrispondente al centro C, allora la

r_1 corrispondente al centro C_1 allora la retta di C passerà per C_1. (La corrispondenza è involutoria) Quindi la corrispondenza fra le rette r ed i centri C_1 essendo: biunivoca, non ha elementi autoconiugati, è involutoria, cioè

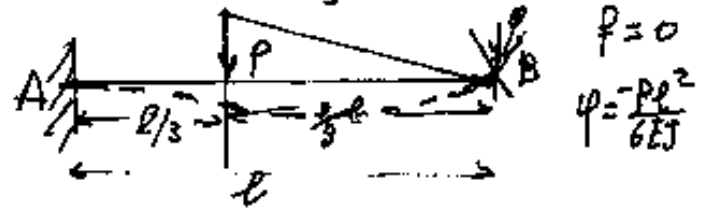
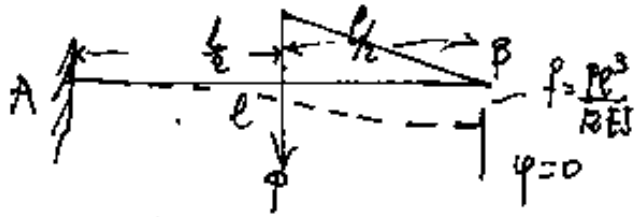
è una polarità e la sua conica è immaginaria. Ma analogamente alla polarità determinata dall'ellisse d'inerzia, anche qui considereremo i simmetrici c' dei centri c rispetto al centro elastico della trave "O". Questa nuova polarità è un ellisse reale di centro "O". ed è l'ellisse di elasticità relativa alla sezione A (se la trave è a mensola si chiama anche ellisse terminale, essendo A l'estremo libero)

Prima di continuare calcoliamo la freccia e la rotazione della sezione terminale di una mensola nei seguenti tre casi:

$$f_B = \frac{Pl^3}{3EJ} \quad ; \quad \varphi = \frac{Pl^2}{2EJ}$$

$$f_B = \frac{Ml^2}{2EJ} \quad ; \quad \varphi = \frac{Ml}{EJ}$$

$$\equiv \quad \Rightarrow \quad f = \frac{Pl^3}{3EJ} - \frac{Pal^2}{2EJ}$$

$$\varphi = \frac{Pl^2}{2EJ} - \frac{Pal}{EJ} \quad ; \quad f = 0 \rightarrow 2l = 3a \; , \; a = \frac{2}{3}l \rightarrow \varphi = \frac{Pl^2}{2EJ} - \frac{P\frac{2}{3}l^2}{EJ}$$

$$\varphi = 0 \rightarrow a = l/2 \; ; \rightarrow f = \frac{Pl^3}{3EJ} - \frac{Pl^3}{4EJ} = \quad f = \frac{Pl^3}{12EJ} \; ; \; \varphi_{\frac{2l}{3}} = -\frac{Pl^2}{6EJ}.$$

A, B, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$, l, P, $f = \frac{Pl^3}{12EJ}$, $\varphi = 0$

A, B, P, $l/3$, $\frac{2}{3}l$, l, $f = 0$, $\varphi = -\frac{Pl^2}{6EJ}$

quindi per $a > \frac{2}{3}l$ la sezione B si innalza.

Il peso elastico

Abbiamo già introdotto il peso elastico $\mathcal{G}$ come l'inverso della rigidezza a flessione semplice:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{W} = \frac{l}{EJ} \quad ; \quad \boxed{\varphi = \mathcal{M}\,\mathcal{G}} \quad ; \quad \mathcal{G} = \frac{\varphi}{\mathcal{M}} \; ;$$

Cioè il peso elastico è l'attitudine della struttura a far compiere lavoro elastico al momento flettente applicato. $\left(\mathcal{L} = \frac{\mathcal{M}^2}{2}\mathcal{G}\right)$

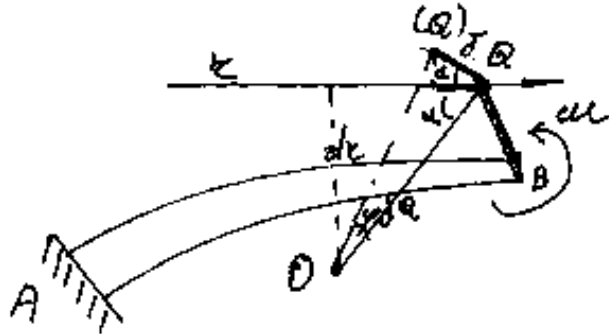
Si può riguardare il peso elastico come il valore della deformazione angolare φ per effetto di una coppia unitaria ($\mathcal{M} = 1$).

Ma una rotazione avviene intorno ad un centro, che chiameremo: centro elastico "O", quando la rotazione è provocata da una coppia cioè da una forza infinitesima a distanza infinita. In altre parole le rette all'infinito hanno il centro (antipolo) in "O".

Mentre ad ogni retta in campo finito corrispon-

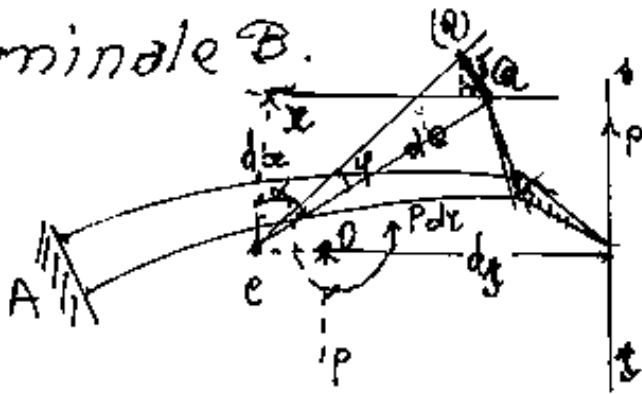
de un centro C di rotazione. Se la retta passa per "O" il centro C è all'infinito, si verifica una traslazione senza ruotazione ($\varphi = 0$)

Quindi per la mensola uniforme "O" è ad $l/2$ affinchè la retta passando per O non dia rotazione alla sezione B. (C all'infinito)

Se consideriamo una mensola qualsiasi anche ad asse curvilineo ed a sezioni variabili, soggetta ad una coppia $\mathcal{M}$ nella sezione terminale B, e connesso a B vi sia il punto Q che disti da O, $d_Q = \overline{OQ}$, il punto Q per effetto della rotazione φ andrà in (Q) ove: $\overline{Q(Q)} = \delta = \varphi d_{(Q)} = \mathcal{M} \mathcal{G} d_{(Q)}$.

Se per Q consideriamo la retta r che forma l'angolo α con δ la proiezione dello spostamento δ su r sarà $\delta \cos\alpha = \delta_r = \mathcal{M} \mathcal{G} d_Q \cos\alpha = \mathcal{M} \mathcal{G} d_r$.

Quindi lo spostamento secondo una retta r provocato da una coppia è dato dal prodotto della coppia per il peso elastico, per la distanza della retta dal centro elastico "O".

La ruotazione di una sezione provocata da una forza agente secondo una retta r

da una forza agente secondo una retta r connesso ad un punto unito alla sezione terminale B.

$$\varphi = M\mathcal{G} = Pdz\,\mathcal{G}$$

Spostamento secondo una retta x.

$$\delta_x = \delta \cos\alpha = Pdz\,\mathcal{G}\,da \cos\alpha$$

$$\delta x = P\mathcal{G}\,dz \cdot dx$$

Se pensiamo che il peso elastico $\mathcal{G}$ sia distribuito nella trave, come fosse una massa, avremo che l'ellisse centrale d'inerzia di queste "masse" è l'ellisse di elasticità.

Attenzione l'ellisse d'inerzia si riferisce alla sezione, l'ellisse di elasticità alla trave.

Entrambi gli ellissi sono ellissi di Culman, entrambi determinano un'antipolarità:

<u>l'ellisse centrale d'inerzia</u> fra assi neutri e centri di sollecitazione.

<u>l'ellisse di elasticità</u> fra rette e centri di rotazione.

Il centro elastico "O" è il baricentro delle "masse" $\Delta\mathcal{G}$ ove: $\mathcal{G} = \Sigma \Delta \mathcal{G}$.

Quando parliamo di rotazione o spostamento di una sezione intendiamo anche i punti o corpi <u>rigidamente</u> (non elasticamente) ad essa connessi.

I) <u>La rotazione</u> di una sezione <u>dovuta ad u</u>

I) La rotazione di una sezione dovuta ad M

$$\varphi = M \cdot \mathcal{G} \quad (\mathcal{G} \text{ della trave})$$

II) Lo spostamento dovuto ad M secondo una retta

$$\delta_r = M\, \mathcal{G}\, d_r \quad (\text{ove} : \mathcal{G} \cdot d_r = S_r = \text{momento statico})$$

III) La rotazione dovuta a P:

$$\varphi = P\, d_s\, \mathcal{G} = (\text{ove } \mathcal{G} \cdot d_s = S_s = \text{momento statico})$$

IV) Lo spostamento dovuto a P (sulla retta x)

$$\delta x = P\, \mathcal{G}\, d_s d_x \quad (\text{ove } \mathcal{G}\, d_s d_x = I_{sx} = \text{momento centrifugo})$$

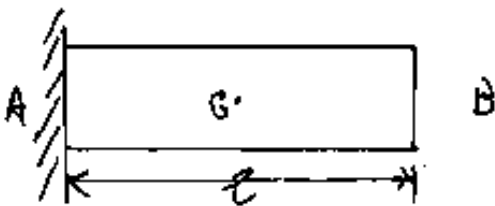
IV.) Lo spostamento dovuto a P (sulla retta s di P)

$$\delta_s = P \mathcal{G} d_s^2 \quad \left(\text{ove } \mathcal{G} d_s^2 = \underline{\text{momento d'inerzia}}\right)$$

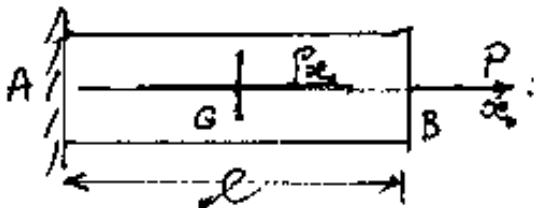
Questa sintesi dei casi possibili è basilare per la risoluzione degli esercizi.

Lavoro elastico

$$\mathcal{L} = \frac{\mathcal{M}\varphi}{2} = \frac{\mathcal{M}^2 \mathcal{G}}{2} \quad ; \quad \mathcal{L} = \frac{P\delta_s}{2} \; ;$$

A G· B l

Nella trave a sezione costante

$$G = \frac{l}{2} \; ; \quad \varphi = \mathcal{M}\mathcal{G} \; ; \quad \mathcal{G} = \frac{l}{EJ}$$

A G B P ρ_{x_0} x_0 l

Se la retta di azione di P passa per G (coincidente con O) sappiamo che lo spostamento:

$$\delta_x = \frac{Pl}{EA} \; ; \quad \delta_{x_0} = P J_{x_0} = P \cdot \mathcal{G} \rho_{x_0}^2$$

ove ρ_{x_0} è il semiasse trasversale dell'ellisse: si noti: $\mathcal{G}\rho_{x_0}^2 = \frac{l}{EA} = \frac{l}{EJ}\rho_{x_0}^2$

$$\rho_{x_0} = \rho_{\text{fiancata}} = \sqrt{J/A} = \frac{h}{6}\sqrt{3}$$

Se la forza P agisce nella sezione terminale B in direzione y, e cerchiamo lo spostamento secondo y, tenendo anche conto del Taglio sappiamo: $\delta_y = \frac{Pl^3}{3EJ} + \chi\frac{Pl}{GA}$ (ove $G = E\left(\frac{m}{2m+2}\right)$)

con l'ellisse: $\delta_y = P J_y = P\left[J_{y_0} + g\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = P\left[g\rho_{y_0}^2 + g\frac{l^2}{4}\right] =$

$\delta_y = P\left(\frac{l}{EJ}\right)\left(\rho_{y_0}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right)$; $\frac{l}{EJ}\left(\rho_{y_0}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{l^3}{3EJ} + \frac{\chi l}{GA}\right)$; $\boxed{\rho_{y_0}^2 = \frac{l^2}{12} + \chi\frac{E}{G}\frac{J}{A}}$,

Lo studio dei cavi flessibili

Le funi brande (catenaria)

La parola brande deriva da brandire che è un vibrare molto accentuato da un lenteggiamento. Funi braude venivano così chiamate dagli antichi toscani, le funi o corde leuteggianti, ben sapendo che la configurazione di equilibrio di una fune, corda, o catena, appesa agli estre=mi e soggetta solo al proprio peso, unifor=memente distribuito nella sua lunghezza non era una conica, né archi di cerchio.

Il discorso era semplice: una fune o catena appesa agli estremi è tutta tesa, se noi ribaltiamo il piano di tale curva, essa diventerebbe tutta compressa, quindi per fare le centine di archi ribaltati veniva

fare le centine di archi ribassati veniva fissata una corda su un tavolato verticale con distanza pari all'imposta dell'arco e facendola lenteggiare fino alla freccia desiderata; lasciata l'impronta sul ta=volato, questo veniva segato e costituiva la centina.

Per generazioni, studiosi si sono impegnati per definire matematicamente questa curva. Il Mach racconta che Jean e Jacques Bernoulli (1600-1700), passeggiando per Basilea si proposero il problema di quale fosse la configurazione di equilibrio di una catena, di peso uniforme, sospesa agli estremi, e convennero che la configurazione doveva essere tale da avere il baricentro nella posizione più bassa.

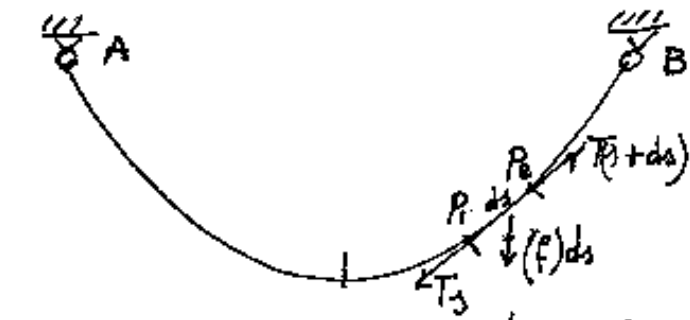
Risposta esatta, ma la formula fu trovata con la trigonometria iperbolica.

La curva si chiama catenaria ed è un coseno iperbolico: $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$;

Ci proponiamo di ricavare la formula.

(Cfr. Bollettino Ingegneri N 10 ottobre 1972 e N 12 1972, C. Brogi - Su alcuni aspetti delle curve fu=

1972, C. Brogi - Su alcuni aspetti delle curve funicolari).

A B P_2 $T(s+ds)$ P_1 ds $f(f)ds$ T_s

consideriamo la nostra catena, inestendibile, appesa agli estremi A, B, composta di infiniti elementi $\overline{P_1P_2} = ds$, individuati da una lunghezza s ed $s+ds$. (con origine arbitraria).

In P_1 e P_2, figurano le tensioni: $T_{(s)}$ e $T_{(s+ds)}$ tangenti la curva e l'elemento soggetto alla forza $f(ds)$. l'equilibrio è espresso dalla relazione vettoriale

$$\vec{f\,ds} + \vec{T_{(s)}} + \vec{T_{(s+ds)}} = 0$$

Se fissiamo un verso di misura degli archi e proiettiamo le forze su un sistema di assi cartesiani, posto $f_{(x)} = X$; $f_{(y)} = Y$; $f_{(z)} = Z$; si ha:

$$\begin{cases} X\,ds - T_x(s) + T_x(s+ds) = 0 \\ Y\,ds - T_y(s) + T_y(s+ds) = 0 \\ Z\,ds - T_z(s) + T_z(s+ds) = 0 \end{cases}$$

ricordando lo sviluppo in serie di Taylor:

$$f(x_0+h) = f_{(x_0)} + \frac{h}{1!} f'_{(x_0)} + \frac{h^2}{2!} f''_{(x_0)} + \dots + \frac{h^n}{n!} (f^n_{(x_0)}) + R$$

si ha

$$T_{x(s+ds)} = T_x(s) + ds\,\frac{dT_x}{ds} + K\,ds^2$$

sostituendo e dividendo per ds e semplificando: si ha:

$$\begin{cases} X + \frac{dT_x}{ds} + K\,ds = 0 \\ Y + \frac{dT_y}{ds} + K\,ds = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y + \dfrac{dT_y}{ds} + K d_s = 0 \\ Z + \dfrac{dT_z}{ds} + K d_s = 0 \end{cases}$$

e per ds tendente a zero

$$\begin{cases} X + \dfrac{dT_x}{ds} = 0 \\ Y + \dfrac{dT_y}{ds} = 0 \\ Z + \dfrac{d\overline{T_z}}{ds} = 0 \end{cases}$$

ed essendo $T_{(s)}$ tangente alla curva i suoi coseni direttori saranno: $\frac{dx}{ds}$; $\frac{dy}{ds}$; $\frac{dz}{ds}$;

ed anche: $T_x = T_{(s)}\frac{dx}{ds}$; $T_y = T_{(s)}\frac{dy}{ds}$; $T_z = T_{(s)}\frac{dz}{ds}$;

sostituendo:

$$\begin{cases} X + \dfrac{d\left(T_{(s)}\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = 0 \\ Y + \dfrac{d\left(T_{(s)}\frac{dy}{ds}\right)}{ds} = 0 \\ Z + \dfrac{d\left(T_{(s)}\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = 0 \end{cases}$$

essendo: $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$

si ha un sistema di equazioni da integrare nelle incognite x, y, z, T.

Consideriamo ora che la forza agente sull'elemento sia il peso, che per unita' di lunghezza indicheremo con "q", e poniamo che il campo gravitazionale agisca secondo y avremo:

$$\left\{ \frac{d\left(T_{(s)}\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = 0 \right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(T_s \dfrac{dx}{ds}\right)}{ds} = 0 \\ \dfrac{d\left(T_s \dfrac{dy}{ds}\right)}{ds} = q \\ \left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{(curva piana)}$$

Integrando le prime due equazioni:

$(T_s = T)$

$$(*) \quad \begin{cases} T \dfrac{dx}{ds} = H = \text{costante} \\ T \dfrac{dy}{ds} = qs + b \end{cases}$$

Se poniamo l'origine degli archi nel vertice ove $T\frac{dy}{ds} =$ avremo: $b = 0$.

Quadrando e sommando:

$$T^2\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] = H^2 + q^2s^2$$

cioè:

$$T^2 = H^2 + q^2s^2$$

$$T = q\sqrt{\left(\frac{H}{q}\right)^2+s^2}$$

sostituendo:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{qs}{T} = \frac{s}{\sqrt{\left(\frac{H}{q}\right)^2+s^2}}$$

posto: $H/q = a$; $\frac{dy}{ds} = \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}$

integrando:

$$y = \int\frac{s\,ds}{\sqrt{a^2+s^2}} = \sqrt{a^2+s^2} + c$$

Se spostiamo l'origine di $-a$ in y : $c = 0$

$$\boxed{y = \sqrt{a^2+s^2}} \qquad s = \sqrt{y^2-a^2}$$

$T = qy$ (l'ordinata dei punti per a)

$$\boxed{T = qy}$$ (le ordinate dei punti per q sono le tensioni)

dividendo: $T\frac{dy}{ds} = qs$ per $T\frac{dx}{ds} = H = qa$, abbiamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a} = \frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a}$$

$$X = a\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = a\left(ln\left(\sqrt{y^2-a^2} + y\right) + C\right)$$

(a = cost)

$$X = a\left[ln\left[\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right] + \frac{C}{1}\right]$$

Dovendo essere per $x = 0$; $y = a$; $\frac{y}{a} = 1$

$\ln(1) = 0$ per cui $C_1 = 0$.

quindi:

$$\frac{x}{a} = \ln\left[\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right]$$

$$e^{x/a} = \frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}$$

$$\left(e^{\frac{x}{a}} - \frac{y}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1 = e^{\frac{2x}{a}} - 2\frac{y}{a}e^{\frac{x}{a}} + \left(\frac{y}{a}\right)^2$$

$$\boxed{y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}}$$

Ricordando le funzioni iperboliche:

$$\boxed{y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)} \quad ; \ \left(a = H/q\right)$$

$$\boxed{y = \frac{H}{q}\cosh\left(\frac{x}{H/q}\right)} = \frac{T}{q}$$

Sono queste le equazioni della catenaria.

$$\frac{T}{H} = \cosh\left(\frac{x}{H/q}\right) \quad ; \quad y = \frac{H}{q}\cosh\left(\frac{x}{H/q}\right) = \sqrt{s^2 + a^2} = \sqrt{s^2 + \frac{H^2}{q^2}}$$

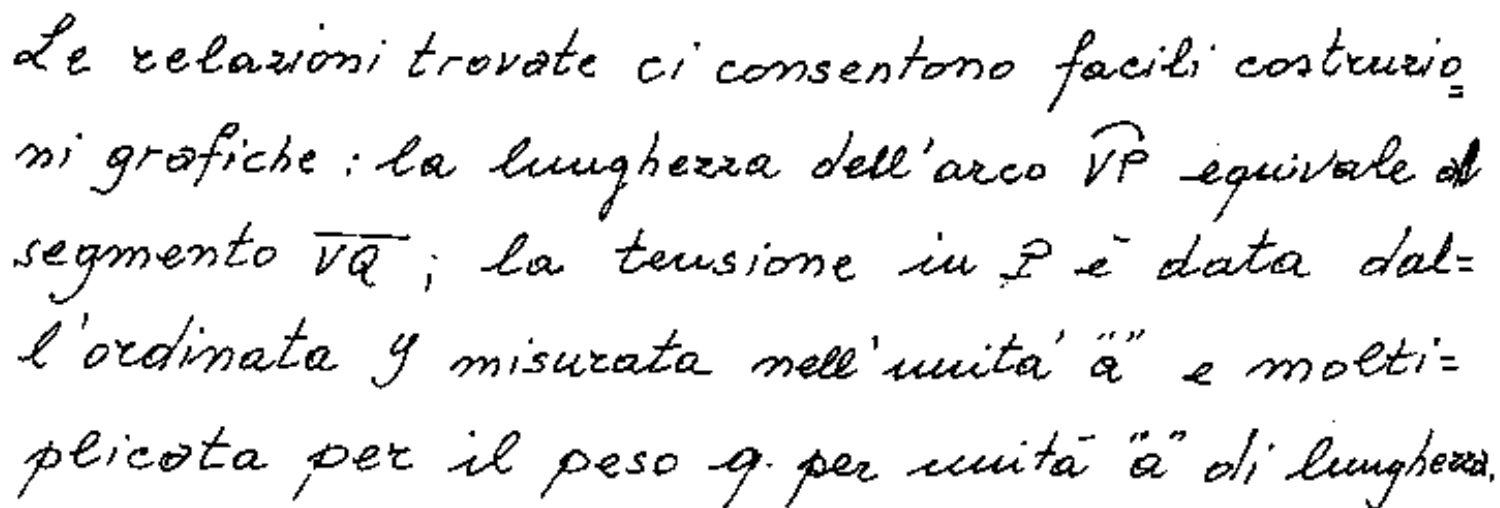
$$\frac{H^2}{q^2}\cosh^2\frac{x}{H/q} = s^2 + \frac{H^2}{q^2}$$

$$s^2 = \frac{H^2}{q^2}\left(\cosh^2\frac{x}{H/q} - 1\right) = \frac{H^2}{q^2}\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{H/q}\right)$$

$$\boxed{s = a\,\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

la lunghezza dell'arco di catenaria a partire dal vertice con modulo "a" è il seno iperbolico

porremo: $s = L/2$

Le relazioni trovate ci consentono facili costruzioni grafiche: la lunghezza dell'arco $\widehat{VP}$ equivale al segmento $\overline{VQ}$; la tensione in P è data dall'ordinata y misurata nell'unità "a" e moltiplicata per il peso q per unità "a" di lunghezza.

Catenarie simmetriche in y ed appoggi a livello orizzontale

Siano A e B i due vincoli di appoggio distanti l e sia lunga L (L > l) la fune appesa

in A, B. sia f la freccia; $\boxed{x_B = \frac{\ell}{2}}$; $\boxed{x_A = -\frac{\ell}{2}}$

$$y_A = y_B = a \cosh\left(\frac{\ell/2}{a}\right) \; ; \quad L = 2a \operatorname{senh}\left(\frac{\ell/2}{a}\right) \; ;$$

$$f = (y_B - a) = (y_B - H/q) = \frac{H}{q}\left[\cosh\left(\frac{\ell}{2H/q}\right) - 1\right]$$

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{\ell/2}{a}\right) = \frac{(L/2)^2}{a^2} \; ; \quad \cosh^2\left(\frac{\ell/2}{a}\right) = \left(\frac{f}{a} + 1\right)^2 ; \quad \text{sottraendo:}$$

$$\cosh^2\left(\frac{\ell/2}{a}\right) - \operatorname{senh}^2\left(\frac{\ell/2}{a}\right) = 1 = \left(\frac{f}{a} + 1\right)^2 - \left(\frac{L/2}{a}\right)^2 \text{ da cui:}$$

$$1 = \frac{f^2}{a^2} + \frac{2f}{a} + 1 - \frac{L^2}{4a^2} \quad ;$$

$$\frac{L^2}{4} = f^2 + 2af \qquad\qquad \boxed{a = \frac{L^2 - 4f^2}{8f}}$$

conoscendo la lunghezza della fune e la freccia abbiamo il modulo "a" della catenaria: $\left(a = \frac{H}{q}\right)$

la tensione al vertice: $\boxed{H = q\left(\frac{L^2 - 4f^2}{8f}\right)}$

Si noti che per $f = L/2$ si ha $H = 0$; e che f non può mai essere maggiore di $L/2$

$$y_B = \sqrt{a^2 + (L/2)^2} \quad ; \qquad \boxed{f = \sqrt{a^2 + (L/2)^2} - a}$$

Anche: "a" = 0 per $f = \frac{L}{2}$..

Ricaviamo la distanza fra gli appoggi:

$$\boxed{\frac{l}{2} = a \operatorname{argsenh}\left(\frac{L/2}{a}\right)} \qquad \boxed{\frac{L}{2a} = \operatorname{senh}\left(\frac{l}{2a}\right)}$$

$$\boxed{l = \left(\frac{L^2 - 4f^2}{4f}\right) \operatorname{argsenh}\left(L \frac{4f}{L^2 - 4f^2}\right)}$$

ove sono correlate solo grandezze geometri-che, indipendenti da "q" ed "H". da ciò la proprietà delle catenarie:

"Funi della stessa lunghezza, nelle stesse condizioni di vincolo assumono la stessa configurazione di equilibrio indipendentemente dal peso del materiale di cui sono costituite."

Vedi Vol II trigonometria iperbolica

$$\frac{l}{2a} = \operatorname{argsenh}\left(\frac{L}{2a}\right) = \ln\left[\frac{L}{2a} + \sqrt{\left(\frac{L}{2a}\right)^2 + 1}\right]$$

$$\boxed{\frac{l}{2a} = \ln\left[\frac{L}{2a} + \sqrt{\left(\frac{L}{2a}\right)^2 + 1}\right]}$$

$$\boxed{l = \left(\frac{L^2 - 4f^2}{4f}\right) \ln\left[\frac{4Lf}{L^2 - 4f^2} + \sqrt{\left(\frac{4Lf}{L^2 - 4f^2}\right)^2 + 1}\right]}$$

abbiamo visto:

$$a = \left(\frac{(L/2)^2}{2f} - \frac{f}{2}\right) \quad , \quad \frac{(L/2)^2}{f} = 2a + f = a + (a + f) = (a + y_B)$$

$$\text{ma: } y_B = \frac{T_B}{q} = \left(\frac{(L/2)^2}{f} - a\right) = \frac{(L/2)^2}{f} - \left(\frac{(L/2)^2}{2f} - \frac{f}{2}\right) = \left(\frac{(L/2)^2}{2f} + \frac{f}{2}\right)$$

$$\boxed{T_B = q\,\frac{L^2 + 4f^2}{8f}} = (q\,y_B)$$

Formula che fornisce la tensione agli appoggi

$$\frac{T_B}{H} = \left(q\,\frac{L^2 + 4f^2}{8f}\right)\left(\frac{(8f)}{(L^2 - 4f^2)\,q}\right) = \left(\frac{L^2 + 4f^2}{L^2 - 4f^2}\right)$$

$$\frac{T_B}{H} = \frac{(L/2)^2 + f^2}{(L/2)^2 - f^2}$$

$$\frac{[illegible]}{H} = \frac{[illegible]}{(L/2)^2 - f^2}$$

Solo se è nulla la freccia, la tensione al vertice uguaglia la tensione agli appoggi.

$$y_B = \frac{(L/2)^2 + f^2}{2f} \quad ; \quad a = (y_B - f)$$

I raggi di curvatura della catenaria.

Dall'analisi matematica: $R = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y' = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y'' = \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\left(\frac{y}{y''}\right) = (a^2) \quad ; \quad (y'' = y/a^2)$$

$$R = \frac{\left(1+\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{3/2}}{y/a^2} = \frac{\left(\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{3/2}}{y/a^2} = \frac{\left[\left(y/a\right)^2\right]^{3/2}}{y/a}$$

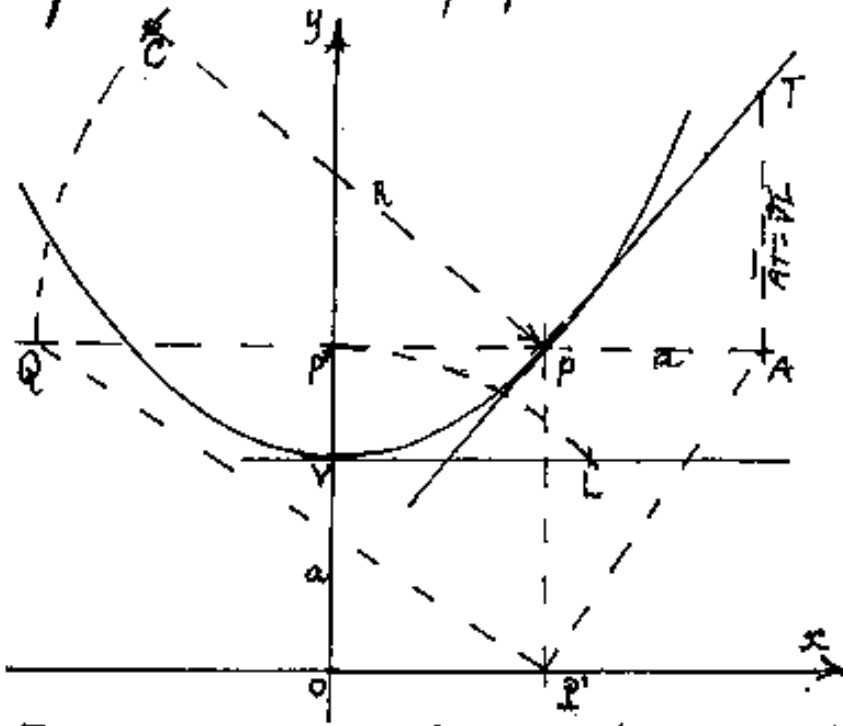
$$\boxed{R = \frac{y^2}{a}} \qquad \boxed{R = a\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$\boxed{R : y = y : a}$$

per $y = a$ (nel vertice della catenaria)

$$\boxed{R_0 = a}$$

Il fatto che l'ordinata sia media proporzionale fra a ed R, permette una facile costruzione.

gra ... permette una facile costruzione.

Sia P un punto di una catenaria di vertice V. Per P una orizzontale, centro in O e raggio $\overline{OP''}$ trovo L ove: $\overline{VL} = \widehat{VP}$, riporto $\overline{VL} = \overline{AT}$ (ove: $\overline{PA} = a$); $\overline{TP}$ e la tangente in P. Unisco $\overline{AP'}$, traccio la normale P'Q, centro in P e raggio $\overline{PQ}$ trovo il centro C di curvatura in P sulla normale a TP.

I rapporti fra gli elementi geometrici della Catenaria.

Il parametro "a" della catenaria, rappresenta l'unità di misura delle lunghezze, che, graficamente è la "distanza" fra il vertice della catenaria V e l'origine degli assi O; cioè $y_v = a$. Quindi nelle rappresentazioni grafiche della catenaria è implicita la scala.

$$\frac{s}{a} = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$$

$$\frac{L/2}{a} = \frac{L}{2a} = \operatorname{senh}\left(\frac{l/2}{a}\right) = \frac{e^{l/2a} - e^{-l/2a}}{2}$$

(lunghezza arco di catenaria)

$$\frac{y}{a} = \cosh\frac{x}{a} = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} \quad \text{(ordinata)}$$

$$\frac{f}{a} = \left[\cosh\left(\frac{l/2}{a}\right) - 1\right] = \operatorname{versh}\left(\frac{l/2}{a}\right) \quad \text{(freccia)}$$

Cioè ogni catenaria può essere rappresentata

ta da una unica formula: :

$$y = \cosh x$$

in generale:

$$\lambda = f(\theta)$$

ove le grandezze geometriche sono espresse nel=
l'unità di misura "a", variabile al variare

delle caratteristiche della catenaria.

Da queste osservazioni è possibile calcolare tutti gli elementi geometrici di una catenaria quando ne sono noti due.

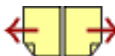
Dei tre elementi statici q; H; T; è possibile calcolare il rapporto; basta quindi l'ulteriore cognizione di uno dei tre elementi statici per determinare gli altri due.

Il peso della fune per unità di lunghezza: q (Kg/ml) moltiplicato per l'unità di lunghezza: a (ml); abbiamo visto: $q \cdot a = H$ (Kg/ml)(ml) = (Kg): H(Kg) è la tensione nel vertice della catenaria. Quindi H è la componente orizzontale della tensione T che è data da $T = qy$.

Il rapporto fra la lunghezza e la corda

$$\frac{L}{\ell} = \frac{L/2a}{\ell/2a} = \frac{\operatorname{senh}(\ell/2a)}{(\ell/2a)} =$$

$$\frac{\operatorname{senh}(x)}{x} = \text{rasenh}(x)$$

Ci ha suggerito un nuovo operatore che abbiamo rappresentato col simbolo "ra" prefisso alla funzione. (Vedi Vol I).

Il ra f(x) e il rapporto fra la funzione e l'argomento ra $f(x) = \frac{f(x)}{x}$, ma l'argomento può essere funzione di funzione, perciò deve essere evidenziato "l'argomento" cui si riferisce il "ra".

Consideriamo il rapporto:

$$\frac{L}{l} = \frac{L/2a}{l/2a} = \frac{\text{senh}(l/2a)}{(l/2a)} = \text{rasenh}(l/2a)$$

$$\left(\frac{l}{2a}\right) = \text{argrasenh}\left(\frac{L}{l}\right)$$

$$\boxed{a = \frac{l/2}{\text{argrasenh}(L/l)}}$$

quindi dalle tavole che riportano rasenh(X)

$\text{rasenh}(X) = (L/l) \rightarrow \text{argrasenh}[L/l] = X \rightarrow a = \frac{l/2}{X}$.

è possibile trovare "a" in funzione di L ed l

Se invece sono noti: f ed l

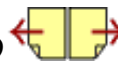
$$f/a = (\cosh(l/2a) - 1)$$

$$f/a = \text{versh}(l/2a)$$

$$\frac{f}{l/2} = \frac{f/a}{l/2a} = \frac{\cosh(l/2a) - 1}{(l/2a)} = \text{raversh}(l/2a)$$

$$\frac{l/2}{a} \qquad (l/2a)$$

$$a = \frac{l/2}{\text{argraversh}\left(\frac{2f}{l/2}\right)}$$

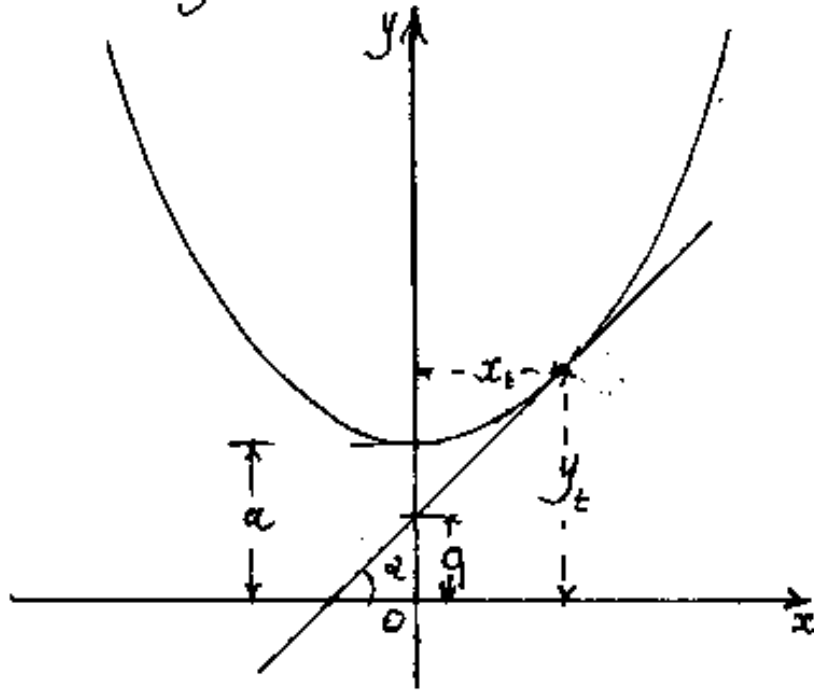
a in funzione di f e di l/2 e necessitano le tavole di: raversh(X).

Retta tangente alla catenaria

Supponiamo di voler determinare le coordinate del punto comune alla catenaria ed alla retta ad essa tangente ed inclinata di α rispetto all'asse x.

abbiamo:

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y' = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) = tg(\alpha)$$

$$x_t = a \cdot \operatorname{argsenh}(tg\alpha)$$

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{x_t}{a}\right) = tg^2(\alpha)$$

$$\cosh^2\left(\frac{x_t}{a}\right) - 1 = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\cosh^2\left(\frac{x_t}{a}\right) = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$y_t = \frac{a}{\cos\alpha}$$

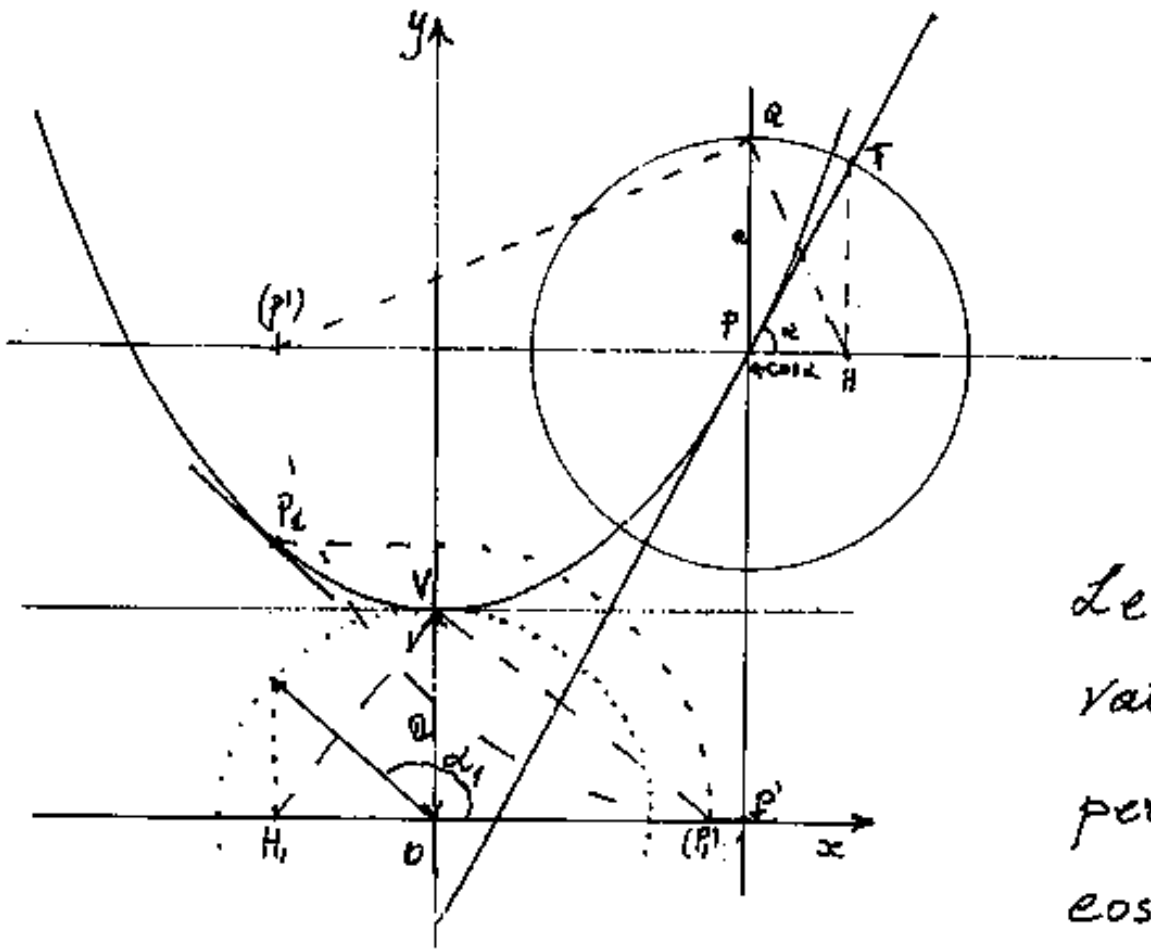
formula che fornisce immediatamente l'ordinata y_t del punto comune di tangenza in funzione del parametro a della catenaria e dell'inverso del coseno dell'angolo α della retta tan-

gente.

$$x_t = a \, \text{argsenh}(\text{tg}\,\alpha)$$

$$y_t = a/\cos\alpha$$

$$x_t = a \, \text{argcosh}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

$$\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Le relazioni trovate: ($y_p = \frac{a}{\cos\alpha}$) permettono oltre costruzioni grafi:

In particolare se vogliamo "la pendenza", ossia la retta tangente in un punto P della catenaria basta per quel punto tracciare un cerchio di raggio "a", riportare $y_p = \overline{P(P_1)}$ su un diametro orizzontale unire (P_1) con Q e da Q la perpendicolare a $\overline{Q(P_1)}$ che incontrerà in H il diametro orizzontale: $\overline{PH} = a\cos\alpha$; da H la verticale fino a T, e $\overline{TP}$ è sulla retta tangente in P.

Inversamente se vogliamo l'ordinata della catenaria

Inversamente se vogliamo l'ordinata della catenaria conoscendo α_1, si traccia in O il cerchio di raggio: "a", in O si riporta α_1, $\overline{OH_1} = a\cos(\alpha_1)$ unito H_1 con V la normale ad H_1V da V trova (P_1) ove $\overline{O(P_1)} = y_{P_1}$.

(Per altre costruzioni grafiche si vedano i volumi II, III, V, VI tramite indice enciclopedico).

Poiché la retta tangente ha per equazione:

$$y = \tan(\alpha) \cdot x + q$$

ricaviamo:

$$q = \frac{a}{\cos(\alpha)} - (tg\,\alpha)\, a \, \text{argsenh}(tg\,\alpha).$$

Fra tutte le rette tangenti alla catenaria, cerchiamo quella che passa per l'origine degli assi $(q=0)$ cioè:

$$1 = \text{sen}(\alpha_0)\, \text{argsenh}(tg\,\alpha_0)$$

$$\boxed{tg(\alpha_0) = \text{senh}\left(\frac{1}{\text{sen}\,\alpha_0}\right)}$$

Equazione ove:

$$\left(\frac{1}{\text{sen}\,\alpha_0}\right) = \boxed{1,199.678.640.2577\,33.833.916.369.848641\ldots}$$

$$e^{1/\text{sen}\,x} = 3,319050141$$

$$e^{-1/\text{sen}\,x} = 0,301291019$$

$$\frac{e^{1/\text{sen}\,x} - e^{-1/\text{sen}\,x}}{2} = \frac{3,017759122}{2} = \boxed{1,508879561537 = tg\,\alpha_0} = \text{senh}\left(\frac{1}{\text{sen}\,\alpha_0}\right)$$

$$\boxed{\alpha_0^{\circ} = 56^{\circ}\, 27'\, 57'',01}$$

$$\boxed{\alpha_{0\,1} = 0,985514737}$$

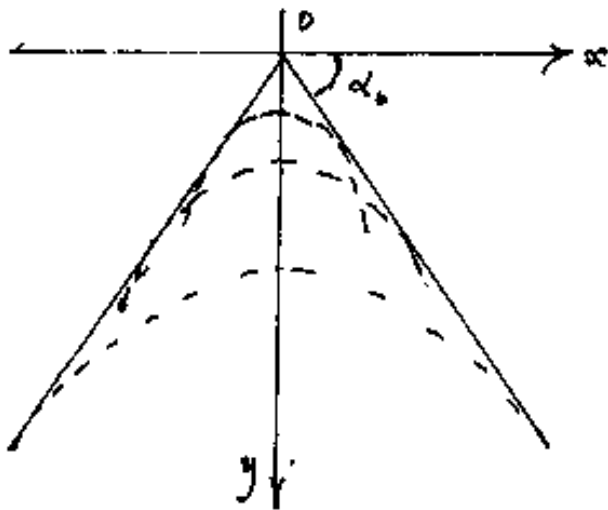
$$\alpha_{0_{rad}} = 0,98551473 7$$

Le coordinate del punto di tangenza.

$$y_{T_0} = a \sec.\alpha_0 = a(1,810170580699)$$

$$x_{t_0} = a \operatorname{cosec} \alpha_0 = a(1,199678640 2577)$$

Quindi la retta per l'origine con $(tg\,\alpha_0) = 1,50887956..$ è una retta limite, ogni retta con $\alpha < \alpha_0$, non taglierà mai catenarie qualunque sia "a".

Meglio: la coppia di rette $y = \pm tg(\alpha_0)\, x$, rappresenta il limite delle catenarie per "a" tendente a zero. Abbiamo disegnato catenarie compresse per evidenziare il comportamento statico di una parete.

(Cfr. Bollettino Ingegneri, n°2/3 anno 1977, "C. Brogi, su alcuni aspetti delle curve funicolari")

Rette per l'origine degli assi, secanti le catenarie.

Quando $\alpha < \alpha_0$ la retta taglia le catenarie ogni curva in due punti, le cui coordinate sono le radici del sistema:

$$\begin{cases} y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) \\ y = tg(\alpha)\, x \end{cases}$$

$$x \cdot tg(\alpha) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$x \cdot tg(\alpha) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\tan g\, \alpha = \frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(x/a\right)} = r a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\boxed{\tan g\, \alpha = r a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$x_c = a \cdot \operatorname{arg} r a \cosh(tg\alpha)$$

$$y_c = a \tan\alpha \operatorname{arg} r a \cosh(tg\alpha)$$

Esaminando i valori di "racosh(x)" riportati in tabella si rileva che la funzione ammette un minimo per $x = 1,19967864025773\ldots$ ove $racosh(x) = 1,508879561538 32..$ e ciò conferma che per valori di $tg\alpha < 1,5088795615\ldots$ non esistono soluzioni cioè non esistono rette che tagliano le catenarie.

Facciamo la derivata di racosh(x)

$$\frac{d\left(racosh(x)\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\cosh(x)}{x}\right)}{dx} = \frac{x \operatorname{senh} x - \cosh x}{x^2}$$

se poniamo = zero la derivata abbiamo:

$$\frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh} x} = x \qquad \coth(x) = x$$

$$\boxed{racoth(x) = 1}$$

dalle tavole di racoth(x)=1 abbiamo:

$$x = \operatorname{argracoth}(1) = 1,19967864025773\ldots$$

$$x = \text{argracoth}(1) = 1{,}19967864025773\ldots$$

La derivata di $\text{ra}f(x)$ in generale $= \text{ra}f'(x) - \text{rara}\,f(x)$ e se posta uguale a zero si ottiene il valore dell'argomento che l'annulla:

$$x = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

cioè:

$$\text{ra}f(x)/f'(x) = 1$$

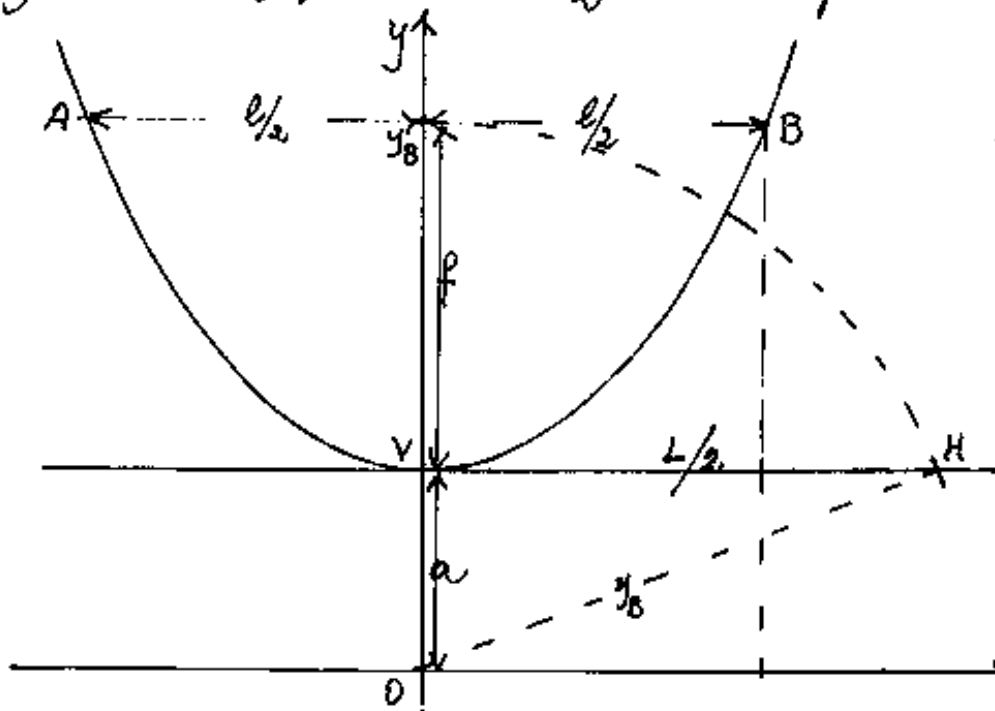
Relazioni fra gli elementi geometrici della Catenaria

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$ formula generale

poniamo:

$\widehat{AB} = L$

$\overline{AB} = \ell$

$\overline{VH} = L/2$

Ricordiamo

$\operatorname{senh}^2(x) + 1 = \cosh^2(x)$

$\cosh(x) - 1 = \operatorname{versh}(x)$

$$y = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + a^2} \qquad \text{(in funzione di } a, L\text{)}$$

$$y_B = (a + f) \qquad (\text{"} \quad a, f)$$

$$y_B = a\cosh\left(\frac{\ell/2}{a}\right) = a\sqrt{\operatorname{senh}^2\left(\frac{\ell/2}{a}\right) + 1} \qquad (\text{"} \quad a, \ell)$$

$$a = \sqrt{y_B^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + f^2 + 2af - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \qquad (\text{"} \quad y_B, L)$$

$$a = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - f^2}{2f} = \frac{L^2 - 4f^2}{8f} \qquad (\text{"} \quad f, L)$$

$$a = \frac{\ell/2}{\operatorname{arg\,raversh}(f/\ell/2)} \qquad (\text{"} \quad f, \ell)$$

$$a = \frac{\ell/2}{\operatorname{arg\,rasenh}(L/\ell)} \qquad (\text{"} \quad \ell, L)$$

$$f = a\left(\cosh\left(\frac{\ell/2}{a}\right) - 1\right) \qquad (\;'' \quad a,\ \ell)$$

$$f = \left[\left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}\right) - a\right] \qquad (\;'' \quad a,\ L)$$

$$f = \frac{-\left(\ell/2\right) + \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(L/2\right)^2 \left(\text{argrasenh}\left(L/\ell\right)\right)^2}}{\text{argrasenh}\left(L/\ell\right)} \qquad (\;'' \quad \ell,\ L)$$

$$L = 2\sqrt{f^2 + 2af} \qquad \text{(in funzione di } f,\ a)$$

$$L = 2a\ \text{senh}\left(\frac{l}{2a}\right) \qquad (\text{"} \quad \text{"} \quad l,\ a)$$

$$L = l\left(\text{rasenh}\left[\text{argraversh}\left(\frac{f}{l/2}\right)\right]\right) \qquad (\text{"} \quad \text{"} \quad f,\ l)$$

$$l = 2a\left[\text{argversh}\left(\frac{f}{a}\right)\right] \qquad (\text{"} \quad \text{"} \quad f,\ a)$$

$$l = 2a\left[\text{argsenh}\left(\frac{L}{2a}\right)\right] \qquad (\text{"} \quad \text{"} \quad L,\ a)$$

$$l = \frac{(L^2 - 4f^2)}{4f}\ \text{argsenh}\left[\frac{4fL}{L^2 - 4f^2}\right] \qquad (\text{"} \quad \text{"} \quad L,\ f)$$

alcuni casi particolari

	$a = 1$	$f = a$	$L/2 = a$	$l/2 = a$
a	1	f	$L/2$	$l/2$

a	1	f	$L/2$	$l/2$
f	$(\sqrt{1+(L/a)^2}-1)$ $(\cosh(l/a)-1)$	a	$(\sqrt{2}-1)\,a$	$0,543080635\,a$
$L/2$	$(\sqrt{f^2+2f})$ $(\operatorname{senh}(l/a))$	$\sqrt{3}\;a$	a	$1,175201194\,a$
$l/2$	$\operatorname{argsenh}(L/2)$	$1,316957897 \cdot a$	$0.881373587 \cdot a$	a
R	$R_0 = a$	$4\,a$	$2\,a$	$2,381097846\,a$

Relazioni fra gli elementi statici della Catenaria

T = tensione in un punto generico della catenaria

T_{max} = " agli attacchi

H = " nel vertice = componente orizzontale di T

P_{max} = peso dell'intera fune

$P/2$ = " del tratto di fune dal vertice all'attacco

q = peso per unità di lunghezza

$\ell/2$ = semicorda agli attacchi = ascissa max = x_{max}

$L/2$ = semilunghezza max.

a = distanza dal vertice dall'origine degli assi

a = unità grafica delle lunghezze.

$$a = \frac{H}{q} \quad \text{da cui:} \quad H = qa \; ; \quad q = \frac{H}{a}$$

$$T_{max} = q\sqrt{(L/2)^2 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{qL}{2}\right)^2 + H^2} = \sqrt{\left(\frac{P_{max}}{2}\right)^2 + H^2}$$

$$T_{max} = q(a + f) = (H + qf)$$

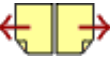
$$T_{max} = aq\sqrt{\operatorname{senh}^2\left(\frac{\ell}{2a}\right)^2 + 1} = H\sqrt{\operatorname{senh}^2\left(\frac{q\ell}{2H}\right) + 1}$$

$$T_{max} = aq\sqrt{\operatorname{senh}^2\left(\frac{\ell}{2a}\right)+1} = H\sqrt{\operatorname{senh}^2\left(\frac{q\ell}{2H}\right)+1}$$

$$T_{max} = aq\cosh\left(\frac{\ell/2}{a}\right) = H\cosh\left(\frac{q\ell/2}{H}\right)$$

$$T = q\cdot a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = H\cosh\left(\frac{qx}{H}\right) = qy; (x \text{ al posto di } \ell/2):$$

$$q = \frac{(T_{max} - H)}{f} = \frac{P_{max}}{L} = \frac{T}{y} = \frac{H}{a}$$

$$H = (T_{max} - qf) = \sqrt{T_{max}^2 - \left(\frac{P_{max}}{2}\right)^2} = \sqrt{T^2 - \left(\frac{P}{2}\right)^2}\ .$$

Ricordiamo:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^{x}} = (K) \quad ; \quad e^{2x} - 2Ke^{x} - 1 = 0$$

$$\operatorname{argsenh}(K) = \boxed{x = \ln\left|K + \sqrt{K^2+1}\right|}$$

cioè per $K = 1 \rightarrow x = \boxed{\ln|1+\sqrt{2}| = (0{,}881373587)}$

$$\operatorname{senh}(0{,}881373587) = 1$$

$$\left(\sqrt{1+\operatorname{senh}^2} = \cosh\right) ; \quad \cosh(0{,}881373587) = \sqrt{2}$$

$$\tanh(0{,}881373587) = 1/\sqrt{2}$$

$$\coth(0{,}881373587) = \sqrt{2}$$

per $K = \sqrt{3} \rightarrow x = \ln|\sqrt{3}+2| \rightarrow \operatorname{senh}(\ln|2+\sqrt{3}|) = \sqrt{3}$

per $K = \sqrt{n} \rightarrow x = \ln|\sqrt{n}+\sqrt{n+1}| \rightarrow \operatorname{senh}(\ln|\sqrt{n}+\sqrt{n+1}|) = \sqrt{n}$.

Abbiamo già dato le relazioni fra le curve osculatrici della catenaria, ed abbiamo visto (v. Vol V) che l'ellisse si approssima più delle altre coniche, cioè l'ellisse di semiassi: $(\sqrt{3})a$ in x, e $(3)a$ in y con centro in $y = 4a$, $x = 0$ cioè di equazione: $\frac{x^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$.

Nel V volume abbiamo dato anche una tavola di confronto con le curve osculatrici.

tecnica di confronto con le curve tracciate.

Prima, la mancanza del nostro operatore "ta", impediva l'esplicitazione di certe incognite e quindi per evitare risoluzioni per tentativi, si distinguevano due casi:

Le funzioni iperboliche inverse

Per comodità del lettore riportiamo un quadro delle funzioni iperboliche inverse, già esposte in altri volumi.

$$\cosh(x) = K \; ; \; \operatorname{argcosh}[K] = x = \ln\left|K \pm \sqrt{K^2-1}\right|$$

$$\operatorname{senh}(x) = K \; ; \; \operatorname{argsenh}[K] = x = \ln\left|K + \sqrt{K^2+1}\right|$$

$$\tanh(x) = K \; ; \; \operatorname{argtanh}[K] = x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\coth(x) = K \; ; \; \operatorname{argcoth}[K] = x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

$$\operatorname{versh}(x) = K \; ; \; \operatorname{argversh}[K] = x = \ln\left|(K+1) \pm \sqrt{K^2+2K}\right|$$

altre relazioni

$$\operatorname{argcosh}\left[T_{max}/H\right] = \frac{q}{H}\left(\frac{l}{2}\right) = \ln\left|\frac{T_{max}}{H} \pm \sqrt{\left(\frac{T_{max}}{H}\right)^2-1}\right|$$

$$\boxed{\operatorname{raversh}(x) = \operatorname{rasenh}^2(x/2)}$$ (Sansone) (infatti):

$$\left[\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1\right)\right/x = \left(\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{2}\right)^2 \Big/ \frac{x}{2} = \frac{\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)^2}{2x}$$

$$\frac{\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)^2}{2x}=\frac{e^{\frac{2x}{2}}+e^{-\frac{2x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{2x}=\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{2x}=$$

$$\left.\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}-1\right)\middle/x\right].$$

Da questa relazione, dividendo ambo i termini per $x/2$ abbiamo:

$$\frac{1}{(x/2)}\text{raversh}(x)=\frac{1}{(x/2)}\text{raseuh}^2\frac{x}{2}\;;\;\frac{2\cdot\text{raversh}(x)}{x}=\frac{\text{senh}\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\text{senh}\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}$$

cioè:

$$\boxed{\text{razaversh}(x)=\frac{1}{2}\left(\text{raseuh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

<u>funi molto tese</u> che venivano considerate a configurazione parabolica;

<u>funi poco tese</u> per le quali si specificano le formule della catenaria, ma, spesso risolte per tentativi. (Cfr. O. Belluzzi - Scienza delle Costruzioni Vol I, cap. 115, ed Zanichelli-Bologna).

Si noti che il Belluzzi non utilizza il parametro "a" = unità di misura delle lunghezze, ma senza ricordare che H (Kg) è la tensione nel vertice e q = Kg per unità di lunghezza: $aq = H$ per cui: $a = H/q$ (formula già nota), pone:

$$n = \frac{1}{8} = \frac{f}{l} = \frac{H}{ql}\left(\cosh\left(\frac{ql}{2H}\right) - 1\right)$$

formula che risolve per tentativi: $\frac{ql}{2H} = 0{,}4901$.

Noi poniamo: $\frac{f}{l/2} = \frac{\left(\cosh\left(\frac{l/2}{a}\right) - 1\right)}{\left(\frac{l/2}{a}\right)} = \text{raversh}\left(\frac{l/2}{a}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)2 = 0{,}25$

$$\frac{l}{2} = a\left(\text{argraversh}\left[0{,}25\right]\right)$$

$$\frac{l}{2} = a\left(\text{argcoseccsh}\left[0,25\right]\right)$$

$$l/2 = a\left(0,490110397\right)$$

$$L = 2a\,\text{senh}\left(0,490110397\right) = \left(1,09937667\right)a$$

$$L = \left(1,040518293\right)l.$$

$$qy_0 = S_{max} = qa\cosh\left(\frac{l}{2a}\right) = qa\left(1,1225276\right) = ql\left(1,145178315\right)$$

$$q\frac{H}{q} = ql\,\frac{1,145178315}{1,1225276} = \left(1,020178315\right)\cdot ql.$$

$\cosh\left(\frac{l/2}{a}\right) = \cosh\left(\frac{l/2}{H/q}\right) = \cosh\left(\frac{ql}{2H}\right)$; le espressioni sono equivalenti, però nella prima forma vediamo subito che : $l/2/a$ è un numero puro, cioè la lunghezza $l/2 = x$ è misurata nel segmento unitario "a" che va dall'origine degli assi al vertice del coseno iperbolico (catenaria).

(H = Kg = tensione nel vertice ; q = Kg/ml = peso per unità di lunghezza, $\left(\frac{l/2}{H/q}\right) = \frac{metri}{Kg/Kg/metri} = \frac{metri}{metri}$, un pó meno evidente).

$$freccia = (y_B - a) = f = a\left(\cosh\left(\frac{l/2}{a}\right) - 1\right) = a \,versh\left(\frac{l/2}{a}\right)$$

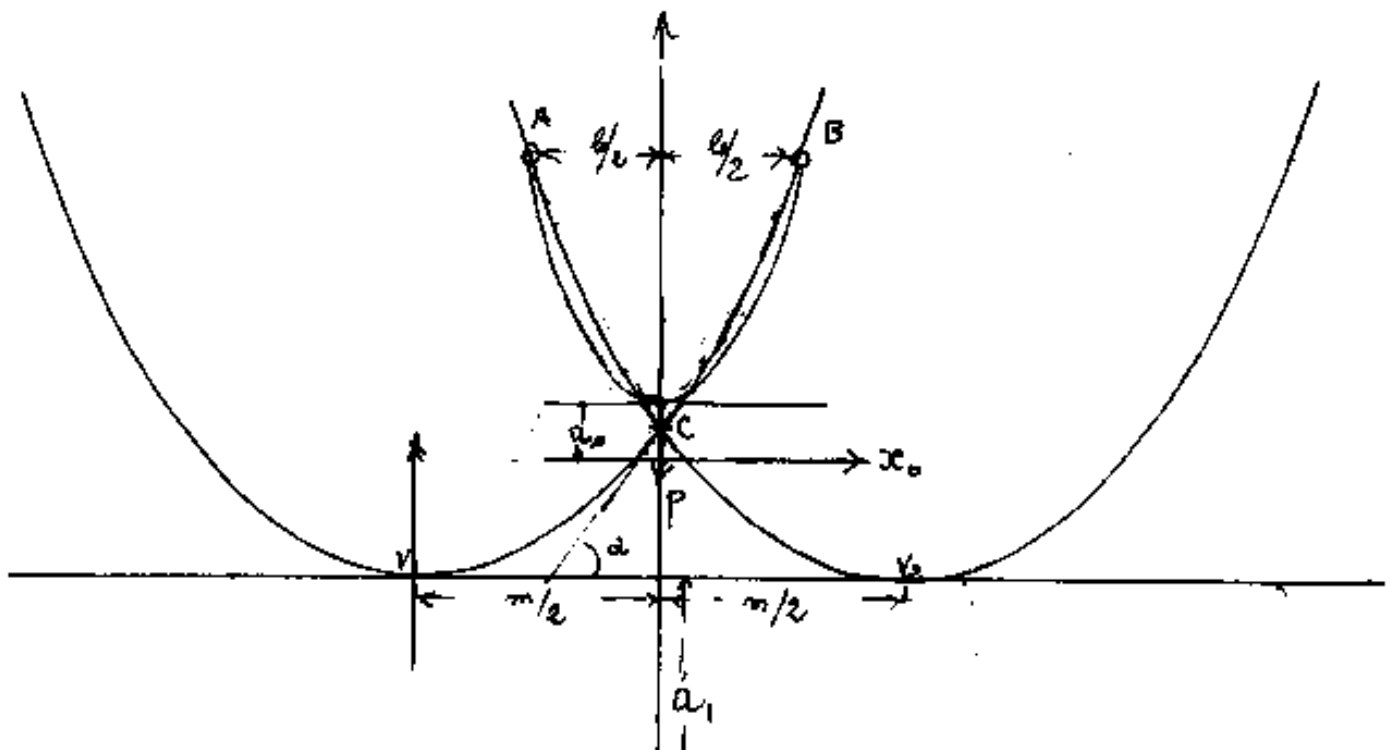
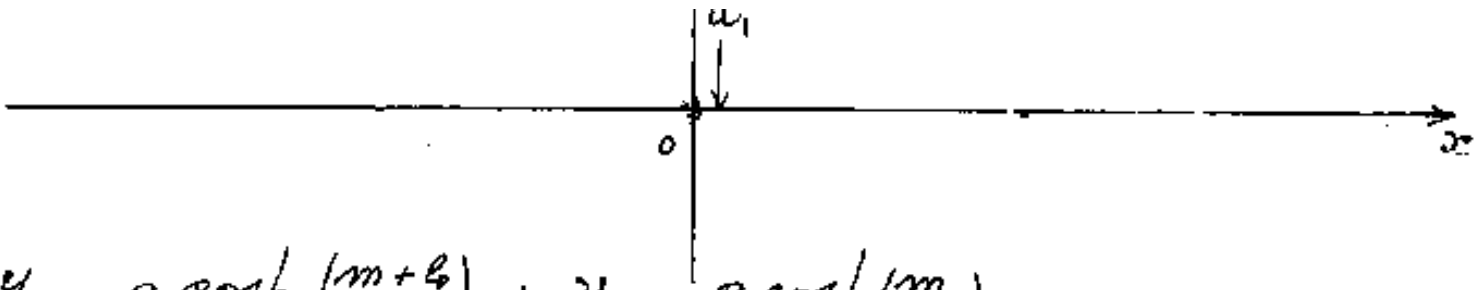
$$\frac{f}{l/2} = \frac{versh\left(\frac{l/2}{a}\right)}{(l/2/a)} = raversh\left(\frac{l/2}{a}\right)$$

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{2}\, raversh\left(\frac{l/2}{a}\right) \quad ; \quad \left(\frac{l/2}{a}\right) = argraversh\left(2\frac{f}{l}\right)$$

f/l (catenaria)	$l/2a$	$L/2a$ ($\operatorname{senh}(\frac{l/2}{a})$)	L/l	S_{max}/qa ($\cosh(l/2/a)$)
1/8	0,490110397	0,509968833	1,040518293	1,1225276
1/10	0,394843545	0,40518326	1,026186868	1,0789687
1/12	0,33031895	0,336358689	1,01828457	1,055053159

Catenarie traslate orizzontalmente

Il caso che stiamo per studiare, è la base per il calcolo dei cavi soggetti a carichi concentrati.

Consideriamo due catenarie aventi lo stesso modulo "a" e traslate, in modo che la distanza orizzontale dei vertici sia "m". e sia q il peso per unità di lunghezza dei cavi.

$$y_B = a_1 \cosh\left(\frac{m+l_0}{2a_1}\right) \; ; \; y_C = a_1 \cosh\left(\frac{m}{2a_1}\right)$$

$$\sqrt{y_B^2 - a_1^2} = a_1 \operatorname{senh}\left(\frac{m+l_0}{2a_1}\right) = \overset{\frown}{V_1 B} = \overset{\frown}{A V_2}$$

$$\sqrt{y_C^2 - a_1^2} = a_1 \operatorname{senh}\left(\frac{m}{2a_1}\right) = \overset{\frown}{V_1 C} = \overset{\frown}{C V_2}$$

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} = a_1\left(\operatorname{senh}\left(\frac{m+l_0}{2a_1}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{m}{2a_1}\right)\right) = \frac{L_0}{2} = a_0 \operatorname{senh}\left(\frac{l_0/2}{a_0}\right)$$

Da cui: $\frac{L_0}{l_0} = 2a\,\mathrm{senh}\frac{l_0/2}{a_0}$; $a_0 = \frac{l_0/2}{\mathrm{arg}\,2a\,\mathrm{senh}(l_0/2)}$

$y_{0B} = a_0 \cosh\left(\frac{l_0/2}{a_0}\right)$

con ciò abbiamo gli elementi per tracciare l'asse x_0 relativo alla catenaria lunga L_0 sospesa in A e B. Se alla Catenaria AV_0B si applica in V_0 un peso P pari ai due tratti $\widehat{C_1V_1}$ e $\widehat{CV_2}$, cioè:

$$P = 2qa_1\,\mathrm{senh}\left(\frac{m}{2a}\right)$$

la catena assume la configurazione ACB.
Infatti la tensione in C è data da

$$T_c = qy_c = qa_1\cosh\left(\frac{m}{2a_1}\right)$$

d'altra parte: $\mathrm{senh}\,\frac{m}{2a_1} = tg\,\alpha$; $\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{\mathrm{senh}\left(\frac{m}{2a_1}\right)}{\cosh\frac{m}{2a_1}}$

$$\frac{P_c}{2} = T_c\,\mathrm{sen}\,\alpha = qa\cosh\left(\frac{m}{2a_1}\right)\cdot\frac{\mathrm{senh}\left(\frac{m}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{m}{2a_1}\right)}$$

$$\underline{P = 2qa\,\mathrm{senh}\left(\frac{m}{2a_1}\right)}$$

Per fissare le idee facciamo il calcolo numerico dell'esempio in figura.

Siano in cui:

Siano in cui:

$a_1 = 2$; $m = 4.5$; $l_0 = 2.50$; q = peso Kg/cm.

$X_B = \frac{m + l}{2} = \frac{4,5 + 2,5}{2} = X_B = 3,5$; $X_C = \frac{m}{2} = \frac{4,5}{2} = 2,25$

$y_B = 2 \cosh\left(\frac{3,5}{2}\right) = 5,928376619$; $y_C = 2 \cosh\left(\frac{2,25}{2}\right) = 3,404869316$.

$$(y_B - y_C) = 2,523507303$$

$\widehat{V_1 B} = 2 \operatorname{senh}\left(\frac{3,5}{2}\right) = 5,580828733$; $\widehat{V_1 C} = 2 \operatorname{senh}\left(\frac{2,25}{2}\right) = 2,755564382$.

$$\widehat{V_1 B} - \widehat{V_1 C} = \boxed{2,82526435 = \widehat{CB}} = l_e$$

$$\frac{L_0}{l_0} = \frac{(2)\ 2,82526435}{2,50} = 2,260211481$$

Il modulo della catenaria AVB sia a_0

$$a_0 = \frac{l_0/2}{\text{argrasenh}\left(L_0/l_0\right)}$$

$$a_0 = \frac{2.5/2}{\text{argrasenh}\,(2,260211481)}$$

$$a_0 = \frac{1,25}{2,38720951} = \boxed{0,523623919 = a_0}$$

$$y_{0B} = a_0 \cosh\left(\frac{l_0/2}{a_0}\right) = 2,873377914.$$

$$L_0/2 = a_0 \,\text{senh}\left(\frac{l_0/2}{a_0}\right) = 2,82526346 = \widehat{CB} \quad \text{(torna)}$$

$$f_0 = (y_{0B} - a_0) = 2,349753995$$

$$(y_B - y_C) = 2,523507303$$

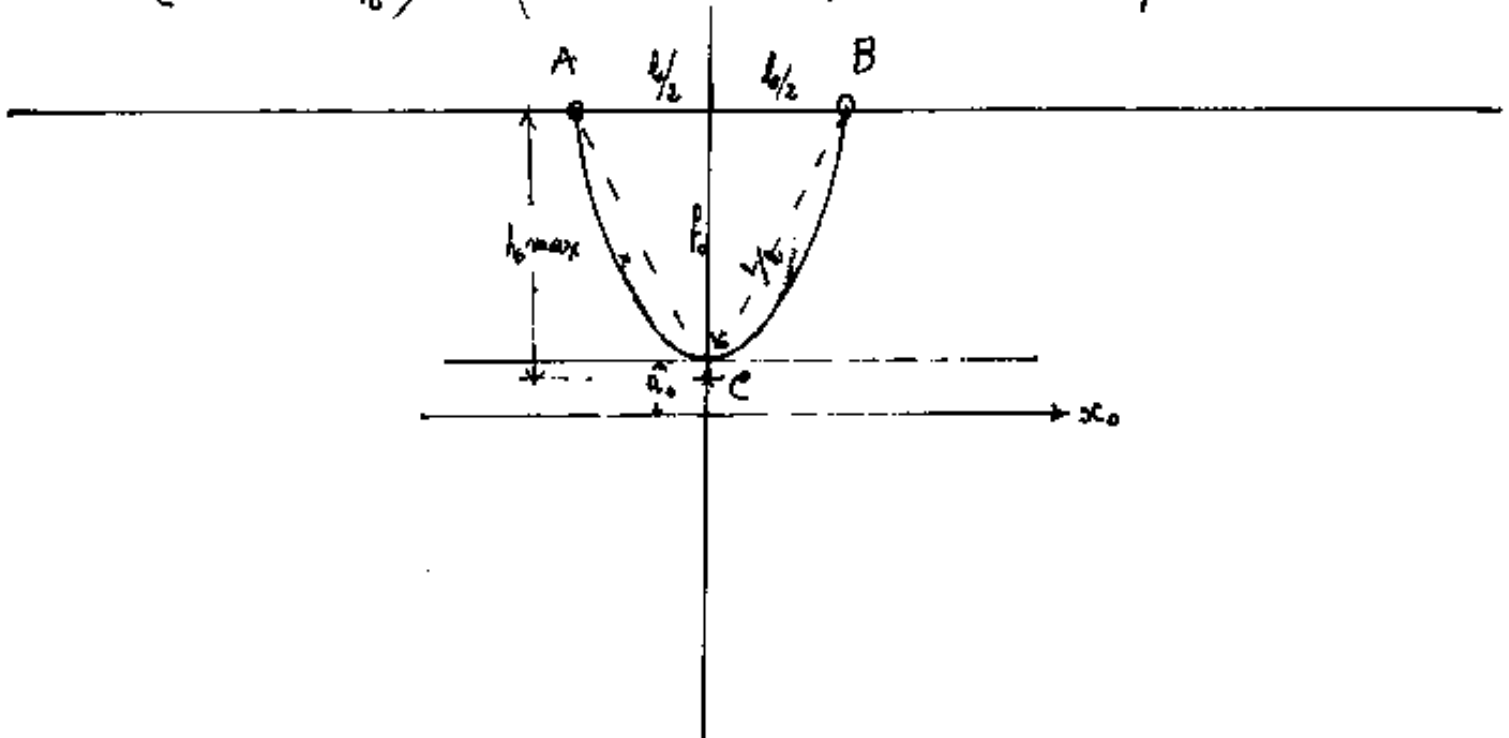
percorso di P da V_0 a C : $\overline{V_0C} = (y_B - y_C) - f_0$

percorso il Γ da V_0 a C : $V_0C = (y_B - y_C) - t_0$

$$\overline{V_0C} = 0,173753308$$

Supponiamo ora di porre sulla catenaria fissata in $\overline{AB} = \ell_0 = 2,5$ cm. ; lunga $L_0 = 5,650528702$ di modulo $a_0 = 0,523623919$; un peso $P_1 = nP_i$ equivale ad attaccare ad $L_0/2$ (tagliando la fune) due pezzi, uno per parte, lunghi : $\frac{nP}{2q} = \overset{\frown}{V_iC_i}$.

Il percorso V_0C non diverrà n volte tanto, infatti essendo $L_0/2 = 2,82526435$; $l_0/2 = 1,25$; per funi inestendibili la massima distanza di C da $\overline{AB}$ sarà: $h_{0max} = \sqrt{\left(\frac{L_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = 2,53369663$

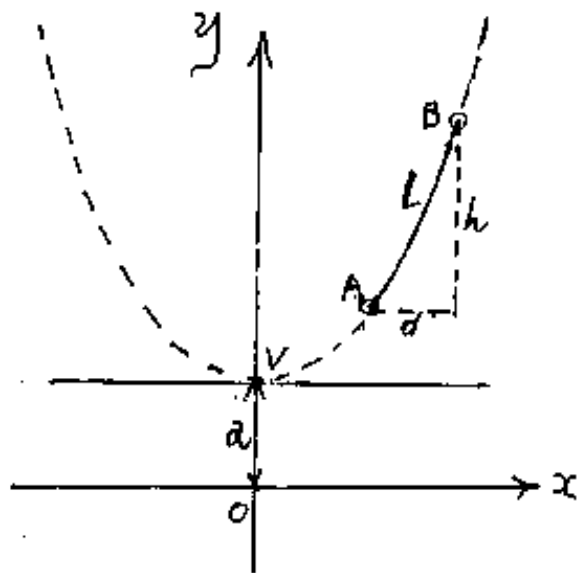
$(h_{0max} - f_0) = (0,183942641)$ massimo spostamento di P

Come si vede non v'è proporzione fra azione-peso e spostamento. In campo elastico per piccoli spostamenti si accetta valida la legge di Hooke, ed il lavoro compiuto vale: $\frac{1}{2}$(sollecitazione)·(deformazione). La deformazione nell'equili=

tazione)·(deformazione). La deformazione nell'equilibrio gravitazionale segue leggi diverse, (non lineari).

Supponiamo di aggiungere in V_0 un peso minore di $P = 2\,q \cdot \overline{V_1 C} = (2q)(2{,}755564382) = q(5{,}511128764)$ per esempio: $\frac{P}{2}$ cioè: $q(2{,}755564382)$ per cui $\overline{V_n C_n} = (1{,}37778219)$.

Dobbiamo calcolare il nuovo "a_n" ed il nuovo "m_n".

Archi di Catenarie fra punti a diverso livello

Nota la distanza orizzontale "d", ed il dislivello "h" fra due punti A e B, e la lunghezza "L_{AB}" del tratto di fune da appendere fra A e B, trovare il modulo "a" e la posizione degli assi di riferimento della catenaria passante per A e B. Poniamo: $L_{AB} = \ell$

$$(x_B - x_A) = d$$

$$(y_B - y_A) = h$$

$$\widehat{AB} = \ell$$

$$\widehat{VB} - \widehat{VA} = \ell$$

$$y_B = a\cosh(x_B/a) \quad ; \quad \widehat{VB} = a\,\mathrm{senh}(x_B/a)$$

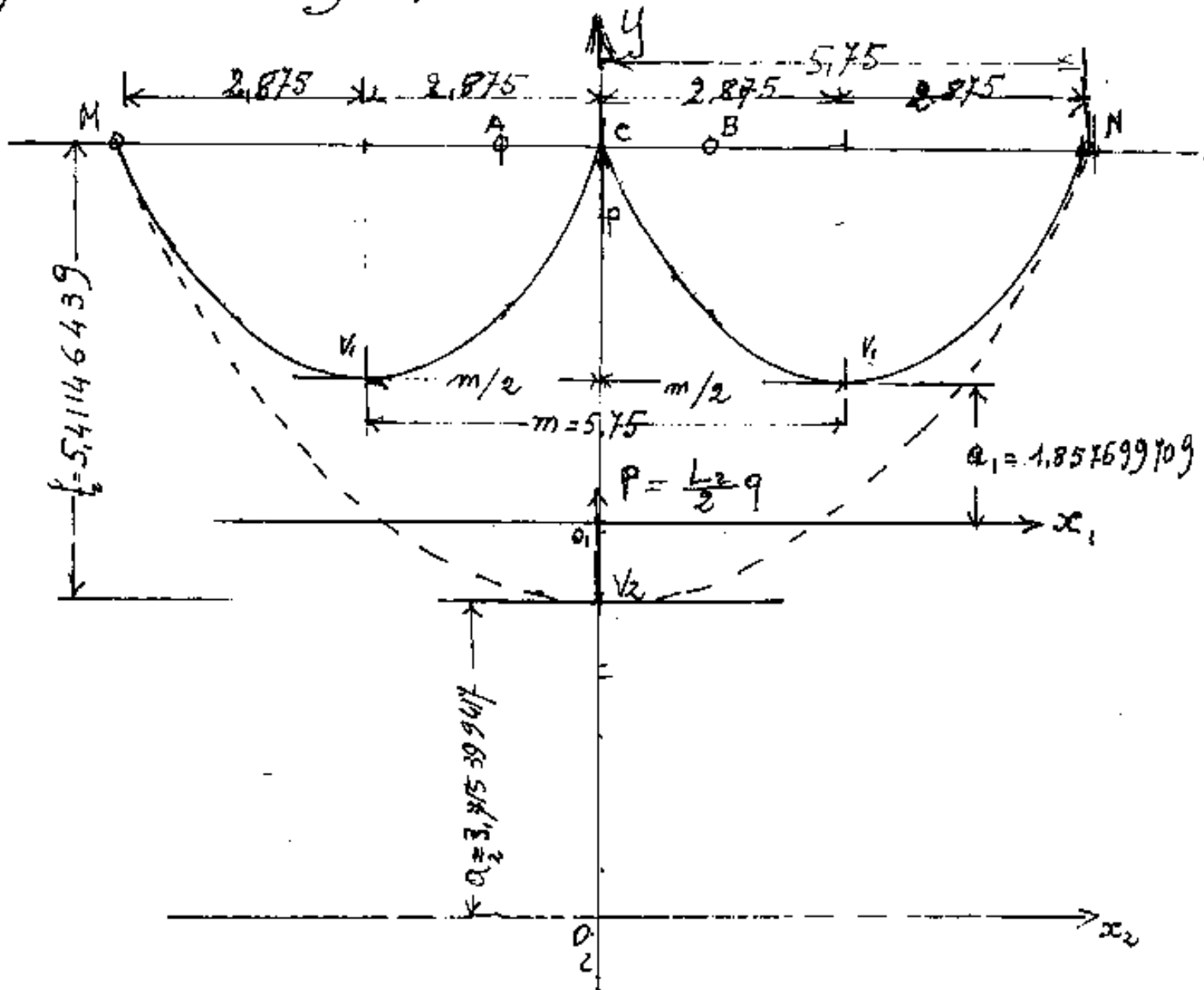
$$y_A = a\cosh(x_A/a) \quad ; \quad \widehat{VA} = a\,\mathrm{senh}(x_A/a)$$

sottraendo membro a membro, sostituendo e

sottraendo membro a membro, sostituendo e dividendo per a :

$$\left(\frac{h}{a}\right) = \cosh\left(\frac{x_A+d}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)$$
$$\left(\frac{l}{a}\right) = \operatorname{senh}\left(\frac{x_A+d}{a}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

elevando a quadrato i due membri delle due equazioni si ha :

facciamo il grafico:

Poiché: $a_2 = 3,715399417$ avremo: $a_1 = 1,857699709$

$$y_{1N} = a_1 \cosh \frac{\ell}{4 \cdot a_1} = 1,857619709 \cosh\left(\frac{3,5}{1,857619709}\right)$$

$$y_{1N} = 4,563431904$$

$$f_1 = (y_N - a) = 2,705732195$$

$$P = 2qa_1 \operatorname{senh}\left(\frac{2,875}{a_1}\right) \quad ; \quad \boxed{P = q(8,336393115)}$$

Se: $\overline{\tfrac{1}{2}C} \neq f_2$ si avrà che verso il basso non potrà superare: $\delta = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}M/2\right)^2 - (l/2)^2} - f^2 = \sqrt{8,336393115^2 - 5,75^2} - 5,41146439$

$\delta = 6,035971352 - 5,41146439 = 0,624506962$ (verso il basso)

$\delta = 6,035971352 + 5,41146439 = 11,44743574$ (verso l'alto)

Se anziché il carico P fosse dato lo spostamento del vertice V_2, cioè: $\overline{V_2C}$, si può ancora calcolare: a_1 ed $m/2$ che determinano le due catenarie affiancate.

Notiamo che la linea comune delle catenarie a_0, a_1, a_2 è: $\overline{MABN}$ alla quale è opportuno riferirsi.

$$\left(f_2 - \overline{V_2C}\right) = \left(y_{1N} - y_{1C}\right) = h = (\text{dislivello verticale})$$

$$a_2\left(\cosh\left(\frac{l/2}{a_2}\right) - 1\right) - \overline{V_2C} = \left(a_1\left[\cosh\left(\frac{\frac{l_2}{2} - \frac{m}{2}}{a_1}\right) - \cosh\left(\frac{m/2}{a_1}\right)\right]\right)$$

Se C raggiungesse la linea degli appoggi: $\overline{MABN}$ $(y_{1N} = y_{1C})$ per cui:

$$\boxed{\overline{V_2C} = f_2}$$

ed anche:

$$\cosh\left(\frac{(l_2 - m)/2}{a_1}\right) = \cosh\left(\frac{m/2}{a_1}\right)$$

$$\boxed{\frac{l_2}{2} = m}$$

$$a_1 \operatorname{senh}\left(\frac{m/2}{a_1}\right) = L_2/4 \quad ; \quad a_1 \operatorname{senh}\left(\frac{l_2/4}{a}\right) = L_2/4 \quad ; \quad 2a \operatorname{senh}\left(\frac{l_2}{4a_1}\right) = L_2/l_2$$

a_1 senh$\left(\frac{\ldots}{a_1}\right) = \ldots/4$; a_1 senh$\left(\frac{l/4}{a_1}\right) = l/4$; $2a$ senh$\left(\frac{l}{4a_1}\right) = l_2$

$\therefore \frac{l_2}{4a_1} = \text{arg}\,2a\,\text{senh}\left(\frac{l_2}{l_2}\right) = \frac{l_2}{2a_2}$ per cui: $\boxed{a_1 = a_2/2}$

Cosa implica $a_1 = \frac{a_2}{2}$, che le catenarie a_1 sono in scala doppia, cioè sono metà delle catenarie a_1.

Indice Enciclopedico Indice Pag. 383

$$\begin{cases} a_1 \,\text{senh}\left(\dfrac{m/2}{a_1}\right) = \widehat{CV_1} = 2{,}755564382 \\ a_1 \,\text{senh}\left(\dfrac{5{,}75 - m/2}{a_1}\right) = \widehat{V_1N} = 5{,}580828733 \end{cases}$$

Due equazioni nelle due incognite : $m/2$; a_1.

$$(m/2) = a_1 \,\text{argsenh}\left(\frac{\widehat{CV_1}}{a_1}\right)$$

$$\boxed{\text{senh}\left(\frac{5{,}75}{a_1} - \text{argsenh}\left(\frac{\widehat{CV_1}}{a_1}\right)\right) = \left(\frac{\widehat{V_1N}}{a_1}\right)}$$

Una equazione nell'incognita "a_1"

$$\text{senh}\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{\widehat{CV_1}}{a_1}\right)^2 + 1}\right) - \left(\frac{\widehat{CV_1}}{a_1}\right)\cosh\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) = \frac{\widehat{V_1N}}{a_1}$$

$$\left(\sqrt{(\widehat{CV_1})^2 + a_1^2}\right)\text{senh}\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) = \widehat{V_1N} + \left(\widehat{CV_1}\right)\cosh\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right)$$

elevando a quadrato

$$\left[(CV_1)^2 + a_1^2\right]\text{senh}^2\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) = (\widehat{V_1N})^2 + 2(\widehat{V_1N})(\widehat{CV_1})\cosh\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) + (\widehat{CV_1})^2\cosh^2\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right)$$

$$(\widehat{CV_1})^2\cosh^2\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) - (\widehat{CV_1})^2 + a_1^2\cosh^2\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) - a_1^2 =$$

$$= \widehat{CV_1}^2\cosh^2\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) + (\widehat{NV_1})^2 + 2(\widehat{NV_1})(\widehat{CV_1})\cosh\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right)$$

$$a_1^2 \cosh^2\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) - 2(\widehat{NV_1})(\widehat{CV_1})\cosh\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) - \left(\widehat{CV_1}^2 + \widehat{NV_1}^2 + a_1^2\right) = 0$$

$$\cosh^2\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) - 2\,\frac{(NV_1)(CV_1)}{a_1^2}\cosh\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) - \left(\left(\frac{CV_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{NV_1}{a_1}\right)^2 + 1\right) = 0$$

$$\cosh^2\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) - \frac{30{,}75666576}{a_1^2}\cosh\left(\frac{5{,}75}{a_1}\right) - \frac{38{,}7387844}{a_1^2} - 1 = 0$$

risolta col computer (Derive): $\boxed{a_1 = 2}$ (cioè per tentativi).

$$\frac{m}{2} = 2\,\text{argsenh}\left(\frac{2{,}755564382}{2}\right) = 2{,}25$$

$\boxed{m = 4{,}5}$

Per avere una facile verifica anche numerica, consideriamo data la catenaria: $M\widehat{V_2}N = L_2$

$L_2 = 2(8,336393115) = 16,67278623$; (noto (9))

$l_2 = \overline{MN} = 2(5,75) = 11,5$

da cui: $a_2 = 3,715399417$; $\frac{f}{2} = 5,41146439$; $y_{2N} = 9,126863808$

Caricato nel vertice con un carico verso l'alto

$P = q(2\widehat{V_2C}) = 2q(2,75564382) = P = q(5,51128764)$,

abbiamo calcolare le caratteristiche delle due catenarie di modulo "a_1" (incognita), traslate di "m" (incognita).

Osserviamo:

1) Per la simmetria del vertice V_2 giacente su y P giacerà su y ed i vertici V_1 avranno per ascissa $\overline{xV_1} = \pm m/2$

2) La componente orizzontale della tensione in un punto della catenaria è costante ed è pari ad H = tensione nel vertice; perciò, la

componente verticale sarà il peso del tratto cavo che va da quel punto al vertice.

Perciò: $\widehat{CV_1} = \frac{P}{2q} \simeq 2{,}755564382 = a_1 \operatorname{senh}\left(\frac{m/2}{a_1}\right);$

$$L_{1/2} = \widehat{V_1N} = \frac{L}{2} - \widehat{CV_1} \simeq 8{,}336393115 - 2{,}755564382 = 5{,}580828733$$

$$l_{1/2} = \frac{l_2}{2} - \frac{m}{2} = \left(5{,}75 - m/2\right)$$

$$y_{1C} = a_1 \cosh\left(\frac{m/2}{a_1}\right);$$

La catenaria MV_2N che vogliamo calcolare è lunga $L_2 = 2(\widehat{MV_1} + \widehat{V_1C}) = 2(V_1B + V_1C) = 2(5{,}580828733 + 2{,}755564382)$

$$L_2 = 2(8{,}336393115) = 16{,}67278623$$

$$\overline{MN} = l_2 = 11{,}5 = \boxed{l_2 = 2(5{,}75)}$$

$$\left(L_2/l_2\right) = 1{,}449807498$$

$$a_2 = \frac{l_2/2}{\text{argsenh}(L_2/l_2)} = \frac{5{,}75}{\text{argsenh}(1{,}449807498)} = \frac{5{,}75}{1{,}547612882212}$$

$$\boxed{a_2 = 3{,}715399417}$$

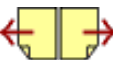
Con ciò la catenaria MV_2N è completamente definita:

$$y_{2N} = a_2 \cosh\left(\frac{l_2/2}{a_2}\right) = 9{,}126863808$$

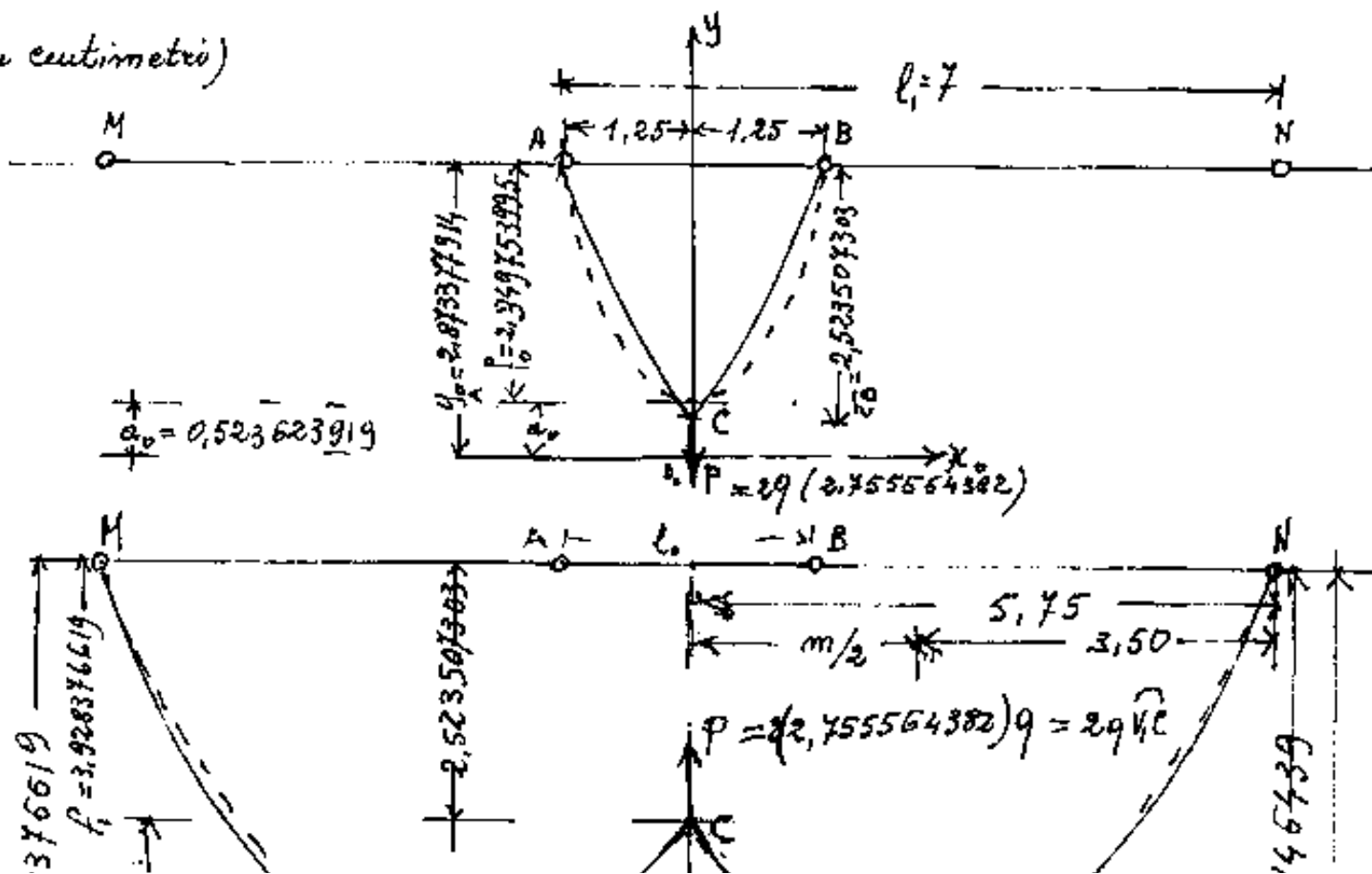
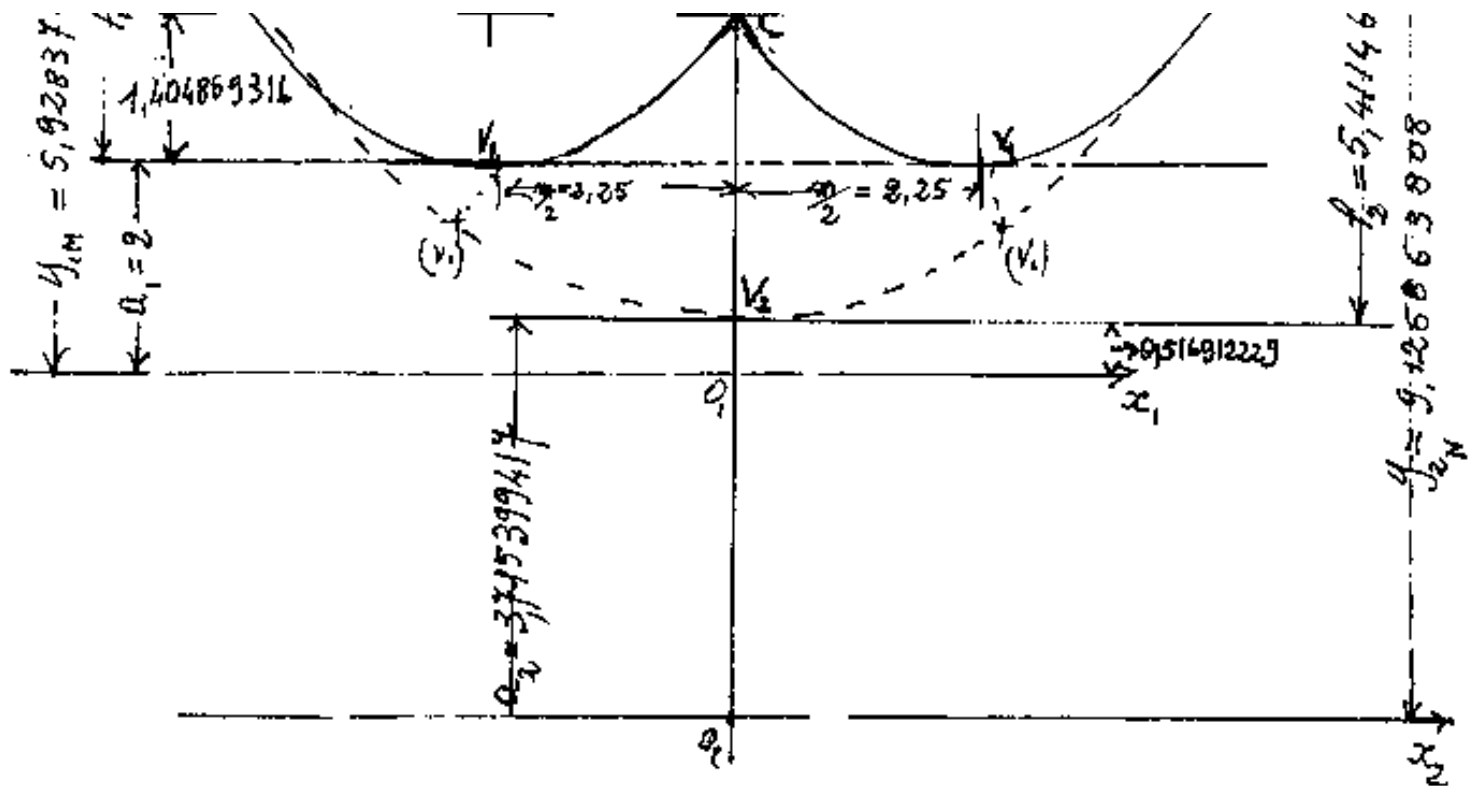
$$f_2 = (y_{2N} - a_2) = 5{,}4114639$$

Interessa il procedimento inverso, cioè data una catenaria (cavo sospeso a livello orizzale)

lo carichiamo nel vertice, oppure spostiamo il vertice di un tratto verticale noto, trovare l'equazione e la traslazione delle due catenarie che sovrappongono la catenaria deformata dopo l'applicazione del carico.

Procediamo per gradi per arrivare al calcolo di cavi con carichi comunque diretti.

Quindi il punto comune C di due catenarie uguali traslate orizzontalmente di m, è un punto che unisce altre due catenarie soggette al carico $P_1 = 2q \cdot a_1 \operatorname{senh}\left(\frac{m}{a_1}\right) = 2q\,\widehat{V_1C}$, cioé pari ai tratti delle due catenarie, che vanno dai vertici "V_1" a "C" moltiplicati per il peso per unità di lunghezza (q Kg/cm.). Abbiamo già calcolato la catenaria $A\widehat{V_0}B$ di modulo a_0 ove $\overline{AB} = l_0$, vogliamo calcolare la catenaria inferiore: $M\widehat{V_2}N$ di modulo a_2, col peso P.

(in centimetri)

1,404869316
$y_{1M} = 5,9283 f_1$
$a_1 = 2$
V_1
V_2
C
$a/2 = 8,25$
(V_1)
O_1
x_1
0,516812229
$a_2 = 3,7153994 f$
O_2
x_2
$f_2 = 5,41146$
$y_{2M} = 9,1256563808$

Per l'equilibrio in C si può pensare che se fissiamo in M ed N le due catenarie e togliamo la catenaria ACB, l'azione di sostegno di ACB può essere riferita all'azione P o P/2 rivolta verso l'alto. cioè se consideriamo una fune lunga: $2(VC + CB + VC) = 4VC + 2CB$ appesa ad M ed N, ove $\overline{MN} = (2m + l)$; avremo:

$$(4V_1C_m + 2C_mB_m) = L_e = 4(1,37778219) + 2(2,82526435) = 11,16165746$$

$$(2m + l) = l_e = (2(2,396413596) + 2,5) = 7,292827192$$

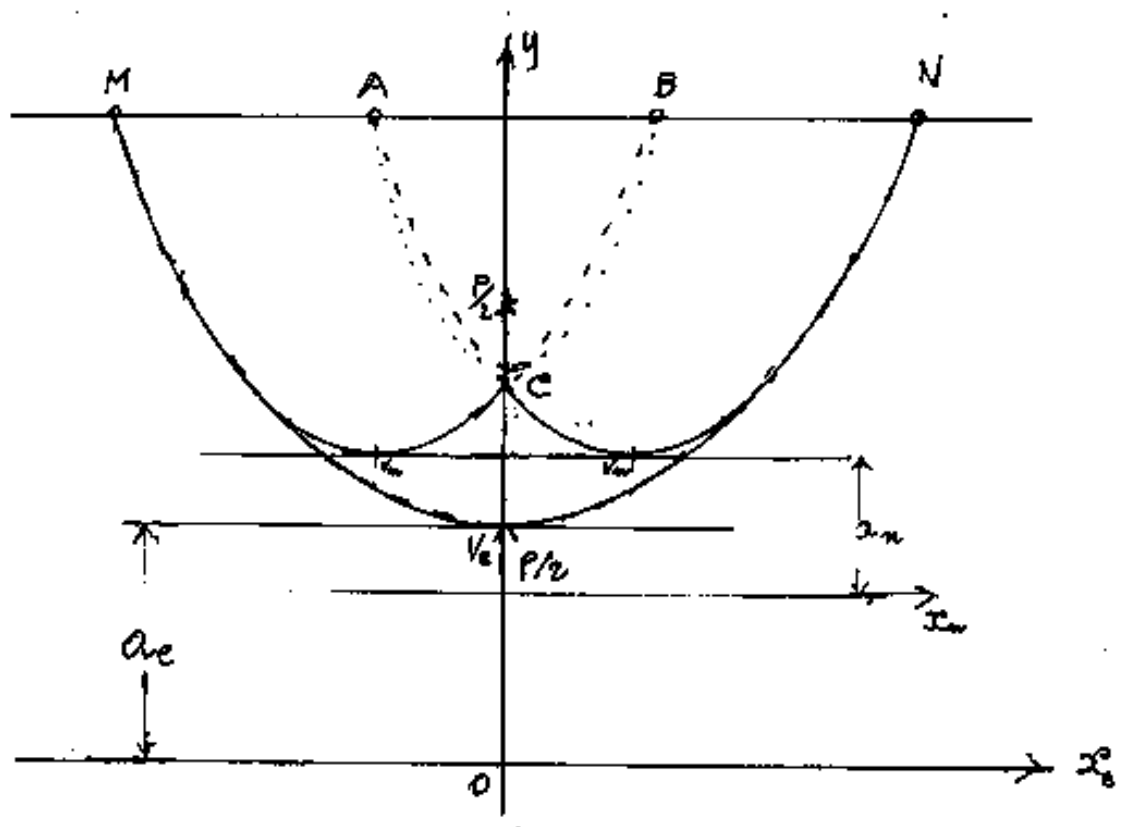
$$\frac{L_e}{l_e} = \frac{11,16165746}{7,292827192} = 1,530498004$$

$$a_e = \frac{l_e/2}{\text{argrasenh}(L_e/l_e)} = \frac{7,292827192/2}{\text{argrasenh}(1,530498004)} = \frac{3,646413596}{1,665031385}$$

$$\boxed{a_e = 2,189996915}$$

$$y_N = a_e \cosh\left(\frac{l_e/2}{a_e}\right) = 2,189996915 \cosh\left(\frac{3,646413596}{2,189996915}\right)$$

$$y_N = \underline{5,995142684}$$

$y_N = 5,730142604$

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 = \cosh^2\left(\frac{x_A+d}{a}\right) + \cosh^2\left(\frac{x_A}{a}\right) - 2\cosh\left(\frac{x_A+d}{a}\right)\cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

$$\left(\frac{\ell}{a}\right)^2 = \operatorname{senh}^2\left(\frac{x_A+d}{a}\right) + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x_A}{a}\right) - 2\operatorname{senh}\left(\frac{x_A+d}{a}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

Sottraendo membro a membro e ricordando che: $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$;

che: $(\cosh\alpha\cos\beta - \operatorname{senh}\alpha\operatorname{senh}\beta) = \cosh(\alpha-\beta)$

avremo:

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\frac{\ell}{a}\right)^2 = 1 + 1 \div 2\cosh\left(\frac{x_A+d}{a} - \frac{x_A}{a}\right)$$

semplificando e dividendo per (-2) :

$$\boxed{\left(\frac{\ell^2-h^2}{2a^2}\right) = \cosh\left(\frac{d}{a}\right) - 1} = \boxed{\operatorname{versh}\left(\frac{d}{a}\right)}$$

dividendo per d/a abbiamo:

$$\boxed{\left(\frac{\ell^2-h^2}{2ad}\right) = \operatorname{raversh}\left(\frac{d}{a}\right)}$$

dividendo ancora per $\left(\frac{d}{a}\right)$:

dividendo ancora per $\left(\frac{a}{a}\right)$:

$$\left(\frac{l^2-h^2}{2d^2}\right) = \text{raraversh}\left(\frac{d}{a}\right)$$

ricordando che: $\text{raraversh}(x) = \frac{1}{2}\left(\text{rasenh}\,\frac{x}{2}\right)^2$

formula che abbiamo dimostrato al paragrafo "altre relazioni" del capitolo: "Relazioni fra gli elementi statici della catenaria", abbiamo:

$$\frac{l^2-h^2}{2d^2} = \frac{1}{2}\left(\text{rasenh}\left(\frac{d}{2a}\right)\right)^2,$$

cioè: $\sqrt{\frac{\ell^2 - h^2}{d^2}} = \text{rasenh}\,\frac{d}{2a}$

$$a = \frac{d}{2\,\text{argrasenh}\left(\sqrt{\frac{\ell^2 - h^2}{d^2}}\right)}$$

<u>Importantissima relazione che esplicita il modulo "a" della catenaria cercata in</u> funzione dei tre elementi noti: ℓ, d, h; che, con le tavole di rasenh(x), è di risoluzione immediata.

Se sviluppiamo il sistema delle due equazioni iniziali si ha:

$$\left(\frac{h}{a}\right) = \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)\cosh\left(\frac{d}{a}\right) + \text{senh}\left(\frac{x_A}{a}\right)\text{senh}\left(\frac{d}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

$$\frac{\ell}{a} = \text{senh}\left(\frac{x_A}{a}\right)\cosh\left(\frac{d}{a}\right) + \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)\text{senh}\left(\frac{d}{a}\right) - \text{senh}\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

<u>sottraendo</u> membro a membro, si ha:

$$\left(\frac{\ell - h}{a}\right) = \left[\cosh\left(\frac{x_A}{a}\right) - \text{senh}\left(\frac{x_A}{a}\right)\right]\left[\text{senh}\left(\frac{d}{a}\right) - \cosh\left(\frac{d}{a}\right) + 1\right]$$

ricordando che:

$$\cosh(u) - \text{senh}(u) = e^{-u}$$

$$\cosh(u) - \operatorname{senh}(u) = e^{u}$$

$$\left(\frac{l-h}{a}\right) = \left(e^{-x_A/a}\right)\left(1 - e^{-d/a}\right)$$

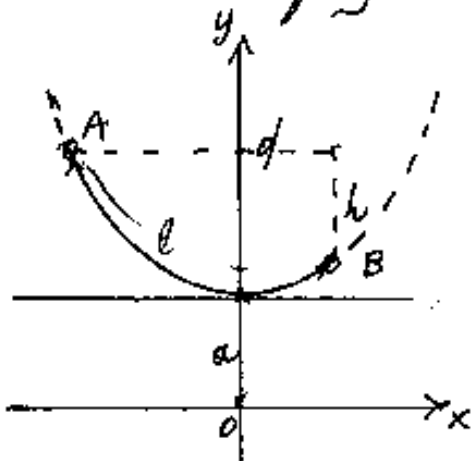
da cui:

$$x_A = a \ln\left[\left(\frac{a}{l-h}\right)\left(1 - e^{-d/a}\right)\right]$$

$$y_A = a \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

$$x_B = (x_A + d)$$
$$y_B = (y_A + h)$$

Attenzione!

Occorre fare molta attenzione ai segni di h
Noi consideriamo positivi i versi degli assi x ed y
quindi in figura abbiamo A e B nel I quadrante
e quindi, essendo A più in basso, h è positiva.
Ma se la figura fosse stata come quella a
fianco h deve prendersi
negativa essendo B a quota
inferiore. Il tratto $\widehat{AB} = \ell$ deve
considerarsi da sinistra a
destra.

Un'altra osservazione importante è sull'espres-
sione $\sqrt{\ell^2 - h^2}$ ...

sione: $\sqrt{\frac{l^2-h^2}{d^2}}$ infatti: per la realtà delle radici: $(l>h)$ è condizione necessaria ma non sufficiente per determinare il modulo "a" della catenaria infatti non esistono argrasenh $\sqrt{\frac{l^2-h^2}{d^2}}$ per valori minori di uno (1) quando $l^2-h^2=d^2$ si ha che l è l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti "d" ed "h", che non può avere ipotenuse minori.

La condizione : $\sqrt{\frac{\ell^2 - h^2}{d^2}} = 1$ porta alla:

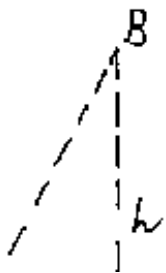
$$a = \frac{d/2}{\text{argrasenh}(1)} = \frac{d/2}{0} = \infty$$

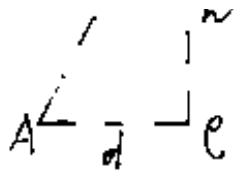
$$a = \infty$$

(Ricordando che nella catenaria la massima curvatura, cioè il raggio minimo, è nel vertice, e che il raggio nel vertice: $R_v = a$; se $R_v = \infty$ la catenaria è degenerata in una retta)

Da ciò ne consegue che affinché il tratto $\widehat{AC}$ sia ancora il tratto di una catenaria dovrà essere:

$$\left(\ell^2 - h^2\right) > d^2$$

Basta pensare ad un triangolo rettangolo di cateti "d" ed "h" come ACB in figura, $\overline{AB}$ per incurvarsi deve essere: $\widehat{AB} > \overline{AB} = \sqrt{h^2 + d^2}$

equivale: $\ell^2 > h^2 + d^2$

A d e

equivale: $\ell^2 > h^2 + d^2$

od anche:

$$(\ell^2 - h^2) > d^2.$$

Facciamo alcuni esempi numerici, per chiarire meglio quanto esposto.

Prima di tutto risolviamo il caso lasciato in sospeso nel capitolo precedente.

Data la catenaria:

$$a_2 = 3{,}715399417. \qquad (\text{modulo})$$

$$l_2/2 = 5{,}75 = (\overline{VB_2'}) = \text{distanza orizzontale}$$

$$f_2 = 5{,}41146439$$

Il vertice V_2 viene sollevato di $\overline{V_2C} \neq f_2$ ($\overline{V_2C} = f_2$ era un caso particolare che abbiamo risolto). Avevamo calcolato i limiti:

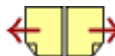
$$-0{,}624506962 \leq \overline{V_2C} \leq 11{,}44743574$$

e, nell'esercizio precedente, sulla intersezione di due catenarie, avevamo determinato l'equilibrio in C con un carico verticale in V_2 sulla catenaria MV_2N, e lo spostamento $\overline{V_2C}$:

$$\overline{V_2C} = (5{,}41146439 - 2{,}523507303)$$

$$\overline{V_2C} = 2{,}887957087$$

Assumeremo questo spostamento generico per verificare i calcoli.

Usando la terminologia delle formule ora trovate, abbiamo: $d = 5,75$; $h = 2,523507303$

la lunghezza $\widehat{CV_1} + \widehat{V_1N} = (2,755564382 + 5,580828733) =$ ora indicata semplicemente con $\ell = 8,336393115$

$$a_1 = \frac{d/2}{\operatorname{argrasenh}\sqrt{\frac{\ell^2 - h^2}{d^2}}} = \frac{5,75/2}{\operatorname{argrasenh}\sqrt{\frac{(8,336393115)^2 - (2,523507303)^2}{(5,75)^2}}}$$

$$a_1 = \frac{5,75/2}{\text{argcosh}(1,381786587)}$$

$$a_1 = \frac{2,875}{1,4375} = 2$$

Torna esattamente il modulo delle due catenarie traslate.

$$x_A = a \ln \left| \left(\frac{a}{(\ell - \lambda)}\right)\left(1 - e^{-d/a}\right) \right|$$ (relativo all'asse della catenaria)

$$e^{-d/a} = e^{-\frac{5,75}{2}} = e^{-2,875} = 1/17,72542412 =$$

$$\left(1 - e^{-d/a}\right) = \left(1 - 0,05641613 9\right) = 0,94358386$$

$$\frac{2}{(\ell - \lambda)} = \frac{2}{(8,336393115) - (2,523507303)} = \frac{2}{5,812885812} =$$

$$= 0,344063183$$

$$x_A = 2 \ln \left| (0,344063183)(0,94358386) \right| = 2 \ln \left| 0,32465246 7 \right|$$

$$\begin{cases} X_A = -2,25 = X_e & \text{(relativo all'asse della catenaria)} \\ y_A = 3,404869317 = y_e \end{cases}$$

$$x_B = -2,25 + 5,75 = X_N = +3,5$$

$$y_B = 3,404869317 + 2,523507303 = y_N = \underline{5,92837662}$$

Valori noti che verificano il procedimento.

Altri esempi numerici

Al fine di sperimentare i risultati prendiamo dati molto semplici:

$$(x_B - x_A) = d = \text{cm. } 30 -$$

$$(y_B - y_A) = h = \text{cm. } 40 -$$

$$\overset{\frown}{AB} = l = \text{cm } 60 -$$

$$\sqrt{\frac{l^2 - h^2}{d^2}} = \sqrt{\frac{60^2 - 40^2}{30^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{5} = \underline{1,490711985}$$

$$\text{argrasenh}(1,490711985) = 1,60872373657$$

$$\underline{a} = \frac{d}{2\,\text{argrasenh}\sqrt{\frac{l^2 - h^2}{2}}} = \frac{30}{2(1,60872373\,6)} = \underline{9,324161548}$$

$$x_A = a \ln\left|\left(\frac{a}{l - h}\right)\left(1 - e^{-d/a}\right)\right|$$

$$x_A = 9,324161548 \cdot \ln\left|\left(\frac{9,324161548}{(60 - 40)}\right)\left(1 - e^{\frac{-30}{9,32416154}}\right)\right| =$$

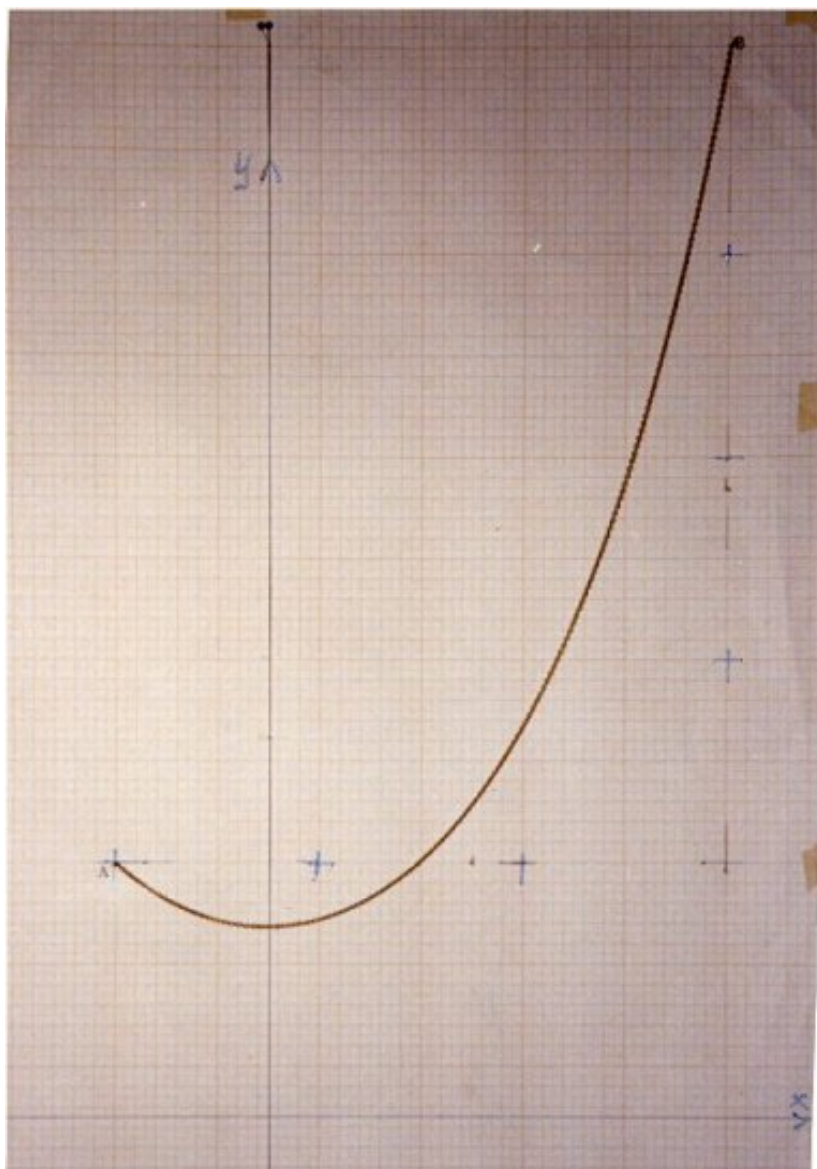
$$x_A = 9{,}324161548 \cdot \ln\left[(0{,}466208077)\left(1 - e^{-3{,}217447474}\right)\right]$$

$$\underline{x_A = -7{,}49667046}$$

$$\underline{y_A} = a \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right) = \underline{12{,}50372255}$$

$$\underline{x_B} = (x_A + 30) = \underline{22{,}50332954}$$

$$\underline{y_B} = (y_A + 40) = \underline{52{,}50372255}$$

Per verificare sperimentalmente le nostre formule, abbiamo reso verticale il piano di un tavolo da disegno, vi abbiamo applicato un foglio di carta millimetrata, orientandola col filo a piombo, per righe verticali ed orizzontali quindi abbiamo fissato con due spilli, una catenella lunga 60 cm nei punti A e B distanti orizzontalmente 30 cm. e verticalmente 40 cm. Nella riproduzione fotografica le distanze "d" ed "h" si sono evidenziate facendo delle crocette ogni 10 cm, evidenziando così il d = 30 cm ed h = 40 cm. si sono,

sulla base dei cal=
coli, tracciati gli
assi, ponendo su y
un filo a piombo.
Il reticolato della
carta millimetrata
(10 cm è la distanza fra
le crocette) verifica
con buona precisione
il modulo "a" e le
coordinate x_A, y_A;
x_B, y_B. ———

<

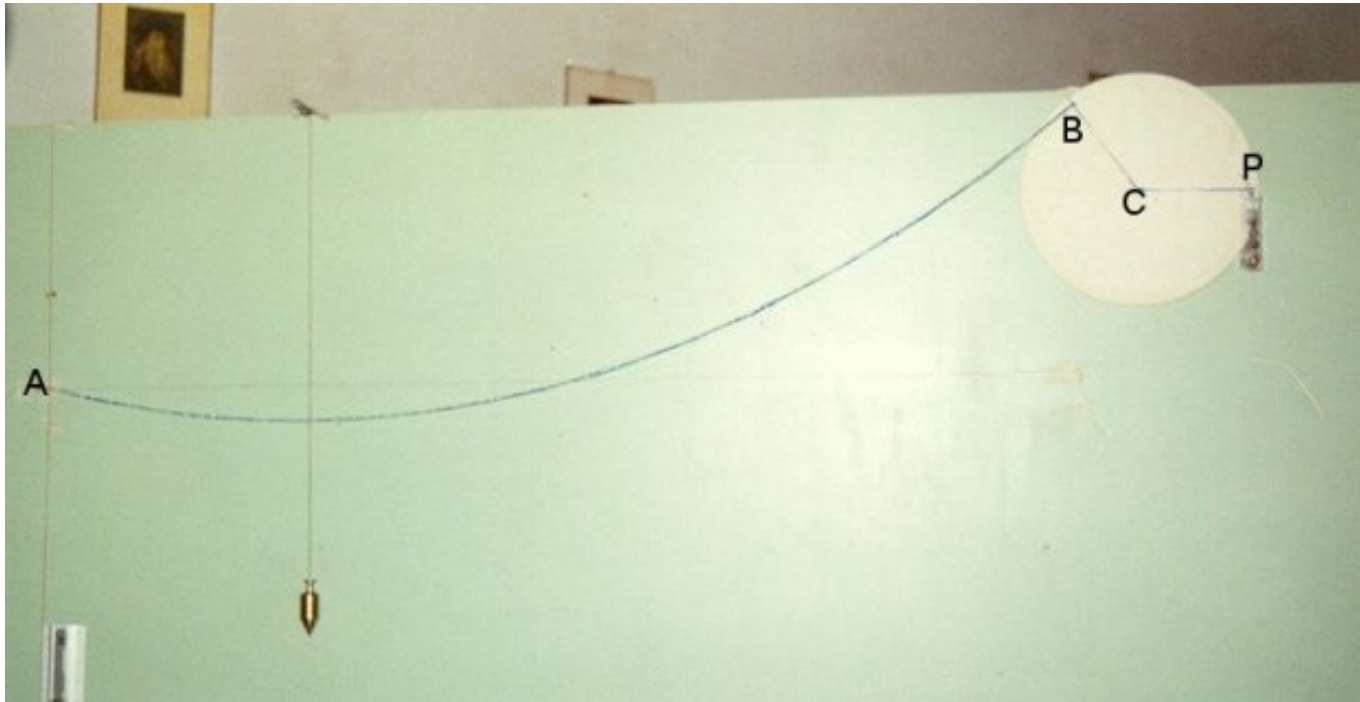
Nella catenaria, le formule sono riferite al modulo lineare "a", perciò indipendenti dalle misure convenzionali. Nell'esperienza precedente abbiamo utilizzato il centimetro, ma con gli stessi numeri $d=30$, $h_1=40$, $l=60$ possiamo prendere pollici, o metri, o Km, l'esperienza deve tornare.

Per verificare la validità delle tensioni abbiamo preso una catenella di cm. 107,3; del peso di gr. 25 ($q=0{,}23299162$ gr/cm); $d=100$ cm; $h=25$ cm. abbiamo calcolato: $a=98{,}53620137$; $X_A=-26{,}61238513$; $X_B=73{,}38761487$;

$y_A=102{,}1517985$; $y_B=127{,}1517985$.

e le tensioni: $H=22{,}9581084$ (gr.) (nel vertice)

$T_A=23{,}80051223$ (gr) ; $T_B=29{,}62530254$ (gr) (agli attacchi)

abbiamo sperimentato la tensione in B cioè T_B, e per far ciò abbiamo calcolato la direzione della tangente in B: 39° 11' 58",42 . Si riporta copia della foto

Per "pesare" la tensione in B occorreva una leva che non influisse col proprio peso. (abbiamo scelto un disco con fulcro al centro): occorreva che il braccio dal fulcro C a B fosse perpendicolare alla tensione che agisce secondo la tangente; occorreva che il braccio su cui agisce il peso equilibrante fosse orizzontale, $\overline{CP}$ orizzontale, i due bracci sono stati fatti uguali e pari a 10 cm facendo una circonferenza di centro C. Abbiamo cercato di rendere piccolo l'attrito fra il perno (spillo) in C ed il disco.
Posto in P un peso in gr pari a $T_B \simeq 29{,}625$.
Per verificare sopratutto l'attrito si spostava la catena in alto e in basso, oppure il peso in alto o in basso, ma dopo brevi oscillazioni la catena tornava in equilibrio sovrapponendo il vincolo B mobile sul disco al B fisso

…endo il vincolo D mobile sul disco e il D fisso
del tavolo dimostrando che l'attrito era
irrilevante e che i calcoli erano giusti.

Tavola delle funzioni iperboliche

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{a}$ — arg. X	$\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{a}$ — senh X	$\frac{f}{a}+1$ — cosh X	$\frac{1}{2}\frac{L}{\sqrt{R_1 H_1}}$ — tanh X	$2\frac{f}{\ell}$ — raversh x = $\left(\frac{\cosh x-1}{x}\right)$	$\frac{L}{\ell}$ — rasenh x = $\left(\frac{\operatorname{senh} x}{x}\right)$	$\frac{f}{L}$	tang α — racosh x = $\left(\frac{\cosh x}{x}\right)$
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000		
.01	.01000	.00005	.01000	.00500	.00002		100,00500
.02	.02000	.00020	.02000	.01000	.00007	$\frac{1}{200}$	50,01000
.03	.03000	.00045	.02999	.01501	.00016		33,34833
.04	.04001	.00080	.03998	.02000	.00027	$\frac{1}{100}$	25,02000
.05	.05002	.00125	.04996	.02500	.00042		20,02500
.06	.06004	.00180	.05993	.03001	.00060		16,69668
.07	.07006	.00245	.06989	.03501	.00082	$\frac{1}{44}$	14,32073
.08	.08009	.00320	.07983	.04002	.00107	$\frac{1}{50}$	12,54002
.09	.09012	.00405	.08976	.04503	.00135		11,15614
.10	.10017	.00500	.09967	.05004	.00167	$\frac{1}{40}$	10,05004
0.11	0,11022	1,00606	0,10956	0,05505	1,00202		9,14596
.12	.12029	.00721	.11943	.06007	.00240		6,39341
.13	.13037	.00846	.12927	.06509	.00282	$\frac{1}{32}$	7,75740
.14	.14046	.00982	.13909	.07011	.00327		7,21297
.15	.15056	.01127	.14889	.07514	.00375		6,74160
.16	.16068	.01283	.15865	.08017	.00428	$\frac{1}{25}$	6,33017
.17	.17082	.01448	.16836	.08521	.00482		5,96756
.18	.18097	.01624	.17808	.09024	.00541		5,64580
.19	.19115	.01810	.18775	.09526	.00603		5,35844
.20	.20134	.02007	.19738	.10034	.00668	$\frac{1}{20}$	5,10034
0,21	0,21155	1,02213	0,20697	0,10539	1,00737		4,86729
.22	.22178	.02430	.21658	.11045	.00809	$\frac{1}{16}$	4,65590
.23	.23203	.02657	.22603	.11551	.00884		4,46333
[illegible]	[illegible]	.02894	.23550	.12058	.00963	$\frac{1}{[illegible]}$	4,28725

.23	.23203	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]
.24	.24231	.02894	.23550	.12058	.00963	1/16	4,28725
.25	.25261	.03141	.24492	.12565	.01045		4,12565
.26	.26294	.03399	.25430	.13073	.01130	1/15	3,97689
.27	.27329	.03667	.26362	.13582	.01219		3,83953
.28	.28367	.03946	.27291	.14092	.01312	1/14	3,71235
.29	.29408	.04235	.28213	.14602	.01408		3,59430
0,30	0,30452	1,04534	0,29131	0,15113	1,01507		3,46446
.31	.31449	.04844	.30044	.15625	.01609		.38205
.32	.32549	.05164	.30951	.16137	.01715		.28637
.33	.33602	.05495	.31852	.16650	.01825	1/12	.19681
.34	.34659	.05836	.32748	.17164	.01938		.11282
.35	.35719	.06180	.33638	.17679	.02054		.03394
.36	.36783	.06550	.34521	.18195	.02174		2,95975
.37	.37850	.06923	.35399	.18712	.02297		.88982
.38	.38921	.07307	.36271	.19230	.02424		.82368
.39	.39996	.07702	.37136	.19740	.02554	1/10	.76159
.40	.41075	.08107	.37995	.20268	.02688		.70268
0,41	0,42158	1,08523	0,38847	0,20769	1,02825		2,64691
.42	.43246	.08950	.39693	.21310	.02966		.59406
.43	.44337	.09366	.40532	.21833	.03110	1/9	.54391
.44	.45434	.09837	.41364	.22357	.03258		.49630
.45	.46534	.10297	.42190	.22882	.03409		.45104
.46	.47640	.10768	.43008	.23408	.03564		.40800
.47	.48750	.11250	.43820	.23936	.03723		.36702
.48	.49865	.11743	.44624	.24464	.03885		.32798
.49	.50984	.12247	.45422	.24994	.04050	1/8	.29076
.50	.52110	.12763	.46212	.25525	.04219		.25525
0,51	0,53240	1,13289	0,46995	0,26057	1,04392		2,22136
.52	.54375	.13827	.47770	.26591	.04566		.18899
.53	.55516	.14377	.48536	.27126	.04748		.15805
.54	.56663	.14938	.49299	.27663	.04931		.12840
.55	.57815	.15510	.50052	.28200	.05119		.10018
.56	.58973	.16094	.50798	.28739	.05309		.07311
.57	.60137	.16690	.51536	.29280	.05504	1/7	.04719
.58	.61307	.17297	.52267	.29822	.05702		.02236
.59	.62483	.17916	.52990	.30366	.05904		1,99857
.60	.63665	.18547	.53705	.30911	.06109		.97578
0,61	0,64854	1,19189	0,54413	0,31458	1,06318		1,95392
.62	.66049	.19844	.55113	.32006	.06531		.93296
.63	.67251	.20510	.55805	.32556	.06747		.91286
.64	.68459	.21189	.56490	.33107	.06968	1/6	.89357
.65	.69675	.21879	.57167	.33660	.07192		.87507
.66	.70897	.22582	.57836	.34215	.07420		.85730
.67	.72126	.23297	.58496	.34772	.07651		.84026
.68	.73363	.24025	.59152	.35330	.07887		.82389
							.80818

$\frac{1}{2}\frac{f}{a}$	$\frac{1}{2}\frac{L}{a}$	$\frac{f}{a}+1$	$\frac{1}{2}\frac{L}{\sqrt{R_1 \cdot R_0}}$	$2\frac{f}{L}$	$\frac{L}{l}$		tang α
arg X	senh X	cosh X	tanh X	raversh X = $\left(\frac{\cosh X - 1}{X}\right)$	rasenh X = $\left(\frac{\text{senh } X}{X}\right)$	$\frac{f}{L}$	racosh X = $\left(\frac{\cosh X}{X}\right)$
0,70	0,75858	1,25517	0,60437	0,36453	1,08369		1,79310
.71	.77117	.26282	.61066	.37017	.08616		.77862
.72	.78384	.27059	.61691	.37562	.08867		.76471
.73	.79659	.27849	.62307	.38150	.09121		.75116
.74	.80941	.28652	.62915	.38720	.09380		.73855
.75	.82232	.29468	.63515	.39291	.09642		.72624
.76	.83530	.30297	.64108	.39865	.09909	1/5	.71444
.77	.84838	.31139	.64693	.40440	.10179		.70310
.78	.86153	.31994	.65271	.41018	.10453		.69223
.79	.87478	.32862	.65841	.41598	.10731		.68180
.80	.88811	.33743	.66404	.42179	.11013		.67179
0,81	0,90152	1,34638	0,66959	0,42763	1,11299		1,66220
.82	.91503	.35547	.67507	.43350	.11590		.65301
.83	.92863	.36468	.68048	.43938	.11884	2/9	.64420
.84	.94233	.37404	.68581	.44528	.12182		.63576
.85	.95612	.38353	.69107	.45121	.12484		.62768
.86	.97000	.39316	.69626	.45716	.12790		.61995
.87	.98398	.40293	.70137	.46314	.13101		.61256
.88	.99806	.41284	.70642	.46914	.13415		.60550
.89	1,01224	.42289	.71139	.47516	.13734		.59876
.90	.02652	.43309	.71630	.48121	.14057		.59232
0,91	1,04090	1,44342	0,72113	0,48728	1,14385		1,58618
.92	.05539	.45390	.72590	.49337	.14716		.58033
.93	.06998	.46453	.73059	.49950	.15051	1/4	.57477
.94	.08468	.47530	.73522	.50564	.16391		.56947
.95	.09948	.48623	.73987	.51182	.15735		.56445
.96	.11440	.49729	.74428	.51802	.16084		.55966
.97	.12943	.50851	.74870	.52424	.16436		.55517
.98	.14457	.51988	.75307	.53049	.16793		.55090
.99	.15983	.53141	.75736	.53677	.17154		.54687
1,00	1,17520	1,54308	0,76159	0,54308	1,17520		.54308
1,01	1,19069	1,55491	0,76576	0,54942	1,17890		1,53951
.02	.20630	.56689	.76987	.55578	.18265		.53617
.03	.22203	.57904	.77391	.56217	.18644		.53304

.03	.22203	.57904	.77391	.56217	.18644		.53304
.04	.23788	.59134	.77789	.56859	.19027	2/7	.53013
.05	.25366	.60379	.78181	.57504	.19415		.52742
.06	.26996	.61641	.78566	.58152	.19807		.52492
.07	.28619	.62919	.78946	.58803	.20204		.52261
.08	.30254	.64214	.79320	.59457	.20606		.52050
.09	.31903	.65525	.79688	.60114	.21012		.51857
1,10	1,33565	1,66852	0,80050	0,60774	1,21422		1,51683
.11	.35240	.68196	.80406	.61438	.21838		.51528
.12	.36929	.69557	.80757	.62104	.22258		.51390
.13	.38631	.70934	.81102	.62774	.22682		.51269
.14	.40347	.72329	.81441	.63446	.23112		.51166
.15	.42078	.73741	.81775	.64123	.23546		.51080
.16	.43822	.75171	.82104	.64803	.23985		.51009
.17	.45581	.76616	.82427	.65485	.24428		.50956
.18	.47355	.78083	.82745	.66172	.24877	1/2	.50917
.19	.49143	.79565	.83058	.66861	.25330		.50895
.20	.50946	.81066	.83365	.67555	.25788		.50888
1,21	1,52764	1,82584	0,83668	0,68251	1,26252		1,50896
.22	.54598	.84121	.83965	.68952	.26720		.50919
.23	.56447	.85676	.84258	.69655	.27193		.50956
.24	.58311	.87250	.84546	.70363	.27671		.51008
.25	.60192	.88842	.84828	.71074	.28154		.51074
.26	.62088	.90454	.85106	.71789	.28642		.51154
.27	.64001	.92084	.85306	.72507	.29135		.51247
.28	.65930	.93734	.85646	.73230	.29633		.51355
.29	.67876	.95403	.85913	.73956	.30136		.51475
.30	.69838	.97091	.86172	.74686	.30645	[illegible]	.51609
1,31	1,71818	1,98800	0,86426	0,75420	1,31159		1,51755
.32	.73814	2,00528	.86678	.76157	.31678		.51915
.33	.75828	.02276	.86925	.76899	.32202		.52087
.34	.77860	.04044	.87167	.77645	.32731		.52272
.35	.79909	.05833	.87405	.78395	.33266		.52469
.36	.81977	.07643	.87639	.79149	.33806		.52678
.37	.84062	.09473	.87869	.79907	.34352	[illegible]	.52900
.38	.86166	.11324	.88095	.80670	.34903		.53133
.39	.88289	.13196	.88317	.81436	.35459		.53379
.40	.90430	.15090	.88535	.82207	.36022		.53636
1,41	1,92591	2,17005	0,88749	0,82982	1,36589		1,53904
.42	.94770	.18942	.88960	.83762	.37162		.54184
.43	.96970	.20900	.89167	.84546	.37741		.54476
.44	.99188	.22881	.89370	.85335	.38325	2/7	.54779
.45	2,01427	.24884	.89569	.86127	.38915		.55093
.46	.03686	.26910	.89765	.86925	.39511		.55418
.47	.05965	.28958	.89958	.87727	.40113		.55754

.47	.05965	.28950	.89958	.87727	.40113		.55754
.48	.08265	.31029	.90147	.88533	.40720		.56101
.49	.10586	.33123	.90332	.89345	.41333		.56459
.50	.12928	.35241	.90515	.90161	.41952		.56827

$\frac{1}{2}\frac{\ell}{a}$	$\frac{1}{2}\frac{L}{a}$	$\frac{f}{a}+1$	$\frac{1}{2}\frac{L}{\sqrt{R_A R_B}}$	$2\frac{f}{\ell}$	$\frac{L}{\ell}$		tang α
arg X	senh X	cosh X	tanh X	raversh X = $\left(\frac{\cosh X - 1}{X}\right)$	rasenh X = $\left(\frac{\text{senh } X}{X}\right)$	$\frac{f}{\ell}$	racosh X = $\left(\frac{\cosh X}{X}\right)$
1,50	2,12928	2,35241	0,90515	0,90161	1,41952		1,56027
.51	.15291	.37362	.90694	.90981	.42577		.57207
.52	.17676	.39547	.90870	.91807	.43208		.57597
.53	.20062	.41736	.91042	.92630	.43845		.57997
.54	.22510	.43949	.91212	.93473	.44487		.58408
.55	.24961	.46166	.91379	.94313	.45136		.58830
.56	.27434	.48446	.91542	.95159	.45791		.59261
.57	.29930	.50735	.91703	.96009	.46452		.59704
.58	.32449	.53047	.91860	.96865	.47120		.60156
.59	.34991	.55364	.92015	.97726	.47793		.60619
.60	.37557	.57746	.92167	.98592	.48743		.61092
1,61	2,40146	2,60135	0,92316	0,99463	1,49159	$\frac{1}{2}$	1,61574
.62	.42760	.62549	.92462	1,00339	.49852		.62068
.65	.50746	.69951	.92886	.03001	.51966		.63607
.67	.56196	.75021	.93155	.04803	.53411		.64683
1.70	.64563	.82832	.93541	.07548	.55625		1,66371
.75	.79041	.96419	.94138	.12239	.59452		.69382
1,80	.94217	3,10747	.94681	.17082	.63454		.72637
1,90	3,26816	.41773	.95624	.27249	.72009	$\frac{2}{3}$	.79881
2,00	.62686	.76220	.96403	.38110	.81343		1,88110
.10	4,02186	4,14431	.97045	.49729	.91517		.97348
.20	.45711	.56791	.97574	.62178	2,02596		2,07632
.30	.93696	5,03722	.98010	.75531	.14651		.19010
.40	5,46623	.55695	.98367	.89873	.27760		.31539
.50	6,05020	6,13229	.98661	2,05292	.42008	1	.45292
3,00	10,01787	10,06766	.99505	3,02255	3,33929		3,35589
π	11,54874	11,59195	0,99627	3,37152	3,67608		3,68983
3,50	16,54263	16,57282	0,99818	4,44938	4,72646	2	4,73509
4,00	27,28992	27,30823	.99933	6,57706	6,82248	3	6,82706
.50	45,00301	45,01412	.99975	9,78092	10,00067	4	10,00313
5,00	74,20321	74,20995	.99991	14,64199	14,84064	5	14,84198

e = 2,71828 10284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 ...

log e = 0,43429 44819 03251 82765 11289 10916 60508 22943 ...

l_n 10 = 2,30258 50929 94045 68401 79914 54684 36420 76011 ...

π = 3,14159 26535 89793 23046 26433 83279 50208 41871 ...

Tavole più estese degli operatori sono raccolte in un volumetto separato.

Catenarie riferite allo stesso sistema di assi

(per un punto passano due catenarie)

Dato un sistema di assi: oxy, e l'equazione delle catenarie riferite a quel sistema:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

ove ogni catenaria è definita dal parametro "a".

Nel trattare le rette tangenti alla catenaria, abbiamo rilevato che esistono due rette limite, che, uscendo dal centro assi, delimitano lo spazio dei punti che sono comuni a catenarie, dai punti per i quali non possono passare catenarie riferite a quel sistema di assi.

Quindi i punti che, in coordinate polari, hanno l'argomento θ compreso fra:

$$56° \, 27' \, 57'',1 < \theta < 123° \, 32' \, 02'',99$$

appartengono a catenarie.

appartengono a catenarie.

Le rette per l'origine $y = mx$ potranno secare catenarie solo se il loro coefficiente angolare m è: $m > +1,508879561$; $m < -1,508879561$

(I valori di m passano da $+\infty$ a $-\infty$ per $\theta = \pi/2$)

Una retta per l'origine, con m sopra definito, taglierà ogni catenaria in due punti distinti,

definiti da:

$$x_C = \underline{a \, \mathrm{argracosh}(m)}$$
$$y_C = m \, x_C$$

Poiché racosh(m) ammette un minimo per:

$$\mathrm{racosh}(1{,}199678640..) = 1{,}5088795615...$$

per ogni m, argracosh(m), ammette due valori uno maggiore ed uno minore di 1,199678640..., non ammette valori per $m < 1{,}50887956...$

<u>Inversamente, dato un punto</u> $C \equiv (x_C ; y_C)$ <u>esistono due catenarie che passano per C, riferite agli stessi assi:</u> $y_C = a \cosh \frac{x_C}{a}$;

dividendo per x_C:

$$y_C / x_C = \frac{\cosh(x_C/a)}{(x_C/a)} = \mathrm{racosh}\left(\frac{x_C}{a}\right)$$

cioè:

$$\left(\frac{x_C}{a}\right) = \mathrm{argracosh}\left(\frac{y_C}{x_C}\right)$$

$$a = \frac{x_C}{\mathrm{argracosh}(y_C/x_C)}$$

$$a = \frac{\quad}{\text{argracosh}(y_c/x_c)}$$

poiché di argracosh (y_c/x_c) ve ne sono due, avremo anche due moduli "a" cioè due catenarie.

(C.f.r - Bollettino Ingegneri anno 1977 n.ri 2/3 - C-Brogi - "Su alcuni aspetti delle curve funicolari")

Esempio numerico

Supponiamo di voler determinare le catenarie

passanti per C ove: $x_c = 5$; $y_c = 8$;

$$y_c / x_c = 8/5 = 1{,}6$$

$$\text{argracosh}(1{,}6) = \begin{cases} 0{,}888120355622 \\ 1{,}576576534322 \end{cases}$$

$$a_2 = \frac{5}{0{,}888120355622} = \boxed{5{,}62986758 = a_2}$$

$$a_1 = \frac{5}{1{,}576576534322} = \boxed{3{,}171428657 = a_1}$$

y

$x_c = 5$

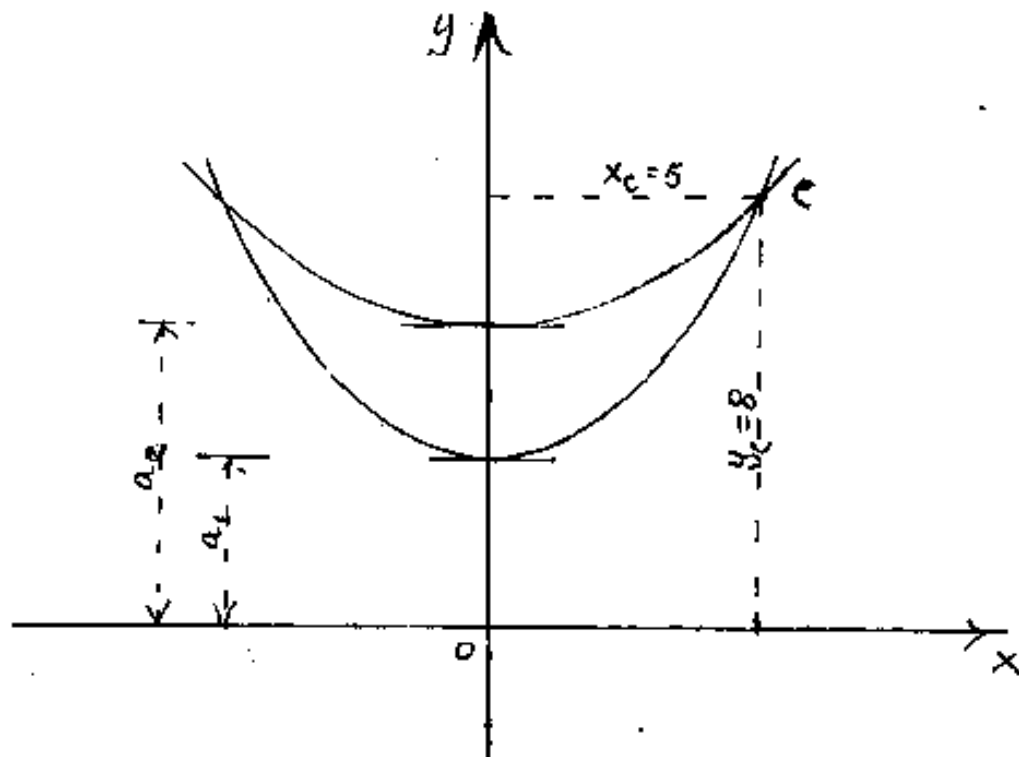
C

a_2

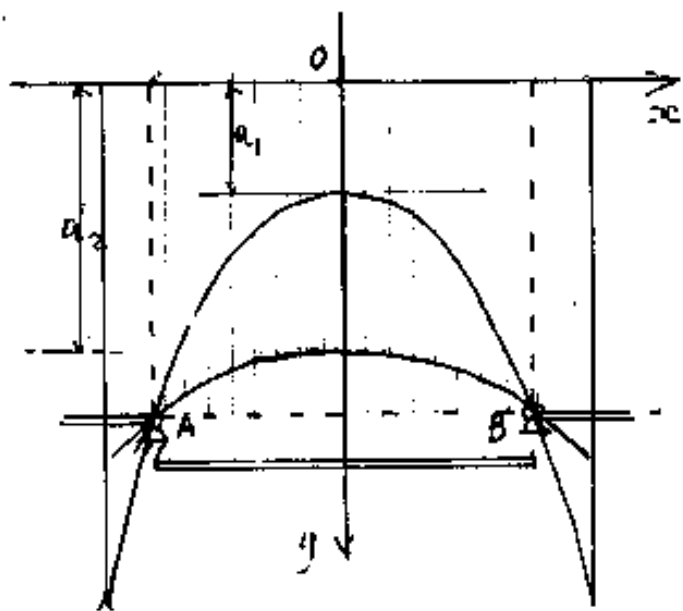
a_1

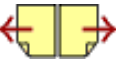
$y_c = 8$

O

x

se rovesciamo il coppio di catenarie intorno

all'asse x abbiamo il problema della parete, ricordando che le ordinate sono proporzionali alle tensioni, si può dimostrare che il peso di parete sovrastante le catenare è uniformemente ripartito lungo le catenarie stesse. (c.f.r. articolo sopra citato)

Il problema della parete

Abbiamo rovesciato il cappio delle due catenarie, per visualizzare meglio il problema della parete. E supponiamo che fra A e B, vi sia un sostegno che possa essere rimosso; (ciò simula un cedimento di fondazione (o di appoggio) della parete).

Le conclusioni dell'articolo sopracitato (anno 1977) furono verificate alcuni anni dopo (1981)

(c.f.r. Bollettino Ingegneri N° 7-8 1981 - C. Brogi - Su alcuni aspetti delle curve funicolari -)

Fu costruito un modellino di parete dello spessore di un centimetro, delimitato da due lastre di vetro. La larghezza dell'intercapedine, delimitata da due prismetti di legno di 1 cm x 1 cm di sezione, era di cm. 19,5 ≃ ($\frac{1}{3}$ di braccio toscano) il fondo della parete aveva un sostegno che in parte poteva essere rimosso, la larghezza della apertura era cm 9,7. ≃ ($\frac{1}{6}$ di braccio toscano).

Nell'intercapedine fu versata della sabbia per misurare l'angolo di natural declivio; la sabbia è un materiale non resistente a trazione, può essere leggermente umidificata per avere una costipazione omogenea.

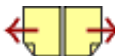
Riempita l'intercapedine per una altezza di circa 18 cm. si è rimosso il sostegno di base, la

sabbia è caduta per la parte delimitata dalla catenaria inferiore, e segnalando un leggerissimo cretto per la catenaria superiore.

Con sabbia, leggermente umidificata, si è riempita l'intercapedine per una altezza di circa cm 16,7, aprendo il sostegno inferiore è caduta la sabbia.

delimitata dalla catenaria inferiore, e poggian=
do il modellino sul tavolo con leggera decisione, (co=
me se fosse lasciato cadere da uno o due millimetri di
altezza) si è staccato il cappio di catenarie, come
si vede dalla foto già riprodotta col disegno.
Riportiamo anche le foto dell'angolo di na=
tural declivio e dell'esperienza con la caduta
della sola parte di sabbia delimitata dalla
catenaria inferiore.

Semplicemente guardando l'angolo di natural declivio e la pendenza delle catenarie agli appoggi, si nota che le pendenze sono molto simili per la catenaria inferiore.

Si vuole ora trovare l'equazione di tutte le catenarie passanti per A e B, (vedi disegno)

simmetriche rispetto allo stesso asse y, varierà l'asse x. Per ogni asse x determinato, troviamo, nei limiti sopra detti due catenarie, e tale asse x differirà della distanza "d" da un asse x_o preso come riferimento, cioè avremo:

$$\frac{y_A \pm d}{X_A} = \frac{\cosh\left(\frac{X_A}{a}\right)}{\left(\frac{X_A}{a}\right)}$$

$$\left(\frac{X_A}{a}\right) = \text{argracosh}\left(\frac{y_A \pm d}{X_A}\right)$$

aumentando o diminuendo $\frac{y_A}{X_A}$ della quantità $\pm\frac{d}{X_A}$ ci avviciniamo o ci allontaniamo dal valore limite: 1,50887956... quindi vi sarà un valore limite di "d" oltre il quale nessuna catenaria potrà passare per A (e per il suo simmetrico B).

Se assumiamo come asse x_o, l'asse per cui si ha il limite, per d=0 si ha una sola cate=naria quindi a partire da x_o gli assi sono sempre

naria, quindi a partire da x_o gli assi sono sempre più distanti dal punto A, cioè si hanno soluzioni reali solo per $d > 0$.

Quando $x = x_o$; $(d = 0)$ sia "a_o" il parametro; per ogni x avremo:

$$\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{x_{oA}}{\operatorname{argcosh}\left(\frac{y_A + d}{x_{oA}}\right)}$$

formula che può scriversi: (formula generale)

$$\left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{X_{oA}}{\text{argracosh}\left(1{,}50887956 + \frac{d}{X_{oA}}\right)}$$

si noti che per $d = 0$ avremo:

$$a_1 = a_2 = a_0 = \frac{X_{oA}}{(1{,}1996786402\ldots)}$$

Poniamo: $X_{oA} = 5$ (come nel nostro esempio numerico)

$$a_0 = \frac{5}{(1{,}1996786402\ldots)} = 4{,}167782799$$

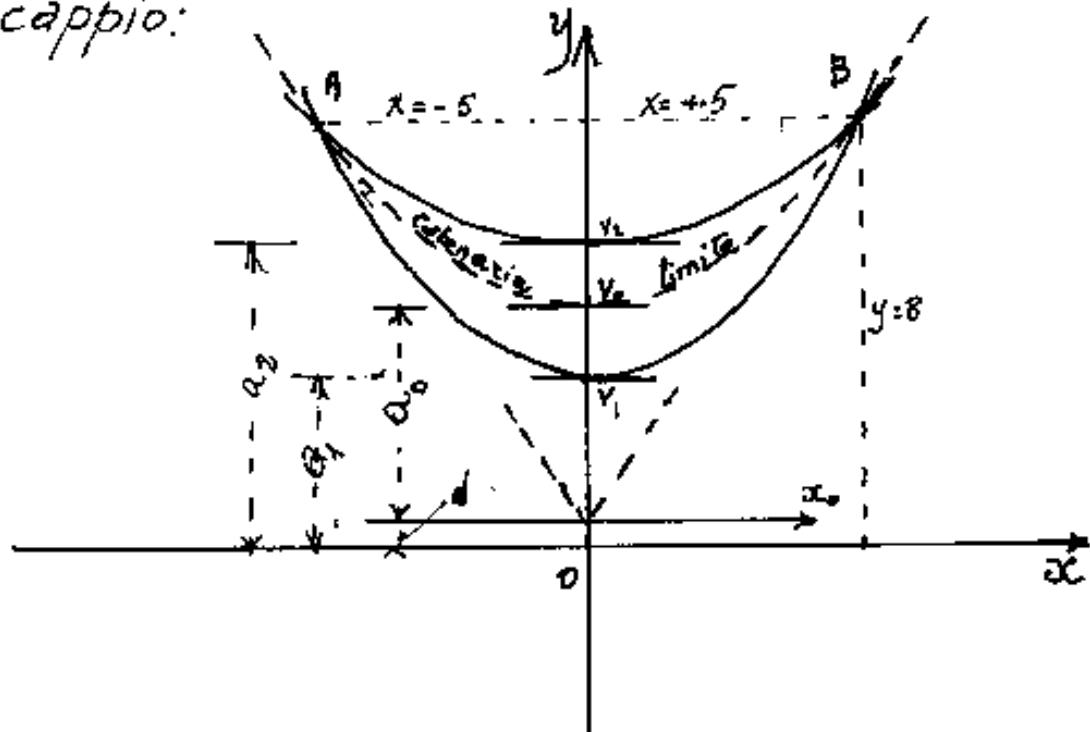
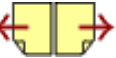
$$y_{oA} = a_0 \cosh\left(\frac{X_{oA}}{a_0}\right)$$

$$y_{oA} = 4{,}167782799 \cosh\left(\frac{5}{4{,}167782799}\right)$$

$$y_A = 4{,}167782799 \cosh(1{,}1996786402)$$

$$y_A = 7{,}544397808$$

vogliamo disegnare la <u>catenaria limite</u>, nel

mostro cappio:

Poiché l'asse y resta invariato al mutare del l'asse per le coordinate di A possiamo lasciare invariato x_A (nel nostro esempio $x_A = 5$), mentre varia l'ordinata y_A. La catenaria limite avrà racosh (limite) cioè:

$$\text{racosh}(1{,}1996786042) = 1{,}508879562 = \frac{y_{oA}}{x_{oA}}$$

essendo $x = x_o = 5$ (invariato)

$$y_{oA} = (5)(1{,}508879562) = 7{,}544397808$$

che verifica il precedente calcolo.

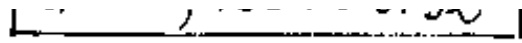
Quindi ricercando la coppia di catenarie per il punto: $x_{oA} = 5$; $y_{oA} = 7{,}544397808..$; avremmo trovato

$$\text{argracosh}(1{,}508879562) = (\text{unico valore limite}) = 1{,}1996786042$$

da cui la catenaria limite: $\frac{5}{1{,}1996786402} = 4{,}167782799$.

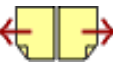
Partendo dall'asse x_o riferito alla catenaria limite, il nostro asse x ove $y_A = 8$ dista:

$$d = y_A - y_{oA} = (8 - 7{,}544397808) =$$

$$\boxed{d = 0{,}455602192}$$

quindi:

per: $d = 0$ si ha la catenaria limite per "A"

per: $0 < d < 0,455602192..$ catenarie interne al nostro cappio $A \equiv (5;8)$

per $d > 0,455602192...$ la catenaria inferiore è esterna al nostro cappio; via via che "d" aumenta il vertice si allontana ed il modulo

"a_1" diminuisce ; diminuisce il raggio di curvatura nel vertice e la tangente in A forma con le ascisse un angolo che si avvicina a 90°.

La catenaria superiore invece mantiene il vertice presso il cappio noto con $A \equiv (5;8)$, aumenta il modulo a_2 ed aumenta così il raggio di curvatura nel vertice, la tangente in A forma con le ascisse un angolo che si avvicina a zero.

Per $\boxed{d = \infty}$ L'asse x è all'infinito per la catenaria inferiore il modulo $a_1 = 0$ per cui il vertice V_1 è all'infinito la catenaria inferiore si è trasformata in rette parallele all'asse y.

La catenaria superiore ha il modulo $a_2 = \infty$ e si è trasformata in rette parallele ad x. (vertice allineato con A,B)

(vertice allineato con A, B)

Esempio numerico

Prendiamo per "d" valori vicini a "d" (limite)

per $d = 0,4$ < 0,45560219 ;

$$\frac{d}{x_A} = \frac{0,4}{5} = 0,08 \; ; \; (1,50887956 + 0,08) = 1,58887956$$

$$\text{argracosh}(1,58887956) = < \begin{matrix} 1,55136506 \\ 0,905542367 \end{matrix}$$

$$a_1 = (5/1,55136506) = \boxed{a_1 = 3,222968036}$$

$$a_2 = (5/0,905542367) = \boxed{a_2 = 5,521552809}$$

$$y_A = a\cosh\left(\frac{(5)}{a}\right) = \begin{cases} 3{,}222968036 \cosh(1{,}55136506) \\ 5{,}521552809 \cosh(0{,}905542367) \end{cases} = 7{,}9443978$$

$$(y_{0_A} = 7{,}5443978) < 7{,}9443978 < 8$$

(valori di a)

$$3{,}171428 < a_1 = 3{,}222968 < a_0 = 4{,}167782799 < a_2 = 5{,}5215528 < 5{,}629867$$

$y/x = 1{,}6$; $d = 0{,}4$; limite ; $d = 0{,}4$; $y/x = 1{,}6$

(valori y_V)

$$2{,}7158258 < 2{,}822968 < y_0 = 4{,}167782799 < 5{,}1215528 < 5{,}17426481$$

cappio A(5;8) ; cappio A(5;8)

(valori interni al cappio)

$$\boxed{d = 0{,}5} > 0{,}4556 0219$$

$$\frac{d}{x_A} = \frac{0{,}5}{5} = 0{,}1 \; ; \; (1{,}50887956 + 0{,}1) = 1{,}60887956$$

$$\text{argracosh}(1{,}60887956) = \begin{cases} 1{,}595720892 \\ 0{,}875160324 \end{cases}$$

$$a_1 = 5/1{,}595720892 = \boxed{a_1 = 3{,}133380045}$$

$$a_2 = 5/0{,}875160324 = \boxed{a_2 = 5{,}713238892}$$

$$y_A = a\cosh\left(\frac{5}{a}\right) = \begin{cases} 3{,}133380045 \cosh(1{,}595720892) \\ 5{,}713238892 \cosh(0{,}875160324) \end{cases} = 8{,}0443979$$

$y_{0V_1} = 2{,}633380045 < 2{,}7158258$ V_1 esterno al cappio

$y_{0V_2} = 5{,}213238892 > 5{,}17426481$ V_2 esterno al cappio.

Conviene fare il calcolo per $\boxed{d = 5}$.

$\boxed{d = 5}$; $\frac{d}{x_A} = \frac{5}{5} = 1$ $(1{,}50887956 + 1) = 2{,}508879561 5.$

$$\text{argracosh}\,(2{,}508879561 5..) = \begin{cases} 0{,}4373078175 \\ 2{,}538226404 \end{cases}$$

$$a_1 = 5/2{,}538226404 = a_1 = 1{,}969879437$$

$$a_2 = 5/0{,}4373078175 = a_2 = 11{,}43359393$$

$$y_A = a \cosh\left(\frac{5}{a}\right) \begin{cases} 1{,}969879437 \cosh(2{,}538226404) = \boxed{y_A = 12{,}5443978} \\ 11{,}43359393 \cosh(0{,}4373078175) = \end{cases}$$

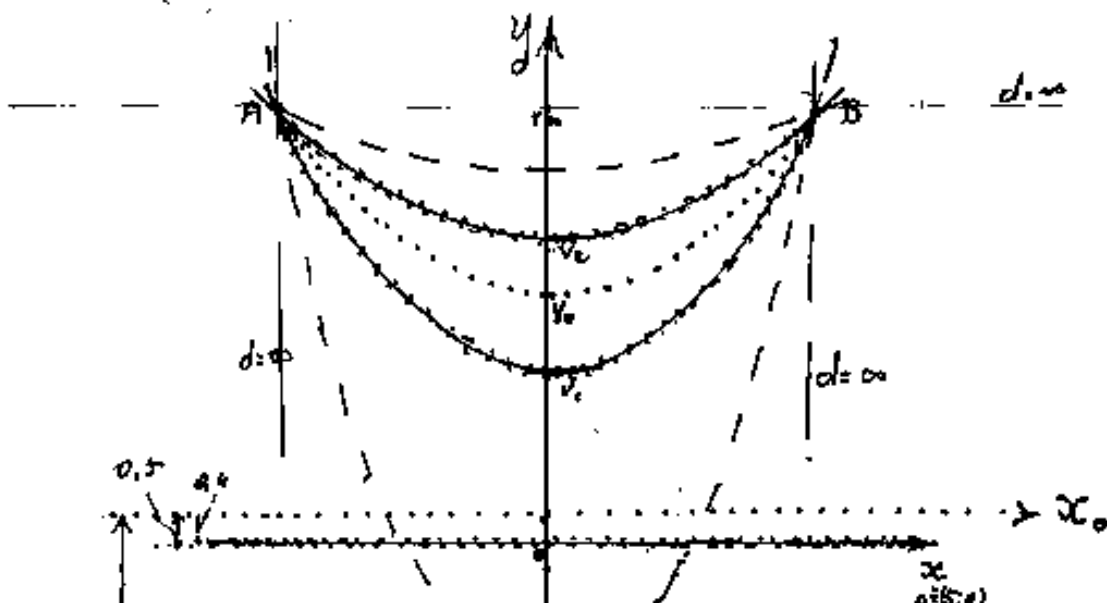
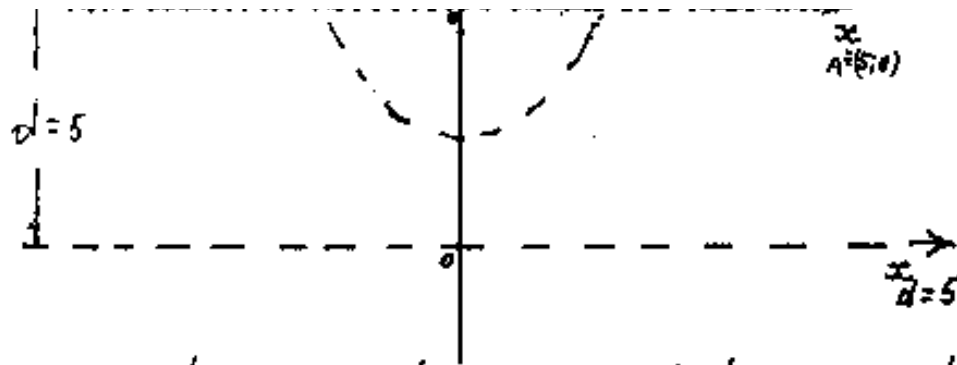
y; A; B; V_0; V_1; V_2; $d = \infty$; $d = 0$; $d = \infty$; 0,5; 0,4; x_0; x

d=5

$A(5,0)$

x

0

$x_{d=5}$

Le catenarie d=0,4 e d=0,5 ; interne ed esterne al cappio, praticamente sovrappongono il cappio iniziale. Le catenarie d=5 evidenziano il modo di deformarsi aumentando d.

Catenarie e Catenoidi

Dati tre assi cartesiani ortogonali o, x, y, z, consideriamo un piano mobile x_1, y_1, originariamente parallelo ad xy. Supponiamo di proiettare ortogonalmente su xy le figure geometriche giacenti su $x_1 y_1$, nelle varie posizioni che assumerà tale piano mobile.

Abbiasi una catenaria su $x_1 y_1$ di equazione

$$y_1 = a \cosh\left(\frac{x_1}{a}\right)$$

quando $x_1 y_1$ è parallelo ad xy su xy si proietta: $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

A) Facciamo ruotare dell'angolo α il piano $x_1 y_1$ intorno ad y_1, la proiezione su xy sarà: $x = x_1 \cos\alpha$; $y = y_1$; perciò la curva proiettata è:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a \cos\alpha}\right)$$

e posto:

$$a \cos\alpha = b$$

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{b}\right)$$

che può scriversi:

$$\left(\frac{y}{a}\right) = \cosh\left(\frac{x}{b}\right)$$

Questa linea è detta impropriamente: "Catenoide", (usata talvolta nelle arcate murarie).

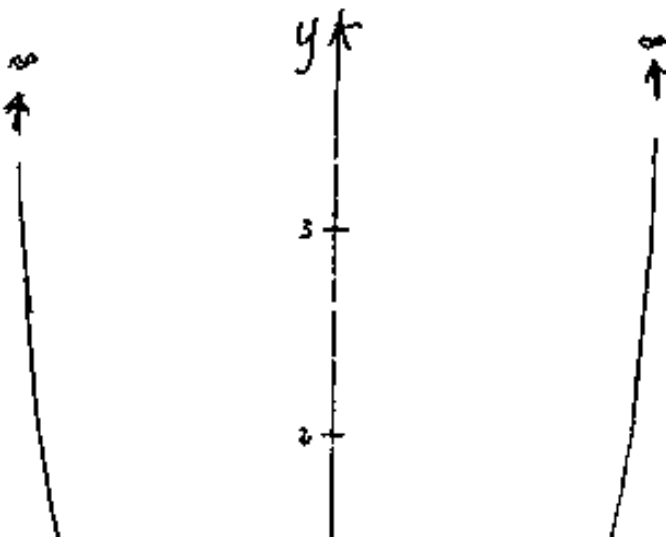
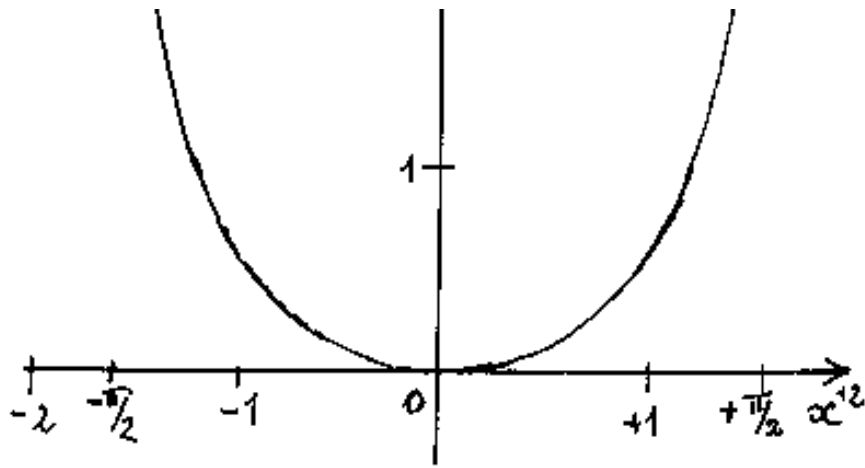
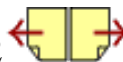
"La catenoide", propriamente detta, è la linea configurazione di equilibrio di un filo pesante, (a peso variabile) costruito in modo tale che in ogni sezione sia costante la tensione unitaria, l'equazione di tale linea è:

$$y = a \ln \sec\left(\frac{x}{a}\right)$$

può scriversi:

$$e^{y/a} \cdot \cos\left(\frac{x}{a}\right) = 1$$

non esiste per valori di $\cos(x/a) < 0$

Il suo grafico per x/a variabile da $-\pi/2$ a $+\pi/2$;

con ($a=1$) è quello a fianco e si ripete ad intervalli di 2π, da $-\infty$ a $+\infty$, con

intervalli mancanti da $+\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3}{2}\pi$, cioè per valori negativi del coseno.

Catenoide si chiama anche la superficie generata da una catenaria che ruota intorno al suo asse x. Nasce da un problema di minimo; (c.f.r. G. Sansone - Lezioni di Analisi Matematica - Vol II pag 514 - Ed. Cedam - Padova - 1945)

"In un piano sono dati due punti A e B da una stessa parte di una retta x; si domanda di determinare fra tutte le curve Γ di questo piano congiungenti A con B quella che per una rotazione completa intorno ad x genera la superficie che ha la minima area"

Nel testo del Sansone si arriva alla espressione: (pag. 525) "$dy = \sqrt{\frac{y^2 - \alpha^2}{\alpha^2}}\, dx$ ed infine: $y = \alpha \cosh \frac{x - \beta}{\alpha}$ con α e β costanti arbitrarie"

Si può avere la equazione della superficie

$$\sqrt{x^2 + y^2} = m \cosh \frac{z}{m}.$$

Torneremo sulla linea catenoide, e sulla superficie catenoide dopo aver svolto altre parti di Analisi Matematica.

Torniamo alla proiezione della catenaria e notiamo che se sul piano mobile poniamo una retta: $y_1 = m x_1$ la sua proiezione: $y = \frac{m}{\cos\alpha} x$ è ancora una retta; $y_1 = m x_1^2$ (parabola) proiettata: $y = \frac{m}{\cos^2\alpha} x^2$ è ancora una parabola; anche l'ellisse resta ellisse

$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ diventa: $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2\cos^2\alpha}}$

consideriamo il cerchio un caso particolare di ellisse, potremmo considerare la catenaria un caso particolare delle cosiddette catenoidi: $\frac{y}{a} = \cosh\left(\frac{x}{b}\right)$

Per superfici rigate (come le volte a padiglione, cioè superfici ad una curvatura) se le sezioni rette sono circolari od ellittiche i costoloni (o cordoli) sono ellissi.

B) Facciamo ruotare nuovamente il piano $x_1 y_1$ dopo aver ruotato di α intorno ad y ed averlo riportato nella posizione iniziale con sovrapposto il catenoide ottenuto, lo facciamo ruotare di β intorno l'asse x. Nella proiezione avremo

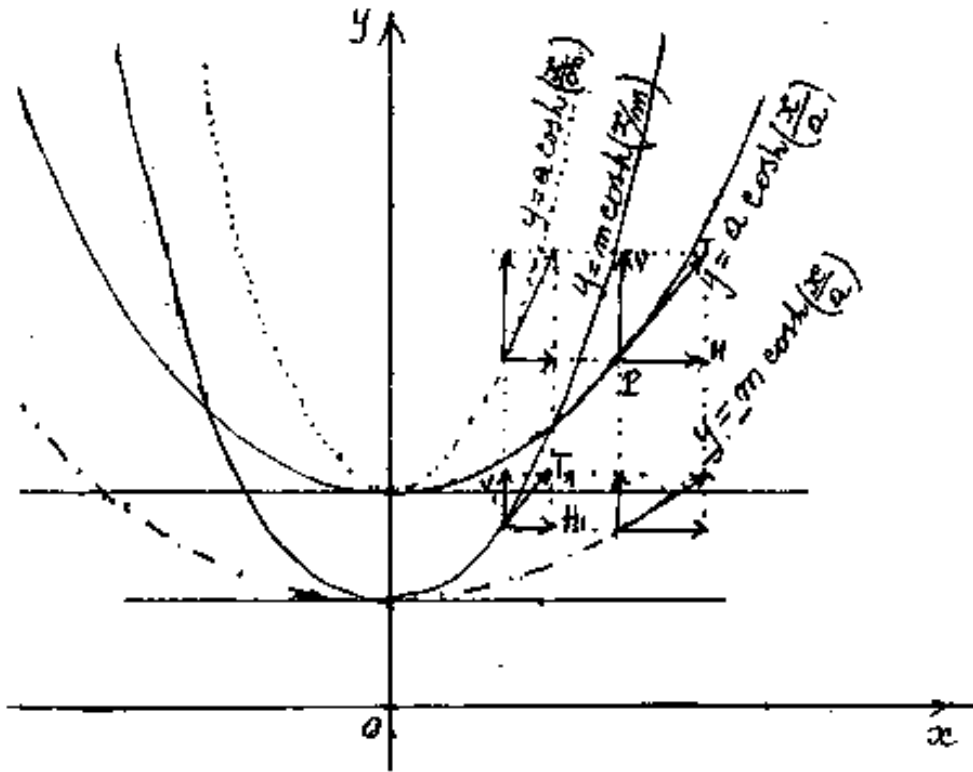
$y = y_1 \cos\beta$; $x = x_1 \cos\alpha$;

$$y = a\cos(\beta)\cosh\left(\frac{x}{a\cos\alpha}\right)$$

se $\alpha = \beta$ ed $a\cos\alpha = a\cos\beta$ si ha ancora una catenaria

$$y = m\cosh\left(\frac{x}{m}\right) \quad \text{ove: } (m = a\cos\alpha = b\cos\beta)$$

Si è dovuto proiettare il catenoide perchè un piano

Si è dovuto proiettare il catenoide perché un piano che ruoti anche con rotazioni successive è come ruotasse una volta sola rispetto ad una determinata retta del piano iniziale e può pensarsi costituito di infinite parallele a tale asse; parallele che si proiettano in vera grandezza. In altre parole, un quadrato si proietta ancora in un quadrato se la seconda proiezione è del rettangolo ottenuto dalla prima proiezione.

Nella figura abbiamo riportato la catenaria iniziale: $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$; $\left[\cos 60° = \left(\frac{1}{2}\right)\ ;\ \frac{a}{2} = m\right]$ ruotata di 60° intorno all'asse x abbiamo ottenuto il catenoide: $y = (a\cos(60))\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = y = m\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$; $(m = a/2)$ la catenaria iniziale si è ruotata di 60° intorno all'asse y e si è ottenuto il catenoide $y = a\cosh\left(\frac{x}{m}\right)$ Infine preso un catenoide e ruotato rispetto all'altro asse (da cui è derivato) dello stesso angolo (60°) ritorna

la catenaria $y = m \cosh\left(\frac{x}{m}\right)$.

Se consideriamo la tensione in un punto P della catenaria iniziale, e la scomponiamo in orizzontale e verticale cioè secondo x e secondo y, si nota che la componente della tensione parallela all'asse intorno a cui ruota la figura resta invariata, mentre l'altra componente (ortogonale) si accorcia di $\cos\alpha$.

Nella figura abbiamo riportato come tensioni (che in ogni punto sono mutue) le azioni provenienti dagli appoggi delle catenarie in campo gravitazionale.
Poiché le componenti verticali rappresentano il peso del tratto di filo che va da quel punto al vertice della curva; i catenoidi non possono avere il peso uniformemente ripartito. I campo gravitazionale, la componente orizzontale H della tensione che figura nel vertice della curva resta immutata fino agli appoggi, qualunque sia la distribuzione del peso lungo il filo.
Se la distanza degli appoggi è fissa, ed è pure fissa la lunghezza del filo, notiamo che nella proiezione variano entrambi se la rotazione non ha l'asse parallelo agli appoggi, in questo caso varia solo la lunghezza del filo. Queste condizioni rendono difficoltosa la distribuzione

condizioni rendono difficoltosa la distribuzione dei pesi in campo gravitazionale, su un filo che debba assumere la configurazione della proiezione di una catenaria.

Se pensiamo di sovrapporre le due catenarie di modulo "a" e di modulo m, riferendole allo stesso sistema di assi, possiamo calcolare

i punti di intersezione ed avremo:

$$a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = m \cosh\left(\frac{x}{m}\right)$$

$$r a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = r a\cosh\left(\frac{x}{m}\right)$$

se $m = a \cos\gamma$

$$r a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = r a\cosh\left[\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{\cos\gamma}\right)\right]$$

Sappiamo che $r a\cosh(x)$ ammette due soluzioni per $x > 1{,}50887956$,

$$\left.\begin{matrix} x/a_1 \\ x/a_2 \end{matrix}\right\rangle = \operatorname{argcosh}(x/a) = \left\langle\begin{matrix} x_1/a \\ x_2/a \end{matrix}\right.$$

$$\frac{x_1/a}{x_2/a} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m}{a} = \cos(\;)$$

Cioè $\cos(\gamma)$ è il rapporto degli argomenti oltreché il rapporto dei parametri. Trova qui giustificazione l'esistenza di due catenarie per un punto determinato di cui è già esposto il problema.

I valori dell'angolo γ, o meglio, del suo complementare $(90° - \gamma)$ possono utilmente affiancarsi alla colonna di $\tau a \cosh(x)$ nella tabella delle funzioni iperboliche. Daremo tabelle appropriate.

È interessante notare che se $\tau a \cosh(x)$ ammette un minimo, lo stesso minimo è in $\tau a \exp(x) = \frac{e^x}{x}$

per $x = 1{,}199678640257733833916369848641141944 26145$

$\text{raexp}(x) = e^x/x = 2{,}7666160177064139861694964026$

Si noti anche che racosh(x) è la tangente tri=
gonometrica dell'angolo che la retta uscente
dall'origine degli assi forma con l'asse x, an=
golo che ammette il valore limite $56° 27' 57'', 0065..$
la cui tangente $\tan(\alpha) = 1{,}5088795615383199289098844 88..$
oltre il quale la retta taglia la catenaria in due
punti che sono individuati dalla risoluzione di:
argracosh(x) che ammette due risoluzioni il cui
rapporto $\frac{x_1}{x_2} = \cos(\gamma)$. Si noti la reciprocità col
fatto che conoscendo x si possono trovare due va=
lori di a il cui rapporto è ancora: $\frac{a_1}{a_2} = \cos(\gamma)$
Abbiamo impiantato una tabella (vedi vol tabelle)

(racosh(x) = tg(α))	x_1	x_2	$\cos(\gamma)$ (x_1/x_2)	γ	α

1,508879561538	$(x_1=x_2)=1,199$	678640257	1	0	56° 27' 57",7
1,60	0,888120356	1,576576534	0,563322069	55° 42' 50",9	57° 59' 40",6
1,70	0,772812099	1,759784682	0,439151509	63° 57' 0",88	59° 32' 4",04
1,80	0,695374014	1,901542337	0,365689473	68° 32' 59",9	60° 56' 43",43
1,90	0,636621346	2,021390085	0,314942351	71° 38' 33",6	62° 14' 29",7
2,–	0,589387763	2,126799893	0,277124224	73° 54' 40",00	63° 26' 5",87
2,5	0,439204252	2,532248225	0,173444391	80° 0' 42",08	68° 11' 54",9
3	0,354498457	2,827747955	0,125364234	82° 47' 53",8	71° 31' 54",1

La Catenaria come curva di equilibrio di pesi uniformemente distribuiti (Muri piani o problema della parete)

Consideriamo una parete in muratura di altezza: "h", spessore: "t", lunghezza: "l", cernierata agli estremi inferiori: "A", "B"; (od anche: semplicemente appoggiato agli estremi)

Sia "y" l'asse verticale diretto verso il basso, mediano nella parete (asse di simmetria della parete)

Sia "x" l'asse orizzontale, mediano del bordo superiore. (Il bordo superiore della parete deve potersi considerare orizzontale, cioè non influenti le piccole variazioni)

Abbiamo sopra dimostrato che assunti x ed y come assi di riferimento, le curve di equazione:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

passanti per A (e per simmetria passanti anche per B) sono due reali, oppure una, oppure nessuna reale, definite da:

$$a = \frac{x_A}{\text{argracosh}\left(\frac{x_A}{y_A}\right)}$$

nel nostro caso:

$$x_B = x_A = \pm l/2 \quad ; \quad y_A = y_B = h \quad ;$$

Per cui l'esistenza di catenarie reali si ha se: $\frac{y_A}{x_A} = \frac{2h}{l} \geq 1,50887956...$

ed è condizione di stabilità per elementi reagenti solo a compressione, se la y è diretta verso il basso, come nel caso della parete.

Sia dunque: $\frac{2h}{l} > 1,50887956...$ avremo due valori di "a".

(Nell'esempio abbiamo preso $x_c = 5$ cioè $l = 10$, $h = 8$; $\frac{2h}{l} = 1,6$; $a_1 = 5,629867575..$; $a_2 = 3,171428657$; vedi cap. "Catenarie riferite allo stesso sistema di assi")

<u>Dimostriamo ora che il peso di parete gravante su ciascuna delle due catenarie è uniformemente ripartito lungo le catenarie stesse, e cioè che tali linee sono curve di equilibrio.</u>

Consideriamo la catenaria costituita da

elementi infinitesimi di lunghezza <u>costante</u> ds, avremo:

$$dx = ds \cos\alpha$$

poiché:

$$y' = \tan\alpha = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$dx = \frac{ds}{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

Il peso di parete gravante su "ds" sarà:

$$dp = ps \cdot t \cdot y \cdot dx \qquad (\text{ove: } ps = \text{peso specifico})$$

cioè sostituendo dx ed y:

$$dp = ps \cdot t \cdot \left(a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)\left(\frac{ds}{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}\right)$$

semplificando:

$$dp = ps \cdot t \cdot a \cdot ds$$

essendo costanti: a, ps, t, è costante in tutta la catenaria anche dp; ne consegue che le due catenarie sono curve di equilibrio.

Poiché abbiamo posto: $\frac{dp}{ds} = q =$ peso per unità di lunghezza della catenaria, avremo

$$\boxed{q = ps\,t\,a}$$

rispetto alla muratura q sarebbe il peso (per unità di lunghezza di catenaria) dell'area della superficie muraria di spessore "t" alta "a".

Ricordiamo che l'ordinata di un punto di una catenaria; moltiplicata per q è la tensione in quel

punto, e che catene della stessa lunghezza appese agli stessi appoggi assumono la stessa configurazione indipendente da q.

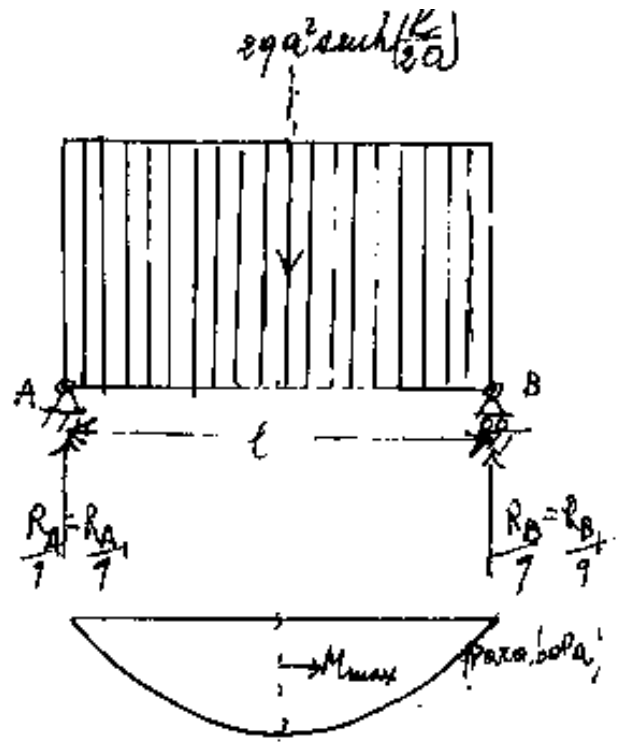
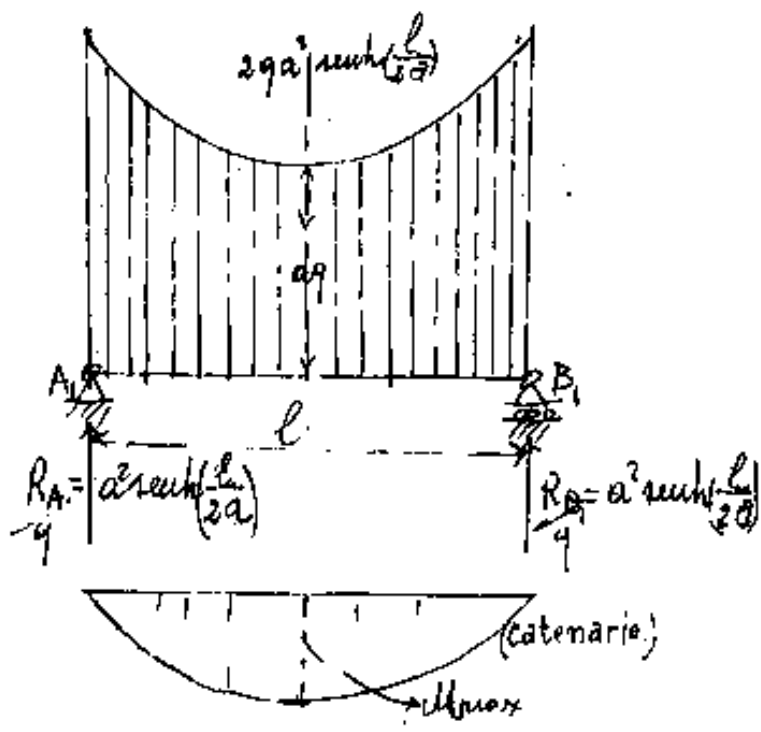
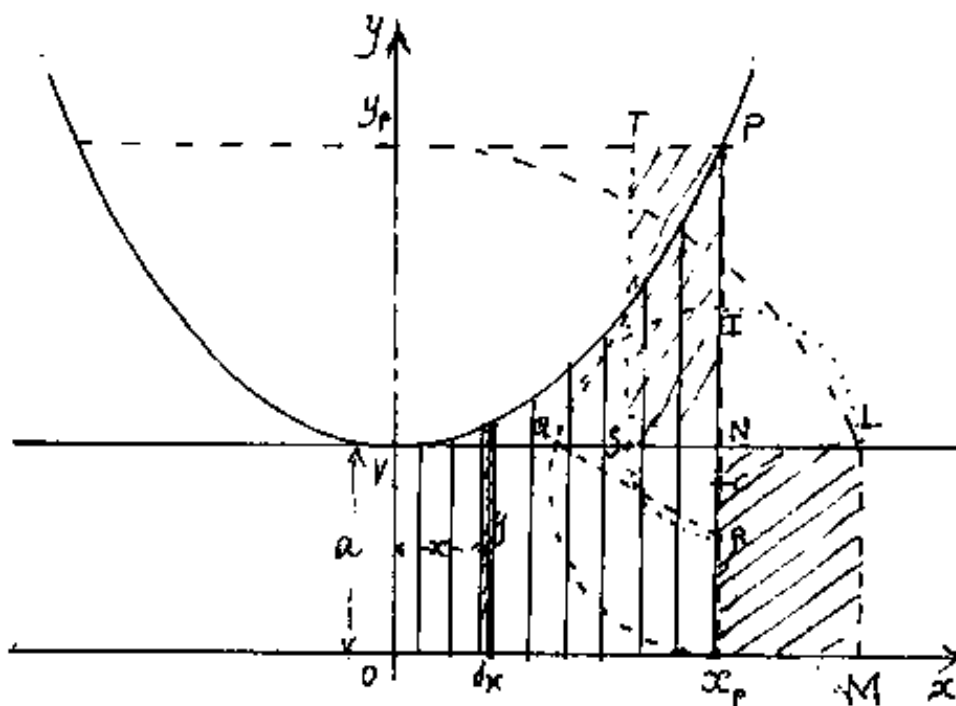
Per visualizzare meglio la questione invertiamo l'ordinata y (in modo da avere catenarie di trazione) e facciamo la seguente esperienza:

Sospendiamo a due punti fissi A e B una catenella di peso <u>uniformemente distribuito</u> (qualsiasi) essa assumerà la configurazione di equilibrio di una catenaria.

Se a ciascun elemento di tale catenella applichiamo un tratto di un'altra catena, (anche di peso unitario diverso purché uniforme) di lunghezza pari all'ordinata dell'elemento, la configurazione della catenaria non cambia. (il tratto di nuova catena deve essere apporto a tutti gli elementi della catenella).

Cioè una trave orizzontale con carico distribuito come una catenaria, ha come curva funicolare ancora una catenaria.

Una trave orizzontale con carico uniformemente distribuito, ha come curva funicolare una parabola

$2qa^2 \operatorname{senh}\left(\frac{\ell}{2a}\right)$

Notiamo alcune particolarità sull'equivalenza fra le aree sottese fra la catenaria ed un asse x (o parallelo) e le aree rettangolari.

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

area = A

$$dA = y \cdot dx$$

$$\int dA = \int_0^x \left(a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right) dx$$

$$A = a^2 \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$A = (a)\left(a \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

$$A = (a)(\overline{VL})$$

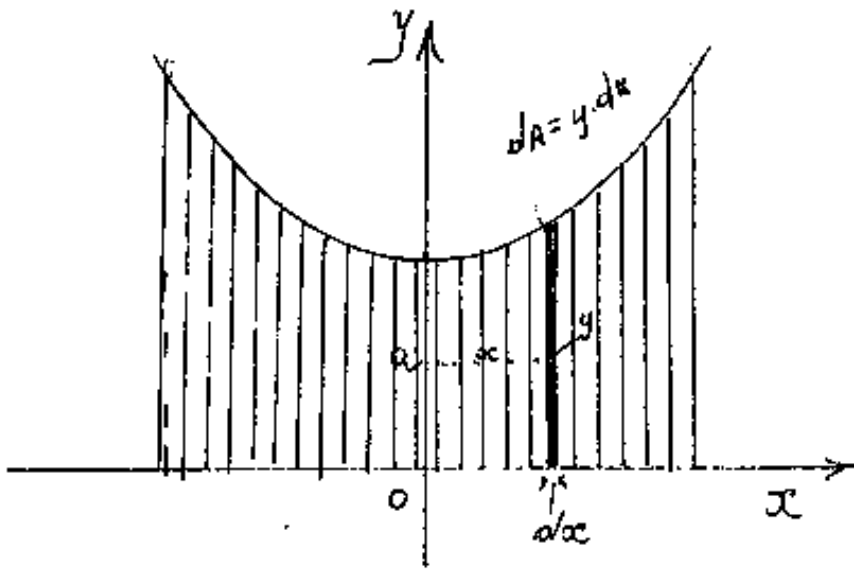
Cioè il rettangolo OVLM equivale l'area: $OVPx_p$

Ma il rettangolo $OVNx_p$ è comune alle due aree perciò il rettangolo x_pNLM equivale l'area: VPN

$$A_{x_pNLM} = \left(\left(a \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\right) - x\right)(a) = \overline{NQ}^2 = (\overline{SN})(\overline{NP}) = (\overline{SN})\, a \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Ribaltando il lato $\overline{NL}$ in $\overline{NI}$ e presa la metà in C $\overline{IC} = \overline{Cx_p}$ del segmento $\overline{Ix_p}$ = diametro della circonfe=

renza che taglia in Q il prolungamento di NL su NV.
Unito $\overline{PQ}$ la perpendicolare da Q trova R su $\overline{Ix_p}$
$(\overline{NR})(\overline{NP}) = \overline{NQ}^2 = A_{x_p NLM}$ perciò riportato $\overline{NR}$ in $\overline{NS}$
il rettangolo STPN equivale l'area VPN perciò
l'area interna della catenaria (Vy_pP) equivale
il rettangolo $Vy_pTS = \left((x \cdot y) - (a)\overline{VL}\right) = a\left(x \cosh\frac{x}{a} - a \sinh\frac{x}{a}\right)$.

Calcoliamo il baricentro dell'area sottesa fra la catenaria e l'asse delle x.

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dA = y \cdot dx$$

$$dA = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

$$dA = a^2\cosh\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\boxed{A = a^2 \operatorname{senh}\frac{x}{a}}$$

$$dS_y = x \cdot dA = x \cdot a^2\cosh\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$S_y = \int_0^x x\, a^2\cosh\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right) = a^3\int_0^x \frac{x}{a}\, d\left(\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\right) \text{ per parti:}$$

$$S_y = a^3\left\{\frac{x}{a}\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) - \int_0^x \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right)\right\} =$$

$$S_y = a^3\left\{\left(\frac{x}{a}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + 1\right\}$$

dividendo per $A = a^2\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = a\left\{\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - 1}{\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)}\right\} = \left\{x - a\,\frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)}\right\}$$

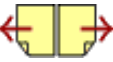
$$\boxed{x_G = x - a\coth\left(\frac{x}{a}\right) + a\operatorname{cosech}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$x_G = x - a\coth\left(\frac{x}{a}\right) + a\,\mathrm{cosech}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$x_G = x - a\,\frac{\mathrm{versh}\left(\frac{x}{a}\right)}{\mathrm{senh}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$S_x = \int_0^x \frac{y}{2}\,dA = \int_0^x \left(\frac{a}{2}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)\left(a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx = \frac{a^3}{2}\int_0^x \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)dx$$

$$\frac{S_x}{A} = \frac{\frac{a^3}{2}\left(\frac{\mathrm{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)}{2}\right)}{a^2\,\mathrm{senh}\,\frac{x}{a}} = y_G = \frac{a}{4}\left(\cosh\frac{x}{a} + \frac{x/a}{\mathrm{senh}\left(\frac{x}{a}\right)}\right)$$

$$y_G = \frac{1}{4}\left(y + x\,\frac{1}{\mathrm{senh}\left(\frac{x}{a}\right)}\right)$$

Abbiamo posto lo stesso carico complessivo sulle due travi in modo che avessero le stesse reazioni vincolari.

Il momento al centro della trave, se R è la reazione, $M_{max} = R\left(\frac{l}{2} - x_G\right)$, varia solo nei due casi il braccio di coppia che è

$a \frac{\text{versh}\left(\frac{l}{2a}\right)}{\text{senh}\left(\frac{l}{2a}\right)}$ per la catenaria

$\left(\frac{l}{4}\right)$ per il carico uniforme. (parabola)

Data la simmetria, è zero il taglio nella sezione $l/2$; conviene assumere l'asse y nella mezzeria della trave e calcolare il momento flettente variabile in x, che dovrà annullarsi per $x = l/2$.

Per $x = 0$ (mezzeria della trave) avremo:

$$M_{max} = \left(a^2 \text{senh}\left(\frac{l}{2a}\right)\right)\left(\frac{\text{versh}\left(\frac{l}{2a}\right)}{\text{senh}\left(\frac{l}{2a}\right)}\right) a = \left(a^3 \text{versh}\frac{l}{2a}\right)$$

$$M_{max} = a^2\left(a\cosh\frac{l}{2a} - a\right) = a^3\left(\cosh\frac{l}{2a} - 1\right) \quad \text{(catenaria)}$$

Per il carico uniforme

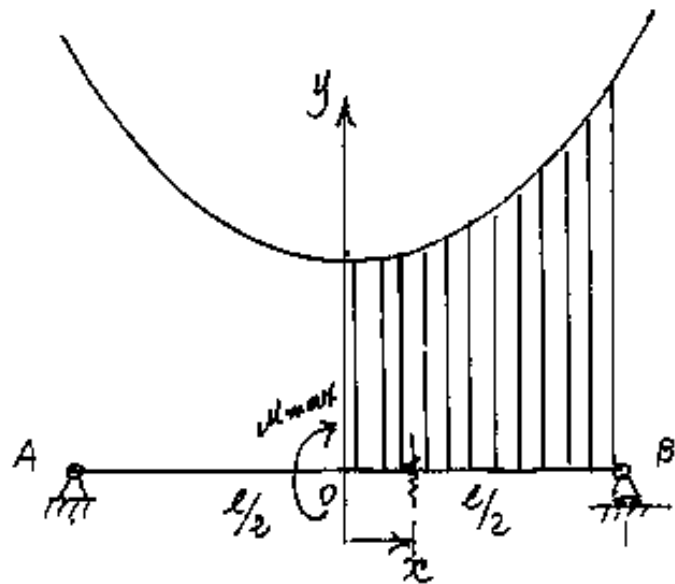
per il carico uniforme

$$M_{max} = \left(a^2 \operatorname{senh}\left(\frac{l}{2a}\right)\right)\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{a^2 l}{4}\left(\operatorname{senh}\frac{l}{2a}\right) \text{ (parabola)}$$

per $l = 2a$:

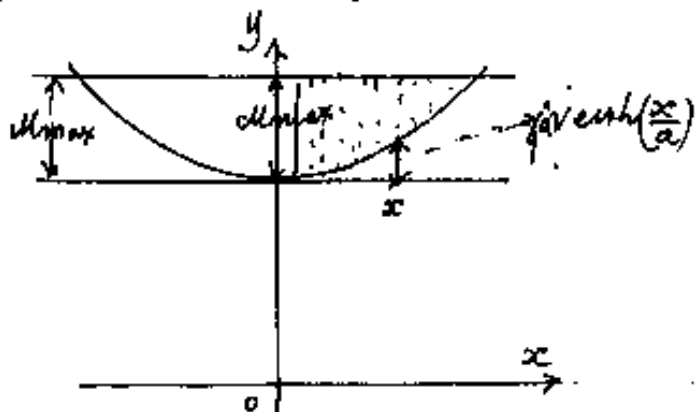
$$M_{max}(\text{catenaria}) = (0,543080634)\,a^3 = (\text{per } a=2)(q=1) = (4,344645078)\,q$$

$$M_{max}(\text{Parabola}) = (4,700804775)\,q \,.$$

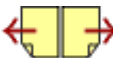
Cerchiamo ora di calcolare il momento variabile in x per un carico con distribuzione a catenaria.

Sappiamo che il momento massimo al centro è $\mathcal{M}_{max} = +a^3 \,\mathrm{versh}\left(\frac{l}{2a}\right) q$ l'area del carico da O ad x è $A_x = a^2 \,\mathrm{senh}\,\frac{x}{a}$

il baricentro di tale area dista da x : $a \dfrac{\mathrm{versh}(x/a)}{\mathrm{senh}(x/a)}$

per cui $\mathcal{M}_x / q = +a^3 \,\mathrm{versh}\left(\frac{l}{2a}\right) - a^3 \,\mathrm{versh}(x/a)$

quando $x = \frac{l}{2}$ si ha $\mathcal{M}_x = 0$

$$\mathcal{M}_x = q a^3 \left(\mathrm{versh}\left(\frac{l}{2a}\right) - \mathrm{versh}\left(\frac{x}{a}\right) \right)$$

Resta così dimostrato che il carico a distribuzione catenaria, (come il peso delle pareti sulle catenarie per un punto) ammette la curva funicolare catenaria.

ammette la curva funicolare catenaria.
Anzi considerando l'asse x con la sommità del muro, e l'asse y simmetrico verso il basso, per ogni punto passano due catenarie (cioè nel campo di esistenza delle catenarie riferite a quegli assi) e possiamo vedere l'insieme delle curve funicolari.

Come si rompono gli archi a tutto sesto

Riferiamoci ad un sistema di assi coordinati ortogonali con l'asse y verso il basso e proponiamoci di trovare l'arco di catenaria avente la corda il doppio della freccia.

Siano A e B gli estremi dell'arco di catenaria, V il vertice e C il punto medio di $\overline{AB}$, ove: $\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CV}$; sia "a" il modulo della catenaria ed avremo:

$$(y_A - a) = (y_B - a) = x_B = -x_A = a\cosh\left(\frac{x_B}{a}\right) - a$$

$$\cosh\left(\frac{x_B}{a}\right) - 1 = \left(\frac{x_B}{a}\right)$$

$$\text{versh}\left(\frac{x_B}{a}\right) = \left(\frac{x_B}{a}\right)$$

$$\text{raversh}\left(\frac{x_B}{a}\right) = 1$$

Dalle tavole che riportano: "raversh(x)" abbiamo: $\left(\frac{x_B}{a}\right) = \left(\frac{\overline{CV}}{a}\right) = \text{argraversh}(1) = 1{,}616137513774313835\ldots = k_e$

$y_B/a = 2{,}616137513774313835\ldots = (y_A/a) = (y_C/a)$

Per AVB passerà un cerchio con centro in C

Per AVB passerà un cerchio con centro in C che in AVB formerà un arco a tutto sesto in estradosso alla catenaria.

Con lo stesso centro C, in intradosso alla catenaria, vi sarà un cerchio tangente interno alla catenaria determinabile dalla condizione di avere per raggio la minima distanza da C

dei punti della catenaria stessa.

Detta $\overline{CT}$ tale distanza avremo: (T = punto di tangenza)

$$\left(\frac{\overline{CT}}{a}\right)^2 = \left(\left(\frac{y_c}{a}\right) - \left(\frac{y_T}{a}\right)\right)^2 + \left(\frac{x_T}{a}\right)^2$$

possiamo scrivere:

$$\left(\frac{\overline{CT}}{a}\right)^2 = \left(\frac{y_c}{a} - \cosh\left(\frac{x_T}{a}\right)\right)^2 + \left(\frac{x_T}{a}\right)^2$$

derivando: ed uguagliando a zero:

$$\frac{d\left(\overline{CT}/a\right)^2}{d\left(x_T/a\right)} = 2\left(\left(\frac{y_c}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_T}{a}\right)\right)\left(-\operatorname{senh}\left(\frac{x_T}{a}\right)\right) + 2\left(\frac{x_T}{a}\right) = 0$$

$$\cosh\left(\frac{x_T}{a}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{x_T}{a}\right) - \left(\frac{y_c}{a}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{x_T}{a}\right) + \left(\frac{x_T}{a}\right) = 0$$

$$\operatorname{rasenh}\left(\frac{x_T}{a}\right)\left[\left(\frac{y_c}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_T}{a}\right)\right] = 1$$

$$2,6161374513 7743 - \cosh\left(\frac{x_T}{a}\right) = \frac{1}{\operatorname{rasenh}\left(\frac{x_T}{a}\right)}$$

$$\left(\frac{x_T}{a}\right) = 1,208563606289164 5$$

$$\left(\frac{y_T}{a}\right) = 1,82364855101 3543.$$

$$\left(\frac{y_c}{a} - \frac{y_T}{a}\right) = 0,7924888962760770$$

$$\overline{CT} = 1,4452213486329 0 = R_t$$

$$\operatorname{senh}\left(\frac{x_T}{a}\right) = 1,5250226351152 = \tan g(\alpha)$$

$$\alpha^\circ = 56^\circ\ 44'\ 45'',6842112..$$

$$\alpha_{rad} = 0,99004049456044 54..$$

Tutte le misure lineari sono riferite al modulo "a" unitario.

Raggio di estradosso $R_1 = 1{,}616137513{,}774\,(a)$

" di intradosso $R_2 = 1{,}445221384{,}633\,(a)$

$(R_1 - R_2) = \Delta R \quad = 0{,}170916129141\,(a)$

ΔR = spessore del terzo medio dell'arco. (ricordando la verifica del Mery) Essendo la catenaria la curva funicolare del carico della muratura sopra= stante, se la sua azione, di mutua compressio= ne fra i conci, rimane entro il terzo medio dei conci stessi, (cioè entro il nocciolo centrale d'inerzia), non si verifica trazione fra i conci stessi.

O

x

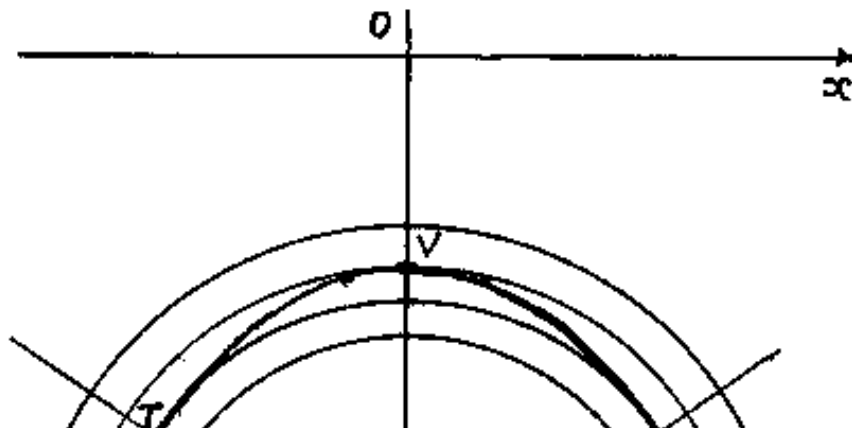
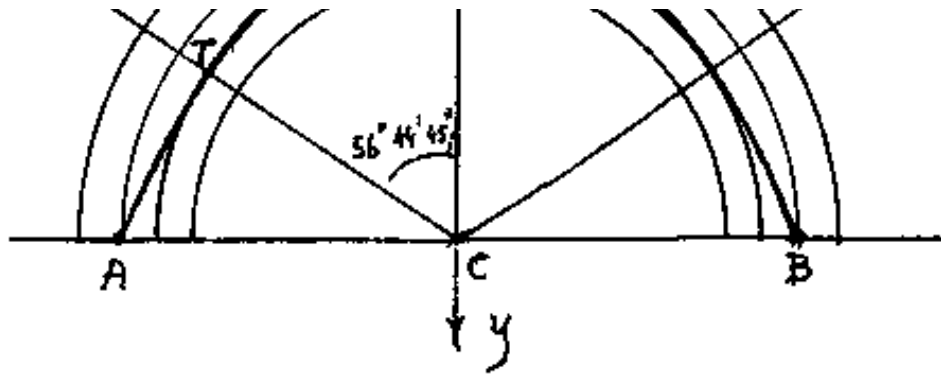
V

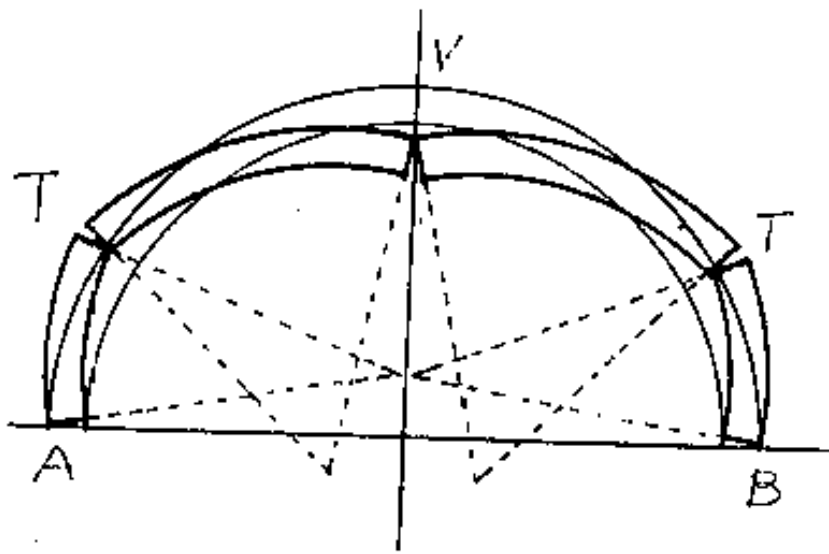
T

T

56° 44' 45''

A C B

y

Quindi occorre fare un arco aventi i conci di altezza non inferiore a tre volte Δ_R cioè: 0,512748387 (a); il raggio medio: $\frac{R_1+R_2}{2} = 1,530679449 (a)$.

I punti di tangenza della funicolare catena=
ria sono le sezioni ove la trazione provoca
la rottura dell'arco. La modalità di rot=
tura è rappresen=
tata nella figura
a fianco.

La trazione nel=
l'intradosso fa
calare il vertice V,
i tronconi spingendo orizzontalmente
provocano la rottura nelle sezioni T.
Notare che la funicolare catenaria in
A e B provoca trazione in intradosso.
Se l'arco è ribassato (per esempio avente la
corda a livello T), se è impedito lo slit=
tamento dei punti T, l'arco non può
rompersi. Spesso vediamo catene di ferro
poste sotto la corda a livello T.

...posta sotto la corda a livello T.

I Romani usavano "rinfiancare" i punti T, ponendo pesanti macigni per impedire lo slittamento.

Si è verificato sperimentalmente con piano inclinabile la rottura di

un arco fatto di conci affiancati senza malta.

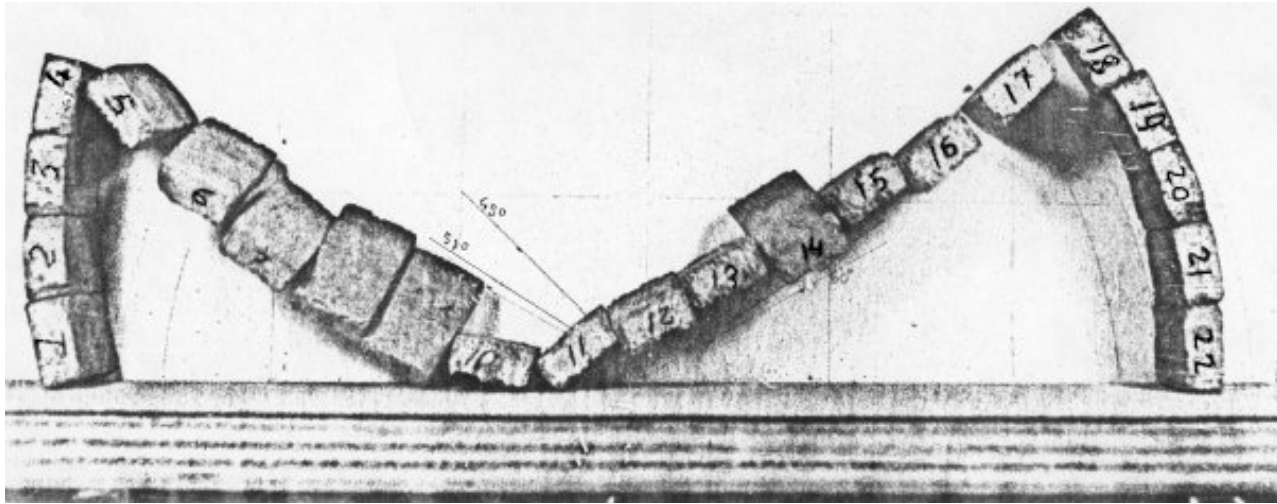
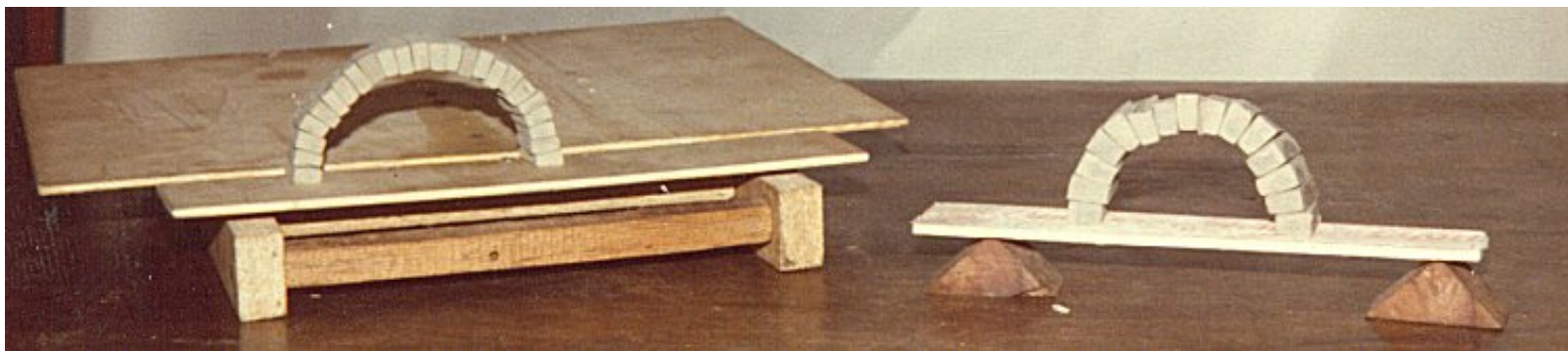
I conci sono montati in piano su un foglio di carta posto sul piano inclinabile.

Il foglio di carta è stato necessario per disegnare dal centro i raggi inclinati di 45°, di 57°, di 60°, in modo da verificare i raggi di rottura.

Montato l'arco in piano si è iniziato ad inclinare il piano di sostegno.

I singoli conci, su piano inclinato, erano sollecitati a scendere, ma l'attrito col piano di posa ne impediva prima e ne limita poi il movimento. Quando però la componente tan

genziale, uguaglia e poi supera l'attrito col piano inclinabile, l'arco si muove e la sua rottura può essere ripresa cinematograficamente, per poterne riprodurre a rallentatore le modalità, o con la moviola riprodurne le fasi salienti.

Queste ricerche interessarono studenti che ne fecero oggetto delle loro tesi.

Riproduciamo la foto di rottura di un'arco e la foto di archi in piedi, senza malta, ottenuti col piano inclinabile.

Catenarie riferite ad assi traslati

Abbiamo già accennato alla traslazione orizzontale (cioè secondo l'asse x), per dare i fondamenti per il calcolo di cavi flessibili soggetti a carichi concentrati.

La traslazione secondo l'asse y, l'abbiamo accennata per il cappio di due catenarie passanti per un punto, le catenarie esterne ed interne sono ad assi traslati in y.

Se la traslazione è pari ad "a" sappiamo:

$$(y+a) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) \; ; \quad y = a\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right) = a\,\mathrm{versh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

La formula generale per la traslazione di assi nella catenaria è:

$$(y-n) = a\cosh\left(\frac{(x-m)}{a}\right) =$$

$$\left(\frac{y}{a} - \frac{n}{a}\right) = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{m}{a}\right) - \mathrm{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{senh}\left(\frac{m}{a}\right)$$

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\left[\cosh\left(\frac{m}{a}\right) - \tanh\left(\frac{x}{a}\right)\sinh\left(\frac{m}{a}\right)\right] + n$$

I punti comuni a due catenarie traslate di m_1, n_1; ed m_2, n_2; saranno date da:

$$a\cosh\left(\frac{x-m_1}{a}\right) + n_1 = a\cosh\left(\frac{x-m_2}{a}\right) + n_2$$

$$a\left[\cosh\left(\frac{x-m_1}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x-m_2}{a}\right)\right] = (n_2 - n_1)$$

ed utilizzando le formule di prostaferesi:

$$\left(\frac{n_2-n_1}{a}\right)= 2\,\operatorname{senh}\left(\frac{(x-m_1)+(x-m_2)}{2a}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{(x-m_1)-(x-m_2)}{2a}\right)$$

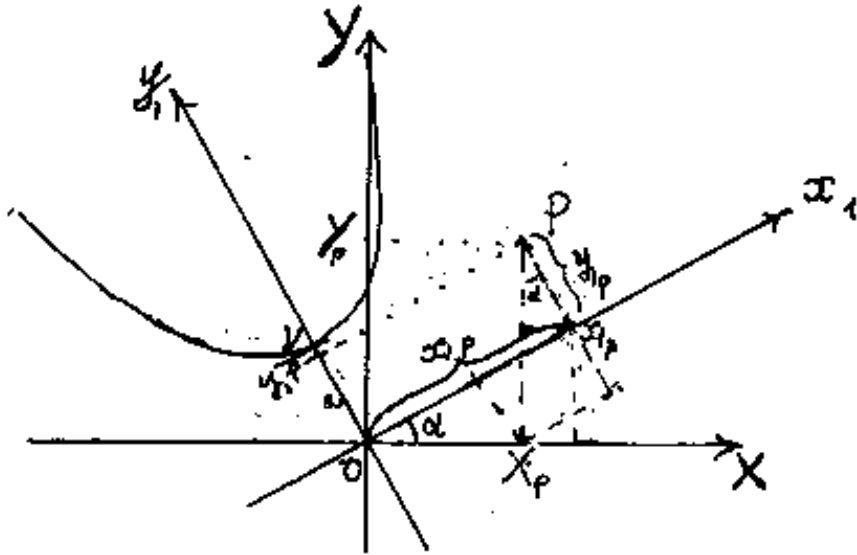
$$\operatorname{senh}\left(\frac{2x-(m_1+m_2)}{2a}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{m_2-m_1}{2a}\right)=\left(\frac{n_2-n_1}{2a}\right)$$

$$\operatorname{senh}\left[\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{m_1+m_2}{2a}\right]=\left(\frac{n_2-n_1}{2a}\right)\Big/\operatorname{senh}\left(\frac{m_2-m_1}{2a}\right)$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)=\operatorname{argsenh}\left[\frac{(n_2-n_1)}{2a\,\operatorname{senh}\left(\frac{m_2-m_1}{2a}\right)}\right]+\left(\frac{m_1+m_2}{2a}\right)$$

Sostituendo $\left(\frac{x}{a}\right)$ nelle due espressioni della $\frac{y}{a}$ si verificano i calcoli.

Occorre osservare che catenarie di diverso modulo "a", hanno il vertice traslato verticalmente di (a_1-a_2) come abbiamo già visto.

Catenarie ad assi ruotati

Ricordiamo che una funzione riferita agli assi x_1 ed y_1 ruotati di α in senso positivo (antiorario) rispetto agli assi principali: X, Y; può essere riferita, (punto per punto) agli assi principali; infatti:

$$\begin{cases} X = x_1 \cos\alpha - y_1 \operatorname{sen}\alpha \\ Y = y_1 \cos\alpha + x_1 \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

L'equazione della nostra catenaria è

$$y_1 = a \cosh\left(\frac{x_1}{a}\right) = a + \operatorname{versh}\left(\frac{x_1}{a}\right)$$

è quindi opportuno usare le formule inverse.

$$\begin{cases} x_1 = X\cos\alpha + Y\operatorname{sen}\alpha \\ y_1 = Y\cos\alpha - X\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

avremo: (l'equazione generale)

$$\boxed{\left(y\cos\alpha - X\operatorname{sen}\alpha\right) = a\cosh\left(\frac{X\cos\alpha + Y\operatorname{sen}\alpha}{a}\right)}$$

Le cordinate del vertice V sono:

$$\begin{cases} X_V = -a\operatorname{sen}\alpha \\ Y_V = a\cos\alpha \end{cases}$$

per $X = 0$; $\rightarrow$ $y\cos\alpha = a\cosh\left(\frac{Y\operatorname{sen}\alpha}{a}\right)$

$$\cot g\alpha = \operatorname{racosh}\left(\frac{y}{a}\operatorname{sen}\alpha\right)$$

(abbiamo diviso per: $(y \operatorname{sen}(\alpha))$) da cui:

$$\operatorname{argracosh}(\operatorname{cotg}\alpha) = y\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{argracosh}(\operatorname{cotg}\alpha)}$$

Le due soluzioni sono le ordinate dei punti in cui la catenaria interseca l'asse delle ascisse.

Si noti che $\operatorname{argracosh}(\operatorname{cotg}\alpha)$ non ammette soluzioni per $\operatorname{cotg}(\alpha) < 1{,}5088795615\ldots$ cioè per $\alpha > 33°\,32'\,2'',99$

Facciamo alcuni casi particolari.

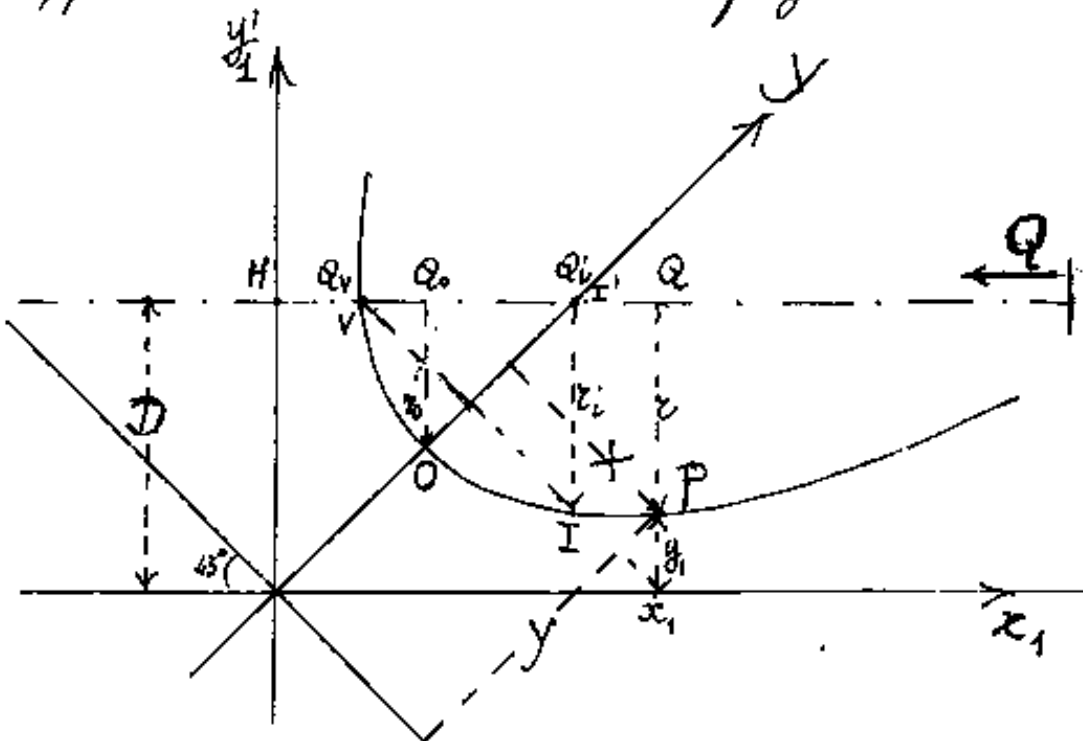
per $\alpha = 45°$; $\operatorname{sen}(\alpha) = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = a\cosh\left(\frac{x+y}{a\sqrt{2}}\right)$$

$$(y - x) = (a\sqrt{2})\left[\cosh\left(\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{y}{a\sqrt{2}}\right) + \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{y}{a\sqrt{2}}\right)\right]$$

Poiché i costoloni e le vele della cupola di S. Maria del Fiore di Firenze sono sovrapponibili rispettivamente a ca= tenoidi e catenarie ad assi inclinati di 45°, - Sulla base di rilievi effettuati da W. Ferri, M. Fondelli, P. Franchi, F. Greco, fotogrammetrica= mente (c.f.r. Bollettino Ingegneri N° 10 anno 1972 - articolo

C. Brogi - Su alcuni aspetti delle curve funicolari) e restituito, tramite computer, in coordinate cilindriche, ed in proiezioni ortogonali; si è ritenuto opportuno disporre il disegno della catenaria inclinata di 45° riferita ad x, y, in modo che l'asse Q delle coordinate cilindriche fosse orizzontale e distanziato di "D" rispetto all'asse orizzontale x_1 e sia H il punto origine delle dimensioni Q effettuate nel verso in figura.

X

Per un punto generico P avremo:

$$\begin{cases} x_1 = (H - Q) \\ y_1 = (D - \tau) \end{cases}$$

con $(Q ; \tau)$ ≡ coordinate cilindriche.

sommando e sottraendo si ha:

$$\begin{cases} (x_1 + y_1) = (H + D) - (Q + \tau) = (X + Y)\cos(\alpha) - (X - Y)\operatorname{sen}(\alpha) \\ (x_1 - y_1) = (H - D) - (Q - \tau) = (X - Y)\cos(\alpha) + (X + Y)\operatorname{sen}(\alpha) \end{cases}$$

Nel caso particolare di $\alpha = 45° = \pi/4$ si ha:

$sen(\alpha) = cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè:

$$\begin{cases} (x_1 + y_1) = Y\sqrt{2} = (H+D) - (Q+\tau) \\ (x_1 - y_1) = X\sqrt{2} = (H-D) - (Q-\tau) \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} X = \frac{(H-D)}{\sqrt{2}} - \frac{(Q-\tau)}{\sqrt{2}} \\ Y = \frac{(H+D)}{\sqrt{2}} - \frac{(Q+\tau)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Essendo costanti H e D poniamo:

$$K_1 = (H+D)/\sqrt{2} \quad ; \quad K_2 = (H-D)/\sqrt{2}$$

avremo:

$$\begin{cases} X = K_2 - (Q-\tau)/\sqrt{2} \\ Y = K_1 - (Q+\tau)/\sqrt{2} \end{cases}$$

La Catenaria è simmetrica rispetto all'asse Y (ammette un minimo per $X=0$) perciò il valore:

$$Y_{min} = (Q_0 + \tau_0)/\sqrt{2} + K_1$$

ove: Q_0 ed r_0 sono le "misure" sul vertice.

Ma K_1 = costante, perciò anche:

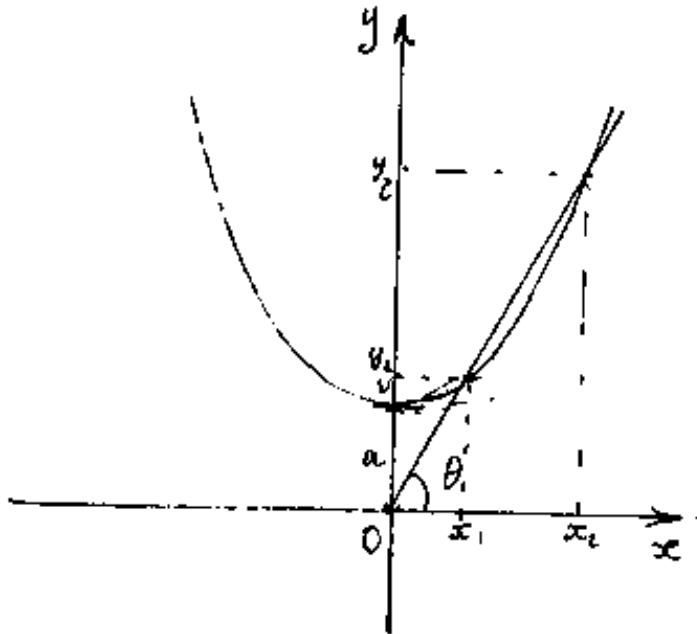
$$(Q_0 + r_0) = (Q + r)_{minimo}.$$

Cioè sommando le coordinate $(Q + r)$ provenienti dalla misurazione, è possibile trovare il minimo che rappresenta le coordinate del vertice della catenaria.

La catenaria in coordinate polari

Se sostituiamo:

$$x = \rho \cos\theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta$$

nella equazione della catenaria otteniamo:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \longrightarrow \rho \operatorname{sen}(\theta) = a \cosh\left(\frac{\rho \cos(\theta)}{a}\right)$$

dividendo per $\rho \cos(\theta)$

$$\operatorname{tang}(\theta) = \operatorname{racosh}\left[\frac{\rho \cos(\theta)}{a}\right]$$

da cui:

$$\boxed{\rho = \frac{a}{\cos\theta} \operatorname{argracosh}(\operatorname{tg}(\theta))} < \begin{matrix}\rho_1 \\ \rho_2\end{matrix}$$

per ogni θ si hanno due ρ purché θ sia maggiore del valore limite: 56° 27' 57",01 ($\operatorname{tg}\theta = 1.50887956$) e minore di 123° 32' 2",99.

Si noti che: $(\rho_2 - \rho_1)$ è la lunghezza della corda sulla retta per il centro assi.

sulla cella per il cambio assi.

Noti invece ρ e θ i moduli delle due catenarie:

$$a_1, a_2 = \frac{\rho \cos(\theta)}{\operatorname{argcosh}(\operatorname{tg}\theta)}$$

Se invece vogliamo che per ogni θ vi sia un solo ρ dobbiamo traslare di "a" l'asse x e far coincidere l'origine degli assi col vertice

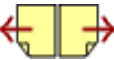
Dalle formule esposte si calcolano $(H-D)$; $(H+D)$ è possibile ora calcolare H e D; X ed Y (vedi formula) con ciò abbiamo riportato i dati del rilievo alle coordinate x; y; che si affiancano in due colonne.

Per ciascun punto X, è possibile calcolare la coordinata $y_c = a \cosh\left(\frac{X}{a}\right)$; riportiamo questi valori nella nuova colonna y_c, quindi l'ultima colonna $s=(y-y_c)$ ci dirà quali sono gli scostamenti dalla curva catenaria.

La formula generale per la ruotazione assi di una curva catenaria:

$$\left(y(\cos\alpha) - x(\operatorname{sen}\alpha)\right) = a \cosh\left(\frac{x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha}{a}\right)$$

è difficilmente esplicitabile.

Supponendo noti (o assegnati) l'angolo, la x, ed il modulo "a" la y è calcolabile per tentativi.

Sostituendo K_1 e K_2 :

$$\begin{cases} (H-D) = (Q_0 - \tau_0) & \text{(già nota)} \\ (H+D) = a\sqrt{2}\cosh\left(\frac{l}{2a}\right) + Q_v \end{cases}$$

sommando e sottraendo si ha:

$$H = \frac{1}{2}\left[a\sqrt{2}\cosh\left(\frac{l}{2a}\right) + Q_v + Q_0 - \tau_0\right]$$

$$D = \frac{1}{2}\left[a\sqrt{2}\cosh\left(\frac{l}{2a}\right) + Q_v - Q_0 + \tau_0\right]$$

Noti H e D è individuata la retta Q rispetto ai nostri sistemi di riferimento $x_1; y_1$ ed $X; Y$.

Se disponiamo di un rilievo di una linea eseguito misurando le progressive lungo un al= lineamento e normalmente ad esso gli scosta= menti dalla curva, (è il caso delle coordinate cilindriche per linee spaziali, se tali linee giaccio= no in piani verticali si ha il caso in esame), e vogliamo controllare se la linea è una ca= tenaria, si procede nei calcoli come segue:

Disponiamo delle progressive ...

Disponiamo della progressiva Q e degli scartamenti τ, a fianco riportiamo la colonna $(Q+\tau)$.
L'esame di questa colonna ove $(Q_r+0)=Q_r=(Q_i+\tau_i)$ fra Q_r e Q_i deve esserci un massimo $(Q_o+\tau_o)$ ove $(Q_i+\tau_i)$ ove nell'intervallo: $Q_r \div Q_I$ $Q_r=(Q_i+\tau_i)$ sono minimi. Si affianca anche la colonna $(Q-\tau)$.

Attenzione ai simboli che abbiamo conservato quelli dell'articolo citato:
Il punto O è il punto di massima curvatura, il punto V è il punto alla massima quota, il punto I è il simmetrico di V rispetto ad O.
Se consideriamo: $\overline{VI} = l$ = corda della curva, si ha:

$$l/2 = r_i/\sqrt{2}$$

la freccia:

$$f = r_o\sqrt{2} - r_i/\sqrt{2}$$

$$\boxed{\frac{f}{l/2} = \left(\frac{2r_o}{r_i} - 1\right)}$$

Se la curva è una catenaria si ha:

$$\frac{f}{l/2} = \frac{\cosh(l/2a) - 1}{l/2a} = \text{raversh}(l/2a)$$

cioè:

$$l/2a = \text{argraversh}\left(\frac{f}{l/2}\right)$$

$$\boxed{a = \frac{l/2}{\text{argraversh}(f/l/2)}}$$

$$\text{argravert}h\left(f/\ell_2\right)$$

noto il parametro "a" della catenaria:

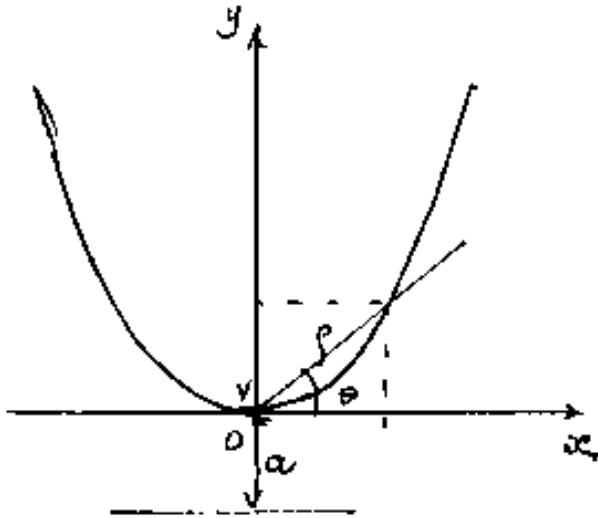
$$y_V = y_I = a\cosh\left(\frac{\ell}{2a}\right)$$

$$K_1 = \left(y_I + \frac{Q_i + t_i}{\sqrt{2}}\right) = y_V + \frac{Q_V}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{K_1 = a\cosh\left(\frac{\ell}{2a}\right) + \frac{Q_V}{\sqrt{2}}}$$

della catenaria in questo caso abbiamo:

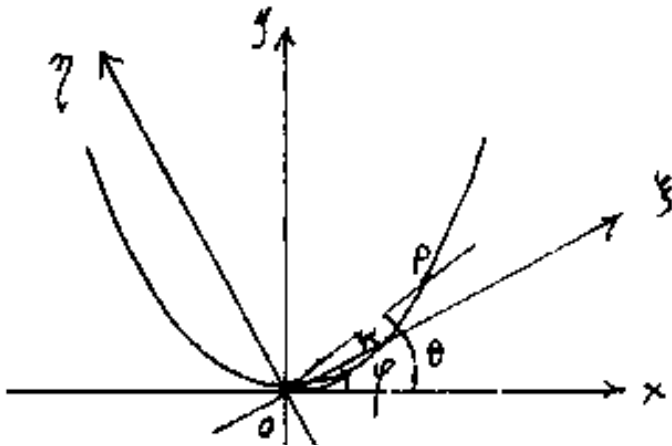
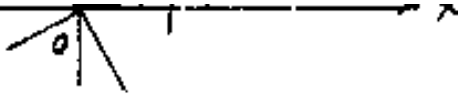
$$y = a \operatorname{versh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\rho \operatorname{sen}\theta = a \operatorname{versh}\left(\frac{\rho\cos\theta}{a}\right)$$

$$(\tan\theta) = \operatorname{raversh}\left(\frac{\rho\cos\theta}{a}\right)$$

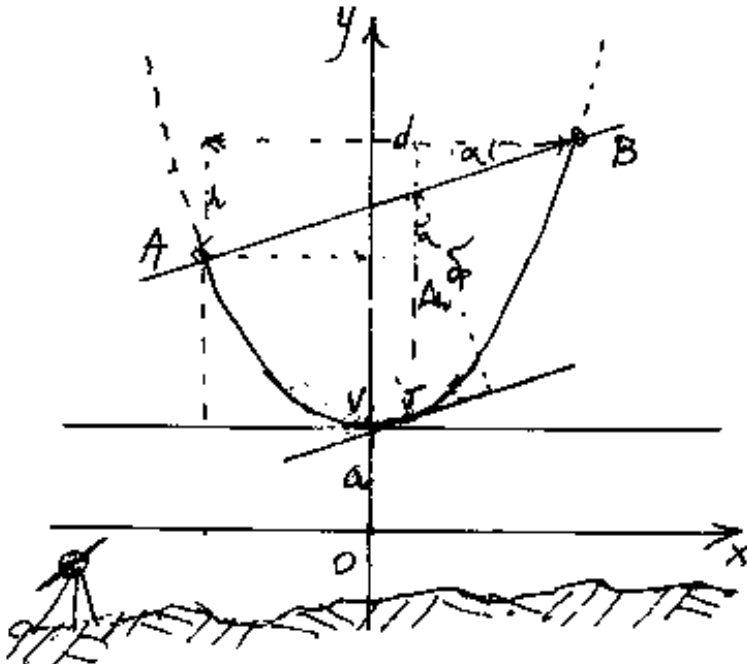
$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} \operatorname{argraversh}(\operatorname{tg}\theta)$$

ove θ deve essere maggiore di zero minore di 180°.

$$a = \frac{\rho\cos\theta}{\operatorname{argraversh}(\operatorname{tg}\theta)}$$

Questa formula consente di calcolare la catenaria ad assi ruotati di φ intorno al vertice della catenaria; siano ξ ed η gli assi ruotati e sia α l'argomento

rispetto ad essi avremo che ρ resta invariato ed al posto di θ viene posto $(\varphi+\alpha)$ con α che assume anche valori negativi fino $\alpha = (-\varphi)$ e non supera $(180° - \varphi)$.

$$\rho = \frac{a}{\cos(\varphi+\alpha)}\left[\operatorname{argcoversh}\left(tg(\varphi+\alpha)\right)\right]$$

Il calcolo delle frecce nelle campate non a livello di una catenaria – (Il rilievo)

Sia "d" la campata (distanza fra gli appoggi) ed "h" il dislivello fra gli appoggi; abbiamo già trattato la catenaria fra punti a diverso livello, ove posto: $l = L_{AB}$ = lunghezza della curva (fune o cavo) ed abbiamo trovato:

(il modulo):

$$a = \frac{d}{2\,\mathrm{argrasenh}\left(\sqrt{\frac{l^2-h^2}{d^2}}\right)}$$

(le coordinate)

$$X_A = a \ln\left|\left(\frac{a}{l-h}\right)\left(1-e^{-d/a}\right)\right|$$

$$Y_A = a \cosh\left(\frac{X_A}{Y_A}\right)$$

Consideriamo il rilievo ...

Consideriamo di voler rilevare, con strumenti topografici la catenaria; facilmente troviamo "d", "h", la pendenza: "$tg\alpha = h/d$", e la posizione di "V" cioè: X_A; X_B; $a \cdot \text{versh}\left(\frac{X_A}{a}\right) =$ = dislivello fra V. ed A, e dislivello fra V e B, da cui: la freccia in V =

$$f_{(V)} = (a)\,\text{versh}\left(\frac{X_A}{a}\right) + X_A \cdot tg(\alpha)$$

posto: $(a)\,\mathrm{Versh}\left(\frac{x_A}{a}\right) = \Delta_{h(VA)}$ avremo:

$$a = \frac{(X_A)}{\mathrm{argversh}\left(\Delta_{hVA}\right)}$$

definiti "a" e "V" sono definiti gli assi della catenaria: $\widehat{AB} = \ell = a\left(\mathrm{senh}\left(\frac{X_B}{a}\right) + \mathrm{senh}\left(\frac{X_A}{a}\right)\right)$

(Il segno di (X_A) fa aumentare o diminuire $\mathrm{senh}\left(\frac{X_A}{a}\right)$)

Il punto T ove passa la tangente parallela ad $\overline{AB}$ è facilmente individuabile:

$$\mathrm{senh}\left(\frac{X_T}{a}\right) = tg(\alpha)$$

$$X_T = \frac{a}{\mathrm{argsenh}(tg\alpha)}$$

il dislivello fra le rette parallele:

$$\Delta_h = y_B - \frac{h}{\ell}(X_B - X_T) - y_T$$

La distanza fra le due rette parallele

$$\delta_p = \Delta_h \cos(\alpha)$$

Il calcolo meccanico delle linee elettriche

[illegible]

aeree è ottimamente sviluppato in:
"Noferino Faletti" - "Trasmissione e Distribuzione dell'Energia Elettrica" - Vol I - cap IX - edit. Pàtron - Palermo - 1963 -

Tale trattazione è precedente la pubbli= cazione del nostro operatore "ta" e quindi non è in grado di esplicitare gli elementi per il

calcolo meccanico di cavi sospesi a punti non a livello.

Però il calcolo dei cavi sospesi non riguarda solo le linee elettriche, ma le funivie, i ponti sospesi ecc.

Il calcolo di tali cavi, di cui abbiamo già dato un cenno, sarà sviluppato dettagliatamente in seguito.

In questa sede cerchiamo di esporre le molteplici caratteristiche della catenaria.

La Catenaria come luogo dei punti descritti dal fuoco di una parabola volvente sull'asse delle x.

Definita la parabola come il luogo dei punti equidistanti

y

$y = \frac{x^2}{4a}$

punti equidistanti
da un punto F detto
fuoco e da una retta
r detta direttrice, e
considerato un punto
generico P, apparte=
nente alla parabola,

avremo, per definizione:

$$\overline{PF} = \overline{PD} = (y + a)$$

e dal triangolo PEF si ha:

$$(y+a)^2 = (y-a)^2 + x^2$$

da cui

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4a}}$$ (equazione della parabola al centro)

derivando si ha:

$$y' = \frac{x}{2a} = \frac{dy}{dx} = \tan(\alpha)$$

$$\overline{MH} = \frac{y}{\tan(\alpha)} = \frac{x^2/4a}{x/2a} = x/2$$

La retta tangente in un punto di una parabola, passa per il punto medio dell'ascissa (M), e quindi taglia l'asse delle y in un punto Q di ordinata uguale ed opposta a quella del punto di tangenza: $(y_Q = -y_P) = \overline{OQ}$; $\overline{QF} = \overline{FP}$; $\overline{QM} = \overline{MP}$.

La distanza δ dal fuoco della retta tangente,

essendo isoscele il triangolo QFP, (dimostra che $\widehat{FMP} = \widehat{FMQ}$ è retto) perciò $\delta = \overline{FM} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4a^2}$ come può dedursi dal triangolo FOM.

Per rettificare il tratto $\widehat{OP}$ della parabola, poniamo:

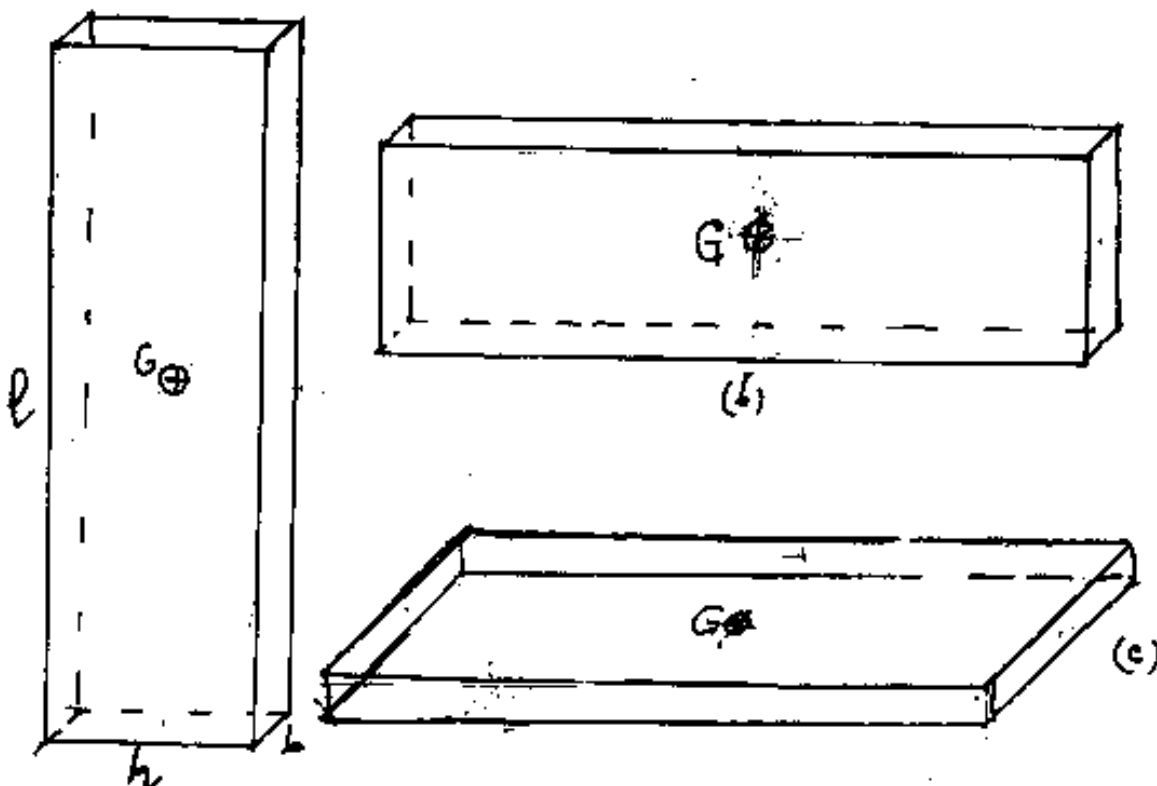
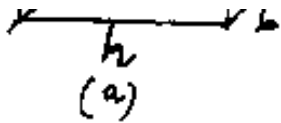
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \; ; \; dy = \frac{x}{2a}dx \; ; \; ds = dx\sqrt{1 + \frac{x^2}{2a}}$$

$$s = \widehat{OP} = \int_{\widehat{OP}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2}\, dx = 2a\int_{\widehat{OP}} \sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + 1}\; d\left(\frac{x}{2a}\right)$$

Stabilità e Instabilità dell'equilibrio statico

La stabilità e l'instabilità elastica è già stata trattata (carico di punta) (vedasi anche IV vol della Scienza delle Costruzioni di O. Belluzzi)

Guardando il parallelepipedo di spigoli b, h, l, appoggiato su una faccia, se: $b<h<l$, visivamente apprezziamo tre diversi gradi di equilibrio.

h
(a)

È qui evidente lo spostamento virtuale del principio dei lavori virtuali applicati ai corpi rigidi.
Nella figura (a) basta un piccolo spostamento per cadere, in (b) ne occorre uno maggiore, in (c) tende a ritornare al suo equilibrio.

ed essendo:

$$\overline{MP} = \frac{x}{2}\cos(\alpha) = \frac{x}{4a}\sqrt{x^2+4a^2}$$

sostituendo si ha:

$$\begin{cases} x_F = a \operatorname{argsenh}\left(\frac{x_p}{2a}\right) \\ y_F = \frac{1}{2}\sqrt{x_p^2+4a^2} = a\sqrt{\frac{x_p^2}{4a^2}+1} \end{cases}$$

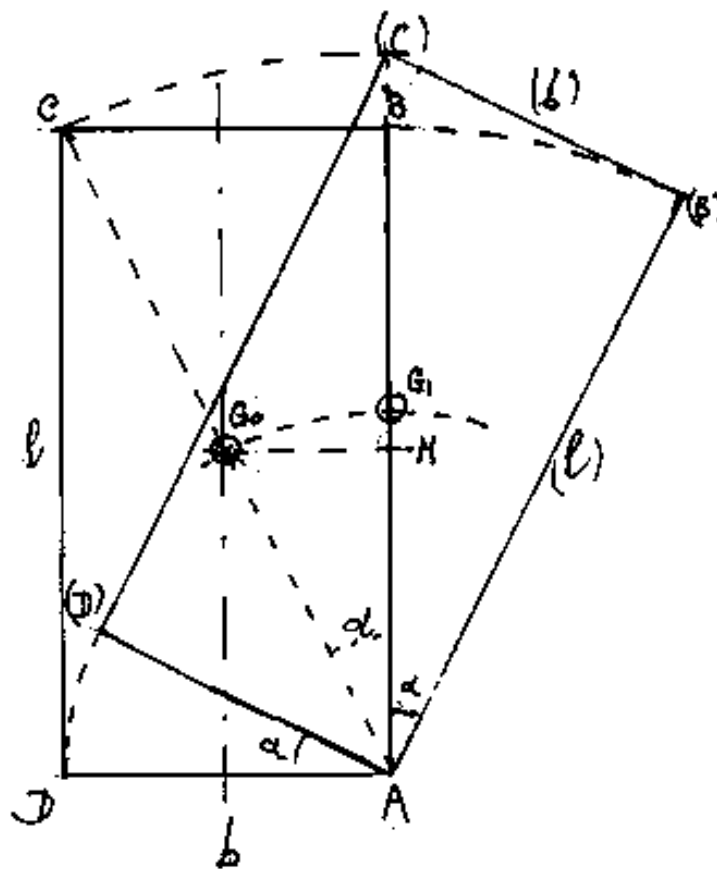
ricavando x_p dalle due equazioni:

$$\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x_p}{4a}$$

$$\boxed{y_F = a\cosh\left(\frac{x_F}{a}\right)}$$

Resta così dimostrato che il luogo dei punti descritti dal fuoco di una parabola che rotola, senza strisciare, sull'asse delle ascisse è una catenaria con parametro pari all'ordinata del fuoco.

Da questa proprieta' discende la possibilita' di disegnare una catenaria con tratto con=

di disegnare una catenaria con tratto continuo. (Basta ritagliare un profilo parabolico convesso su una lastra, porre una punta scrivente sul fuoco e far rotolare il profilo parabolico su una stecca da disegno, la punta scrivente traccia una catenaria)

Lo spostamento avviene per rotazione intorno ad uno spigolo di base, A. Quando il baricentro, dalla posizione iniziale G_0 si trova sulla verticale (in G_1) dell'asse di rotazione si ha la condizione di instabilità.

L'angolo $\alpha = \arctan(b/l)$

Data l'arbitrarietà delle unità di misura possiamo porre la semidiagonale $\overline{AG} = \frac{d}{2} = 1$ in tal modo: $\widehat{G_0G_1} = \alpha_{rad}$; $\overline{MG_1}$ = (sollevamento del baricentro), $= (1-\cos\alpha)$; $\overline{G_0M} = b/2 = \operatorname{sen}\alpha$.

Al crescere di l con b = cost diminuisce α

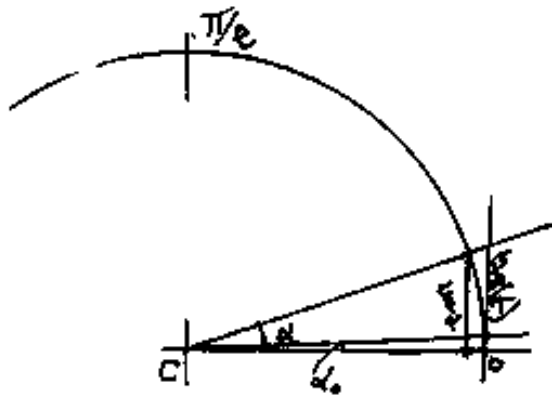
$\lim \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\ldots} = 1 \qquad (\overline{G_0G_1} = G_0M)$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1 \qquad (\overline{G_0G_1} = G_0M)$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = 0 \qquad (\overline{MG_1} = 0)$$ (infinitesimo di ordine superiore rispetto ad α)

Cioè $\overline{MG_1}$ è praticamente nullo quando $\operatorname{sen}\alpha \simeq \alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha$.

Tutta la teoria della scienza delle costruzioni è valida per spostamenti piccolissimi,

ove $sen\alpha$, α, e $tang\alpha$, possono confondersi.

si noti che per $\alpha = \alpha_0$, $sen\alpha$, α, e $tang(\alpha)$ possono confondersi mentre hanno ancora un valore apprezzabile. Invece $(1-\cos\alpha) = vers(\alpha)$ è praticamente zero.

Poiché, in campo gravitazionale, ed in assenza di attriti, si considera nullo il lavoro per lo spostamento orizzontale del baricentro: $\widehat{G_0G} \simeq \overline{G_0H}$, mentre tale spostamento è ancora apprezzabile vi è un angolo α_0, ove: $(1-\cos\alpha_0)$ è praticamente nullo.

I vecchi regoli calcolatori logaritmici confondevano sulla stessa scala graduata, il seno e la tangente per angoli inferiori ad $\alpha_0 = 5°\ 44'\ 0'',20 = 5{,}733412064 = arcsen(0{,}0999) = arctg(0{,}100402)$.

La quarta cifra decimale (ordine dei decimillesimi

la quarta cifra decimale (ordine dei decimillesimi di unità), per esempio: su 10 metri, 1 millimetro; (molti decametri in commercio hanno errori superiori)
Ma noi vogliamo fare una tabella, ove il rapporto b/l sia variabile, cioè il rapporto fra lo spigolo minore e lo spigolo maggiore,

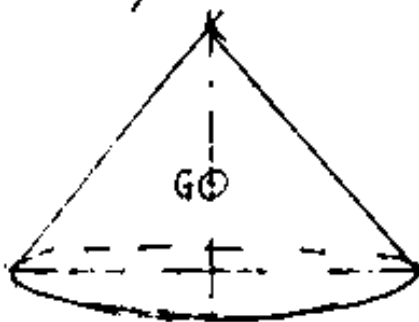
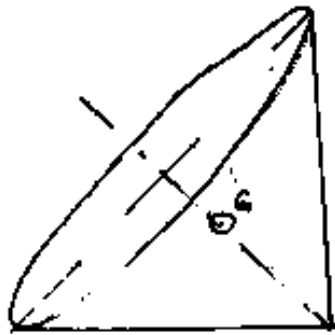
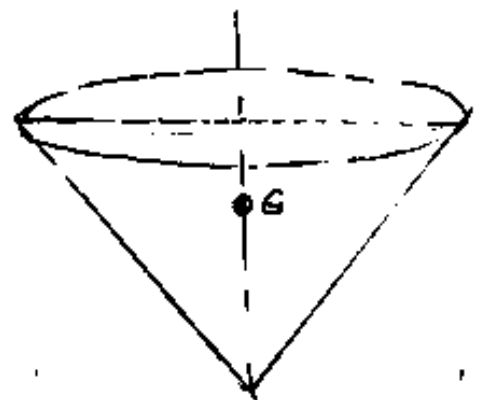
pari a tang(α), ci dia valori per apprezzare α.

b/h	tang(α)	α rad	sen(α)	(1 − cos α)	α°	Note
1/10	0,10000	0,09968	0,09950	0,004962	5° 42' 38",19	
1/50	0,02000	0,019997	0,0199960	0,00019994	1° 8' 44",75	
1/100	0,01000	0,0099996	0,0099995	0,000049996	0° 34' 22",58	
1/250	0,00400	0,00399998	0,00399997	≃ 8/10⁶	0° 13' 45",05	(1 − cos α) supera le precisioni di
1/500	0,00200	0,001999997	0,001999996	≃ 2/10⁶	0° 6' 52",53	lavorazione dei
1/1000	0,000 10	9,999996/10⁴	9,999995/10⁴	≃ 0,5/10⁶	0° 3' 26",26	materiali

Quindi una stecca lunga un metro e di spessore 4 millimetri (rapporto 1/250) sarà difficile farla stare in equilibrio ritta sulla faccia minore.

Considériamo il rapporto: 1/100. (una stecca lunga un metro e spessa 1 centimetro, se 4 cm è la sua larghezza. 400 cm³ il suo volume

è la sua larghezza, 400 cm³ il suo volume
sia Kg 3,12 il suo peso, 1,56 Kg cm. il momento
resistente sull'asse (spigolo) di rotazione la spinta
normale alla diagonale: $\sqrt{100^2 + 10^2} = 100,0049999$
sarà: Kg 0,0155 9922 ≃ 15,6 grammi !!
e se la stecca fosse di legno anziché di ferro basta
meno di gr. 1,5. (un po' di vento). Se considerià-
mo la precisione delle lavorazioni dei materiali

– Il rapporto critico si abbassa.
Per quanto esposto, data un'asta lunga l con un certo grado di finitura, (vedi disegno e progetti di macchine) posta per ritto su un piano (in assenza di correnti d'aria) esiste un limite del rapporto: $\frac{b}{l} = tg\,\alpha_o$ oltre il quale è impossibile una stabilità, anche precaria dell'asta. Gli elementi della tabella che abbiamo esposto ci danno un'idea orientativa su α_o.
Ma il problema ammette altri ampliamenti. I testi considerano tre tipi di equilibrio:

stabile — indifferente — instabile

dai quali si vede come una spinterella al cono poggiato sulla base il cono torna al suo posto, mentre se poggiato su una generatrice, si appoggerà su un'altra generatrice; nel terzo caso il cono non riacquista la sua posizione se poggiato sul vertice.

Nel caso di equilibrio stabile, lo spostamento innalza il baricentro che, tende (per piccoli spostamenti) a tornare al suo posto.
Nel caso di equilibrio indifferente, il baricentro rimane alla stessa altezza qualunque sia lo spostamento.
Nel caso di equilibrio instabile uno spostamento provoca l'abbassamento del baricentro che tenderebbe ulteriormente a scendere e non può tornare al suo posto senza spesa di lavoro esterno.

Se consideriamo una pila di prismetti, per esempio mattoni, notiamo che oltre una certa altezza non possiamo aggiungere mattoni senza che frani la nostra pila. L'esperienza può essere fatta con cubetti di legno, con zollette di zucchero, con gomme, con quaderni dello stesso

zucchero, con gomme, con quaderni dello stesso formato, ecc. In questo caso l'altezza della pila è fortemente condizionata dalla precisione delle superfici di contatto. Torneremo sull'argomento per evidenziare come una lamina elastica innalzandosi da un incastro scorrevole dopo una certa altezza comincia a flettersi.

Le equazioni algebriche

La parola "equazione" è utilizzata in due sensi: 1) Una espressione algebrica in cui figurano una o più incognite ed il segno = (uguale).
Abbiamo già visto nei sistemi lineari che occorrono tante equazioni (indipendenti) quante sono le incognite.
2) una espressione algebrica in cui figurano due o più variabili ed il segno = (uguale); e sono dette equazione della retta, del cerchio, della circonferenza, dell'ellisse, di una conica, di un solido sfera, cilindro, cono ecc.
Abbiamo visto come le equazioni lineari in due incognite rappresentino nel piano una retta, ed in tre incognite, nello spazio tridimensionale, un piano.
Abbiamo trattato le coniche (Vol II); ed i solidi (Vol IV),
Vogliamo qui trattare la risoluzione delle incognite nelle equazioni (dette algebriche), cioè

costituite da potenze della variabile, con grado superiore a due.

Per il teorema fondamentale dell'algebra (Teorema di J. La Ronde D'Alembert : 1717, 1783) che dice: "Ogni equazione algebrica in una incognita ha almeno una radice reale o complessa che la soddisfa." Sappiamo che la soluzione esiste. Però in equa=

zioni di grado superiore al IV non si hanno formule risolutive in generale, e, caso per caso operiamo, e spesso si opera per tentativi.

Qui tratteremo i polinomi in generale e le equazioni di 3° e 4° grado in particolare.

Ma l'espressione in x può essere con operatori logaritmici, trigonometrici, iperbolici ecc. ove, in certi casi, a tutt'oggi, non è stata trovata una formula risolutiva, per cui l'equazione può risolversi solo per tentativi. A questo proposito, precisiamo che mediante operatori da noi introdotti e pubblicati, (in particolare il ra $f(x) = \frac{f(x)}{(x)}$), è possibile esplicitare incognite in equazioni a tutt'oggi risolte per tentativi.

Trattandosi di operatori che agiscono su funzioni,

(non su valori numerici), l'argomento sarà analizzato a suo tempo.

I Polinomi (divisibilità dei polinomi)

Un polinomio di grado "n" può ridursi alla forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

ovvio che dividendo per a_n il coeff. di x^n è: 1,

e l'espressione come abbiamo già visto (Vol II) è il risultato dei prodotti dei binomi:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdot\cdot\cdot\cdot(x-\alpha_m)=0$$

ove: α_1, α_2, α_3, ~ α_m; sono le radici <u>reali o complesse</u> dell'equazione.

I coefficienti della x sono espressi da:

(v. Vol II):

$$a_i=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_{\binom{n}{i}}\prod_{\binom{m}{i}}\alpha\right)\left(X^{n-i}\right)(-1)^{2n-i}$$

Proponiamoci il problema inverso: dato il polinomio: ove: $(a_n=1)$

$$X^n+a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+\cdot\cdot\cdot\cdot a_1X+a_0=0$$

Ricordando che le radici complesse sono a due a due coniugate $(a+ib)$; $(a-ib)$ è evidente che le <u>equazioni di grado dispari ammettono almeno una radice reale</u>. e le restanti possono essere <u>coppie reali</u> o <u>coppie immaginarie</u>.

immaginarie.

Per $a_n = +1$, i restanti coefficienti assumono la forma:

$$X^n - S X^{n-1} + \sum \Pi\binom{n}{2} - \sum \Pi\binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n P = 0$$

ove: S = somma delle radici reali o complesse

$\sum \Pi\binom{n}{2}$ = somma dei prodotti a due a due delle radici

$\sum \Pi\binom{n}{3}$ = " " " a tre a tre delle radici

P = prodotto delle radici.

Una coppia di radici reali $\alpha_1 ; \alpha_2$ avrà come somma $S=(\alpha_1+\alpha_2)$ e come prodotto $P=(\alpha_1 \alpha_2)$.

Ma se: $\alpha_1=(a-ib)$; $\alpha_2=(a+ib)$ sono complesse coniugate la loro somma $S=2a$ ed il loro prodotto $P=(a^2+b^2)$. Anche in questo caso S e P reali perciò esiste sempre un trinomio, a termini reali, di secondo grado (x^2-Sx+P) che divide esattamente qualunque polinomio di grado $n>2$.

Un'altra osservazione importante è che se il polinomio ha il termine noto $a_0<0$ ammette almeno una radice reale >0 se il polinomio è di grado pari ammette almeno una coppia di radici reali di cui almeno una è >0

Da questa osservazione è facile calcolare per tentativi la radice >0, infatti per $x=0$ il polinomio vale $a_0<0$. Sostituiamo ad $X=N$ un

polinomio vale $a_0 < 0$, sostituiamo ad $X = N$ un numero $N > 0$ tale che il valore del polinomio sia maggiore di zero la nostra radice α sarà $0 < \alpha < N$ quindi preso un valore intermedio fra 0 ed N si sostituisce nel polinomio, si assume sempre il valore intermedio fra i due che sostituiti nel polinomio hanno dato segni opposti.

Il metodo più banale per vedere se un polinomio $N(x)$ è multiplo di un polinomio $D(x)$ è quello di eseguire la divisione:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Se $R(x) = 0$ (resto = zero) ∴ $N(x)$ è divisibile per $D(x)$ cioè $N(x)$ è multiplo di $D(x)$.

Spesso interessa il caso in cui $D(x) = (x - \alpha)$ è un binomio, in questo caso la divisione può essere semplificata con la regola di Ruffini.

Regola di Ruffini

Il quoziente $Q(x)$ della divisione di un polinomio $N(x)$ di grado (n) per il binomio $(x - \alpha) = D(x)$ è un polinomio di grado $(n-1)$ i cui coefficienti si ottengono come segue:

- Il primo coefficiente di Q_x è uguale al primo coefficiente di $N(x)$

- I coefficienti successivi si ottengono sommando al coefficiente di $N(x)$ il precedente di $Q(x)$ moltiplicato per α.

- La somma col termine noto di $N(x)$ del prodotto di α col precedente di $Q(x)$ è il resto della divisione.

Conviene fare una tabella come segue:

Sia $N(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$

$D x = (x - \alpha)$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2} $\cdot\cdot$	a_1	a_0
α		αa_n	$\alpha a_{n-1} + \alpha^2 a_n$	$\cdots$	$\cdots$
	a_n	$(a_{n-1} + \alpha a_n)$	$(a_{n-2} + \alpha a_{n-1} + \alpha^2 a_n)$	$\cdots$	resto

Esempio: $N(x) = (2x^3 - x^2 - 10x + 8) / (x - 2) = D(x)$

	2	−1	−10	8
2		4	6	−8
	2	3	−4	zero

$Q(x) = (2x^2 + 3x - 4)$

(essendo $a_0 = -4 < 0$)

anche $Q(x)$ ammette almeno una radice positiva se uguagliato a zero cioè è divisibile per $(x - \alpha)$ con $\alpha > 0$

infatti: $0 < \alpha < 1$; $0,5 < \alpha \leq 1$; $0,8 < \alpha < 0,9$;

2	3	−4

0,85		1,4	+ 3,995
	2	4,7	− 0,005 = (Resto)

La radice positiva è $\frac{\sqrt{41}-3}{4} = 0,850781059.$

	2	3	− 4
$\left(\frac{\sqrt{41}-3}{4}\right)$		$\frac{\sqrt{41}-3}{2}$	$\frac{41-9}{8} = \frac{32}{8} = +4$
	2	$\frac{\sqrt{41}+3}{2}$	zero

Supponiamo di cercare la radice reale di $x^3-5,5x^2+12x-9=0$

sappiamo che una almeno è positiva avendo $(-9)<0$

proviamo $\alpha=+1$:

	1	−5,5	12	−9
1		1	−4,5	+7,5
	1	−4,5	+7,5	−1,5 < 0 (negativo)

proviamo $\alpha=+2$

	1	−5,5	12	−9
2		2	−7,0	+10
	1	−3,5	+5	+1 > 0 (positivo)

Il resto >0 e <0 ci dice che $1<\alpha<2$

proviamo: $\alpha=1,5$

	1	−5,5	12	−9
1,5		1,5	−6	+9
	1	−4	+6	0 zero

cioè: $(x-1,5)(x^2-4x+6)=(x^3-5,5x^2+12x-9)$

(le altre due radici $\alpha_2=(2-\sqrt{2}i)$; $\alpha_3=(2+\sqrt{2}i)$

1	−5,5	12	−9

1	−5,5	12	−9

$2-\sqrt{-2}$		$2-\sqrt{-2}$	$-9+1{,}5\sqrt{-2}$	$+9$
	1	$-3{,}5-\sqrt{-2}$	$3+1{,}5\sqrt{-2}$	0

$2+\sqrt{-2}$		$2+\sqrt{-2}$	$-9-1{,}5\sqrt{-2}$	$+9$
	1	$-3{,}5+\sqrt{-2}$	$3-1{,}5\sqrt{-2}$	0

$2+\sqrt{-2}$		$2+\sqrt{-2}$	$-3-1{,}5\sqrt{-2}$	0
	1	$-1{,}5$	0	0

$1{,}5$		$1{,}5$	$-3+1{,}5\sqrt{-2}$	0
	1	$-2+\sqrt{-2}$	0	0

$$(X-1{,}5)(X-2-\sqrt{-2})(X-2+\sqrt{-2})=(X^3-5{,}5X^2+12X-9)$$

Equazioni di terzo grado

Si hanno le seguenti possibilitá:

1) un radice reale e due complesse coniugate

2) tre radici reali
- uguali fra loro
- due uguali
- diverse

Se le radici sono: α ; $(a+ib)$; $(a-ib)$

abbiamo: $(x-\alpha)\left[x^2-2ax+a^2+b^2\right]=0$

cioè: $x^3-(2a+\alpha)x^2+(a^2+b^2+2a\alpha)x-\alpha(a^2+b^2)=0$

Se le radici sono: α ; β ; γ (reali)

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-(\alpha\beta\gamma)=0$$

$$x^3-Sx^2+Qx-P=0$$

l'equazione generale si presenta:

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

ove: $-\frac{a_2}{a_3} = S$; $\frac{a_1}{a_3} = Q$; $\frac{-a_0}{a_3} = P$;

poniamo: $\boxed{x = \left(K - \frac{S}{3}\right)}$ = (scostamento dalla media)

cioè
$$x = \left(K - \frac{a_2}{3a_3}\right)$$
$$x^2 = \left[K^2 - \frac{2a_2}{3a_3}K + \left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^2\right]$$
$$x^3 = \left[K^3 - \frac{a_2}{a_3}K^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 K - \left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^3\right]$$
(sostituendo:)

$$a_3x^3 = a_3K^3 - a_2K^2 + \frac{a_3}{3}\frac{a_2^2}{a_3^2}K - \frac{a_3}{27}\frac{a_2^3}{a_3^3}$$

$$a_2x^2 = + a_2K^2 - \frac{2}{3}\frac{a_2^2}{a_3}K + \frac{3}{27}\frac{a_2^3}{a_3^2}$$

$$a_1x = a_1K - \frac{a_1a_2}{3a_3}$$

$$a_0 = + a_0$$

$$a_3K^3 + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3a_3}\right)K + \left(\frac{2}{27}\frac{a_2^3}{a_3^2} - \frac{a_1a_2}{3a_3} + a_0\right) = 0$$

dividiamo per a_3:

$$K^3 + \left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{1}{3}\frac{a_2^2}{a_3^2}\right)K + \frac{1}{27}\left[2\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 - 9\left(\frac{a_1a_2}{a_3^2}\right) + 27\frac{a_0}{a_3}\right] = 0$$

per distinguere il prodotto delle radici in x (che abbiamo posto = P) dal prodotto delle radici in K, e per distinguere la $\sum \pi_3^{(3)}$ delle radici in x (che abbiamo posto = Q) dalla $\sum \pi_3^{(3)}$ delle radici in K;

poniamo: (scambiando in lettere minuscole Q con q e P con p)

$$\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2\right) = q$$

[illegible]

$$\left[\frac{1}{27}\left(2\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 - 9\frac{a_1 a_2}{a_3^2} + 27\frac{a_0}{a_3}\right)\right] = b$$

avremo:

$$\boxed{K^3 + aK + b = 0}$$ (equazione ridotta)

Una incognita si può sempre pensare costituita dalla somma di due valori; poniamo: $\boxed{K = (u + V)}$ e sostituendo: $u^3 + V^3 + 3u^2V + 3uV^2 + au + aV + b = 0$

cioè: $$\boxed{(u^3 + V^3) + (u+V)(3uV + a) + b = 0} \quad (1)$$

Le coppie $(u+v)=k$ sono infinite, quindi per definirne una consideriamo una equazione di 2° in z le cui radici siano la somma ed il prodotto avremo: $z^2 - Sz + P = 0$. Notiamo nell'equazione (1) che il secondo termine si annulla se $(3uv+a)=0$ cioè: $uv = \frac{-a}{3}$

in questo caso la (1) diventa: $u^3+v^3+b=0$

perciò avremo:

$$(u^3+v^3) = -b$$
$$u^3v^3 = \left(-\frac{a}{3}\right)^3$$

somma e prodotto da sostituire

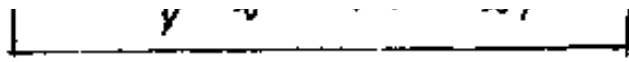
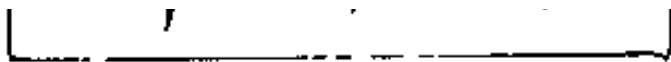
cioè: $z^2-(u^3+v^3)z+v^3u^3=0$ diventa:

$$z^2+bz-\frac{a^3}{27}=0$$

risolvendo:

$$z = \begin{cases} u^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\frac{a^3}{27}} \\ v^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\frac{a^3}{27}} \end{cases}$$

quindi:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}} \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$$

e ricordando le tre radici cubiche dell'unità, (Vol II)

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} = \boxed{1} = 1 \\ = \boxed{\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) \\ = \boxed{\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}) \end{cases}$$

$$K_1 = (u + v) = \boxed{K_1 = (u + v)}$$

$$K_2 = \frac{u}{2}(-1 - \sqrt{-3}) + \frac{v}{2}(-1 + \sqrt{-3}) = \boxed{K_2 = -\left(\frac{u+v}{2}\right) - \left(\frac{u-v}{2}\right)\sqrt{-3}}$$

$$K_3 = \frac{u}{2}(-1 + \sqrt{-3}) + \frac{v}{2}(-1 - \sqrt{-3}) = \boxed{K_3 = -\left(\frac{u+v}{2}\right) + \left(\frac{u-v}{2}\right)\sqrt{-3}}$$

Si noti che solo la prima radice è reale, le altre sono immaginarie coniugate ($\sqrt{-3}$).

Questo procedimento è possibile solo se $\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a^3}{27}\right)\geq 0$ e poiché certamente: $\left(\frac{b}{2}\right)^2>0$, il segno di "a" nella equazione ridotta: $K^3+aK+b=0$ deve essere negativo ed $\left|\frac{a}{3}\right|^3>\left|\frac{b}{2}\right|^2$ affinché si abbia il caso di tre radici reali. Si hanno tre casi:

1) $\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3>0$ una radice reale e due immaginarie coniugate

2) $\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3=0$ tre radici reali di cui almeno due uguali

3) $\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3<0$ tre radici reali diverse.

Si noti che $a=\left(\frac{a_1}{a_3}-\frac{a_2^2}{3a_3^2}\right)$ poiché a_3 si può porre $a_3>0$: $a=\frac{1}{a_3}\left(a_1-\frac{a_2}{3}\frac{a_2}{a_3}\right)$ quindi affinché $a<0$ deve essere: $a=\frac{1}{a_3^2}\left(a_1a_3-\frac{a_2^2}{3}\right)$ cioè: $\left(\frac{a_2^2}{3}>a_1a_3\right)$.

Quando è possibile dividere per a_3 l'intera equazione diventa del tipo: $x^3+px^2+qx+t=0$

ove : $a = \frac{1}{3}(3q - p^2)$; $b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r)$

Nel secondo caso avremo : $u = v = \sqrt[3]{\frac{b}{2}}$

cioè: $K_1 = 2\sqrt[3]{b/2}$; $K_2 = K_3 = -\left(\frac{u+v}{2}\right) = -\sqrt[3]{b/2}$

$x = (K + p/3)$ $X_1 = \left(2\sqrt[3]{\frac{b}{2}} + \frac{p}{3}\right)$; $X_3 = X_2 = \frac{p}{3} - \sqrt[3]{b/2}$

3°) Caso detto irriducibile.

Ricordiamo che un numero complesso elevato ad esponente frazionario può esprimersi nelle forme:

$$(a+ib)^{m/n} = (\vec{V})^{m/n} = (|V| e^{i\theta})^{m/n} = \left(|V|^{m/n} \cdot e^{i \frac{m}{n}\theta}\right) =$$

$$= \left[|V| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\right]^{m/n} = \left[|V|^{m/n} \left(\cos\left(\frac{m}{n}\theta\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{m}{n}\theta\right)\right)\right]$$

Nel nostro terzo caso avremmo: $(a+ib)^{\frac{1}{3}}$

cioè: $$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\cos\frac{\theta}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right)$$

Abbiamo già accennato al problema della trisezione dell'angolo, (che è, a tutt'oggi, non risolto); cioè non è possibile, col solo ausilio della squadra e del compasso dividere un angolo in tre parti uguali. Oppure: non è possibile graficamente estrarre la radice cubica di una grandezza in scala, senza l'ausilio di curve predisegnate. Ed infine per esprimere le funzioni trigonometriche di $(\alpha/3)$ in funzione di α). occorre risolvere una equazione di terzo

(α), occorre risolvere una equazione di terzo grado, mentre sappiamo trovare le funzioni trigonometriche del triplo di un angolo.

Noi useremo: $\cos 3\theta = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$ che scritta nella forma:

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) - \cos(3\theta) = 0$$

è appunto una equazione di 3° grado già ridotta ad essere mancante del termine al quadrato.

quindi l'equazione:

$$K^3 + aK + b = 0$$

confrontata con:

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) - \cos(3\theta) = 0$$

posto: $K = m \cos\theta$

cabbiamo:

$$m^3\cos^3\theta + a\,m\cos\theta + b = 0$$

se pensiamo che una equazione uguagliata a zero può essere stata moltiplicata per una costante arbitraria, resta valido che confrontando i coefficienti:

$$\frac{4}{m^3} = \frac{-3}{a\,m} = \frac{-\cos(3\theta)}{b}$$

dai primi due termini della doppia uguaglianza si ha:

$$m = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}$$

ricordiamo che: $\left(uv = -\frac{a}{3}\right)$

dai secondi due termini:

$$\cos(3\theta) = \frac{3b}{a\,m} = \cos(3\theta) = \frac{3b}{2a\sqrt{-a/3}}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3b}{2a\sqrt{-a/3}}\right)$$

ed anche:

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{2}{3}\pi \quad ; \quad \theta_3 = \theta_1 + \frac{4}{3}\pi$$

cioè le radici dell'equazione: $K^3 + aK + b = 0$ sono:

$$K_1 = \left(2\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)\cos(\theta_1) \quad ; \quad K_2 = \left(2\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)\cos(\theta_2) \quad ; \quad K_3 = \left(2\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)\cos(\theta_3)$$

Si noti che, affinché: $\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)$ sia <0 deve essere: $P<0$ e quindi diventa possibile applicare la trasformazione trigonometrica ove: $\frac{m}{2}=\sqrt{\frac{-a}{3}}$ che diventerebbe $m=$ immaginario se $a>0$.

Questi procedimenti risolvono l'equazione ridotta nell'incognita K; per trovare le radici dell'equazione data, dovremo ricordare che:

$$x = K - \frac{a_1/a_2}{3}$$

Facciamo degli esempi numerici (dei 3 casi)

Caso 1°) Prima di tutto costruiamoci una equazione di terzo grado con una sola radice reale e due immaginarie coniugate. Per esempio le radici siano:

$X_1 = 3$; $X_2 = 2+i5$; $X_3 = 2-i5$

e l'equazione sia moltiplicata per 4; avremo:

$$4(x-3)(x-2-i5)(x-2+i5)=0$$

$$4(x-3)(x^2-4x+29)=0$$

$$4(x-3)(x^2-4x+29)=0$$

$$4(x^3-7x^2+41x-87)=0$$

$$(4x^3-28x^2+164x-348)=0$$

Supponiamo di non sapere a quale caso appartenga e poniamo: $x=\left(K-\frac{1}{3}\left(\frac{28}{4}\right)\right)$ $x=\left(K-\frac{a_2}{3a_3}\right)$

quando è possibile semplificare dividendo l'equazione per a_3 (nel nostro caso per 4).

$$x^3 - 7x^2 + 41x - 87 = 0 \qquad x = \left(K + \frac{7}{3}\right) = \left(K + \frac{7}{3}\right)$$

$$x^3 = K^3 + 7K^2 + \frac{49}{3}K + 343/27$$

$$-7x^2 = -7K^2 - \frac{98}{3}K - 343/9$$

$$+41x = +41K + 287/3$$

$$-87 = -87$$

$$= K^3 + \frac{74}{3}K - \frac{452}{27} = 0$$

equazione ridotta

Sappiamo che: $K^3 + aK + b = 0$

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

quindi ora è possibile rilevare che:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0$$

condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia una sola radice reale.

La condizione che: $a > 0$ è sufficiente, ma non necessaria infatti se $a < 0$ dovrà anche essere

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 > \left|\left(\frac{a}{3}\right)^3\right|$$

cioè: $|a| < 3\left(\frac{b}{2}\right)^{2/3}$

Tornando al nostro caso avremo:

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{452}{27}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{226}{27}\right)^2 + \frac{(74/3)^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{226}{27} \pm \frac{1}{27}\sqrt{(226)^2 + (74)^3}}$$

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{226 \pm \sqrt{456300}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{226 \pm 390\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(1 \pm 5\sqrt{3})^3}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{3}(1 + 5\sqrt{3})} \quad ; \quad \boxed{v = \frac{1}{3}(1 - 5\sqrt{3})}$$

$$K_1 = (u + v) = \frac{2}{3} \quad ; \quad K_2 = -\frac{(u+v)}{2} + \left(\frac{u-v}{2}\right)\sqrt{-3} = -\frac{1}{3} + \frac{5\sqrt{3}\sqrt{-3}}{3} = K_2 = \left(-\frac{1}{3} + i5\right)$$

$$K_3 = \left(-\frac{1}{3} - i5\right)$$

e sostituendo : $x_i = \left(K_i - \frac{a_2}{3a_3}\right) = K_i - \left(\frac{-7}{3}\right) = \left(K_i + 7/3\right)$

$X_1 = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{9}{3}$; $\boxed{X_1 = 3}$

$X_2 = \left(-\frac{1}{3} + i5\right) = \left(\frac{6}{3} + i5\right)$; $\boxed{X_2 = 2 + i5}$

$X_3 = \left(-\frac{1}{3} - i5\right) = \left(\frac{6}{3} - i5\right)$; $\boxed{X_3 = 2 - i5}$

Tornano logicamente le radici prefissate

Anche per fare un esempio numerico del secondo caso, prefissiamo le radici per es.

$(X_1 = 5)$; $(X_2 = X_3 = 3)$ cioè: $(x-5)(x-3)^2 = 0$

$(x^2 - 6x + 9)(x - 5) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5x^2 + 30x - 45 = 0$

$$\boxed{x^3 - 11x^2 + 39x - 45 = 0}$$

posto : $\left[\frac{a_1}{a_3} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2\right] = a = 39 - \frac{1}{3}\left(\frac{121}{1}\right) =$ $\boxed{a = \frac{-4}{3}}$

$\frac{1}{27}\left[2\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 - 9\left(\frac{a_1 a_2}{a_3}\right) + 27\left(\frac{a_0}{a_3}\right)\right] = b = \frac{1}{27}\left[(-2662) + (3861) - 1215\right] =$ $\boxed{b = \frac{-16}{27}}$

$$\boxed{K^3 - \frac{4}{3}K - \frac{16}{27} = 0}$$ eq. ridotta

$$u = \sqrt[3]{+\frac{8}{27} + \sqrt{\frac{64}{27^2} - \frac{4}{27}\frac{16}{27}}} = u = v = \sqrt[3]{\frac{8}{27} \pm 0} = \frac{2}{3}$$

$$(u+v) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3} = K_1} \; ; \quad K_2 = K_3 = -\left(\frac{u+v}{2}\right) \pm \left(\frac{u-v}{2}\sqrt{3}\right) = -\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

$$\boxed{K_2 = K_3 = -\frac{2}{3}} \qquad x_i = \left(K_i - \frac{a_2}{3a_3}\right) = \left(K_i + \frac{11}{3}\right)$$

$$X_1 = \left(\frac{4}{3} + \frac{11}{3} = \frac{15}{3}\right) ; \; \boxed{X_1 = 5} \qquad X_2 = X_3 = \left(-\frac{2}{3} + \frac{11}{3} = \frac{9}{3}\right) ; \; \boxed{X_2 = X_3 = 3}$$

che ovviamente tornano quelle prefissate.

Per il 3° Caso (detto anche irriducibile)

prefissiamo tre diverse radici reali per es.: 3; 4; 5.

$$(x-3)(x-4)(x-5)=0$$ da cui:

l'equazione da risolvere:

$$\boxed{x^3-12x^2+47x-60=0}$$

poniamo al solito: $x=\left(K-\frac{a_2}{3a_1}\right)$; $x=\left(K+\frac{12}{3}\right)$; $\boxed{x=K+4}$

$$\begin{aligned}
x^3 &= K^3+12K^2+48K+64\\
-12x^2 &= -12K^2-96K-192\\
+47x &= +47K+188\\
-60 &= -60\\
\hline
& K^3-K+0=0
\end{aligned}$$

l'equazione ridotta sara': $\boxed{K^3-K=0}$ da cui $\boxed{K_1=0}$; $\boxed{K_2=-1}$; $\boxed{K_3=+1}$

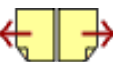
Come si vede, una equazione di 3° che abbia per radici la terna Pitagorica 3; 4; 5 non necessita di trasformazione trigonometrica. Cio' si verifica quando $-\frac{a_2/a_3}{3}$ e' una radice; cioe' quando: <u>una radice e' la media aritmetica della somma</u>

delle radici. (Si ha che un valore di $K = 0$)

Consideriamo un'altra terna pitagorica:

5, 12, 13. $(x-5)(x-12)(x-13) = 0$ e l'equazione da risolvere:

$$x^3 - 30x^2 + 281x - 780 = 0$$

sostituiamo: $x = \left(K - \frac{a_2}{3a_3}\right) =$ $x = (K + 10)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 & = K^3 + 30K^2 + 300K + 1000 \\
-(30)x^2 & = \quad -30K^2 - 600K - 3000 \\
+(281)x & = \quad +281K + 2810 \\
-780 & = \quad -780
\end{array}
$$

$$\boxed{K^3 - 19K + 30 = 0}$$ equazione ridotta

La radice: $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{a^3}{27}} = \sqrt{\left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{-19^3}{27}\right)} = \sqrt{225 - \frac{6859}{27}} =$

$= \sqrt{\frac{-784}{27}} = \boxed{\frac{28}{9}\sqrt{-3}}$ da cui:

$$\boxed{\left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{-15 \pm \frac{28}{9}\sqrt{-3}}}$$

La radice immaginaria $-\sqrt{3}$ indica che per risolvere l'equazione occorre avvalersi della trasformazione trigonometrica.

(Non tutte le terne pitagoriche semplificano il procedimento).

Utilizzando le formule già trovate abbiamo:

$m = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}$; $\boxed{m = 2\sqrt{\frac{19}{3}}}$; $\boxed{\cos(3\theta) = \frac{3b}{a \cdot m}}$

$$\cos(3\theta) = \frac{3(+30)}{(-19)\cdot 2\sqrt{\frac{19}{3}}} = \frac{-45\sqrt{3}}{19\sqrt{19}} = -\sqrt{\frac{6075}{6859}} = -0,941115096$$

$$\theta_1 = \frac{1}{3} \arccos\left(-0{,}941115096\right) = \underline{0{,}932233663 \text{ rad}}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{2}{3}\pi = \underline{3{,}026631733 \text{ rad.}} \quad ; \quad \theta_3 = \theta_1 + \frac{4}{3}\pi = \underline{5{,}121026838 \text{ rad}}$$

$$K_1 = 2\sqrt{\frac{19}{3}} \cos\theta_1 = 3{,}00000000$$

$$K_2 = 2\sqrt{\frac{19}{3}} \cos\theta_2 = -5{,}00000000$$

$$K_3 = 2\sqrt{\frac{19}{3}} \cos\theta_3 = 2{,}00000000$$

$$x = \left(K - \frac{a_2/a_3}{3}\right) = \left(K - \frac{-30/1}{3}\right)$$

$$\boxed{x = K + 10}$$

$$\underline{X_1} = (10+3) = \underline{13} \quad ; \quad \underline{X_2} = (10-5) = \underline{5} \quad ; \quad \underline{X_3} = (10+2) = \underline{12}$$

Indice Enciclopedico Indice

È evidente che passando attraverso valori di funzioni trigonometriche, il grado di approssimazione dipende dal grado di approssimazione delle tavole trigonometriche usate.

Ci domandiamo:

"È possibile avere la risoluzione esatta?"

Facciamo qualche osservazione:

È facile, a posteriori, noti i "K" trovare il valore del radicale:

$$\left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{-15 \pm \frac{28}{9}\sqrt{-3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-405 \pm 84\sqrt{-3}} =$$

essendo:

$$K_1 = (u+v) \quad ; \quad K_2 = \left(\frac{-(u+v)}{2} - \frac{(u-v)}{2}\sqrt{-3}\right); \quad K_3 = \left(\frac{-(u+v)}{2} + \frac{(u-v)}{2}\sqrt{-3}\right)$$

si nota: $(K_1+K_2) = -K_3$; $(K_1+K_3) = -K_2$; $(K_2+K_3) = -K_1$;

"Ogni K vale la somma delle altre due K prese di segno opposto."

Scegliamo un qualsiasi $K = (u+v)$ per es: $K_2 = -5 = (u+v)$

essendo: $uv = -\frac{a}{3} = \frac{19}{3}$. varrà l'equazione: $z^2 - Sz + P = 0$

cioè: $z^2 - (u+v)z + uv = 0$; $\quad z^2 + 5z + \frac{19}{3} = 0$; $\rightarrow \left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{19}{3}}$

[illegible]

$$\left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(-5 \pm \sqrt{\frac{75-76}{3}}\right) \; ; \quad \boxed{\left.\begin{matrix}u\\v\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(-15 \pm \sqrt{-3}\right)}$$ Infatti:

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(-15 \pm \sqrt{-3}\right)^3} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-3375 + 675\sqrt{-3}\\ +135 - 3\sqrt{-3}\end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(-3240 + 672\sqrt{-3}\right)} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt[3]{-\left(405 \pm 84\sqrt{-3}\right)}}$$

che è il radicale che ci ha costretti ad eseguire la trasformazione trigonometrica.

Se avessimo saputo che:

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-405 \pm 84\sqrt{-3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{-15 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$$

avremmo risolto direttamente, senza trasformazioni trigonometriche: $u = \frac{1}{3}\left(\frac{-15+\sqrt{-3}}{2}\right)$; $V = \frac{1}{3}\left(\frac{-15-\sqrt{-3}}{2}\right)$; $(u+v) = \boxed{K_1 = -5}$

$$\left.\begin{matrix} K_2 \\ K_3 \end{matrix}\right\} = \left(\frac{-K_1}{2} \pm \left(\frac{u-v}{2}\right)\sqrt{-3}\right); = \pm\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{3\cdot 2}\sqrt{-3} = K_2 = \frac{+5+1}{2} = +3 \quad \boxed{K_2 = 3}$$

$K_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$; $\boxed{K_3 = 2}$ da cui i valori in x. (vedi pag prec.)

Ma il nostro: $\frac{1}{3}\left(\frac{-15 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$ è stato ricavato da $K_1 = -5$,

se avessimo scelto: $K_1 = (u+v) = 2$; $(uv) = \frac{19}{3}$;

$z^2 - 2z + \frac{19}{3} = 0 \qquad \left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{19}{3}} = 1 \pm \sqrt{\frac{3-19}{3}} =$

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \left(1 \pm \sqrt{\frac{-16}{3}}\right) = 1 \mp \frac{4}{3}\sqrt{-3} = \boxed{\frac{1}{3}\left(3 \mp 4\sqrt{-3}\right)}$$

eleviamo al cubo $\left(3 \mp 4\sqrt{-3}\right) = 3^3 + 3^2 3 \cdot 4\sqrt{-3} + 3\cdot 3\cdot 16(-3) + 64(-3)\sqrt{-3}$

$\left(3 \pm 4\sqrt{-3}\right) = 27 + 108\sqrt{-3} - 432 - 192\sqrt{-3} = \left(-405 \mp 84\sqrt{-3}\right)$

cioè:

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}\sqrt{-405 \pm 84\sqrt{-3}} = \frac{1}{3}\left(3 \mp 4\sqrt{-3}\right)$$

cioè: $u = \frac{1}{3}\left(3 - 4\sqrt{-3}\right)$; $v = \frac{1}{3}\left(3 + 4\sqrt{-3}\right)$; $(u+v) = 2 = \boxed{K_1 = 2}$

$\left(\frac{u-v}{2}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{-3}$; $\frac{u-v}{2}\left(\sqrt{-3}\right) = 4$; $\left(\frac{-K_1}{2} - 4\right) = K_2 = -1 - 4 = \boxed{-5 = K_2}$

$K_3 = -1 + 4 = 3$; $\boxed{K_3 = 3}$

Se scegliamo per il nostro $K_1 = 3$ avremo:

$$z^2 - 3z + \frac{19}{3} = 0 \qquad \left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - \frac{4 \cdot 19}{3}}}{2} = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{\frac{27-76}{3}}\right) =$$

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{\frac{-49}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(3 \pm 7\frac{\sqrt{-3}}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{9 \pm 7\sqrt{-3}}{2}\right)$$

eleviamo al cubo: $\left(\frac{9 \pm 7\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(729 + 81 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{-3} - 3 \cdot 9 \cdot 49(-3) - \right.$

$$\left. - 1029\sqrt{-3}\right); = \frac{1}{8}\left(729 - 3969 + 1701\sqrt{-3} - 1029\sqrt{-3}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(-3240 + 672\sqrt{-3}\right) = \left(-405 + 84\sqrt{-3}\right)$$

cioè:

$$\boxed{\frac{1}{3}\sqrt[3]{-405 \pm 84\sqrt{-3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{9 \pm 7\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

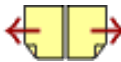
Cioè abbiamo le tre radici (complesse) ottenute dall'estrazione della radice cubica di un numero complesso. Ciò è stato possibile perché con la trasformazione trigonometrica conoscevamo: $K = (u+v)$. Per estrarre le radici cubiche di un numero complesso occorre utilizzare le funzioni angolari.

Consideriamo la funzione:

$$\boxed{y = x^3 - Sx^2 + Qx - P}$$

$$y' = 3X^2 - 2SX + Q \quad ; \quad y'' = 6X - 2S$$

$y'' = 0$ per $X = \frac{S}{3}$ Il flesso si ha nella curva quando l'ascissa è il valor medio delle radici.

$y' = 0$ per $X = \frac{S}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{3}\right)^2 - \left(\frac{Q}{3}\right)}$ Per avere max o min occorre: $\left(\left(\frac{S}{3}\right)^2 - \frac{Q}{3}\right) > 0$

per $\left(\left(\frac{S}{3}\right)^2 - \frac{Q}{3}\right) = 0$ si ha un flesso orizzontale

per $\left(\left(\frac{S}{3}\right)^2 - \frac{Q}{3}\right) < 0$ si ha una sola radice reale e due immaginarie coniugate.

per $\left(\left(\frac{S}{3}\right)^2 - \frac{Q}{3}\right) > 0$ si hanno un max. ed un min. equidistanti dal flesso, ma per avere tre radici reali occorre che il max ed il min. siano di segno opposto.

Lo studio del grafico della funzione: $y = x^3 - Sx^2 + Qx - P$ permette di affermare che:

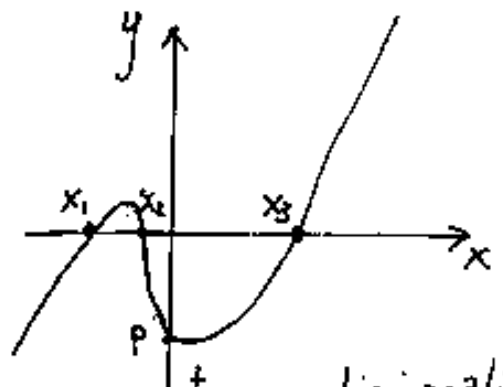
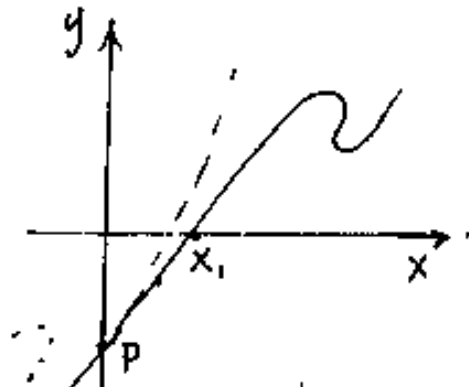
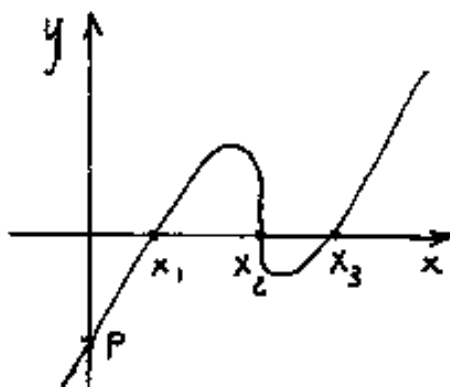
1) Se $P < 0$ si ha almeno una radice reale > 0.

2) Se $P > 0$ si ha almeno una radice reale < 0

(per esempio con $P < 0$)

y, x, x_1, x_2, x_3, P

y, x, x_1, P

y, x, x_1, x_2, x_3, P

P tre radici reali >0

P una radice reale >0

P tre radici reali una >0 e due < 0

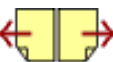
Poiché una equazione di 3° grado ammette sempre una radice reale, sapendo il campo ove certamente esiste, permette, con Ruffini di scindere l'equazione di terzo grado nel prodotto:

$$(x-\alpha)\left(x^2-(S+\alpha)x+(Q-S\alpha+\alpha^2)\right)=0$$

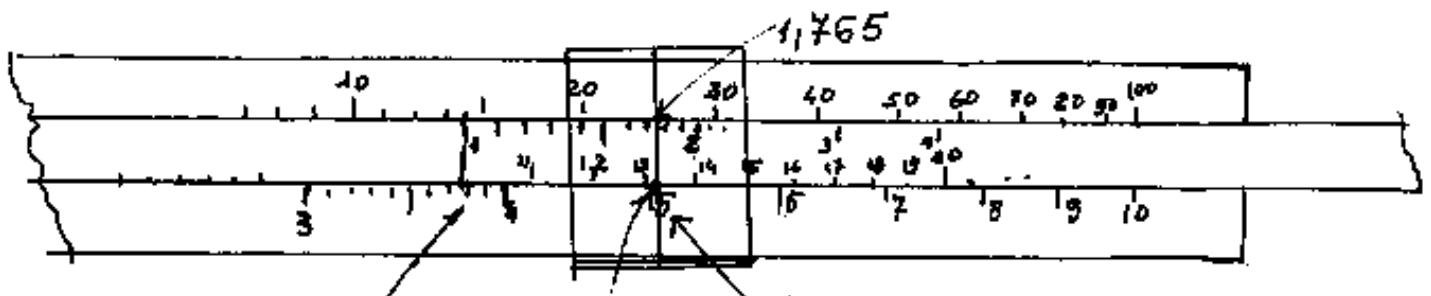
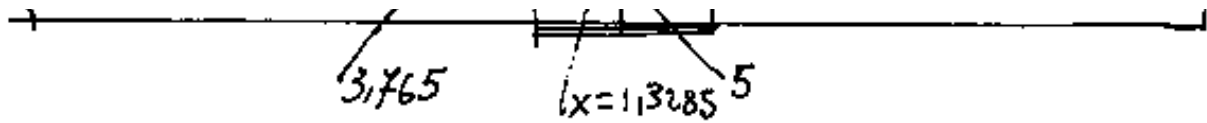
Il calcolo, anche approssimato dell'equazione cubica è stato svolto nel tempo con metodi anche molto diversi. Per esempio riportiamo il metodo per calcolare le equazioni ridotte col regolo calcolatore. Sia l'equazione nella forma ridotta (per es)

$$x^3 + 2x + 5 = 0$$

che scriviamo nella forma:

$$x^2 + 2 = \frac{-5}{x} \qquad (\text{la } x \text{ è} < 0)$$

fissato col vetrino nella scala inferiore fissa del regolo il N° 5 si scorre con lo scorrevole per dividere 5 quando il quoziente risulta uguale al quadrato di x (che si legge nella scala superiore dello scorrevole) maggiorato di 2 quella è la x.

nel nostro caso $x^2 \simeq 1{,}765$; $x = 1{,}3285$; $(x^2+2) = 3{,}765$

3,765 | x = 1,3285 | 5

con un po' di pratica si arriva ad ottenere una x con 3 o 4 cifre significative.

Utilizzo delle funzioni iperboliche

Qualora ci proponessimo di utilizzare la trasformazione trigonometrica per equazioni di terzo grado riducibili, (cioè del caso I) avremmo argomenti (archi) impossibili.

Per es. data l'equazione: (già ridotta)

$$x^3 - x + 2 = 0$$

abbiamo: $a = -1$; $b = 2$ per cui: $m = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}$

$m = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\cos(3\theta) = \frac{3b}{am} = \frac{6}{(-1)\,2\sqrt{\frac{1}{3}}} = -3\sqrt{3} = -5{,}1961524..$

$\cos(3\theta) = -5{,}196..$ è impossibile un angolo che abbia il coseno in valore assoluto > 1.

il coseno è negativo nel II e IV quadrante, perciò

$\cos(3\theta) = -\cos(3\theta - \pi)$

Dalle relazioni fra le funzioni iperboliche e le funzioni circolari si ha:

$$-\cos(3\theta - \pi) = -\cosh[i(3\theta - \pi)] = -5{,}1961524$$

Dalle tavole delle funzioni iperboliche si ha:

Dalle tavole delle funzioni iperboliche si ha:

$$\operatorname{argcosh}(5{,}1961524..) = 2{,}331675041 = [i(3\theta - \pi)]$$

$$(3\theta - \pi) = \frac{1}{i}(2{,}331675041) = -(2{,}331675041)i$$

$$\theta = \frac{1}{3}\left(\pi - i(2{,}331675041)\right)$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} - i(0{,}777225013)$$

$$\cos\theta_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3} - i(0{,}777225013)\right) =$$

$$\cos(\theta_1) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(i(0{,}777225013)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(i(0{,}777225013)\right)$$

ma dalle relazioni fra le funzioni iperboliche e le circolari si ha: $\cosh(iu) = \cos(u)$; $\operatorname{senh}(iu) = i \operatorname{sen}(u)$

$\operatorname{sen}(iu) = i \operatorname{senh}(u)$; $\cos(iu) = \cosh(u)$; quindi

$$\cos(\theta_1) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cosh(0{,}77225013) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{senh}(0{,}77725013)$$

$$= (0{,}5)(1{,}317553475) + i(0{,}866025403)(0{,}857873626)$$

$$\boxed{\cos(\theta_1) = 0{,}658776737 + i(0{,}742940353)}$$

Ricordiamo che le tre radici sono:

$$\boxed{x_1 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos(\theta_1)} \; ; \; \boxed{x_2 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\left(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi\right)} \; ; \; \boxed{x_3 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\left(\theta_1 + \frac{4}{3}\pi\right)}$$

perciò:

$$\cos\left(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{3} - i(0{,}77225013)\right) + \frac{2}{3}\pi\right] =$$

$$\cos\left(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\pi - i(0{,}77225013)\right) =$$

$$= \cos(\pi)\cosh(0{,}77225013) + i \operatorname{sen}(\pi) \operatorname{senh} 0{,}77225013$$

ma: $(\operatorname{sen}(\pi) = 0)$; $(\cos(\pi) = -1)$

$$\boxed{\cos\left(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi\right) = -1{,}317553475}$$

$$\cos\left(\theta_1 + \frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{3}\pi - i(0{,}77225013)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)\cosh(0{,}77225013) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}\pi\right) \operatorname{senh}(0{,}77225013)$$

$$\cos\left(\theta_1 + \frac{4}{3}\pi\right) = 0,658776737 - i(0,742940353)$$

$$2\sqrt{\frac{-a}{3}} = 1,154700538$$

$$x_1 = 0,760689852 + i(0,857873625)$$

$$x_2 = -1,521379707 \quad (\text{reale})$$

$$x_3 = 0,760689852 - i(0,857873625)$$

radici che potevano essere ricavate con le formule del caso I.

Discussione sui polinomi di 3° grado.

$(y = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$ (per: $y=0 \rightarrow x_{reale} = \alpha$)

$a_0 > 0 \rightarrow \alpha < 0$
$a_0 < 0 \rightarrow \alpha > 0$ } Il segno di α_0 dice il segno di α

a_1 = pendenza della curva per $x = 0$.

$(a_2 \gtrless 0)$ curvatura per $x = 0$

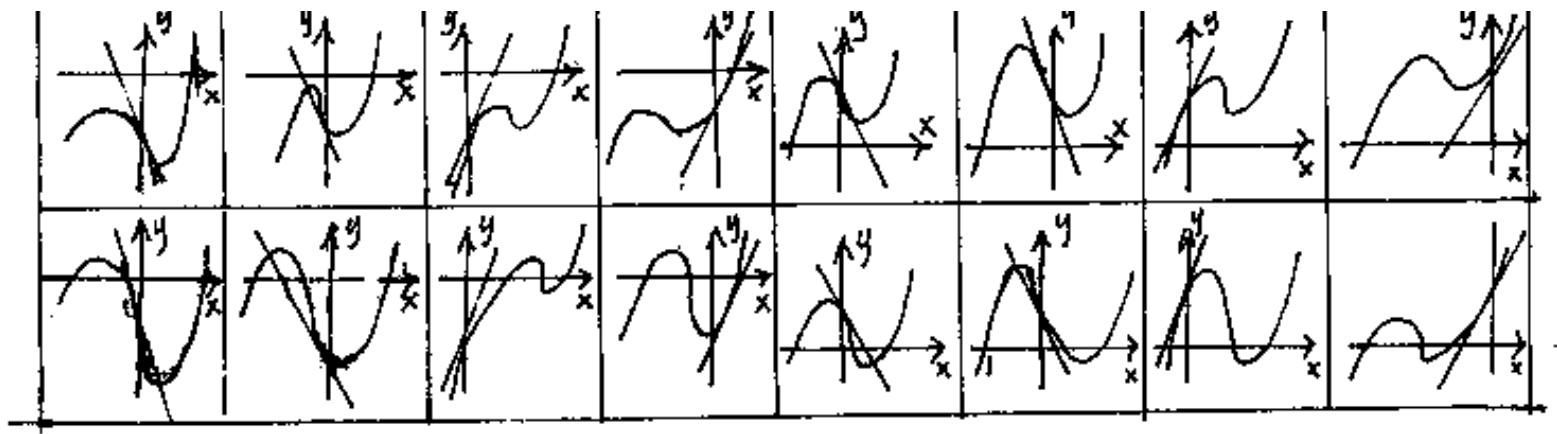
$x = -\frac{a_2}{3}$ ascissa del flesso (vi è un solo flesso)

$y'_f = -\frac{a_2^2}{3} + a_1$ pendenza del flesso che passa da curvatura negativa a positiva, mai viceversa.

$\left(y_f = \frac{2}{27}a_2^3 + \frac{a_2 a_1}{3} + a_0\right)$ ordinata del flesso

$(y'_f \geqslant 0)$ non si hanno max. o min. relativi (una sola α reale)

$-a_0/a_1$ punto comune in ascisse alla tangente per $x=0$

$(a_0 < 0)$ → (radice reale positiva)				$(a_0 > 0)$ (radice reale negativa)			
$a_1 < 0$		$a_1 > 0$		$a_1 < 0$		$a_1 > 0$	
$a_2 < 0$	$a_2 > 0$	$a_2 < 0$	$a_2 > 0$	$a_2 < 0$	$a_2 > 0$	$a_2 < 0$	$a_2 > 0$
y, x, a_0	y, x, $-a_0/a_1$, a_0	y, x, $-a_0/a_1$, a_0	y, x, $-a_0/a_1$, a_0	y, x, a_0, $-a_0/a_1$	y, x, a_0, $-a_0/a_1$	y, x, a_0, $-a_0/a_1$	y, x, a_0, $-a_0/a_1$
y	y	y	y	y	y	y	y

Si noti come il valore dell'ascissa $x = \left(-a_0/a_1\right)$ sia utile per avere il campo delle radici reali nei rari casi.

Equazioni di 4° grado

Abbiamo già trattato le equazioni di 4° grado biquadratiche e le equazioni di 4° grado simmetriche, quí diamo le formule risolutive dell'equazione generale di 4° grado.

Non diamo la dimostrazione, ma semplicemente le modalità di applicazione.

Consideriamo l'equazione generale già ridotta ad avere <u>unitario</u> il primo coefficiente, cioè: $a_4 = 1$:

$$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

e consideriamo l'equazione ausiliaria di 3° grado:

(in y) $$y^3 - a_2 y^2 + (a_3 a_1 - 4a_0) y + \left((-a_3^2 + 4a_2) a_0 - a_1^2\right) = 0$$

e sia y una radice di quest'ultima equazione, definiamo:

$$R = \sqrt{\frac{a_3^2}{4} - a_2 + y}$$

Se: $R \neq 0$ allora: $H = \left(\frac{a_3^2}{2} - a_2 - y\right)$; $K = \frac{1}{R}\left(a_3 a_2 - 2a_1 - a_3^3/4\right)$

Se: $R = 0$ allora: $H = \left(\frac{3a_3^2}{4} - 2a_2\right)$; $K = 2\sqrt{y^2 - 4a_0}$

$D = \sqrt{H + K}$ $E = \sqrt{H - K}$

Le radici dell'equazione data saranno:

$$x_1, x_2 = -\frac{a_3}{4} + \frac{R}{2} \pm \frac{D}{2}$$

$$x_3, x_4 = -\frac{a_3}{4} - \frac{R}{2} \pm \frac{E}{2}$$

Si noti che per risolvere l'equazione di 4° grado è necessario risolvere prima l'equazione ausiliaria di 3° grado.

Le radici di una equazione di 4° grado possono essere: quattro reali; due reali e due complesse coniugate; quattro immaginarie costituite da due coppie complesse coniugate.

Facciamo un esempio:

data l'equazione: $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

l'equazione ausiliaria di 3° grado sarà:

$$y^3 - 35y^2 + 404y - 1540 = 0$$

le cui radici sono:

$y_1 = 14$; $y_2 = 10$; $y_3 = 11$

Avendo tre radici reali, possiamo scegliere; poiché: $R = \sqrt{\frac{a_3^2}{4} - a_2 + y}$, essendo: $\left(\frac{a_3^2}{4} - a_2\right) = \left(\frac{100}{4} - 35\right) = (-10)$ con $y = 10$ si ha $R = 0$ ciò semplifica i calcoli. (dobbiamo scegliere y in modo che $R \geq 0$)

Per $R = 0$; $H = \left(\frac{3a_3^2}{4} - 2a_2\right) = \frac{3 \cdot 100}{4} - 2 \cdot 35 = (75 - 70) = 5 = H$

$K = 2\sqrt{y^2 - 4a_0} = 2\sqrt{100 - 4(24)} = 2\sqrt{4} = 4 = K$

$$D = \sqrt{H+K} = \sqrt{5+4} = \boxed{D = 3}$$

$$E = \sqrt{H-K} = \sqrt{5-4} = \boxed{E = 1}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{-a_3}{4} + \frac{R}{2} \pm \frac{D}{2} = \frac{+10}{4} + \frac{0}{2} \pm \frac{3}{2} \left\langle \begin{matrix} \boxed{x_1 = 2,5 + 1,5 = 4} \\ \boxed{x_2 = 2,5 - 1,5 = 1} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\rangle = \frac{-a_3}{4} - \frac{R}{2} \pm \frac{E}{2} = \frac{+10}{4} - \frac{0}{2} \pm \frac{1}{2} \left\langle \begin{matrix} \boxed{x_3 = 2,5 + 0,5 = 3} \\ \boxed{x_4 = 2,5 - 0,5 = 2} \end{matrix}\right.$$

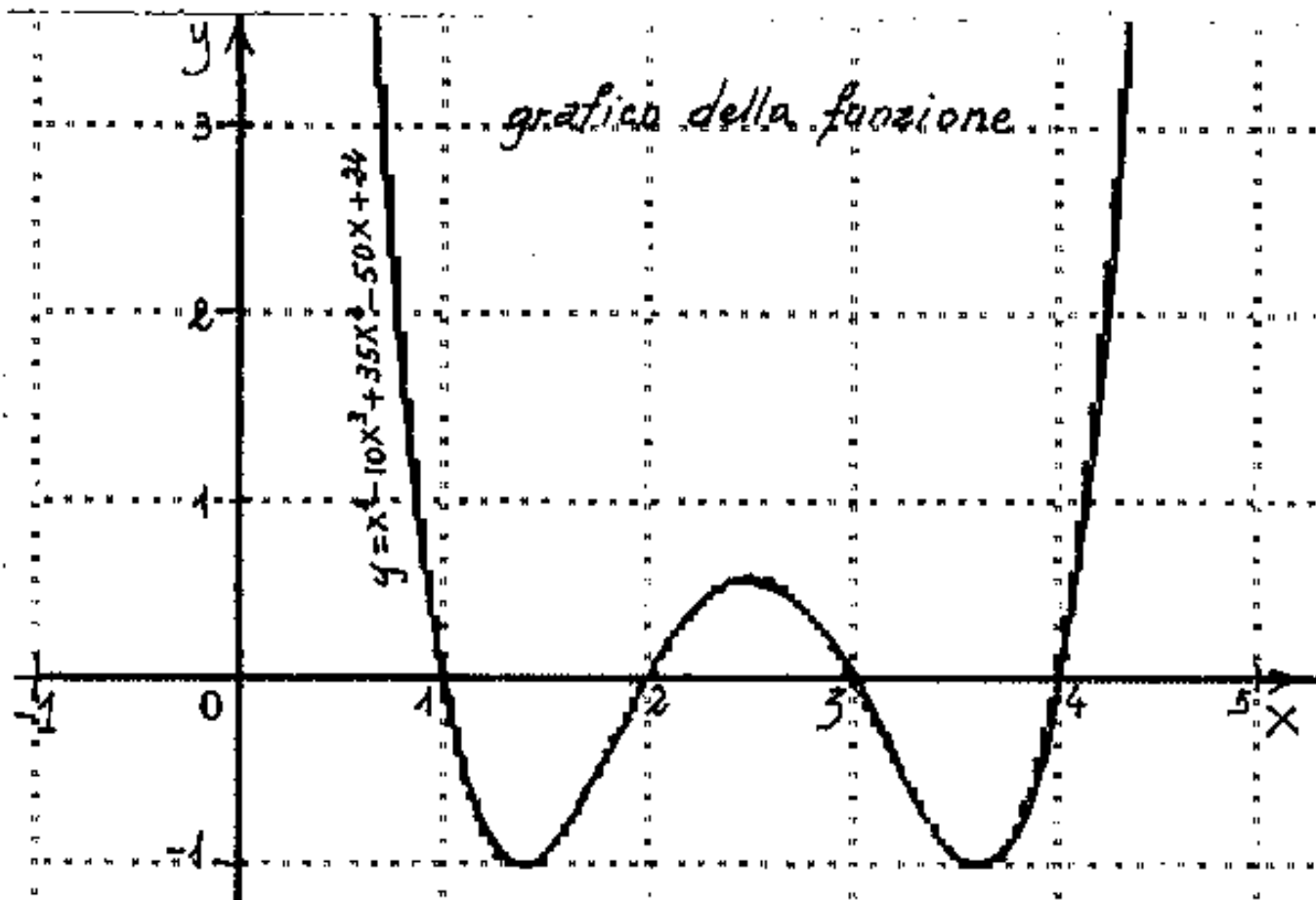
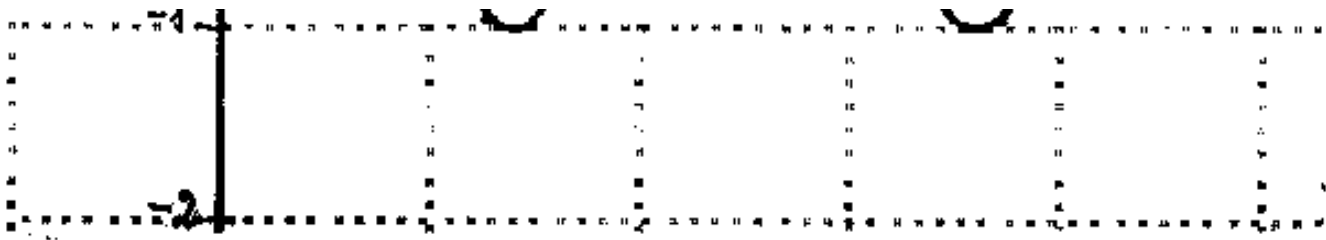
Se come radice dell'equazione di 3° grado avessimo scelto: $y=14$ avremmo ottenuto: $R=2$; $H=1$; $K=0$; $D=1$; $E=1$; da cui: le radici:

$x_1=4$
$x_2=3$
$x_3=2$
$x_4=1$

ove si nota che sono le stesse calcolate con $y=10$ però salvo x_1 sono diversamente indicizzate: $x_2 \to x_4$; $x_3 \to x_2$; $x_4 \to x_3$. cioè si ottengono le stesse radici con ordine diverso.

Si riporta il grafico della $f(x)$

-1

-2

Dal grafico si nota come per traslazione di assi possono mutare le radici della equazione.

Equazioni di grado superiore al 4°

Per le equazioni di grado superiore al 4° vale il celebre teorema di Ruffini e Abel:

"L'equazione generale di grado superiore al quarto, non è risolubile per radicali"

N. H. Abel osservò che una equazione irriducibile per la quale una radice sia esprimibile per radicali è totalmente risolubile per radicali.

Il Ruffini pubblicò a Bologna nel 1799, "La Teoria generale delle equazioni" ove si dimostra il teorema di cui sopra esposto.

Negli anni 1970 pare sia stata trovata una risoluzione delle equazioni di 5° grado con l'aggiunta di un complesso. (Non si hanno elementi in merito).

Osservando i coefficienti di un polinomio di grado n, che indiciziamo con gli esponenti della x ponendo però il coefficiente di x^n, $a_n = 1$ possiamo (senza fare calcoli) avere utili informazioni sia per il grafico, sia per le radici.

Il valore della derivata i^{ma}: $(y^{(i)} = i!\,a_i)$ quando $x = 0$.

Si hanno due classi di polinomi, e cioè "n" può essere pari o dispari.

In generale il polinomio sia:

$$y = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

per $y = 0$ si ha l'equazione di grado "n" che ammette n radici reali o complesse: $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ tali che il polinomio può essere scomposto nel prodotto di n binomi:

$$y = (x - \alpha_n)(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_{n-2}) \dots (x - \alpha_2)(x - \alpha_1) = 0$$

ciò giustifica perché abbiamo posto: $(a_n = 1)$

$\lim_{x \to -\infty} (y)$ — (per n = pari) $y = +\infty$; (per n = dispari) $y = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (y) =$ (per n = pari) / (per n = dispari) $y = +\infty$

$\lim (y) = a_0$ — $a_0 < 0$: (n = dispari) (si ha almeno una radice reale > 0); (n = pari) (si hanno almeno due radici reali di cui una

$\lim_{x \to 0} (y) = a_0$ (radici reali di cui una > 0 e l'altra < 0.)

$a_0 > 0$
- (n = pari) (non possiamo dire se vi sono radici reali)
- (n = dispari) (vi è almeno una radice reale < 0.)

per (x = 0) → a_1 rappresenta la pendenza della tangente alla curva.

→ $a_2 \gtrless 0$ dice se la curvatura è verso l'alto o verso il basso.

Per esempio data l'equazione:

$$x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$$

$n = 5$ = dispari ; $a_0 = -12 < 0$; perciò si ha almeno una radice reale positiva.

$a_1 = +16 > 0$ la pendenza della tangente per $x = 0$. tale tangente incontra l'asse X per $X = \frac{+12}{16}$; $\left(x = \frac{-a_0}{a_1}\right)$ cioè: $x = +0{,}75$ e poiché $a_2 < 0$ (curvatura verso il basso) avremo un flesso per $x > 0{,}75$., quindi la nostra radice sarà ancora maggiore.

si nota che per $x = 1$ si annulla l'equazione con Ruffini:

	1	−5	+7	−7	+16	−12
1		1	−4	3	−4	+12
	1	−4	3	−4	+12	0

ed abbiamo:

$$(x-1)(x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 12) = 0$$

$a_0 = +12$ con n = pari non dà certezze, ma $a_1 < 0 = 4$ ci dice che la tangente alla curva per $x = 0$ incontra le

ascisse nel punto $x = \frac{-12}{-4} = +3$; $a_2 = +3 > 0$ curvatura verso il basso cioè se vi fosse un'altra radice positiva sarebbe minore di 3 proviamo $x=2$ con Ruffini :

	1	−4	3	−4	+12
2		2	−4	−2	−12
	1	−2	−1	−6	0

abbiamo quindi almeno un'altra radice positiva nell'equazione di 3° grado: $X^3 - 2X^2 - X - 6 = 0$

Ma $a_1 = -1 < 0$ ci dice che la curva di 3° va verso un minimo < -6 per risalire. e la curvatura è ancora verso il basso $(a_2 = -2 < 0)$

per $x = 3$

	1	−2	−1	−6
3		+3	+3	+6
	1	+1	+2	0

ed abbiamo: $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x^2 + x + 2) = 0$

l'equazione di 2° grado ha due radici immaginarie.

La derivata prima del polinomio di 5° è

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 14x + 16$$

la derivata seconda:

$$y'' = 20x^3 - 60x^2 + 42x - 14$$

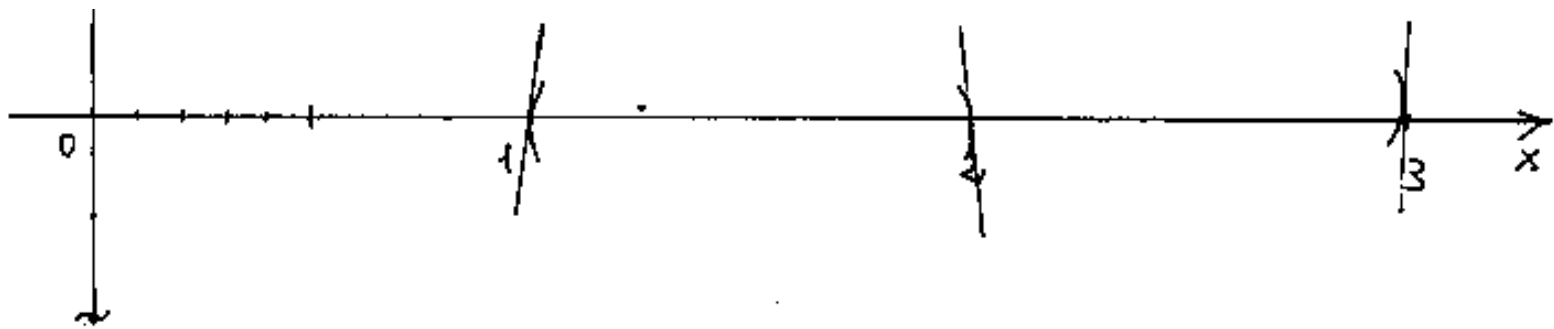
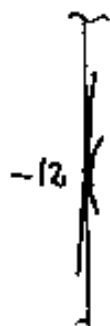
sostituendovi le radici abbiamo:

$x = 1 \rightarrow y' = +8$; $y'' = -12$; $x = 2 \rightarrow y' = -8$; $y'' = -10$; $x = 3 \rightarrow y' = 28$; $y'' = +112$

da cui il grafico:

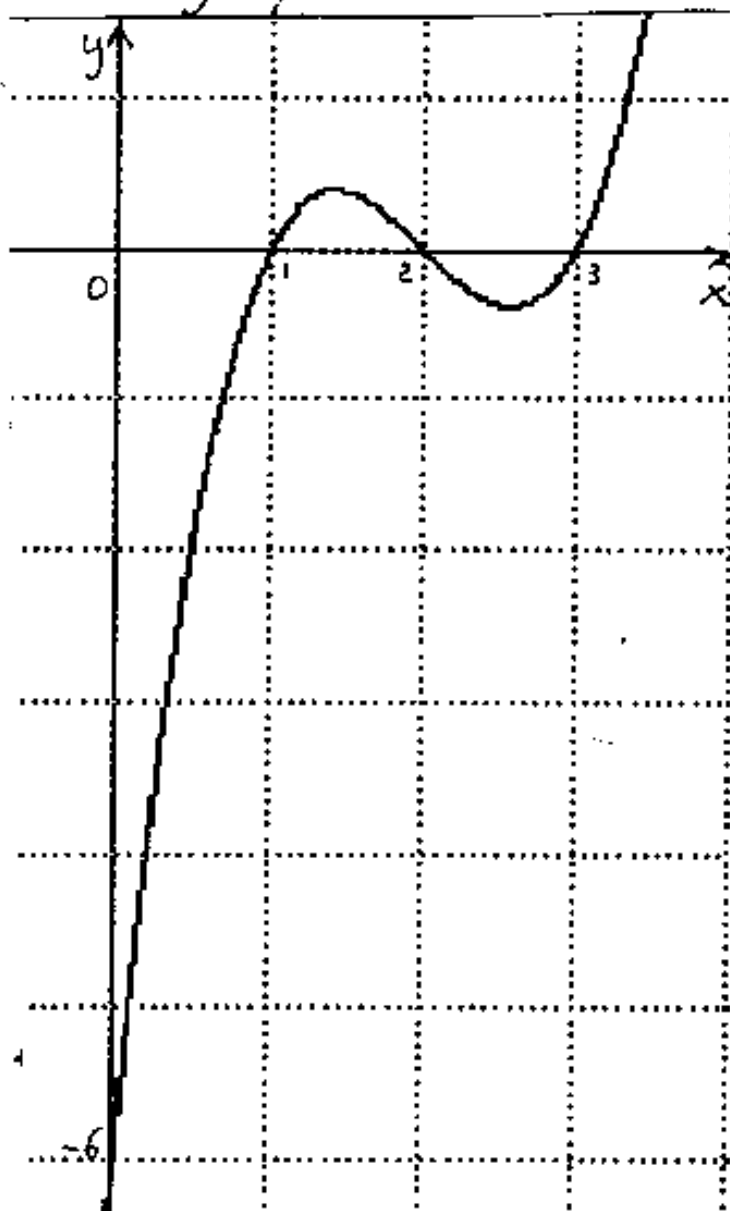
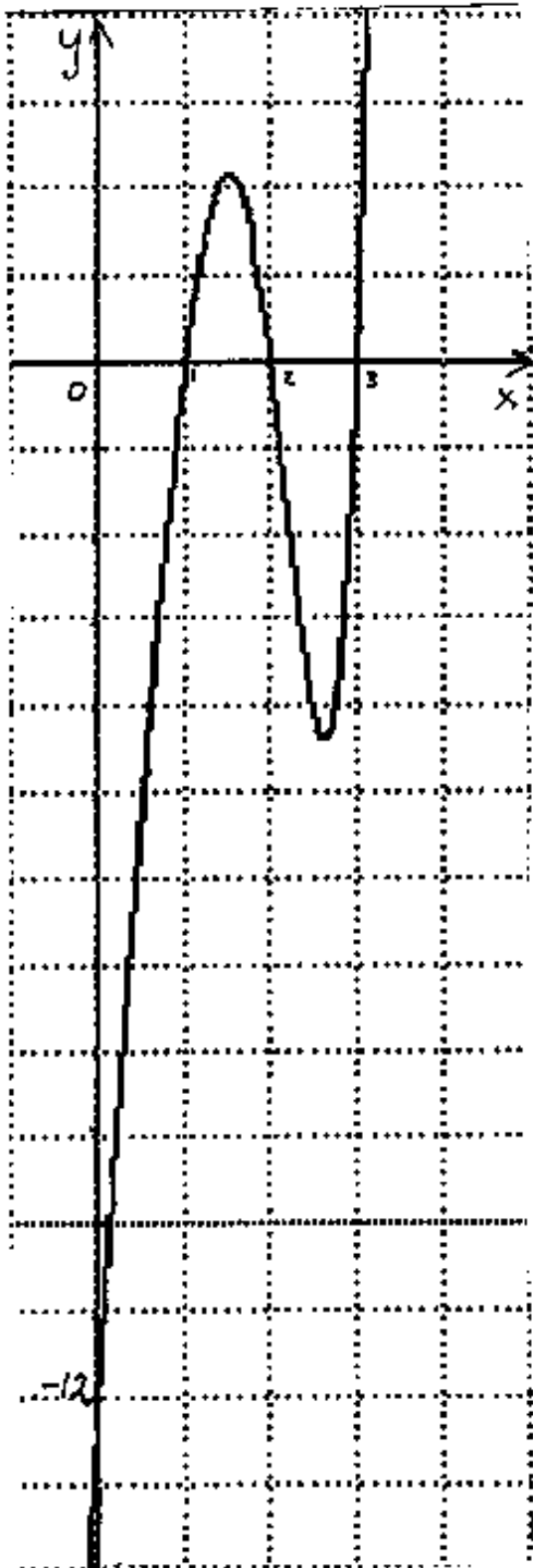
y

0 1 2 3 x

-12

Dal quale è possibile dedurre che abbiamo un max fra 1 e 2; (x=1,503377) un min fra 2 e 3 (x=2,633875); un flesso fra 2 e 3 (x=2,185752).

Per completezza riportiamo il grafico del polinomio di 5° grado il quale assomiglia molto ad un polinomio di 3° grado.

$$y = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$y = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

il cui grafico è:

Potevamo eseguire la divisione: se avessimo conosciuto: (x^2+x+2)

$$
\begin{array}{l}
(x^5-5x^4+7x^3-7x^2+16x-12) : (x^2+x+2) = (x^3-6x^2+11x-6) \\
-x^5-x^4-2x^3 \\
\quad -6x^4+5x^3-7x^2 \\
\quad +6x^4+6x^3+12x^2 \\
\qquad 11x^3+5x^2+16x \\
\qquad -11x^3-11x^2-22x \\
\qquad\quad -6x^2-6x-12 \\
\qquad\quad +6x^2+6x+12 \\
\qquad\quad // \quad // \quad //
\end{array}
$$

Il metodo di Graffe

(Per il calcolo delle equazioni, polinomi di grado n, per radici reali o complesse.)

Data l'equazione:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_i x^{n-i} + \dots a_n = 0$$

Consideriamo l'equazione: $f(-x) = 0$, si hanno due casi: $n =$ pari ; $n =$ dispari

per $n =$ pari $(-x)^n > 0$

" $n =$ dispari $(-x)^n < 0$

Ciò non ha rilevanza poiché: $f(-x) = 0$ si può sempre dividere o moltiplicare per (-1), i due membri, senza variare $f(-x) = 0$, perché sia $(+1)$ il primo coefficiente.

Moltiplichiamo ora: $(f(x))(f(-x)) = 0 = {}^1f(x)$, otterremo così una nuova equazione ${}^1f(x) = 0$

otterremo così una nuova equazione $f(x) = 0$

le cui radici saranno: α_i^2 $(i = 1, 2, \dots n)$.

Consideriamo la nuova equazione ${}^1_{\,}f_{(x)} = 0$

e ripetiamo il prodotto: $\left({}^1f_{(x)}\right)\left({}^1f_{(-x)}\right) = 0 = {}^2f_{(x)} = 0$

le cui radici saranno $\alpha_i^{2^2}$. $(i = 1, 2, \dots n)$

Se il procedimento viene ripetuto p volte

avremo una funzione: ${}^pf_{(x)} = 0$ le cui radici

saranno : $\alpha_i^{(2)^p}$ $(i = 1, 2, \dots n)$.

Cioè le radici α dell'equazione data sono elevate ad un esponente che è una potenza di 2 cioè : 2^p. (Con $p = 1, 2, \dots$ a piacere)

Dimostreremo che il metodo è iterativo e che le radici si approssimano al vero quanto più grande è p. Anzi è possibile, dall'esame dei coefficienti, estendere il procedimento fino a che non otteniamo l'approssimazione desiderata. Infatti supponiamo di aver calcolato i coefficienti dell'equazione per la funzione : ${}^{p-1}f_{(x)} = 0$ di grado n; avremo:

$$ {}^{p-1}f_{(x)} = x^n + {}^{p-1}a_1 x^{n-1} + {}^{p-1}a_2 x^{n-2} + \dots + {}^{p-1}a_i x^{n-i} + \dots + {}^{p-1}a_n = 0 $$

le cui radici saranno:

$$ {}^{p-1}\alpha_1 = \sqrt[2^{p-1}]{\frac{-{}^{p-1}a_1}{1}} \quad ; \quad {}^{p-1}\alpha_2 = \sqrt[2^{p-1}]{\frac{-{}^{p-1}a_2}{{}^{p-1}a_1}} \quad ; \dots {}^{p-1}\alpha_i = \sqrt[2^{p-1}]{-\frac{{}^{p-1}a_i}{{}^{p-1}a_{i-1}}} \quad ; $$

$$ {}^{p-1}\alpha_n = \sqrt{-\frac{{}^{p-1}a_n}{{}^{p-1}a_{n-1}}} $$

E' opportuno notare che l'errore che si commette è circa dello stesso ordine per le varie radici, quindi basterà calcolare una sola radice (per es. α_1, che è il valore maggiore fra le α_i $(i=1,2,\dots n)$).

Se confrontiamo: ${}^{p-1}\alpha_1$ e ${}^{p}\alpha_1$, noteremo

che le due radici hanno il gruppo iniziale di cifre identico; se tali cifre soddisfano l'approssimazione che ci siamo proposti, fermiamo il procedimento, altrimenti calcoliamo: ${}^{p+1}f(x) = 0$ ed avremo ${}^{p+1}\alpha_1$ come radice, che, confrontata con la precedente ${}^{p}\alpha_1$ noteremo che sarà più esteso il gruppo iniziale di cifre uguali.

Quando P comincia ad essere piuttosto grande, noteremo, nel calcolo dei coefficienti: $({}^{p}a_i)$, che i doppi prodotti che figurano nelle formule, non incidono più sulle cifre significative dell'approssimazione richiesta. Quindi da un certo "p" in poi possiamo trascurarli nel calcolo dei ${}^{p}a_i$, rendendo più snello il procedimento.

Vediamo ora come si calcolano i coefficienti della: ${}^{p+1}f(x) = ({}^{p}f(x))({}^{p}f(-x))$.

I due polinomi sono a segni alternati=vamente uguali ed opposti, per cui si elidono quei doppi prodotti che avranno segno op=posto (come avviene $(a-b)(a+b)$).

Qualunque sia p avremo:

p	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	....	x	1
0	1	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
1	1	$(-a_1^2+2a_2)$	$(a_2^2-2a_1a_3+2a_4)$	....	$(-1)^{n-1}a_{n-1}^2+(-1)^{n-2}2a_{n-2}a_n$	$(-1)^n a_n^2$
.	-					
.	-					
2	1	..	...	..	...	...
p	1	...	...	...	...	...

Il risultato della riga precedente serve per calcolare la riga successiva.

Per comprendere meglio il procedimento, eseguiamo il prodotto: $(f(x))(f(-x))=0$ per equazioni di 5° grado.

avremo:

$$f(x) = x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$

$$f(-x) = -x^5 + a_1x^4 - a_2x^3 + a_3x^2 - a_4x + a_5 = 0$$

$$f(-x) = -x + a_1 x - a_2 x + a_3 x - a_4 x + a_5 = 0$$

al fine di ottenere che sia +1 il coefficiente del primo termine (x^5), moltiplichiamo per (-1) l'equazione $f(-x)=0$ ed avremo:

$$f(-x) = \boxed{x^5 - a_1 x^4 + a_2 x^3 - a_3 x^2 + a_4 x - a_5 = 0}$$

ora eseguiamo dettagliatamente il prodotto: $\left(f(x)\right)\left(f(-x)\right) = 0$:

$$x^{5^2} + a_1x^9 + a_2x^{4^3} + a_3x^7 + a_4x^{3^2} + a_5x^5$$
$$-a_1x^9 - a_1^2x^{4^2} - a_1a_2x^7 - a_1a_3x^{3^2} - a_1a_4x^5 - a_1a_5x^{2^2}$$
$$+a_2x^{4^2} + a_1a_2x^7 + a_2^2x^{3^2} + a_2a_3x^5 + a_2a_4x^{2^2} + a_2a_5x^3$$
$$-a_3x^7 - a_1a_3x^{3^2} - a_2a_3x^5 - a_3^2x^{2^2} - a_3a_4x^3 - a_3a_5x^2$$
$$+a_4x^{3^2} + a_1a_4x^5 + a_2a_4x^{2^2} + a_3a_4x^3 + a_4^2x^2 + a_4a_5x$$
$$-a_5x^5 - a_1a_5x^{2^2} - a_2a_5x^3 - a_3a_5x^2 - a_4a_5x - a_5^2$$

p	x^5	x^4	x^3	x^2	x	
0	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	1	$-a_1^2+2a_2$	$+a_2^2-2a_1a_3+2a_4$	$-a_3^2+2a_2a_4-2a_1a_5$	$+a_4^2-2a_3a_5$	$-a_5^2$

Si noti come il coefficiente della riga soprastante figura come primo termine al quadrato, e come queste due righe portino la regola per calcolare la successiva. (per esempio:)

$$^2a_1 = -\left(-a_1^2+2a_2\right)^2 + 2\left[a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4\right]$$

Facciamo degli esempi pratici, abbinando, al calcolo algebrico, il calcolo numerico

di casi concreti, al fine di poter apprezzare l'approssimazione del procedimento ai vari livelli di p.

Noteremo anche come siano preferibili i metodi ordinari con n piccolo, e come sia laborioso il calcolo dei coefficienti con n grande.

Equazioni di primo grado

$f(x) = X + a_m = 0$; $f(-x) = ((-X) + a_m) = 0$ moltiplicando per (-1) si ha $f(-x) = (X - a_m) = 0$. L'equazione numerica sia:

$f(x) = (X - 3) = 0$

P	X		radici
0	1	a_m (-3)	–
1	1	$-a_m^2$ (9)	$\alpha = \sqrt{\frac{9}{1}} = 3$
2	1	$+a_m^4$ (81)	$\alpha = \sqrt[4]{\frac{81}{1}} = 3$

Se fosse stato $f(x) = (X + 3) = 0$; $f(-x) = (-X + 3) = 0$; $f(-x) = (X - 3) = 0$ avremmo avuto la stessa tabella, per cui per i segni delle radici è opportuno tener presente la regola dei segni di Cartesio.

Equazioni di 2° grado

$$f(x) = X^2 + a_1 X + a_2 = 0$$

$$X^2 - 2X - 8 = 0 \quad \begin{cases} \alpha_1 = +4 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}$$

P	X^2	X	$a_2 = a_n$	radici
0	1	a_1	a_n	[illegible]

0	1	a_1 (−2)	a_n (−8)	$\alpha_1=\sqrt{a_1^2-2a_2/1}$; $-\alpha_2=\sqrt{\frac{a_2^2}{-a_1+2a_n}}$
1	1	$(-a_1^2+2a_2)$ $-4+(-16)=-20$	a_2^2 (64)	$\alpha_1=\sqrt{\frac{20}{1}}=\underline{4,47}$; $-\alpha_2=\sqrt{\frac{64}{20}}=\underline{1,79}$
2	1	$(-20^2+2(64))$ $-400+128=-272$	64^2 4096	$\alpha_1=\sqrt[4]{\frac{272}{1}}=\underline{4,06}$; $-\alpha_2=\sqrt[4]{\frac{1064}{272}}=\underline{1,97}$
3	1	$-(272)^2+2(4096)$ -65792	4096^2 16777216	$\alpha_1=\sqrt[8]{\frac{65792}{1}}=\underline{4,00195}$; $-\alpha_2=\sqrt[8]{\frac{6777216}{65792}}=$ $-\alpha_2=\underline{1,9990255}$.

Equazioni di 3° grado

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = 0$$

(5), (-4), 1 } radici esatte.

p	x^3	x^2	x	a_n	radici
0	1	$a_1 = (-2)$	$a_2 = (-19)$	$a_3 = (+20)$	$\alpha_1 = \sqrt{\frac{a_1}{1}}$; $\alpha_2 = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$; $\alpha_3 = \sqrt{\frac{a_3}{a_2}}$
1	1	$(-a_1^2 + 2a_2)$ (−42)	$+a_2^2 - 2a_1 a_3$ (+441)	$-a_3^2$ (−400)	$\alpha_1 = \sqrt{42/1} = 6,48$ $\alpha_2 = \sqrt{441/42} = 3,24$ $\alpha_3 = \sqrt{400/441} = 0,95$
2	1	−882	+160881	−160000	$\alpha_1 = 5,449632$ $\alpha_2 = 3,675014$ $\alpha_3 = 0,99828155$
3	1	−456162	$+2,5600456116 \cdot 10^{10}$	$-2,56 \cdot 10^{10}$	$\alpha_1 = 5,097883$ $\alpha_2 = 3,923207$ $\alpha_3 = 0,99999773$
4	1	$-1,568828579 \cdot 10^{11}$	$+6,5536 ~~0000~~ 1 \cdot 10^{20}$	$-6,5536 \cdot 10^{20}$	$\alpha_1 = 5,008682$ $\alpha_2 = 3,9904635$ $\alpha_3 = 1$
5	1	$-2,330015110 \cdot 10^{22}$	$+4,294967295 \cdot 10^{41}$	$-4,294967296 \cdot 10^{41}$	$\alpha_1 = 5,000123749$ $\alpha_2 = 3,99990101$ $\alpha_3 = 1$

Si noti come aumentando il grado delle equazioni, occorra aumentare P, e ciò porta a coefficienti numerici molto alti potenze del 10^{41} con $a_n = 20$ e $p = 5$; per $p = 6$ si avrebbe 10^{83}, e non si potrebbe programmare in calcolatori il livello $P = 7$ perchè $> 10^{99}$, salvo speciali accorgimenti.

TABELLA per il calcolo dei coefficienti (metodo di Gräffe)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$-a_1^2$	(equazioni di primo grado)						
$(-a_1^2+2a_2)$	$+a_2^2$	(equazioni di secondo grado)					
"	$(+a_2^2-2a_1a_3)$	$(-a_3^2)$	(equazioni di terzo grado)				
"	$(+a_2^2-2a_1a_3+2a_4)$	$(-a_3^2+2a_2a_4)$	$(+a_4^2)$	(equazioni di quarto grado)			
"	"	$(-a_3^2+2a_2a_4-2a_1a_5)$	$(+a_4^2-2a_3a_5)$	$(-a_5^2)$	(equazioni di 5° grado)		
"	"	$(-a_3^2+2a_2a_4-2a_1a_5+2a_6)$	$(+a_4^2-2a_3a_5+2a_2a_6)$	$(-a_5^2+2a_4a_6)$	$(+a_6^2)$	(equaz. 6° grado)	
"	"	"	$(+a_4^2-2a_3a_5+2a_2a_6-2a_1a_7)$	$(-a_5^2+2a_4a_6-2a_3a_7)$	$(+a_6^2-2a_5a_7)$	$(-a_7^2)$	(eq 7°)
"	"	"	$(+a_4^2-2a_3a_5+2a_2a_6-2a_1a_7+2a_8)$	$(-a_5^2+2a_4a_6-2a_3a_7+2a_2a_8)$	$(+a_6^2-2a_5a_7+2a_4a_8)$	$(-a_7^2+2a_6a_8)$	$(+a_8^2)$

Notare che la somma degli indici dei singoli prodotti è il doppio dell'indice del coefficiente. Notare che per uno stesso coefficiente, la formula della riga successiva è aumentata o diminuita del doppio prodotto dei coefficienti aventi indice precedente e susseguente quelli dell'ultimo prodotto a segni alterni. (Il coeff. con indice zero vale 1).

Risoluzione grafica di equazioni algebriche

Notiamo che una equazione avente il primo coeffi= ciente unitario, non solo ammette tante radici (reali o immaginarie) quant'é il suo grado, ma dispone di tanti coefficienti (oltre il primo unitario) quant'è "n". Quindi, ad esempio una equazione di 2° grado è definita se si conoscono S. e P. Ma la coppia S; P determina un punto nel piano, cioè ad ogni punto del piano, non solo corrisponde una coppia: S e P, ma corrisponde a quel punto anche la coppia di radici di quella equazione.

Nella tavola che segue abbiamo posto in ascisse ed in ordinate le radici: x_1 ed x_2 di una generica equazione; ed abbiamo disegnato al loro variare le linee (rette) ad S = costante, e le linee (iper= boli equilatere) a P = costante.

Noti: S e P dalla tavola si hanno immediata=

Noti: S e P dalla tavola si hanno immediatamente le radici: x_1 ed x_2.

Nel caso di radici immaginarie la retta S non incontra l'iperbole P.

Provate a dire, a caso, un valore S ed un valore P, il punto d'incontro avrà per coordinate le radici x_1 ed x_2. (Con l'approssimazione grafica).

valori di P<0

valori di P>0

valori di $P > 0$ valori di $P < 0$

valori di $S < 0$

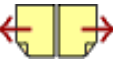
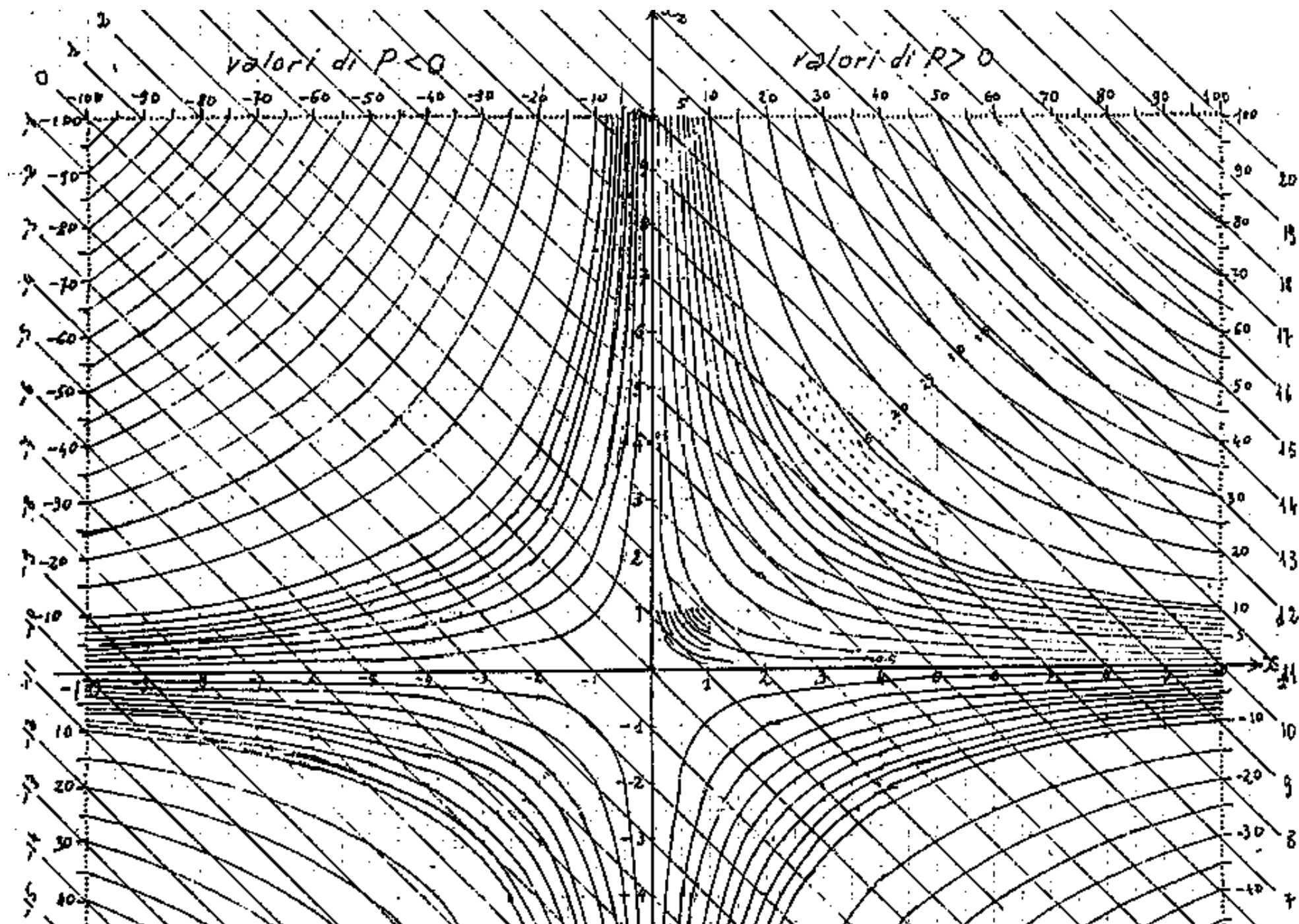
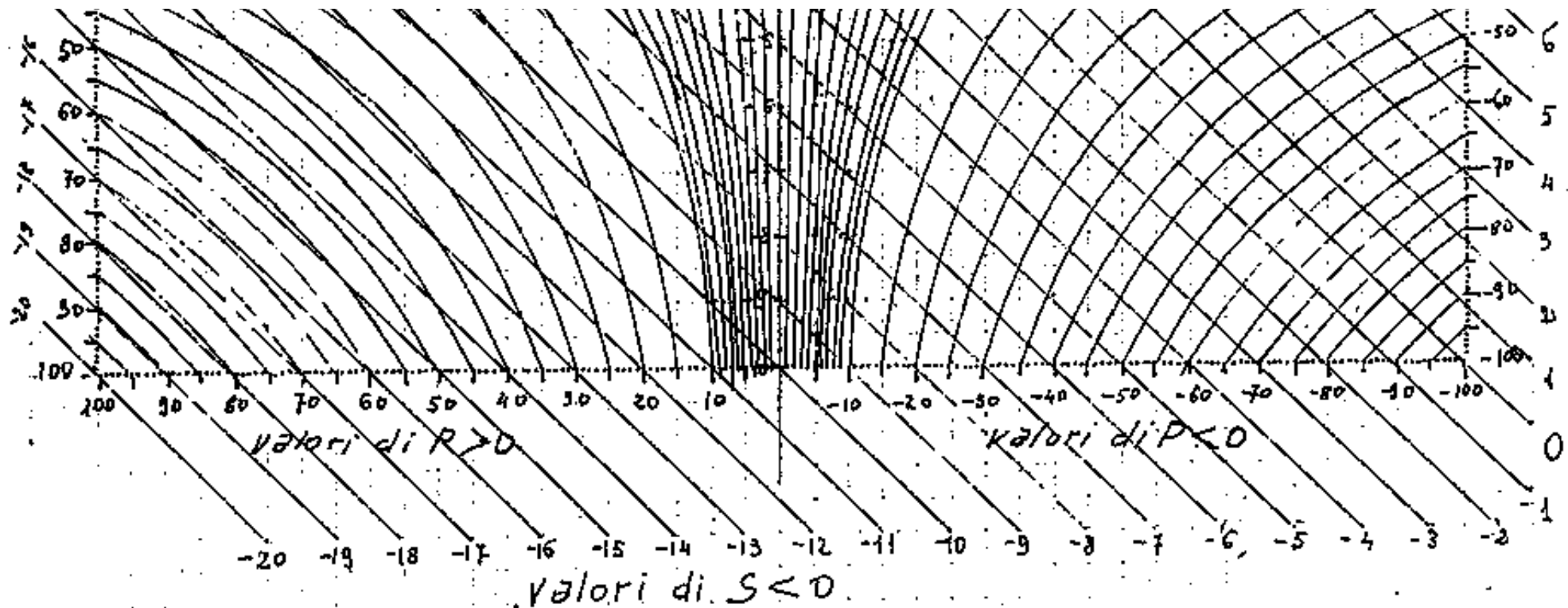
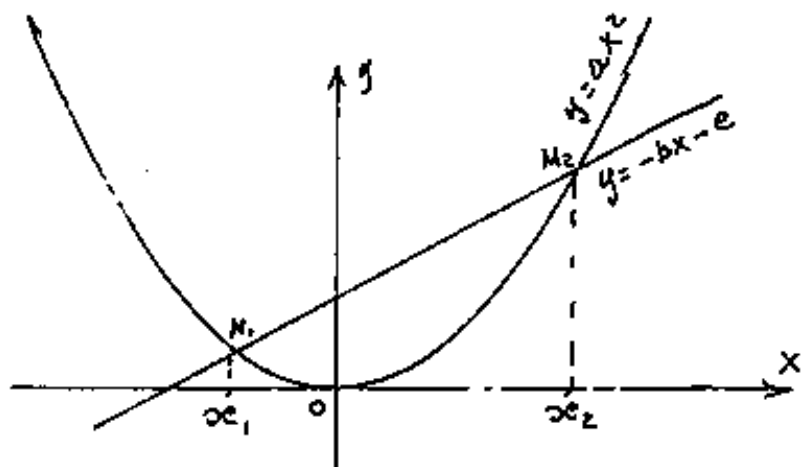



Tavola delle equazioni di 2° grado: $x^2 - SX + P = 0$

S = somma radici ; P = Prodotto radici (in ascisse e ordinate le radici)

(Se cambiamo scala moltiplicando S per 10, P deve essere moltiplicata per 100)

(Il punto comune alle rette S ed alle iperboli P ha per coordinate le radici).

Le costruzioni grafiche per risolvere un'equazione di 2° grado, sono molteplici, in genere utilizzano l'intersezione di una parabola con una retta. (come in figura)

Ove costruita una volta per tutte la parabola $y=x^2$ (con a=1) la retta $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$, sarà tracciata di volta in volta per determinare M_1, M_2 e quindi x_1; x_2.

Il discorso che abbiamo fatto per le equazioni di 2° grado, potrebbe essere esteso alle equazioni di 3° grado in campo tridimensionale, ma il modellino spaziale non è pratico. Anche scindere l'equazione di 3° grado nella linea, $y=x^3$, (parabola cubica); e nella linea $-Sx^2+Qx-P=y$ (parabola ad asse verticale) comporta che le ascisse dei punti comuni alle due linee sono le radici dell'equazione di 3° grado.

Non insistiamo ulteriormente su queste costruzioni

Non insistiamo ulteriormente su queste costruzioni grafiche, che ciascuno può inventarsi, vogliamo invece trattare delle equazioni risolte per tentativi.

Una espressione del tipo: $f(x)=0$, può sempre riguardarsi come una equazione in x qualunque sia la funzione...

Risoluzione per tentativi (delle equazioni)

Consideriamo una funzione per la quale sia difficile determinare il campo, o i campi, nei quali $f(x) \gtreqless 0$.

In questi casi si attribuiscono ad x valori arbitrari, per i quali sia facile il calcolo della $f(x)$. Abbiamo già visto, per le equazioni algebriche, come il valore $x = 0$, porti facilmente a determinare anche le derivate in $x=0$. Altri valori di x che possono facilitare i calcoli sono $x = \pm 1$ ed, in equazioni algebriche, porre $x = -a^{n-1}$, eliminando così due termini ad esponente più alto.

Quando due diverse x portano ad $f(x)$ di segno opposto vuol dire che intermedia alle due x arbitrarie abbiamo una radice.

È opportuno considerare il segno dei coefficienti delle potenze della X, infatti le potenze dispari assumono il segno della X che per il segno del coefficiente, darà il contributo positivo o negativo all'azzeramento della f(x).
In particolare, se, i segni dei coefficienti delle potenze pari, sono tutti negativi, e se

gli altri coefficienti sono tutti positivi, una $f(x)$ con "n" dispari, avrà almeno una radice per valori di x piccoli in valore assoluto.

Facciamo un esempio:

$$f(x) = x^7 - 3x^6 + 4x^5 - 8x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 1$$

Per quanto già detto notiamo:

1) $n=7$ = dispari; $a_0 = -1$; esiste almeno una radice reale > 0.

2) per $x=0$: $f(x) = -1$; $f'(x) = +1$; $f''(x) = -2$;

cioè sull'asse delle y la linea $f(x)$ in $y=1$ ha una tangente a 45° crescente, $(f'(x) = +1)$, ed una curvatura verso il basso $(f''(x) = -2 < 0)$. Ciò implica che per $x > 0$ vi sarà almeno un max ed un min. perché la $f(x)$ e le sue derivate al crescere di x finiscono per diventare: > 0. $(f''(x) > 0)$.

Scriviamo la $f(x)$ nella forma:

$$f(x) = x^6(x-3) + x^4(4x-8) + x^2(3x-1) + (x-1)$$

1) Poiché per $x < 0$ tutti gli addendi sono < 0,

1) Poiché per $x<0$ tutti gli addendi sono <0, per qualunque valore di $x<0$ non vi sono quindi radici (ove $f(x)=0$) ($f(x<0)<0$)

2) Poiché per $x>3$ tutti gli addendi sono >0, per qualunque valore di $x>3$ non vi sono quindi radici (ove $f(x)=0$) essendo ($f(x>3)>0$).

3) per $x=3 \rightarrow f(x) = 3^4(4)+3^2(8)+2 = 398 > 0$

per $x=2 \rightarrow f(x) = +2^6(-1)+0+2^2(5)+1 = \underline{-43<0}$

quindi intermedia fra 2 e 3 vi è almeno una radice reale.

per $x=1 \rightarrow f(x) = 1^6(-2)+1^4(-4)+1^2(2)+0 = \underline{-4<0}$

Per sapere se fra 0 ed 1 e fra 1 e 2 vi sono coppie di radici reali facciamo le derivate della $f(x)$

$$f'(x) = 7x^6 - 18x^5 + 20x^4 - 32x^3 + 9x^2 - 2x + 1$$

che scriviamo nella forma:

$$f'(x) = x^5(7x-18) + 4x^3(5x-8) + x(9x-2) + 1$$

per $\underline{x<0}$; la $f'(x) > 0$ (sempre), cioè non vi sono max o min.

per $\underline{x=1} \rightarrow f'(x) = (7-18)+4(5-8)+(9-2)+1 = \underline{-15<0}$

poiché per $x=0 \rightarrow f'(x) = +1 > 0$ ed $f''_{(0)} < 0$ vi è almeno un max fra $x=0$ ed $x=1$.

Per $\underline{x=2} \rightarrow f'(x) \rightarrow 32(-4)+32(+2)+2(16)+1 = \underline{-33<0}$

fra $x=2$ ed $x=3$ vi è almeno un min.

facciamo ora $f''(x)$

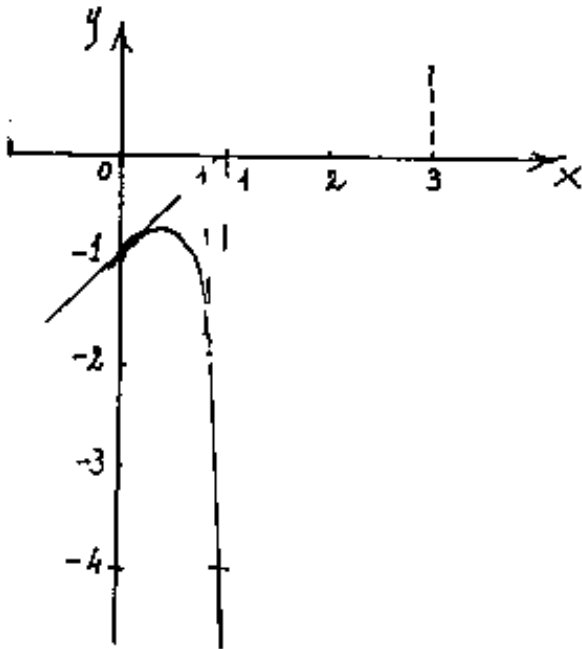
$$f''(x) = 42x^5 - 90x^4 + 80x^3 - 96x^2 + 18x - 2$$

$$f(x) = 42x^5 - 90x^4 + 80x^3 - 96x^2 + 18x - 2$$

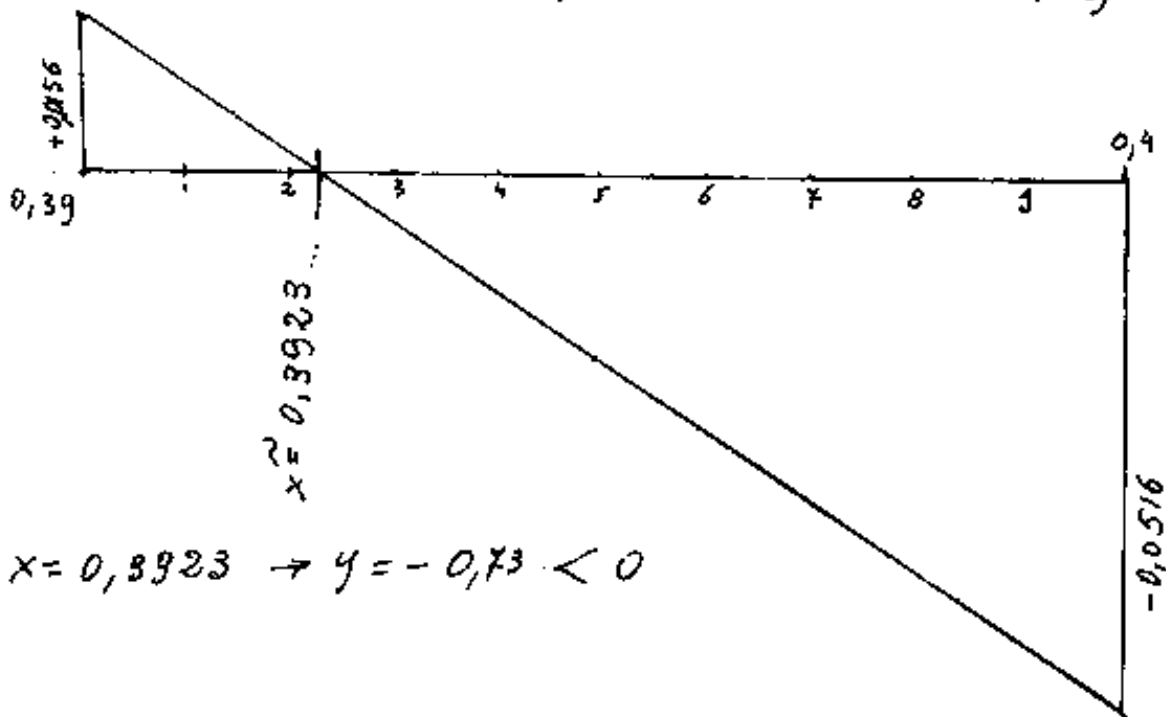
che scriviamo:

$$6x^4(7x - 15) + 16x^2(5x - 6) + (18x - 2) = f''_{(x)}$$

per $x \leq 0$ $f''_{(x<0)} < 0$ (sempre) non ammette flessi.

per $x \leq 1$ $f''_{(x<1)} < 0$ non ammette flessi cioè fra $x = 0$ ed $x = 1$ vi è un solo max, per decidere che fra 0 ed 1 vi sono due radici reali occorre $f_{(max)} > 0$

Disegnamo quanto sappiamo per i punti $x = 0$ ed $x = 1$, notiamo che le tangenti si incontrano in $y < 0$, e se cerchiamo di raccordare le tangenti (ad occhio), si trova che il massimo dovrebbe essere intorno ad $x = 0,4$; $f'_{(0,4)} = -0,051648 < 0$ $f'_{(0,39)} = +0,015607848\ldots$

+0,0156

0,39 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0,4

$x \cong 0,3923\ldots$

-0,0516

per $x = 0,3923 \rightarrow y = -0,73 < 0$

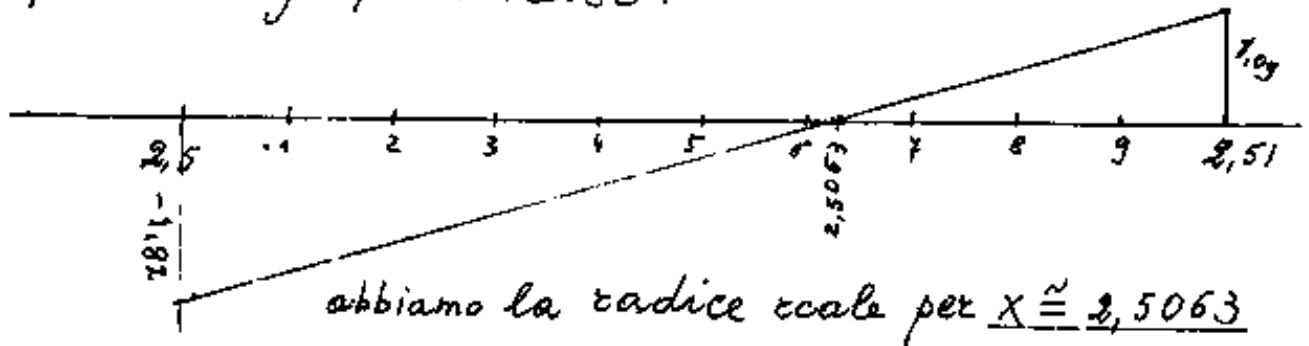
cioè non vi sono radici reali: $0 \leq x \leq 1$

$y'' \simeq 0$ per $x \cong$ [illegible] ; ed $y' \cong 0$ cioè min per

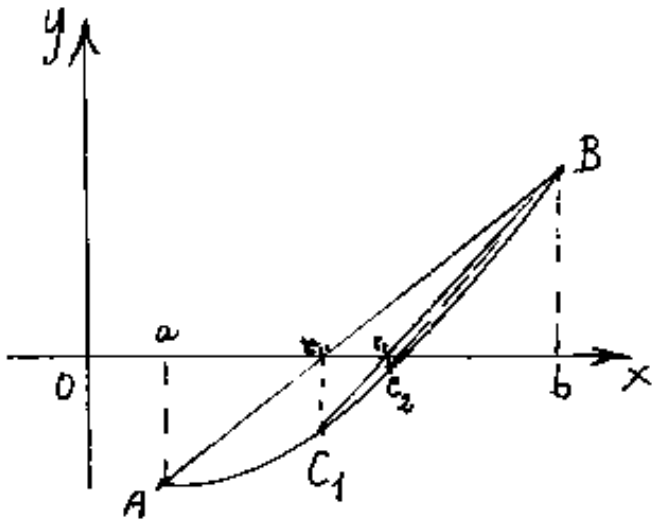
$x \simeq 2,12$; Ciò implica che vi è una sola radice reale. Proviamo per $x = 2,5$ avremo:

$y = -1,82031$; per $x = 2,51 \rightarrow y = +1,090716$

interpolando graficamente:

abbiamo la radice reale per $x \cong 2,5063$

Metodo delle parti proporzionali

o metodo delle corde o regula falsi

y, B, a, 0, b, x, c_1, c_2, A, C_1

Trovati, al solito, due punti A e B tali che $f(x_A)$ ed $f(x_B)$ siano di segno opposto e sia: $x_A=a$, $x_B=b$; è facile trovare la corda $\overline{AB}$ che taglierà in X_{C_1} le ascisse. Calcoliamo $f(x_{C_1})$ e tracciamo la nuova corda $\overline{BC_1}$ che a sua volta taglierà le ascisse in X_{C_2}, calcoremo $f(x_{C_2})$ e tracciamo la nuova corda. Continuando il procedimento notiamo che $f(x_{C_i})$ si avvicina sempre più a zero, e fermeremo il procedimento quando l'approssimazione ha raggiunto quella che volevamo.

Volevamo.

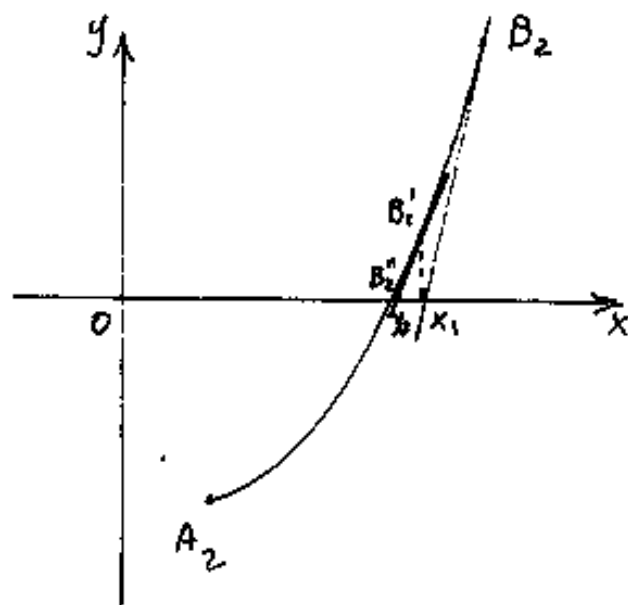
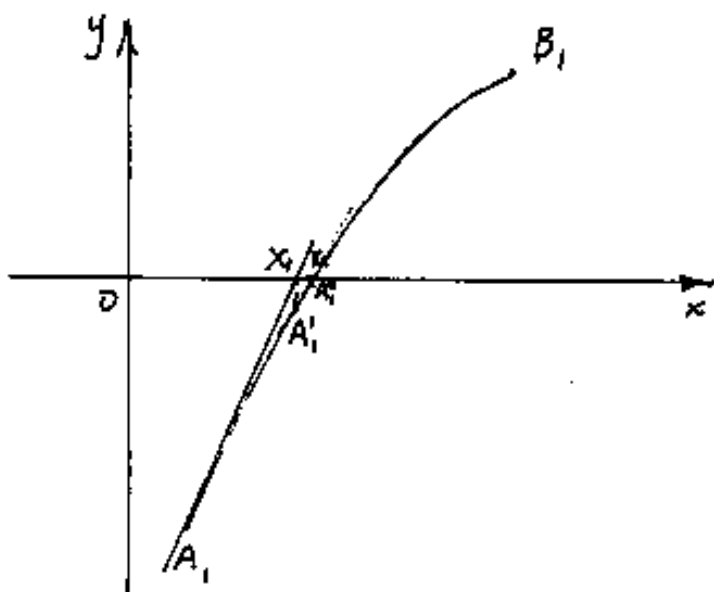
$$(X_C - X_A) : f(X_A) = (X_B - X_C) : f X_B$$

$$X_B f(X_A) - X_C f(X_A) = X_C f(X_B) - X_A f(X_B)$$

$$X_C = \frac{X_A f(X_B) + X_B f(X_A)}{f(X_A) + f(X_B)}$$

Notiamo che se la curvatura della $f(x)$ fosse verso il basso $f(X_B)$ ed $f(X_C)$ avrebbero lo stesso segno per cui la corda sarebbe $\overline{CA}$ da tracciare.

Metodo delle tangenti o di Newton-Fourier

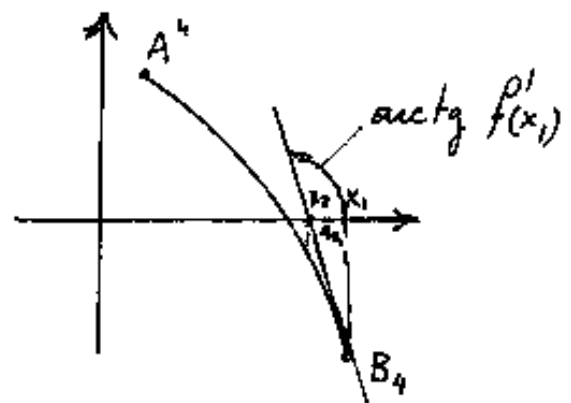
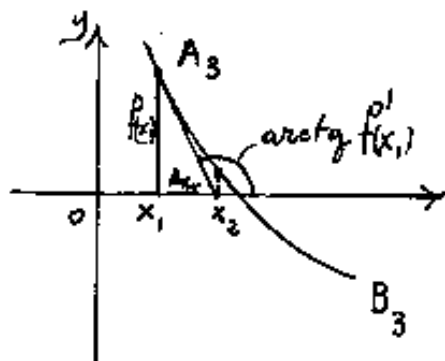
Consideriamo, al solito, $f(x_A)$ ed $f(x_B)$ di segno opposto, (sappiamo che una funzione continua cambia segno passando per zero o per ∞). Supponiamo che in $\widehat{AB}$ vi sia una $f(x)=0$ e che nel tratto $\overline{AB}$ siano monotone le derivate prime e seconde, cioè abbiano lo stesso segno e non passino per zero, quindi non vi siano max o min, nè flessi.

Chiameremo estremo di Fourier l'estremo del tratto AB ove la curva volge la convessità verso le ascisse (nella figura a sinistra è A_1,

sta verso le ascisse (nella figura a sinistra è A_1, nella figura a destra è B_2)

Per A_1 tracciamo la tangente troviamo X_1 e quindi $f(X_1) = \overline{X_1A_1'}$. Per A_1' tracciamo la nuova tangente troviamo X_2, quindi $f(X_2) = \overline{X_2A_1'}$, ripetendo il procedimento notiamo che oltre un certo X_i le prime cifre rimangono invariate e quindi si può calcolare

$f(x) = 0$ con l'approssimazione desiderata.
Lo stesso discorso vale per B_2 da cui si traccia la tangente per trovare X_1 e quindi $f(x_1) = \overline{X_1 B_2'}$ e per B_2' la nuova tangente ...

È chiaro che prima di partire dobbiamo sapere qual'è l'estremo di Fourier, partendo dall'altro estremo il procedimento è divergente.

Notiamo che la variazione di ascissa è $\Delta x_1 = f(x_1)/f'(x)$, ed è tanto maggiore quanto più piccolo è $f'(x)$. ($X_2 = X_1 \pm \Delta x_1$) a seconda che l'estremo di Fourier sia a sinistra o a destra della curva.

Si sono ridisegnate altre due possibilità nell-

Si sono ridisegnate altre due possibilità nella scelta dell'estremo di Fourier per mettere in evidenza il segno di Δx.

Per la programmazione dei computer occorre anche aver presenti questi elementi.

Le curve piane

La rappresentazione delle curve piane ri=
chiede una più precisa definizione dei siste=
mi di riferimento, e della grafica rappresentativa.

Nel II volume abbiamo già accennato ai dia=
grammi, agli istogrammi, ai diagrammi a torta,
ecc; cioè ai metodi grafici per rendere, in sintesi,
l'essenza e l'entità di un fenomeno.

Nel IV volume si sono dati alcuni elementi di
geometria descrittiva, si è accennato alle varie
proiezioni, cartografiche e cristallografiche.

Abbiamo visto come una $y=f(x)$ è riferita
ad un modulo grafico, definito dimensionalmen=
te, abbiamo visto come le parabole (vol II)
con opportuna scelta del modulo possono
identificarsi.

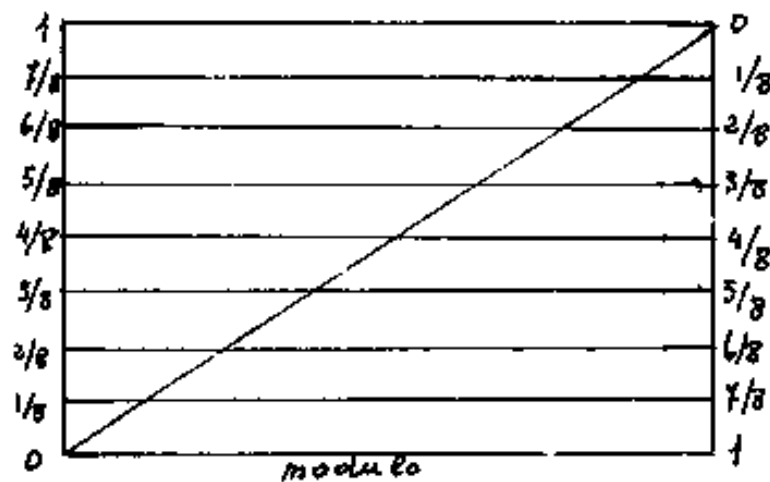
Stabilito un modulo grafico unitario il

cui sfrazionamento non sia riportato in sca=
limetri, per la grafica sono di grande ausilio
<u>le scale ticoniche</u> che permettono qualsia=
si sfrazionamento, con grande precisione, e
sono valide non solo per lo sfrazionamento
decimale, ma per qualsiasi grandezza rappre=

sentata da numeri complessi reali.

Per esempio, se un modulo deve essere diviso in ottavi, si disegna un rettangolo che ha per base il modulo e per altezza otto segmenti uguali, da ciascuno dei quali si traccia la parallela alla base, e quindi una diagonale frazionerà in ottavi le parallele.

1	0
7/8	1/8
6/8	2/8
5/8	3/8
4/8	4/8
3/8	5/8
2/8	6/8
1/8	7/8
0	1

modulo

Può anche essere utile aver presenti le operazioni di calcolo grafico esposte nel I Vol.

Infine nelle scale grafiche devono essere evidenziate le dimensioni fisiche cui si riferiscono.

Il nonio (o verniero) è un segmento lungo (n-1) parti

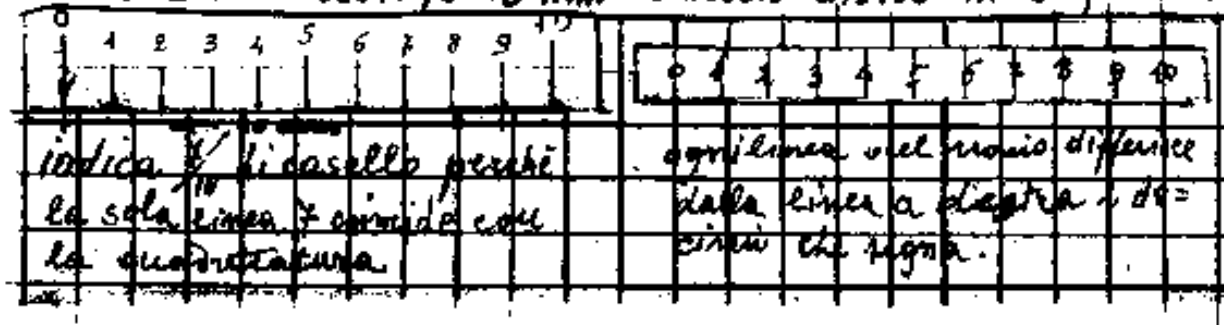
Il nonio (o verniero) è un segmento lungo $(n-1)$ parti diviso in n parti misura $\frac{1}{n}$ di parte.

Per avere $\frac{1}{20}$ di millimetro (per graduazioni in millimetri) il nonio sarà lungo 19 mm e sarà diviso in 20 parti. A fianco un nonio per la carta quadrettata ($\frac{1}{10}$ di casella)

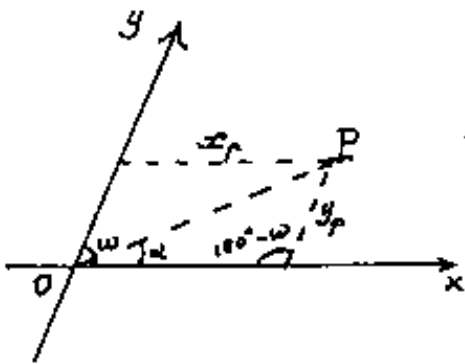
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

indica $\frac{7}{10}$ di casello perché la sola linea 7 coincide con la quadrettatura

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

ogni linea del nonio differisce dalla linea a destra i decimi che segna.

Sistemi di riferimento ad assi obliqui

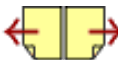
Per trattare con maggiore generalità le curve piane, introduciamo alcuni elementi di geometria analitica ad assi non ortogonali; consideriamo cioè gli assi ortogonali, un caso particolare di assi obliqui. Sia "ω" l'angolo compreso fra i semiassi positivi della "x" e della "y". (Per $\omega = \pi/2$ si ha il sistema ortogonale).

Resta la regola di misurare le coordinate parallelamente agli assi.

Se $x; y$ sono le coordinate di un generico punto P, la sua distanza dall'origine degli assi, per il teorema di Carnot, sarà:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos(180-\omega)}$$

cioè:

$$\boxed{\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos(\omega)}}$$

da cui l'equazione di un cerchio al centro, di rag=

da cui l'equazione di un cerchio di centro O, di raggio R sarà: $\boxed{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega = R^2}$

(questa espressione in coordinate ortogonali risulta un ellisse solo ruotato (v. vol II) di 135° o 45° per $\omega < \pi/2$ e con assi variabili con ω)

Detto α l'angolo che la direzione $\overrightarrow{OP}$ forma con l'asse delle X (verso positivo), avremo:

$$\operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}(180° - \omega) = y : \overline{OP}$$

cioè:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y \operatorname{sen}\omega}{\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\omega}}$$

ed anche:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\cos\omega\left(\frac{x}{y}\right)+1}}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\cos(\omega)\left(\frac{x}{y}\right)+\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right)=0$$

$$\left(\frac{x}{y}\right) = -\cos\omega \pm \sqrt{\cos^2\omega-1+\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\alpha}}$$

$$\frac{x}{y} = -\cos\omega \pm \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\alpha}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

prendiamo il segno (+) della radice:

$$\frac{x}{y} = -\cos\omega + \operatorname{sen}\omega/\operatorname{tang}\alpha$$

$$\frac{y}{x} = m = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{sen}(\omega)-\cos\omega\operatorname{tang}\alpha}$$

(Si noti che, per $\omega = 90° = \pi/2$ rad, ritornano i valori ad assi ortogonali.)

Quindi l'equazione di una retta in forma esplicita può scriversi: $\boxed{y = mx + q}$ ove il coefficiente angolare $m = \frac{\tan\alpha}{\operatorname{sen}(\omega) - \cos\omega \operatorname{tg}\alpha}$; ed il coefficiente di traslazione lineare q è misurato parallelamente alla direzione dell'asse y.

Se dividiamo per q l'espressione esplicita della retta e portiamo nel primo membro mx, si ha:

$$-\frac{m}{q}x+\frac{y}{q}=1$$

cioè ponendo $-\frac{q}{m}=p$ abbiamo:

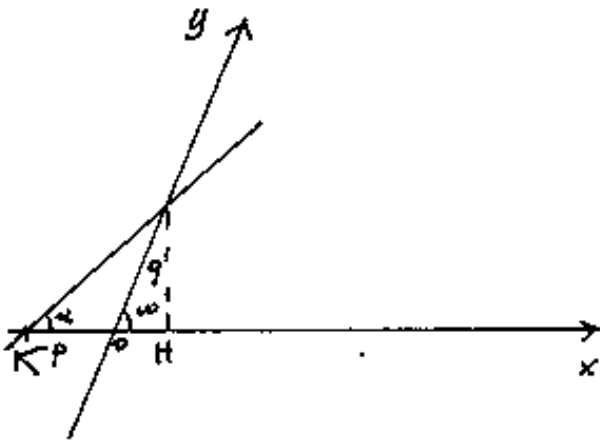
$$\boxed{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1}$$

che è l'equazione segmentaria della retta ove q e p sono i segmenti staccati sugli assi dalla retta stessa. (Cioè l'identico significato che in assi ortogonali). (per dimostrarlo basta pensare $x=0$ oppure $y=0$)

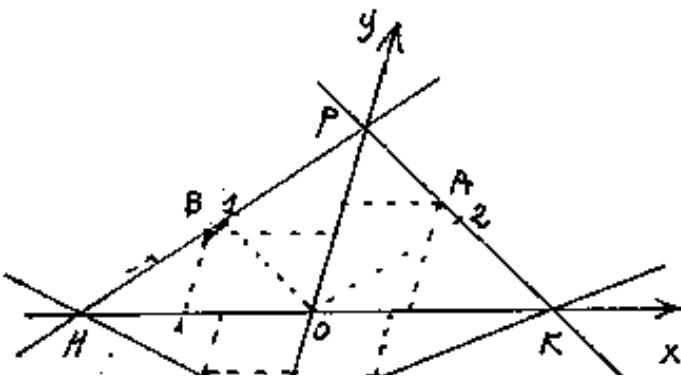
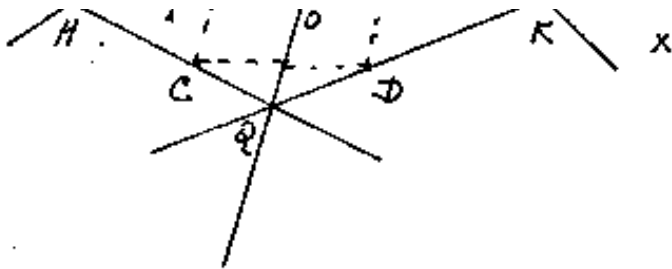
Per vedere che: $p=-q/m$

cioè: $p=q\frac{\cos\omega\,tg\alpha-\operatorname{sen}\omega}{\tan g\alpha}$

$$p=q\cos\omega-\frac{q\operatorname{sen}\omega}{tg(\alpha)}$$

$$p=\overline{OH}-\overline{KH}$$

Utilizziamo la formula per un problema che ci servirà in statica.

<u>Date le coordinate di quattro punti A, B, C, D</u>

H K X C D Q

esistenti uno per quadrante

trovare i punti P, Q, H, K

che siano sugli assi e siano vertici di un quadrilatero i cui lati passano per A, B, C, D.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x_A}{\overline{OK}} + \frac{y_A}{\overline{OP}} &= 1\\
\frac{x_B}{\overline{OH}} + \frac{y_B}{\overline{OP}} &= 1\\
\frac{x_C}{\overline{OH}} + \frac{y_C}{\overline{OQ}} &= 1\\
\frac{x_D}{\overline{OK}} + \frac{y_D}{\overline{OQ}} &= 1
\end{aligned}\right\}$$

abbiamo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite: $\overline{OK}$; $\overline{OP}$; $\overline{OH}$; $\overline{OQ}$ considerando z_1 ; z_2 ; z_3 ; z_4 gli inversi delle incognite, con Cramer, avremo:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 0 & 0 \\ 0 & y_B & x_B & 0 \\ 0 & 0 & x_C & y_C \\ x_D & 0 & 0 & y_D \end{vmatrix} = x_A \begin{vmatrix} y_B & x_B & 0 \\ 0 & x_C & y_C \\ 0 & 0 & y_D \end{vmatrix} - y_A \begin{vmatrix} 0 & x_B & 0 \\ 0 & x_C & y_C \\ x_D & 0 & y_D \end{vmatrix} = \left(x_A y_B x_C y_D - y_A x_B y_C x_D \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & y_A & 0 & 0 \\ 1 & y_B & x_B & 0 \\ 1 & 0 & x_C & y_C \\ 1 & 0 & 0 & y_D \end{vmatrix} = \left(y_B x_C y_D - y_A \begin{vmatrix} 1 & x_B & 0 \\ 1 & x_C & y_C \\ 1 & 0 & y_D \end{vmatrix} \right) = \left(y_B x_C y_D - y_A x_C y_D + y_A x_B (y_D - y_C) \right)$$
$$= y_A x_B (y_D - y_C) + x_C y_D (y_B - y_A)$$

$$\begin{vmatrix} x_A & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_B & 0 \\ 0 & 1 & x_C & y_C \\ x_D & 1 & 0 & y_D \end{vmatrix} = x_A \begin{vmatrix} 1 & x_B & 0 \\ 1 & x_C & y_C \\ 1 & 0 & y_D \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & x_B & 0 \\ 0 & x_C & y_C \\ x_D & 0 & y_D \end{vmatrix} = \left(x_A x_C y_D - x_A x_B (y_D - y_C) - x_B y_C x_D \right)$$
$$= x_A y_D (x_C - x_B) + x_B y_C (x_A - x_D)$$

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 & 0 \\ 0 & y_B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_C \\ x_D & 0 & 1 & y_D \end{vmatrix} = x_A y_B (y_D - y_C) - x_D \begin{vmatrix} y_A & 1 & 0 \\ y_B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y_C \end{vmatrix} = \left(x_A y_B (y_D - y_C) + y_C x_D \left(y_B - y_A\right)\right)$$

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 0 & 1 \\ 0 & y_B & x_B & 1 \\ 0 & 0 & x_C & 1 \\ x_D & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B x_C - y_A \begin{vmatrix} 0 & x_B & 1 \\ 0 & x_C & 1 \\ x_D & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & y_B & x_B \\ 0 & 0 & x_C \\ x_D & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(x_A y_B x_C - y_A x_D \left(x_B - x_C\right) - x_D y_B x_C\right)$$

$$= y_A x_D \left(x_C - x_B\right) + y_B x_C \left(x_A - x_D\right)$$

Quindi le nostre incognite:

$$\overline{OK} = \frac{(x_A y_B x_C y_D - y_A x_B y_C x_D)}{y_A x_B (y_D - y_C) + x_C y_D (y_B - y_A)}$$

$$\overline{OP} = \frac{(x_A y_B x_C y_D - y_A x_B y_C x_D)}{x_A y_D (x_C - x_B) + x_B y_C (x_A - x_D)}$$

$$\overline{OH} = \frac{(x_A y_B x_C y_D - y_A x_B y_C x_D)}{x_A y_B (y_D - y_C) + y_C x_D (y_B - y_A)}$$

$$\overline{OQ} = \frac{(x_A y_B x_C y_D - y_A x_B y_C x_D)}{y_A x_D (x_C - x_B) + y_B x_C (x_A - x_D)}$$

sono indipendenti da ω, hanno tutte lo stesso numeratore, differenza di coordinate alterne, consentono di scrivere le equazioni delle rette per A, B, C, D, in forma esplicita:

A) $y = \frac{-\overline{OP}}{\overline{OK}} x + \overline{OP}$

B) $y = \frac{-\overline{OP}}{\overline{OH}} x + \overline{OP}$

C) $y = \frac{-\overline{OQ}}{\overline{OH}} x + \overline{OQ}$

D) $y = \frac{-\overline{OQ}}{\overline{OK}} x + \overline{OQ}$

Se tracciamo la parallela passante per l'origine alla retta passante per A e cerchiamo il punto 1 d'incontro con la retta passante per B, abbiamo:

$$-\frac{\overline{OP}}{\overline{OK}} x = -\frac{\overline{OP}}{\overline{OH}} x + \overline{OP}$$

[illegible] $\overline{OH} \cdot \overline{OK}$ [illegible] $-\overline{OP}\ \overline{OH}$

da cui: $X_1 = \frac{\overline{OH} \cdot \overline{OK}}{\overline{OK} - \overline{OH}}$; $y_1 = \frac{-\overline{OP}\ \overline{OH}}{\overline{OK} - \overline{OH}}$

analogamente il punto 2 comune alla retta per A ed alla parallela per l'origine della retta per B.

$X_2 = -\frac{\overline{OH} \cdot \overline{OK}}{\overline{OK} - \overline{OH}}$; $y_2 = -\frac{\overline{OP}\ \overline{OK}}{\overline{OK} - \overline{OH}}$

abbiamo così le coordinate del parallelogramma: (O1P2) di cui $\overline{OP}$ è diagonale. ed $X_1 = X_2$ componenti secondo x dei lati ove $y_1 + y_2 = \overline{OP}$.

Condizione di Parallelismo

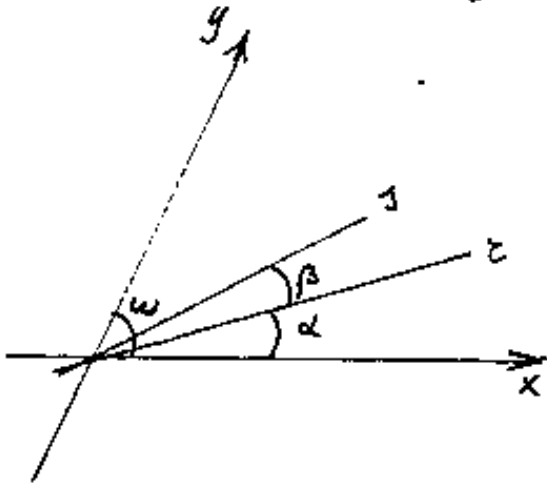
Vale anche ad assi inclinati la condizione che: "due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare

$$m = \frac{\tan(\alpha)}{\sin(\omega) - \cos(\omega)\tan(\alpha)}$$

ove: ω = angolo fra i semiassi positivi, α = angolo fra la retta ed il semiasse positivo della x.

<u>Il coefficiente angolare dipende dall'angolo ω degli assi</u>.

Angolo fra due rette

y
s
r
ω
β
α
x

Consideriamo due rette per l'origine degli assi e sia β l'angolo da esse formato, se la retta r forma l'angolo α con l'asse x, la retta s, forma l'angolo $(\alpha+\beta)$ con lo stesso asse x.

l'angolo $(\alpha+\beta)$ con lo stesso asse x.

Dai rispettivi coefficienti angolari abbiamo:

$$\tan(\alpha) = \frac{m_2 \sin\omega}{1 + m_2 \cos\omega}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{m_1 \sin\omega}{1 + m_1 \cos\omega}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$$tg(\alpha+\beta) - tg(\alpha) = tg(\beta)\left[1 + tg(\alpha)\, tg(\alpha+\beta)\right]$$

$$\tan(\beta) = \frac{\dfrac{m_1 \sin\omega}{1 + m_1\cos\omega} - \dfrac{m_2 \sin\omega}{1 + m_2\cos\omega}}{1 + \dfrac{m_1 \sin\omega}{1 + m_1\cos\omega} \cdot \dfrac{m_2 \sin\omega}{1 + m_2\cos\omega}}$$

$$\boxed{\tan(\beta) = \frac{(m_1 - m_2)\sin\omega}{\left(1 + (m_1 + m_2)\cos\omega + m_1 m_2\right)}}$$

ove per $\omega = \pi/2$ $m_1 = \tan(\alpha+\beta)$; $m_2 = \tan\alpha$, torna: $tg(\beta) = \tan[(\alpha+\beta) - \alpha]$.

Ad assi obliqui, oltre alla condizione di perpendicolarità c'è la condizione che le rette formino lo stesso angolo degli assi cioè: $\beta = \omega$: avremo: sostituendo $tg(\beta) = \frac{\sin\omega}{\cos\omega}$

$$\frac{1}{\cos\omega} = \frac{m_1 - m_2}{1 + (m_1 + m_2)\cos\omega + m_1 m_2}$$

$$1 + (m_s + m_r)\cos\omega + \ldots$$

$$1 + \cancel{m_s \cos\omega} + m_r \cos\omega + m_s = \cancel{m_s \cos\omega} - m_r \cos\omega$$

(condizione di angolo $\beta = \omega$) : $\boxed{m_s = \dfrac{-1 - 2 m_r \cos\omega}{m_r}} = \boxed{m_s = \dfrac{-1}{m_r} - 2\cos\omega}$

ove per $\omega = \pi/2$ torna la condizione di perpendicolarità

ad assi ortogonali: $m_s = \dfrac{-1}{m_r}$.

Condizione di perpendicolarità

Si ha quando $\beta = \pi/2$ cioè $\tan\beta = \infty$

cioè:

$$1 + (m_1 + m_2)\cos\omega + m_1 m_2 = 0$$

$$m_1(\cos\omega + m_2) = -1 - m_2\cos\omega$$

$$m_1 = \frac{(-1 - m_2\cos\omega)}{(m_2 + \cos\omega)}$$

(condizione di perpendicolarità)

anche qui per $\omega = \pi/2$ torna: $m_1 = \frac{-1}{m_2}$.

L'equazione della stella di rette passanti per un punto sarà:

$$\frac{y - y_p}{x - x_p} = \frac{\tan(\varphi)}{\sin(\omega) - \cos(\omega)\tan(\varphi)}$$

ove ad ogni angolo φ corrisponde una retta.

[illegible]

<u>L'equazione della retta passante per due punti</u>

è identica a quella ad assi ortogonali:

$$\boxed{\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

<u>ed è indipendente da ω</u>

Equazione della retta passante per P e perpendicolare alla r.

$$\frac{y - y_P}{x - x_P} = \frac{-(1 + m_r \cos\omega)}{(m_r + \cos\omega)}$$

Distanza di due punti (con Carnot)

$$\overline{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + 2\cos(\omega)(y_B - y_A)(x_B - x_A)}$$

Coordinate del punto comune alla retta r ed alla sua perpendicolare passante per P

$$\begin{cases} y = m_r x + q \\ y = \dfrac{-(1 + m_r \cos\omega)}{(m_r + \cos\omega)} x + y_P + x_P \dfrac{(1 + m_r \cos\omega)}{(m_r + \cos\omega)} \end{cases}$$

$$(m_r^2 + 2 m_r \cos\omega + 1) x = \frac{(m_r + \cos\omega)(y_P) + (1 + m_r \cos\omega) x_P}{}$$

$$\frac{(m_t^2 + 2m_t\cos\omega + 1)}{(m_t + \cos\omega)} X = \frac{(m_t + \cos\omega)(y_p - q) + (1 + m_t\cos\omega)X_p}{(m_t + \cos\omega)}$$

$$X_c = \frac{\left[(m_t + \cos\omega)(y_p - q) + (1 + m_t\cos\omega)X_p\right]}{(m_t^2 + 2m_t\cos\omega + 1)}$$

$$\frac{(m_t^2 + m_t\cos\omega)(y_p - q) + (m_t + m_t^2\cos\omega)X_p + (m_t^2 + 2m_t\cos\omega + 1)q}{m_t^2 + 2m_t\cos\omega + 1}$$

$$y_c = \frac{(m_t^2 + m_t\cos\omega)y_p + (m_t + m_t^2\cos\omega)X_p + (m_t\cos\omega + 1)q}{(m_t^2 + 2m_t\cos\omega + 1)}$$

Distanza di un punto P da una retta r

Se C è il punto comune alla retta r ed alla sua normale per P, $\overline{PC} = \delta$ è la distanza cercata.

$$\overline{PC} = \sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 + 2(x_c - x_p)(y_c - y_p)\cos\omega}$$

$$(x_c - x_p) = \frac{(m_r + \cos\omega)(y_p - m_r x_p - q)}{(m_r^2 + 2m_r\cos\omega + 1)}$$

$$(y_c - y_p) = (x_c - x_p)\left(\frac{-1 - m_r\cos\omega}{m_r + \cos\omega}\right)$$

$$\overline{PC} = (x_c - x_p)\sqrt{1 + \left(\frac{-1 - m_r\cos\omega}{m_r + \cos\omega}\right)^2 + 2\cos\omega\left(\frac{-1 - m_r\cos\omega}{m_r + \cos\omega}\right)}$$

$$\overline{PC} = \frac{(x_c - x_p)}{(m_r + \cos\omega)} \cdot \sqrt{\begin{matrix} m_r^2 + 2m_r\cos\omega + \cos^2\omega + 1 - m_r^2\cos^2\omega - 2m_r\cos^3\omega \\ - m_r\cos\omega - 2\cos^2\omega \\ + m_r\cos\omega \end{matrix}}$$

$$\overline{PC} = \frac{x_c - x_p}{(m_r + \cos\omega)}\sqrt{(m_r^2 + 1)\operatorname{sen}^2\omega + 2m_r(\cos\omega - \cos^3\omega)}$$

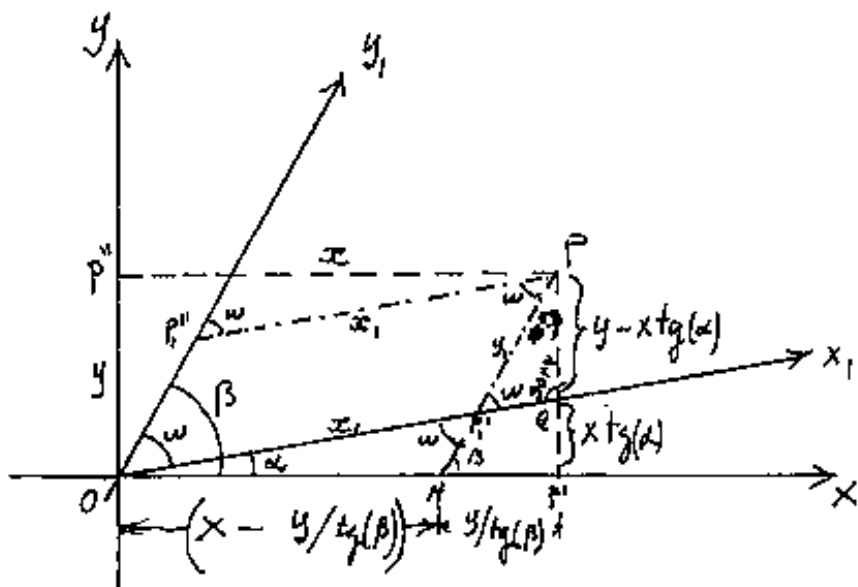
$$\overline{PC} = \frac{x_c - x_p}{(m_r + \cos\omega)}\operatorname{sen}\omega\sqrt{m_r^2 + 2m_r\cos\omega + 1}$$

$$\overline{PC} = \frac{[y_p - m_r X_p - q] \cdot sen(\omega)}{\sqrt{m_r^2 + 2 m_r \cos\omega + 1}}$$

Per $\omega = \pi/2$ torna la distanza in coordinate ortogonali $(m = tg\alpha)$; $\sqrt{m_r^2 + 1} = \frac{1}{\cos\alpha}$; $\overline{CP} = |(y_p - q - tang\alpha X_p)\cos\alpha|$

$$\overline{CP} = |(y_p - q)\cos\alpha - X_p sen\alpha|$$

Cambiamento di assi da ortogonali ad obliqui
(e viceversa)

Siano X ed y gli assi ortogonali, e siano x_1, y_1 gli assi obliqui formanti rispettivamente gli angoli "α" e "β" con l'asse X, cosicché, l'angolo compreso fra x_1 ed y_1 sarà: $\omega = (\alpha - \beta)$.

Indichiamo con P' e P'' le proiezioni di P sugli assi X ed y e con P_1', P_1'' le proiezioni parallele agli assi obliqui su x_1 ed y_1. Cioè: $\overline{PP'} = y$; $\overline{PP''} = X$; $\overline{PP_1'} = y_1$; $\overline{PP_1''} = x_1$.

Dal triangolo $PP_1'Q$ abbiamo: (per il teorema dei seni)

$$\frac{y_1}{sen(90+\alpha)} = \frac{y - x\,tang\alpha}{sen(\omega)} \qquad (sen(90+\alpha) = cos\alpha)$$

$$\boxed{y_1 = \frac{y\cos\alpha - X\,sen\alpha}{sen(\beta - \alpha)}}$$

Dal triangolo $OP_1'H$ abbiamo

$$\frac{x_1}{\ldots} = \frac{X - y/tang(\beta)}{\ldots} \qquad sen(180° - \beta) = sen\,\beta$$

$$\frac{x_1}{\text{sen}(180° - \beta)} = \frac{\text{[illegible]}}{\text{sen}(\omega)} \qquad \text{sen}(180° - \beta) = \text{sen}\,\beta$$

$$x_1 = \frac{X\,\text{sen}\,\beta - Y\cos\beta}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$$

formule che consentono note le coordinate x ed y di trovare le coordinate x_1 ed y_1 rispetto ad assi obliqui di posizione nota.

Le derivate ad assi obliqui

Qualora si abbia una: $f(x,y) = 0$ e si sia trasformata, riferendo la stessa funzione ad assi obliqui, cioè si abbia una: $f_1(x_1, y_1)$; e volessimo il differenziale della funzione; nel caso di assi ortogonali abbiamo:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

col noto significato delle derivate parziali.

Se consideriamo che la funzione in x, y diventa una funzione ad assi obliqui ove:

$$x = (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta)$$

$$y = (x_1 \operatorname{sen}\alpha + y_1 \operatorname{sen}\beta)$$

facendo la derivata parziale rispetto ad x, abbiamo:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x'_{(x)} \cos\alpha + x'_{(y)} \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = y'_{(x)} \cos\beta + y'_{(y)} \operatorname{sen}\beta$$

che possiamo anche scrivere:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \operatorname{sen}\alpha \right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\text{sen}\,\alpha \\[2ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\beta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\text{sen}\,\beta \end{cases}$$

analogamente le derivate seconde:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\text{sen}^2\alpha \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\beta + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\text{sen}\,\beta\cos\beta + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\text{sen}^2\beta \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial y_1} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\alpha\cos\beta + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\alpha\cos\beta) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \end{cases}$$

Inversamente se abbiamo un sistema di assi obliqui: x_1, y_1; di angolo ω e vogliamo trasformare le coordinate oblique x_1 ed y_1 in cartesiane ortogonali equogire, sapendo che l'assi x_1 risulta ruotato di α rispetto ad X; e che y_1 risulta ruotato di $(\alpha+\omega)=\beta$ rispetto allo stesso asse X. (X da assumersi come asse polare se volessimo le coordinate polari)

Dalle equazioni scritte abbiamo:

X	Y		$\operatorname{sen}\omega$
$\operatorname{sen}\beta$	$-\cos\beta$	$=$	x_1
$-\operatorname{sen}\alpha$	$+\cos\alpha$	$=$	y_1

$$(\operatorname{sen}\beta\cos\alpha-\cos\beta\operatorname{sen}\alpha)=\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=\operatorname{sen}(\omega)$$

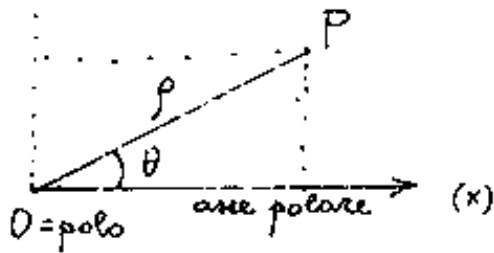
$$\operatorname{sen}\omega\begin{vmatrix} x_1 & -\cos\beta \\ y_1 & +\cos\alpha \end{vmatrix}=\operatorname{sen}(\omega)\left[x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta\right] \qquad \boxed{X=\left(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta\right)}$$

$$\operatorname{sen}\omega\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\beta & x_1 \\ -\operatorname{sen}\alpha & y_1 \end{vmatrix}=\operatorname{sen}\omega\left[x_1\operatorname{sen}\alpha+y_1\operatorname{sen}\beta\right] \qquad \boxed{Y=\left(x_1\operatorname{sen}\alpha+y_1\operatorname{sen}\beta\right)}$$

L'equazione di una retta in cartesiane ortogonali: $y=mx+q$ ad assi obliqui diventa: $(x_1\operatorname{sen}\alpha+y_1\operatorname{sen}\beta)=m(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta)+q$

da cui: $$\boxed{x_1(\operatorname{sen}\alpha - m\cos\alpha) + y_1(\operatorname{sen}\beta - m\cos\beta) = q}$$ ecc.

Coordinate polari piane

Ricordiamo che, fissato un punto "O" detto Polo ed una direzione orientata uscente da "O", è possibile definire la posizione di ciascun punto del piano indicando la sua distanza da "O"; $\overline{OP} = \rho$ = raggio-vettore (modulo), e l'angolo θ che il raggio: $\overline{OP} = \rho$ forma con la direzione orientata. θ = anomalia o argomento.

ρ e θ sono le coordinate polari del punto

La direzione orientata detta: asse polare, usualmente si fa coincidere con l'asse X delle coordinate cartesiane, da cui le famose formule di trasformazione:

$$x = \rho \cos\theta \quad ; \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta$$

V'è una notevole caratteristica delle coordinate

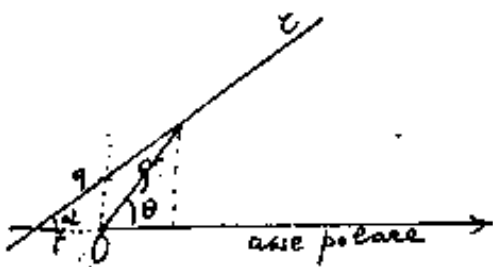
polari piane in confronto alle coordinate carte= siane, infatti mentre in cartesiane il piano x,y è unico, in coordinate polari possiamo pensare infiniti piani xy sovrapposti perfettamente distinguibili per l'aumento di $(2\pi)n$ dell'ano= malia θ; ad ogni giro è come fosse un nuovo piano.

ciò implica che le correlazioni fra ρ e θ non siano strettamente biunivoche infatti mentre per ogni valore di θ si ha uno ed un solo ρ, per ogni valore di ρ si hanno infiniti θ espressi dalla formula: $(\theta + K(2\pi))$ già nota in trigonometria.

Perciò si usa scrivere: $\boxed{\rho = f(\theta)}$

e non inversamente.

Avremo quindi che: $\boxed{\dfrac{d\,f(\theta)}{d\theta} = \rho'}$

$$\boxed{\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} = \rho''} \qquad \text{ecc.}$$

asse polare

l'equazione di una retta che formi l'angolo α con l'asse polare può esprimersi:

(se passa per l'origine) $\quad \operatorname{tang}\alpha = \dfrac{\rho \operatorname{sen}\theta}{\rho\cos\theta} = \operatorname{tang}\theta$

se è spostata (di "q" in y; di "p" in x) $\quad \boxed{\dfrac{\rho\cos\theta}{p} + \dfrac{\rho\operatorname{sen}\theta}{q} = 1}$

equazione segmentaria in polari della retta:

ove: $\left(1 - \dfrac{\rho\operatorname{sen}\theta}{q}\right) = \dfrac{\rho\cos\theta}{p}$) $\quad \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{\rho\cos\theta} - \dfrac{\rho\operatorname{sen}\theta}{q\,\rho\cos\theta}$)

ove: $\left(1 - \frac{\rho \operatorname{sen}\theta}{q}\right) = \frac{\rho\cos\theta}{p}$; $\frac{1}{p} = \frac{1}{\rho\cos\theta} - \frac{\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho q\cos\theta}$;

$$\frac{1}{p} = \frac{q - \rho\operatorname{sen}\theta}{\rho q\cos\theta} \qquad \boxed{p = \frac{\rho q\cos\theta}{q - \rho\operatorname{sen}\theta}} \; ; \quad \operatorname{tang}\alpha = -\frac{q}{p} = \boxed{\operatorname{tang}\alpha = \frac{-q + \rho\operatorname{sen}\theta}{\rho\cos\theta}}$$

Ciò consente di trasformare le equazioni delle rette da cartesiane a polari e viceversa.

Tangente, normale, sottotangente, sottonormale polari.

Tangente e normale

Ricordiamo che: se la curva è espressa in equazioni parametriche: $x = x(t)$; $y = y(t)$

l'equazione della retta tangente nel punto T è:

$$\frac{x - x_T}{x'_T} = \frac{y - y_T}{y'_T}$$

l'equazione della normale da T è:

$$(x - x_T)\, x'_T + (y - y_T)\, y'_T = 0$$

Se la curva è espressa in forma esplicita: $y = f(x)$

l'equazione della retta tangente nel punto T è:

$$y = y'_T (x) + (y_T - y'_T x_T)$$

l'equazione della retta normale da T è:

$$(x - x_T) + y'_T (y - y_T) = 0$$

che può scriversi:

$$y = \left(-\frac{1}{y'_T}\right)(x) + \left(y_T + \frac{1}{y'_T} x_T\right)$$

Se la curva è espressa in forma implicita $f(x,y)=0$

ed il punto T non è un punto singolare

(ricordando che: dicesi punto singolare di una curva quei punti ove si verifica che: $\frac{\partial f}{\partial x}=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ simultaneamente).

L'equazione della retta tangente nel punto T (T non è un punto singolare) è:

$$\frac{\partial F}{\partial x_T}(x - x_T) + \frac{\partial F}{\partial y_T}(y - y_T) = 0$$

L'equazione della retta normale da T (T non è un punto singolare) è:

$$\left(\frac{x - x_T}{y - y_T}\right) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_T}}{\frac{\partial F}{\partial y_T}}$$

Se consideriamo crescente l'arco s della curva al crescere del parametro, possiamo orientare la retta r tangente alla curva i cui coseni direttori saranno:

$$\cos(\widehat{xr}) = \frac{dx}{ds}$$

$$\cos(\widehat{yr}) = \frac{dy}{ds}$$

Analogamente per la retta n normale alla curva, dovendo come verso la n essere congruente

con la τ, cioè come: $\vec{y} = \overrightarrow{x + \pi/2}$ avremo che $\widehat{xn} = \widehat{x\tau} + \widehat{\tau n}$

ma: $\widehat{\tau n} = \pi/2$, per cui $\widehat{xn} = \widehat{x\tau} + \pi/2$; $(\widehat{yn} = \widehat{x\tau})$.

perciò:

$$\cos \widehat{xn} = -\frac{dy}{ds}$$

$$\cos \widehat{yn} = \frac{dx}{ds}$$

ove: $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$ cioè: $s'_{(t)} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

Se la curva è espressa in coordinate polari

$\rho = f(\theta)$, ricordiamo

che: $$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta$$

differenziando:

$$dx = -\rho \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta + \rho' \cos\theta\, d\theta$$

$$dy = \rho \cos\theta\, d\theta + \rho' \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \left(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\rho\rho' \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)$$

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta$$

ricordiamo anche che

una retta: $y = mx + q$

in coordinate polari diventa: $$\rho = \left(\frac{q}{\operatorname{sen}\theta - m\cos\theta}\right)$$

una retta passante per un punto P che in cartesiane si esprime: $\frac{y - y_P}{x - x_P} = m$, in coordinate

te polari diventa : $\dfrac{\rho \operatorname{sen}\theta - \rho_p \operatorname{sen}\theta_p}{\rho\cos\theta - \rho_p\cos\theta_p} = \tan\theta_p = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_p}{\cos\theta_p}$.

Teoremi direttori della tangente : $\boxed{\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{(\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta)}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}}$

$\boxed{\dfrac{dy}{ds} = \dfrac{\rho'\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}}$ e per la normale : $\boxed{\cos(\widehat{xn}) = -\dfrac{dy}{ds}}$; $\boxed{\cos\widehat{yn} = \dfrac{dx}{ds}}$

I coseni direttori del raggio vettore $\overline{OP}$ sono:

$$\begin{cases} \cos(\widehat{x\rho}) = \cos(\theta) \\ \cos(\widehat{y\rho}) = \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

quindi l'angolo fra la retta tangente ed il raggio vettore, cioè: $\widehat{\rho t} = \omega = (\widehat{xt} - \widehat{x\rho})$, avrò:

$$\cos(\omega) = \frac{(\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta) + (\rho'\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}$$

$$\operatorname{sen}(\omega) = \frac{(\rho'\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta)(\cos(\theta)) - (\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\theta)}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}$$

$$\boxed{\cos(\omega) = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}} \quad ; \quad \boxed{\operatorname{sen}(\omega) = \frac{\rho}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}}$$

Sottotangente e Sottonormale

Abbiamo già visto, in coordinate cartesiane che:

dicesi SOTTOTANGENTE: il segmento $\overline{TM}$ proiezione sull'asse delle ascisse del segmento di tangente $\overline{TP}$

compreso fra il punto di tangenza e le ascisse.

dicesi SOTTONORMALE il segmento $\overline{MN}$ proiezione sull'asse delle ascisse del segmento di normale $\overline{NP}$ compreso fra il punto di tangenza, da cui si traccia la normale, e le ascisse.

Posto: $\overline{MT} = S_t$; $\overline{MN} = S_n$; avremo: $S_t = \frac{yx'}{y'}$; $S_n = \frac{yy'}{x'}$

$\overline{PT} = -\frac{y}{y'}\sqrt{x'^2+y'^2}$; $\overline{PN} = -\frac{y}{x'}\sqrt{x'^2+y'^2}$

In coordinate polari: tracciamo una perpendicolare da O al raggio vettore ρ che chiameremo "q" (vedi figura) Chiameremo: T' il punto comune alle rette q e t = tangente; ed N' il punto comune alle rette q ed n = = normale.

Chiameremo: SOTTOTANGENTE il segmento $\overline{T'O} = S_{tp}$ proiezione sulla retta q del segmento $\overline{T'P}$ di tangente compreso fra il punto P di tangenza e la retta q.

Chiameremo: SOTTONORMALE il segmento $\overline{N'O} = S_{np}$ proiezione sulla retta q del segmento $\overline{N'P}$ di normale compreso fra la curva e la retta q.

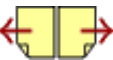
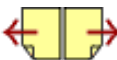
Per quanto sopra già ricavato abbiamo:

$$\overline{PT'} = -\rho/\cos\omega = \quad \boxed{\overline{PT'} = -\frac{\rho\sqrt{\rho'^2+\rho^2}}{\rho'}}$$

$$\overline{PN'} = \rho/\operatorname{sen}\omega = \quad \boxed{\overline{PN'} = \sqrt{\rho'^2+\rho^2}}$$

$$S_{tp} = \overline{PT'}\cos(\hat{qt}) = \overline{PT'}\operatorname{sen}\omega \qquad S_{tp} = -\left(\frac{\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}{\rho'}\right)\left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}\right)$$

$$S_{tp} = -\rho^2/\rho'$$

$$S_{np} = \overline{PN'}\cos(qn) = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\cos\omega \qquad S_{np} = \rho'$$

ASINTOTI delle curve piane

Prima di tutto cerchiamo di precisare un concet to sulla parola: "infinito" (Meglio chiamarlo indefinito)
Nel nostro campo, detto impropriamente "finito"; qualunque grandezza, o numero di unitá convenzio= nali, o semplicemente numero, per quanto grande possa pensarsi, si puó sempre raddoppiare, tripli care, o, come dicono, si puó aggiungere uno (1) e non si finisce mai.

Eppure matematicamente si puó pensare ad un limite. Per chiarire le idee ci viene incontro la parola direzione alla quale aggiungiamo la pa rola direzionalitá e chiameremo direzionalitá la "direzione" di tutte le rette parallele, le quali inde finitamente mantengono la loro distanza. (Un punto all'infinito non ha senso). Mentre lasciamo la parola direzione alla direzione di una sola

retta che contenga il punto indefinitamente lontano che definisce la sua "direzione".

Ciascuno di noi può puntare l'indice in una direzione che passerà per un punto indefinitamente lontano, e nessun'altra retta di quella direzionalità potrà passare per quel punto.

Rispetto alla direzionalitá, perde significato la distanza in campo finito, (non ha importanza che le rette parallele siano fra loro piú o meno distanti) è come il flusso di un vettore. Il vettore ha una direzionalitá; la cosiddetta forza (che non è un vettore) ha una retta di azione e quindi una direzione.

Consideriamo una curva esprimibile parametricamente con:

$$x = x(t) \; ; \; y = y(t)$$

puó avvenire che si verifichi almeno uno dei limiti:

$$\lim_{t \to t_0 - 0} \left(X_{(t)} \right) = \infty$$

$$\lim_{t \to t_0 + 0} \left(X_{(t)} \right) = \infty$$

$$\lim_{t \to t_0 - 0} \left(y_{(t)} \right) = \infty$$

$$\lim_{t \to t_0 + 0} \left(y_{(t)} \right) = \infty$$

In questo caso diremo che la curva ammette

In questo caso diremo che la curva ammette un asintoto se esiste una retta r che per $t \to t_0 \pm 0$ si avvicina indefinitamente al punto $P(t_0)$ della curva.

Si noti che noi avevamo già definito l'asintoto come la retta tangente all'∞ la curva. E si noti che una retta ruotante intorno ad un suo punto, l'attimo prima di diventare parallela ad un'altra retta, la interseca in un punto indefinitamente lontano.

Asintoti paralleli agli assi

Una curva Γ sia espressa in forma esplicita $y=f(x)$, e sia: $\lim_{x \to a+0} (f(x)) = \pm\infty$; (oppure: $\lim_{x \to a-0} (f(x)) = \pm\infty$) allora vuol dire che la retta $x=a$ parallela all'asse y è un asintoto della curva.

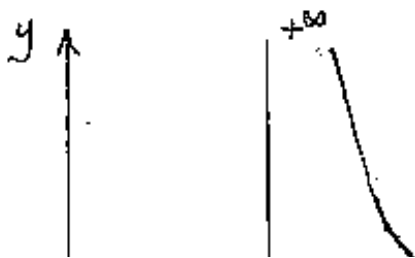
(Infatti la distanza di un punto di ascissa x della curva dalla retta: $(x=a)$, misurata parallelamente ad x è: $(x-a)=\delta$ che tende a zero per x tendente ad a)

Consideriamo la curva:

$$y = e^{\left(\frac{1}{x-a}\right)}$$

Si noti che se x tende ad "a" con valori: $x>a$, l'esponente di "e" è >0, per cui: $e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = \infty$.

Invece se x si avvicina ad "a" con valori: $x<a$, l'esponente di "e" è <0, per cui: $e^{-\frac{1}{0}} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$.

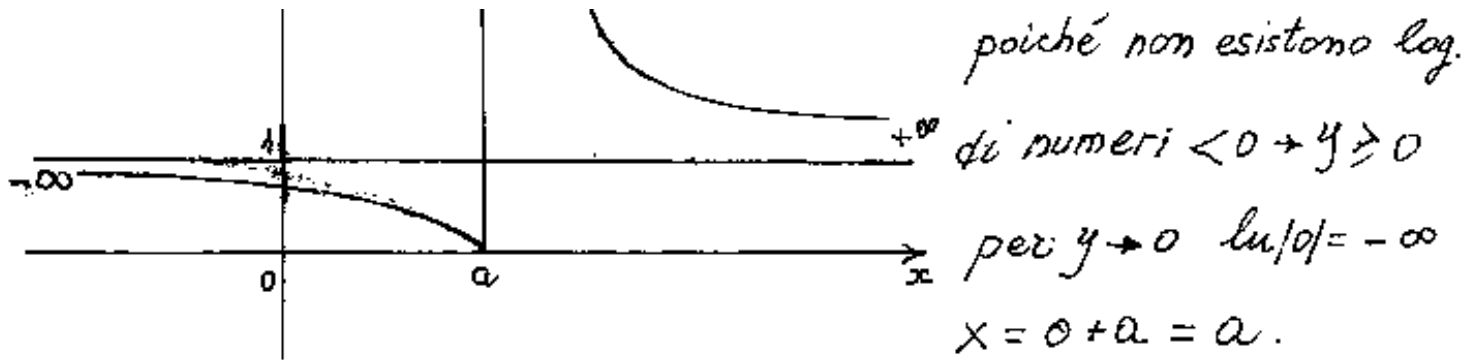
y +∞

Se invece ricaviamo:

$$x = \frac{1}{\ln|y|} + a$$

poiché non esistono log.

poiché non esistono log. di numeri $< 0 \rightarrow y \geq 0$

per $y \rightarrow 0$ $\ln|0| = -\infty$

$x = 0 + a = a$.

per: $y \rightarrow 1$ si ha: $\lim_{y \to 1^{+0}} \left(\frac{1}{\ln y}\right) = \frac{+1}{0} = +\infty$; ed anche

per $y \longrightarrow 1$ $\lim_{y \to 1^{-0}} \left(\frac{1}{\ln y}\right) = \frac{1}{-0} = -\infty$.

Per l'iperbole equilatera: $x \cdot y = K$; $y = \frac{K}{x}$; $x = \frac{K}{y}$ avremo che le rette $x=0$ (asse y) ed $y=0$ (asse x) sono asintoti della curva. Per $y = \tan g(x)$, le rette: $x = (2K+1)\frac{\pi}{2}$ (con K intero) sono asintoti.

Asintoti non paralleli all'asse y

Siano $x = x(t)$ ed $y = y(t)$ le equazioni parametriche di un curva Γ e la retta: $y = mx + q$ sia un asintoto di Γ. (La retta $y = mx + q$, non è parallela all'asse y per $m \neq \infty$; per $m = 0$ è parallela ad x).

Dovrà essere: $\lim_{t \to t_0} (x(t)) = \pm\infty$, ove t_0 è quel punto indefinitamente lontano ove la curva e la retta si avvicinano con distanza tendente a zero, ed $X(t) = X$.

Consideriamo, per la generalità, un sistema di assi X; Y non ortogonali, ma $\widehat{xOy} = \omega$ qualsiasi, abbiamo visto che la distanza di un punto da una retta è data da:

$$\delta = \frac{(y - mx - q)\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{m^2 + 2m\cos\omega + 1}}$$

ed essendo:
$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{m^2+2m\cos\omega+1}} \neq 0$$

affinché δ tenda a zero deve essere:
$$\lim_{t \to t_0 \pm 0} (y - mx - q) = 0$$

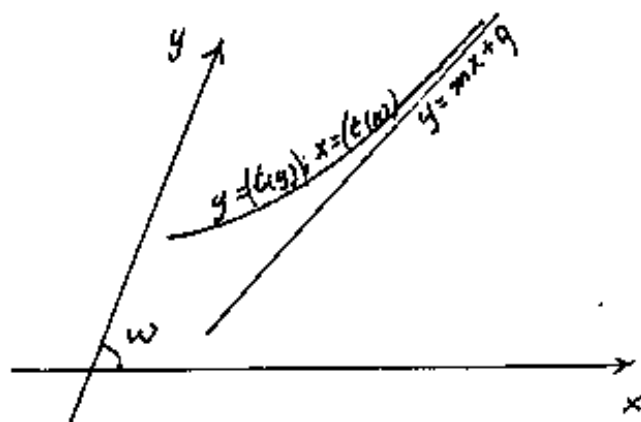
$$\boxed{\lim_{t \to t_0 \pm 0} (y - mx) = q}$$

Possiamo porre: $(y - mx) = (q + \varepsilon)$

il limite precedente diventa: $\lim_{t \to t_0 \pm 0} (\varepsilon) = 0$

dividendo per x l'espressione precedente:

$$\frac{y}{x} - m = \frac{q}{x} + \frac{\varepsilon}{x}$$

poiché: $\lim_{t \to t_0 \pm 0} (x) = \infty$; avremo: $\boxed{\lim_{t \to t_0 \pm 0} \left(\frac{y}{x}\right) = m}$

Se un valore di t tende a t_0 ove $x(t)$ tende ad ∞ ed esistono i limiti:

$$\begin{cases} \lim_{t \to t_0 \pm 0} (y - mx) = q \quad \text{ed} \\ \lim_{t \to t_0 \pm 0} \left(\frac{y}{x}\right) = m \end{cases}$$

allora la retta: $\boxed{y = mx + q}$ è un asintoto della curva non parallelo ad y con assi comunque obliqui.

Consideriamo la curva: $y = \left(\frac{x}{1 + e^{1/x}}\right)$

per $x =$ finito anche $y =$ finito.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{1/x}}\right) = \frac{\infty}{1 + e^{1/\infty}} = \frac{\infty}{1 + e^0} = \frac{\infty}{1+1} = \frac{\infty}{2} = +\infty$$

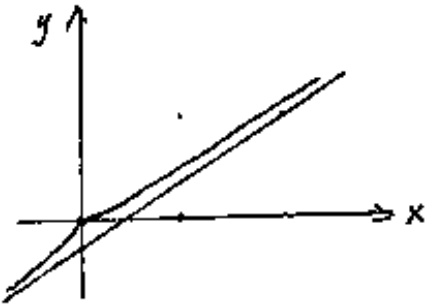
$$\lim \left(\frac{x}{\ldots}\right) = \frac{-\infty}{\ldots} = \frac{-\infty}{\ldots} = \frac{-\infty}{\ldots} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{1+e^{1/x}} \right) = \frac{-\infty}{1+e^{-\frac{1}{\infty}}} = \frac{-\infty}{1+\frac{1}{e^{1/\infty}}} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{y}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{1+e^{1/x}} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{per cui} \quad \boxed{m = +\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(y - \frac{1}{2}x \right)} = \lim_{x \to \infty} \left(x \left(\frac{1}{1+e^{1/x}} - \frac{1}{2} \right) \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x(2-1-e^{1/x})}{2(1+e^{1/x})} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x(1-e^{1/x})}{2(1+e^{1/x})} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{1+e^{1/x}} \right) \left(\frac{1-e^{1/x}}{\frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{4} \lim_{t \to 0} \left(\frac{1-e^{t}}{t} \right) = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

per cui $\boxed{q = -\frac{1}{4}}$; $\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}$ è un asintoto.

Asintoti delle curve algebriche

L'equazione: $f(x,y)=0$ di una curva algebrica può essere scritta nella forma:

$$\varphi_n(x,y) + \varphi_{n-1}(x,y) + \dots + \varphi_2(x,y) + \varphi_1(x,y) + \varphi_0 = 0$$

ove $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots \varphi_2, \varphi_1, \varphi_0$ sono polinomi omogenei in (x,y) rispettivamente dei gradi: $n, (n-1), \dots 2, 1, 0$.

Dividendo per x^n e ponendo $y = tx$ cioè: $t = y/x$ si ha:

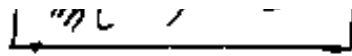
$$\varphi_n(1,t) + \frac{1}{x}\varphi_{n-1}(1,t) + \dots \frac{1}{x^{n-2}}\varphi_2(1,t) + \frac{1}{x^{n-1}}\varphi_1(1,t) + \frac{1}{x^n}\varphi_0(1,t).$$

Poichè: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ avremo che il polinomio di funzioni φ si riduce

$$\lim_{x\to\infty}\left(\varphi_n(1,t)\right)=0$$

Abbiamo visto che se: $y = mx + q$ è un asintoto, non parallelo ad y, della curva, $\lim\left(\frac{y}{x}\right) = \lim(t) = m$ cioè il coefficiente angolare m degli asintoti è radice reale dell'equazione algebrica di grado n:

$$\varphi_n(1,t) = 0$$

/ /

Questa equazione è anche detta Equazione delle direzioni asintotiche.

Per l'esistenza dell'asintoto supponiamo che questa equazione fornisca almeno una radice reale m, resta da calcolare q.

Se, anziché dividere la somma dei polinomi per x^n la dividiamo per x^{n-1}, (sempre ponendo $y = tx$) abbiamo:

$$x \cdot \varphi_n(1,t) + \varphi_{n-1}(1,t) + \cdots\cdots + \frac{\varphi_0}{x^{n-1}} = 0$$

ma se m è una radice reale di $\varphi_n(1,t) = 0$ possiamo scrivere:

$$\boxed{x\,\varphi_n(1,t)} = x(t-m)\frac{\varphi(1-t)}{(t-m)} = \boxed{(y-mx)\frac{\varphi_n(1,t)}{(t-m)}}$$

risultato che possiamo pensare sostituito nella precedente espressione.

Ricordiamo che: $\lim_{x\to\infty}(y-mx) = q$

ma: $\varphi_n(1,m) = 0$

$\lim_{t\to m}\left(\frac{\varphi_n(1,t)}{t-m}\right)$ sarebbe una forma indeterminata, perciò

con l'Hospital si ha: $\lim_{t\to m}\left(\frac{\varphi_n(1,t)}{t-m}\right) = \varphi_n'(1,m) = \left(\frac{d(\varphi_n(1,t))}{dt}\right)_m$

Consideriamo $X \to \infty$ e sostituiamo si ha:

$$q \cdot \varphi'(1,m) + \varphi(1,m) = 0 \qquad \text{cioè:}$$

$$q \cdot \varphi'_n(1,m) + \varphi_{(n-1)}(1,m) = 0$$ cioè:

$$q = \frac{-\varphi_{n-1}(1,m)}{\varphi'_n(1,m)}$$

L'equazione dell'asintoto non parallelo ad y per una curva algebrica è:

$$y = mx - \frac{\varphi_{n-1}(1,m)}{\varphi'_n(1,m)}$$

Utilizzando il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee (cfr. Vol III) si può trasformare la equazione dell'asintoto:

$$y = mx - \frac{\varphi_{n-1}(1,m)}{\varphi'_n(1,m)}$$

$$\varphi'_n(1,m) = \left(\frac{\partial \varphi_n(x,y)}{\partial y}\right)_{(1,m)} \quad \text{ove: } x=1 \text{ ed } y=m \text{ (radice)}$$

per Eulero:

$$\frac{\partial \varphi_n(x,y)}{\partial x} x + \frac{\partial \varphi_n(x,y)}{\partial y} y = n\,\varphi_n(x,y)$$

si ha:

$$\left(\frac{\partial \varphi_n(x,y)}{\partial x}\right)_{(1,m)} = -m\left(\frac{\partial \varphi_n(x,y)}{\partial y}\right)_{(1,m)} = -m\,\varphi'_n(1,m)$$

Se moltiplichiamo per $\varphi'_n(1,m)$ l'equazione dell'asintoto diventa:

$$y \cdot \varphi'_n(1,m) = m\,\varphi'_n(1,m) \cdot X - \varphi_{n-1}(1,m)$$

sostituendo ed uguagliando a zero:

$$\left(\frac{\partial \varphi_n(x,y)}{\partial x}\right)_{(1,m)} \cdot x + \left(\frac{\partial \varphi_n(x,y)}{\partial y}\right)_{(1,m)} \cdot y + \varphi_{n-1}(1,m) = 0$$

che è l'equazione dell'asintoto in forma implicita,

che è l'equazione dell'asintoto in forma implicita, ove i coefficienti della x e della y sono le derivate parziali in $(1,m)$ ed il termine noto è $\varphi_{n-1}(1,m)$.

Come esempio consideriamo l'equazione:

$$\boxed{x^3 + y^3 - 3axy = 0}$$ (folium di Cartesio)

e ripetiamo passo, passo quanto esposto:

$$\varphi_3 = (x^3 + y^3) \quad ; \quad \varphi_2 = (-3axy) \quad ; \quad \varphi_1 = 0 ; \varphi_0 = 0$$

posto $(y = xt)$: $\quad x^3 + x^3t^3 - 3ax^2t = 0$

dividendo per x^3: $1 + t^3 - \frac{3at}{x} = 0$;

il $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-3at}{x}\right) = 0$ per cui l'equazione delle direzioni asintotiche è: $\boxed{(1 + t^3) = 0}$ che ammette una sola radice reale: $(t = -1) = (m) = $ (coeff. angolare)

l'espressione: $\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\right)_{(1,m)} x + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\right)_{(1,m)} y + \varphi_{n-1}(1,m) = 0$

diventa: $\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\right)_{(1,m)} x + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\right)_{(1,m)} y + \varphi_2(1,m) = 0$

cioè: $\quad (3x^2)x + (3y^2)y + (-3axy) = 0$

(dividendo per x^2) $\quad 3x + (3t^2)y + (-3at) = 0$

e per $(t = -1)$ $\quad \boxed{x + y + a = 0}$ equazione implicita dell'asintoto.

dell'asintoto.

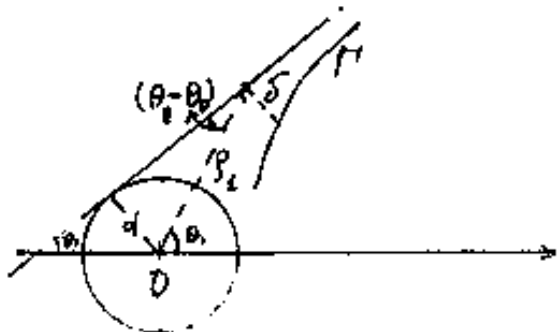
$$y = -x - a$$

equazione esplicita dell'asintoto del folium di Cartesio

Asintoti in coordinate polari

Ricordiamo che l'equazione di una retta in coordinate polari può scriversi: $\rho = \frac{q}{\operatorname{sen}\theta - m\cos\theta}$

ove q = coeff. di traslazione lineare cioè (ordinata per $x=0$) ed m = coeff. angolare nell'equazione esplicita $y = mx + q$.

può convenire di scrivere l'equazione nella forma: $\boxed{\operatorname{sen}\theta - m\cos\theta = \frac{q}{\rho}}$ in questa forma, se supponiamo che esista un angolo θ_0 tale che quando la retta e la curva Γ di equazione: $\frac{1}{\rho} = \varphi(\theta)$ si avvicinano indefinitamente per $\theta \to \theta_0 \pm 0$ anche $\rho \to \infty$, per cui: $\operatorname{sen}\theta_0 - m\cos\theta_0 = \frac{q}{\infty} = 0$ $\boxed{\operatorname{tang}(\theta_0) = m}$ $\boxed{\varphi_{\theta_0} = 0}$

consideriamo un punto dell'asintoto definito da $(\rho_1 ; \theta_1)$. allora l'asintoto disterà dal polo O la distanza: $\boxed{d = \rho_1 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_0)}$.

distanza: $d = \rho_1 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_0)$

La distanza δ dell'asintoto dalla curva Γ sarà:

$$\delta = d - \rho \operatorname{sen}(\theta_0 - \theta)$$

e poiché $\lim_{\theta \to \theta_0 - 0} (\delta) = 0$

$$\lim_{\theta \to \theta_0 - 0} \left(\rho \operatorname{sen}(\theta_0 - \theta)\right) = d$$

$$\lim_{\theta \to \theta_0 - 0} \left(\frac{-\operatorname{sen}(\theta_0 - \theta)}{\theta_0 - \theta}\right) = -1 \; ; \; \lim_{\theta \to \theta_0 - 0} \left(\frac{\varphi_{\theta_0} - \varphi_\theta}{\theta_0 - \theta}\right) = \varphi'_{\theta_0} \; ; \left(\rho = \frac{1}{\varphi_\theta}\right)$$

$$\lim_{\theta \to \theta_0 - 0} \left[\frac{-\operatorname{sen}(\theta_0 - \theta)/(\theta_0 - \theta)}{(\varphi_{\theta_0} - \varphi_\theta)/(\theta_0 - \theta)}\right] = -\frac{1}{\varphi'_{\theta_0}} \; ; \quad d = \frac{-1}{\varphi'_{\theta_0}}$$

La conoscenza di "d" e θ_0, definisce l'asintoto.

$$d = \frac{-1}{\varphi'_{\theta_0}} \; ; \text{ od anche } d = \frac{1}{\varphi'_{\theta_0}} .$$

Cerchio asintotico – Punto asintotico

Può avvenire per certe curve Γ (per es. spirali) che: $\boxed{\lim_{\theta \to \infty} (\rho) = a}$ ciò vuol dire che al crescere del numero di giri il raggio ρ finisce per stabilirsi al valore "a". Diremo il cerchio di raggio "a" con centro nel polo, CERCHIO ASINTOTICO della curva Γ.

Qualora $\lim_{\theta \to \infty} (\rho) = 0$ (zero), il cerchio asintotico avrebbe raggio nullo ed il polo sarebbe un punto asintotico

Esempi

La spirale iperbolica $\rho = \frac{K}{\theta}$; $\frac{1}{\rho} = \varphi(\theta) = \frac{\theta}{K}$; $\varphi'(\theta) = \frac{1}{K}$; la retta: $\rho \operatorname{sen} \theta = K$ è parallela all'asse polare e ne dista K ed è un asintoto. $\lim_{\theta \to \infty} \left(\frac{K}{\theta}\right) = 0$ cioè: $\rho = 0$ perciò il polo è un punto asintotico.

il polo e un punto asintotico.

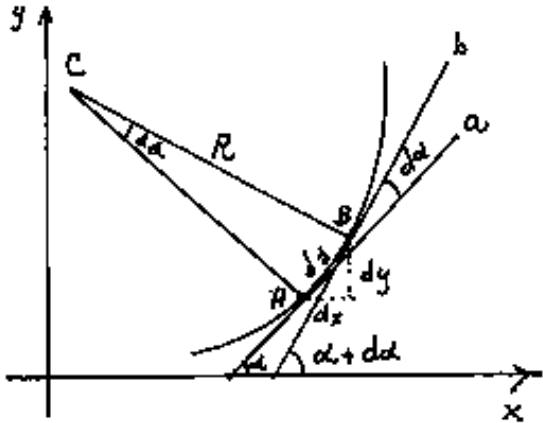
La spirale logaritmica: $\rho = e^{K\theta}$; $\frac{1}{\rho} = f(\theta) = e^{-K\theta}$; $\lim_{\theta \to -\infty} (e^{K\theta}) = 0$

cioè il polo è un punto asintotico.

La curva: $\rho = \frac{\theta^2 + a}{R\theta^2 + b}$; $\lim_{\theta \to \infty} (\rho) = R$; perciò R è il raggio

del cerchio asintotico.

La curvatura ed il raggio di curvatura delle curve piane

Occorre abbinare il concetto di curvatura, al concetto di cambio di direzione.

Consideriamo due punti: A e B di una linea, e siano "a", e "b" le rispettive tangenti, il cambio di direzione della retta "a" per assumere la direzione della retta "b" sia dα, mentre per passare da A a B la linea compie l'arco $\widehat{AB} = ds$. Cioè la curvatura sarà tanto maggiore, quanto maggiore è il rapporto: $\frac{d\alpha}{ds}$ = curvatura

Vi sarà un arco di cerchio che raccorda i punti A e B ove: $R\,d\alpha = \widehat{AB} = ds$ cioè: $\frac{ds}{d\alpha} = R$ = raggio di curvatura = = inverso della curvatura. Il cerchio che combacia in $\widehat{AB}$ con la curva si dice: cerchio osculatore (dal latino osculor, atus sum, ari = baciare) (Il cerchio tangente tocca la linea in un solo

punto, il cerchio osculatore copre il tratto $\widehat{AB} = ds$).

Si ha: $f'_{(x_A)} = tg(\alpha)$; $f'_{(x_B)} = tg(\alpha + d\alpha)$; differenziando l α :

$\frac{dy}{dx} = taug(\alpha)$ si ha: $\frac{d^2y \cdot dx - dy\, dx^2}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha} d\alpha$; ma: $\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{ds}{dx}$

per cui: $\frac{d^2y\, dx - dy\, dx^2}{\cancel{dx^2}} = \frac{ds^2 d\alpha}{\cancel{dx^2}}$; dividendo per ds^3

$$\boxed{\frac{d^2y\, dx - dy\, dx^2}{ds^3} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}}$$

$d^2y = y'' dx^2$; essendo dx = costante : $d(dx) = 0$;

$$ds = \left(\sqrt{y'^2 + 1}\right) dx$$

$$\frac{1}{R} = \frac{y'' dx^2 \cdot dx}{ds^3} = \frac{y''}{(ds/dx)^3} = \boxed{\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}}$$

$$\boxed{R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}}$$

Il raggio di curvatura in coordinate polari

La lunghezza di un arco in coordinate polari: $ds = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta$

La direzione $(\alpha) = (\theta + \omega)$ ove: $d\alpha = d\theta + d\omega$; $tg(\omega) = \rho/\rho'$

$$d(tg\,\omega) = d\,\rho/\rho' \qquad \frac{d\omega}{\cos^2\omega} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2} d\theta = d\omega \frac{\rho'^2 + \rho^2}{\rho'^2}$$

cioè $\boxed{d\omega = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2 + \rho^2} d\theta}$ ed anche

$$d\alpha = d\theta + \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2 + \rho^2} d\theta = \boxed{d\alpha = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2 + \rho^2} d\theta}$$

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} \cdot \frac{(\rho'^2 + \rho^2)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

$$R = \frac{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

formula che dà il raggio di curvatura in coordinate polari. per cui la curvatura:

$$\frac{1}{R} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Il raggio di curvatura in coordinate parametriche

Sia Γ una curva di coordinate parametriche

$$x = x_{(t)} \; ; \quad y = y_{(t)} \; , \quad \text{ove} \quad \frac{d(x_{(t)})}{dt} = x' \; ; \quad \frac{d\,y_{(t)}}{dt} = y'$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt \; ; \qquad \tan\alpha = \frac{d\,y_{(t)}}{d\,x_{(t)}} \; ; \quad \text{differenziando}$$

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = d\left(\frac{y'_{(t)}\,dt}{x'_{(t)}\,dt}\right) = d\left(\frac{y'_{(t)}}{x'_t}\right) = \frac{(y''_{(t)}\,dt)\,x'_{(t)} - y'_{(t)}(x''_{(t)})\,dt}{x'^2_{(t)}}$$

$$d\alpha = \frac{y''_{(t)}x'_{(t)} - y'_{(t)}x''_{(t)}}{x'^2_{(t)}}\,dt \cdot \cos^2\alpha \qquad \text{ma: } \cos^2\alpha = \frac{(x'_{(t)}\,dt)^2}{\left[\sqrt{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}}\,dt\right]^2}$$

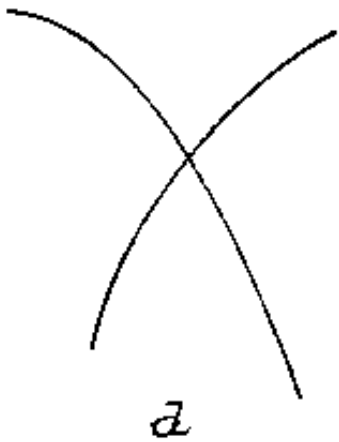
$$d\alpha = \frac{y''_{(t)}x'_{(t)} - y'_{(t)}x''_{(t)}}{x'^2_{(t)}}\,dt\,\frac{x'^2_{(t)}}{(x'^2 + y'^2)} = \frac{y''_{(t)}x'_{(t)} - y'_{(t)}x''_{(t)}}{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}}\,dt$$

$$\frac{ds}{d\alpha} = R = \frac{(x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)})\left(\sqrt{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}}\right)dt}{(y''_{(t)}x'_{(t)} - y'_{(t)}x''_{(t)})\,dt}$$

$$\boxed{R = \frac{(x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)})^{3/2}}{\ldots}}$$

Raggio in coordinate

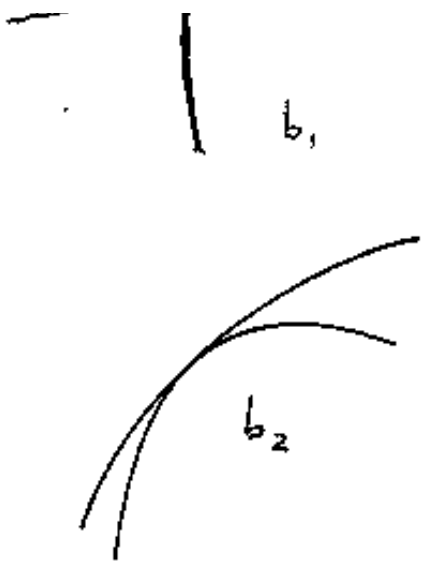
Curve osculatrici

Per definire più propriamente cosa intendiamo per curve osculatrici consideriamo due linee complanari aventi almeno un punto in comune. Si verificano i seguenti casi:

a) Le due linee si intersecano in modo tale che l'una rispetto all'altra passa dalla zona di concavità alla zona di convessità. Il punto comune si dice: punto di attraversamento o intersezione, od anche che le due curve hanno un contatto di ordine pari.

a

b) Le due linee non si intersecano, il punto comune si dice: punto di contatto o che le due linee

b₁

b₂

hanno un contatto d'ordine dispari.

Si hanno due modalità di contatto d'ordine dispari:

b₁) Le due linee volgono la concavità da bande opposte. (Contatto esterno)

b₂) Le due linee volgono la concavità dalla stessa parte. (contatto interno) (sarebbe meglio dire (esterno - interno)).

In quest'ultimo caso, cioè che le due curve volgono la concavità dalla stessa parte, se nel punto comune le due curve hanno lo stesso cerchio osculatore, le due curve si dicono fra loro osculatrici.

Siano $y_a = f(x)$ ed $y_b = \varphi(x)$, le equazioni delle due curve: "a" e "b". Avremo che per un certo $x = x_0$ si ha: $f(x_0) = \varphi(x_0)$ cioè: $y_a = y_b$, ma le due curve per avere lo stesso cerchio osculatore dovranno avere: $\varphi'(x_0) = f'(x_0)$, ed anche $f''(x_0) = \varphi''(x_0)$ cioè:

$$R = \frac{\left(1 + f'^2(x_0)\right)^{3/2}}{f''(x_0)} = \frac{\left(1 + \varphi'^2(x_0)\right)^{3/2}}{\varphi''(x_0)}$$

Cioè nell'intorno del punto (x_0, y_0) le due curve debbono avere uguali ordinate, ed uguali le derivate prime e seconde.

Questa impostazione abbastanza generale, semplifica il problema, e riduce al

rale, semplifica il problema, e riduce al
cerchio osculatore la condizione di essere
fra loro osculatrici, peró non viene consi=
derato che gli archi delle due curve possono
essere piú o meno bene sovrapposti, possono
sovrapporsi meglio o peggio del cerchio oscu=
latore.

Se noi consideriamo lo sviluppo in serie delle due funzioni, possiamo inserire questo problema e vedremo, per esempio, che nello sviluppo di una catenaria, lo sviluppo dell'ellisse coincide con un termine in più dello sviluppo della parabola, avendo preso come punto il vertice della catenaria. L'equazione di una catenaria è:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

ove: $y' = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$; $y'' = \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$; $= \dfrac{\frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}}{\left(1+\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{3/2}}$

$$R = \frac{\left(1+\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{3/2}}{\frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{\left(\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{3/2}}{\frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{\cosh^3\frac{x}{a}}{\frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)} = a\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\boxed{R = \frac{y^2}{a}}$$

valido per qualunque punto della catenaria. (È comodo rilevare che $\boxed{R : y = y : a}$ l'ordinata di una catenaria è media proporzionale fra il modulo "a" ed il raggio di curvatura in quel punto)

Per $x = 0$ (vertice) $\underline{R = a}$; $\underline{y = a}$

Una parabola $y = mx^2$; $y' = 2mx$; $y'' = 2m$;

$R = \frac{(1 + (2mx)^2)^{3/2}}{2m}$; ove per $x = 0 \rightarrow R = \frac{1}{2m}$ = (doppio della distanza focale). $\frac{1}{2m} = a \Rightarrow m = \frac{1}{2a}$; $y = \frac{1}{2a}x^2$

ma la parabola è spostata di a sulle ordinate per cui: $\boxed{y_{parabola} = \frac{1}{2a}x^2 + a}$

Per l'ellisse di equazione: $\frac{x^2}{a_e^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (vedi II_{XI})
il raggio di curvatura è:

$$R = \frac{\left[a_e^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a_e^2}\right)x^2\right]^{3/2}}{-a_e b}$$

essendo $\rho^2 = (a_e^2 - b^2)$ si può scrivere:

$$R = \frac{\left[a_e^4 - \rho^2 x^2\right]^{3/2}}{-a_e^4 b}$$

nei vertici dell'ellisse ove $x = 0$, oppure $x = \pm a_e$

per $x = 0$ $\qquad R_b = \frac{-a_e^2}{b}$

per $x = a_e$ $\qquad R_a = \frac{-b^2}{a_e}$

Abbiamo scritto a_e (per l'ellisse) per distinguere il modulo "a" della catenaria.

L'equazione del cerchio osculatore nel vertice della catenaria sarà:

$$y = a\left(2 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) \quad \text{(semicerchio)}$$

poniamo: $x = a/n$; avremo:

l'equazione del semicerchio: $y = a\left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{\ldots}}\right)$

l'equazione del semicerchio: $y = a\left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}\right)$

" della catenaria: $y = a\left(\cosh \frac{1}{m}\right)$

Sviluppando in serie:

<u>per il semicerchio</u>

$$y/a = 2 - \left(1 - \frac{1}{2m^2} - \frac{1!!}{4!!m^4} - \frac{3!!}{6!!m^6} - \dots\dots - \frac{(2K-3)!!}{(2K)!!m^{2K}}\right)$$

(ove: $K!!$ si legge: "Kappa semifattoriale)

<u>Per la catenaria</u>:

$$\left(y/a = 1 + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{4!m^4} + \frac{1}{6!m^6} + \dots + \frac{1}{(2K)!\,m^{2K}}\right)$$

eseguendo i calcoli:

(semicerchio): $y/a = 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^4} + \frac{1}{16n^6} + \cdots$

(catenaria): $y/a = 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + \frac{1}{720n^6} + \cdots$

Si ha l'uguaglianza dei primi due termini delle serie.

Si noti che il semicerchio coincide con la catenaria per $n = \infty$ cioè per $x = \frac{a}{\infty} = 0$, poi è sempre interno alla concavità della catenaria.

per $n = 2$; $x = a/2$; si ha:

Semicerchio: $y/a = \left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\right) = 1{,}33974596$

catenaria: $y/a = \cosh\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}127625966$

Il cui rapporto è: $1{,}005630086 = \frac{1}{0{,}994401435}$

la cui differenza è: $0{,}006348630$

cioè uno scostamento in y dal 0,63% di a, cioè 0,56% dell'ordinata della catenaria.

Se consideriamo il cerchio osculatore nel

Se consideriamo il cerchio osculatore nel punto della catenaria ove la tangente è inclinata di $\pi/4 = 45°$; $y' = 1$; $x_t = \text{argsenh}(1) =$

$x_t = a(0{,}881373586 9)$; $y_t = a\sqrt{2}$; $R = 2a$

Le coordinate del centro saranno:

$x_c = -a(\sqrt{2} - 0{,}8813735869) = \underline{-0{,}5328399751 \cdot a}$.

$y_c = 2a\sqrt{2} = \underline{2{,}828427124 \cdot a}$

L'equazione del semicerchio sarà:

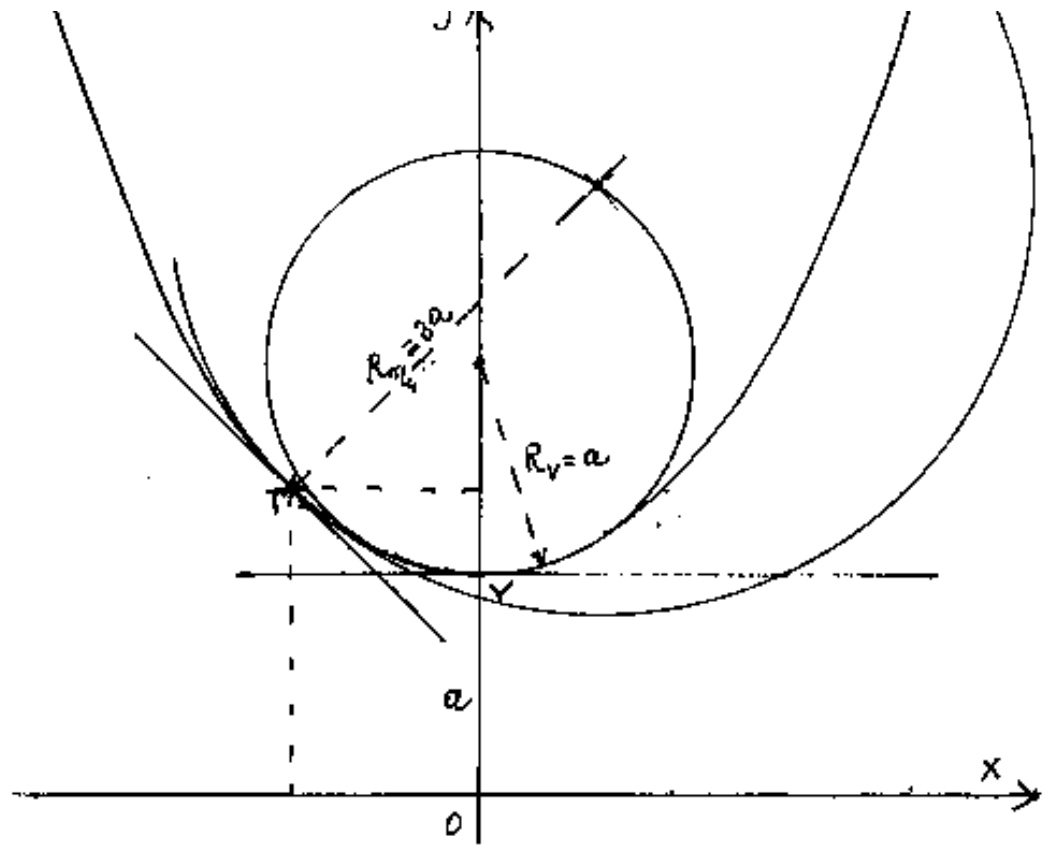
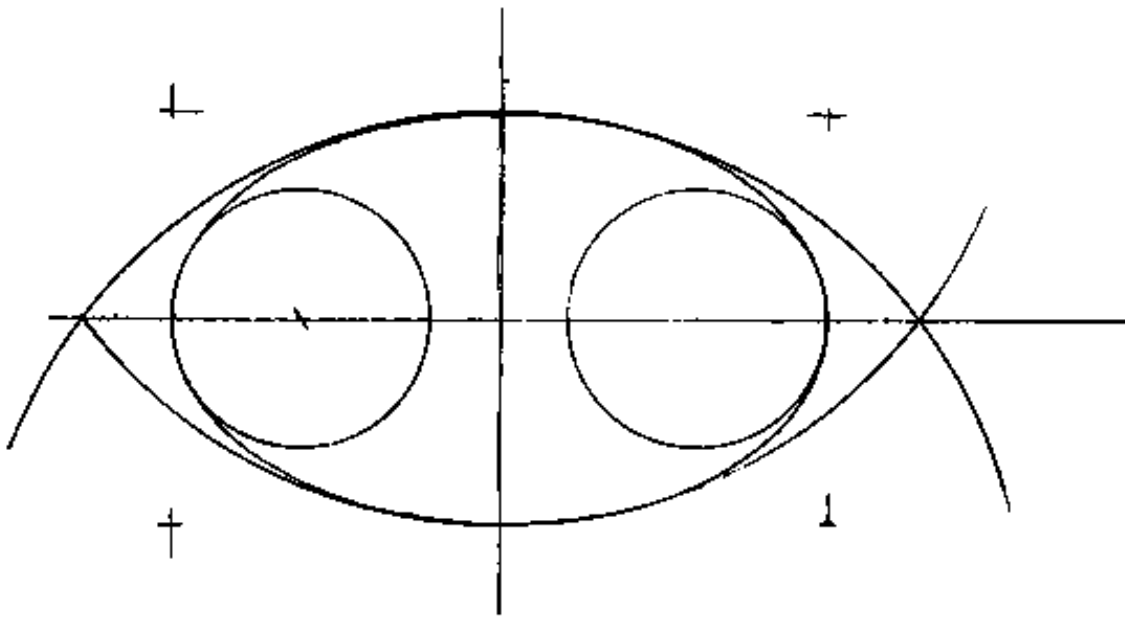
$$y/a = 2,828427124 - \sqrt{3,716081561 - (x/a)^2 - 1,065679950 2\left(\frac{x}{a}\right)}$$

ove per $x = a(0.881373587)$ si ha $y = a\sqrt{2}$ coincidente con la catenaria.

per: $x = 0$ si ha $y = 0,9007130 5(a)$, cioè minore dell'ordinata della catenaria, mentre per $x = a$, $y = 1,543747549$, maggiore dell'ordinata della catenaria che per $x = a$ è $y = 1,543080635$ ciò significa che le due curve si intersecano, hanno cioè un contatto di ordine pari nel campo in esame. In effetti, (come vedremo) il cerchio osculatore in un punto di un ramo di catenaria intersecherà la catenaria in due punti, uno ove è osculatore e l'altro, nell'altro ramo della catenaria.

T_1 y

Il centro del

Il centro del cerchio osculatore nel punto: $x = \text{argsenh}(1)$ è quasi sulla circonferenza del cerchio osculatore nel vertice.

che un cerchio osculatore (a curvatura costante) sia tutto interno alla concavitá della curva quando ē osculatore nel vertice a curvatura di raggio minimo, ē logico, come è logico che rimanga dalla parte convessa se il vertice ha curvatura di raggio massimo; esempio classico l'ellisse.

Quindi una linea a curvatura variabile, il cerchio osculatore in un punto intermedio, la taglierá nel punto che cerchio e linea

la taglierà nel punto che cerchio e linea
hanno la stessa curvatura, (stesso raggio) poi
il cerchio rimarrà interno alla parte che tende
ad aumentare R ed esterno alla parte di
linea ove R tende a diminuire. Ma, nel
punto comune, cerchio e linea avranno
la stessa tangente.

Abbiamo già visto l'espressione della parabola che ha lo stesso vertice ed è osculatrice della catenaria, espressione che può scriversi

$$\frac{y}{a} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2$$

questa formula coincide con i primi due termini dello sviluppo in serie della catenaria:

$$\frac{y}{a} = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = 1 + \frac{(x/a)^2}{2!} + \frac{(x/a)^4}{4!} + \dots$$

Se consideriamo gli scostamenti per $x = \pm\frac{a}{2}$ per la parabola si ha:

$$y/a = \frac{9}{8} = 1{,}1250000$$

per la catenaria:

$$y/a = 1{,}127625966$$

il cui rapporto è: $0{,}99767124\,4 = \frac{1}{1{,}002334192}$

e la cui differenza è: $0{,}002625966$

cioè un errore del 0,26% di a (minore

cioè un errore del 0,26% di a (minore
di quello del cerchio) e -0,23% dell'ordinata della catenaria.
La migliore approssimazione è possibile
perché entrambe le linee hanno curva-
tura variabile decrescente con x. Infatti
in elettrotecnica, per cavi aerei molto tesi,
si approssima la catenaria ad una parabola.

L'ellisse come curva osculatrice nel vertice della catenaria

Per l'ellisse di semiassi m ed n con $m > n$, avendosi incogniti due parametri m ed n la trattazione diventa più complessa. Il raggio di curvatura all'estremo del semiasse n è: $R_n = \frac{m^2}{n}$; mentre il raggio di curvatura all'estremo del semiasse m è $R_m = \frac{n^2}{m}$; poiché il raggio più piccolo è all'estremo del semiasse maggiore m, porremo la uguaglianza: $R_o = R_m$ cioè uguagliando raggi di curvatura nel vertice delle due curve avremo: $a = \frac{n^2}{m}$ e posto: $m = in$

$$a = \frac{n}{i} = \frac{m}{i^2}$$

l'equazione dell'ellisse osculatore nel vertice della catenaria risulta:

$$\frac{(y-m-a)^2}{m^2} + \frac{x^2}{n^2} = 1$$

$$\frac{(\ldots)}{m^2} + \frac{\ldots}{m^2} = 1$$

$$\frac{(y - i^2 a - a)^2}{i^4 a^2} + \frac{x^2}{i^2 a^2} = 1$$

$$\left(y - a(i^2+1)\right)^2 = i^4 a^2 - i^2 x^2$$

$$y = a(i^2+1) - \sqrt{i^4 a^2 - i^2 x^2}$$

$$\boxed{\frac{y}{a} = (i^2+1) - i\sqrt{i^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

Si noti che occorre ancora introdurre una ulteriore condizione per definire l'ellisse.

Per $i=1$ si ricade nel caso del cerchio. Si tratta, in altre parole, di definire "i" in modo tale che l'ellisse sia il più possibile vicino alla catenaria.

Scriviamo l'equazione dell'ellisse nella forma:

$$y/a = 1 + i^2\left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{x}{ia}\right)^2}\right)$$

e sviluppiamo in serie:

$$y/a = 1 + i^2\left[1 - \left(1 - \frac{(x/ia)^2}{2} - \frac{(x/ia)^4}{4!!} - \frac{3!!(x/ia)^6}{6!!} - \dots\right)\right]$$

cioè:

$$y/a = 1 + \frac{(x/a)^2}{2} + \frac{(x/a)^4}{i^2 4!!} + \frac{3!!(x/a)^6}{i^4 6!!} + \frac{5!!\left(\frac{x}{a}\right)^8}{i^6 8!!} + \dots$$

I primi due termini coincidono con lo sviluppo in serie della catenaria; possiamo

sviluppo in serie della catenaria; possiamo scegliere "i" in modo tale che coincida anche il terzo termine:

$$\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^4}{i^2\,4!!} = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^4}{4!} \qquad (\text{ma: } 4!! = 8\ ;\ 4! = 24)$$

per cui: $8i^2 = 24$; $\boxed{i = \sqrt{3}}$

e la serie diventa:

$$\frac{y}{a} = 1 + \frac{(x/a)^2}{2} + \frac{(x/a)^4}{24} + \frac{5(x/a)^6}{720} + \ldots\ldots$$

Serie che coincide fino al 3° termine con lo sviluppo in serie della catenaria.

Un tale ellisse avrà per equazione

$$y/a = 1 + 3\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)$$

calcoliamo i valori per $x = a/2$

$y/a = 1,127718677$ per l'ellisse

$y/a = 1,127625966$ per la catenaria

il cui rapporto è: $0,999917789 = \frac{1}{1,000082218}$

la cui differenza è: $0,000092711$

cioè uno scostamento in y del 0,0093% di a oppure 0,008% rispetto all'ordinata della catenaria

Quindi l'ellisse è molto più approssima=bile alla catenaria delle altre due curve.

Gli assi di tale ellisse sono: $(m = 3a)$; $(n = a\sqrt{3})$.

È evidente che le curve osculatrici ad

È evidente che le curve osculatrici ad una determinata linea sono infinite.

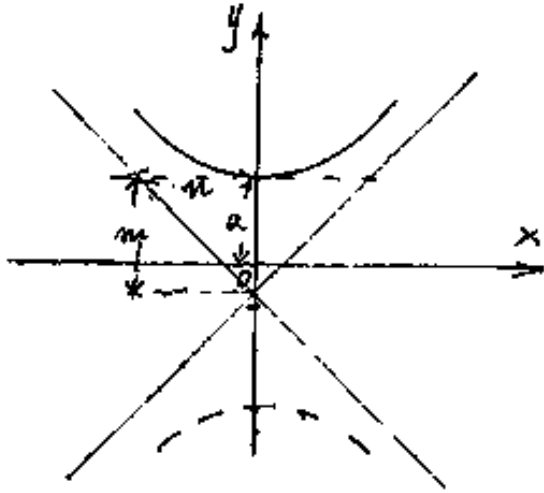
Utilizzando sovrapposizioni di sinusoidi di diversa frequenza ed ampiezza è possibile costruire linee che in un certo tratto possono praticamente coincidere con qualsiasi segmento curvilineo.

L'iperbole come curva osculatrice della catenaria

Per l'iperbole di semiassi "m" ed "n", si hanno, come per l'ellisse, due parametri incogniti, per l'ellisse si è dovuto far coincidere il diametro maggiore con l'asse y. Per l'iperbole dobbiamo porre il segno meno (-) al termine in x^2 affinché volga come la catenaria; cioè abbia in y l'asse focale. Il raggio di curvatura nel vertice dell'iperbole: è $R = \frac{n^2}{m}$ ove m è semiasse focale.

Cioè: $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ è l'iperbole al centro con asse focale sulle x; noi vogliamo l'equazione $\frac{(y \pm m - a)^2}{m^2} - \frac{x^2}{n^2} = 1$; che è una iperbole con asse focale sulle y con vertice nel punto y = a

$$y = a - m + m\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)}$$

(Solo segno + per avere il solo ramo di iperbole dalla parte della catenaria)

Si noti che: $m \gtreqless a$

cioè saranno le condizioni che imponiamo a determinare i valori di m e di n.

affinché abbiano lo stesso raggio di curvatura nel vertice dovrà essere:

$$\frac{n^2}{m} = a$$

analogamente a quanto fatto per l'ellisse, poniamo: $m = ni$; $a = \frac{n}{i} = \frac{m}{i^2}$;
e l'equazione dell'iperbole diventa:

$$\frac{(y + i^2a - a)^2}{i^4a^2} - \frac{x^2}{i^2a^2} = 1$$

$$\left(y + a(i^2-1)\right)^2 = i^4a^2 + i^2x^2$$

$$y = \sqrt{i^4a^2 + i^2x^2} - a(i^2-1)$$

$$\frac{y}{a} = i\sqrt{i^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} - (i^2-1)$$

equazione che può scriversi:

$$y/a = 1 + i^2\left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{ia}\right)^2} - 1\right)$$

e sviluppando in serie di potenze:

$$\frac{y}{a} = 1 + i^2\left[1 + \frac{(x/ia)^2}{2} - \frac{(x/ia)^4}{4!!} + \frac{(x/ia)^6 \cdot 3!!}{6!!} + \dots\right]$$

$$\frac{y}{a} = \left(1 + \frac{(x/a)^2}{2} - \frac{(x/a)^4}{i^2\, 4!!} + \frac{3!!\,(x/a)^6}{i^4\, 6!!} + \dots\right)$$

si noti che contrariamente all'ellisse il terzo termine della serie è negativo.

Se confrontiamo i terzi termini per ricavare "i" avremo:

$$\frac{-(x/a)^4}{i^2\,4!!} = \frac{+(x/a)^4}{4!}$$

da cui: $i^2 = \frac{-4!}{4!!} = \frac{-24}{8} = -3$

cioè "i" ha radici immaginarie.

Se sostituiamo $i^2=-3$ nell'equazione:

$$y = \pm\sqrt{i^4a^2 + i^2x^2} - a(i^2-1)$$

otteniamo:

$$y = 4a \pm\sqrt{9a^2 - 3x^2}$$

equazione di un ellisse coincidente con quello già trovato: $\frac{y}{a} = 1 + 3\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) = 4 \pm \sqrt{9 - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2}$; non è più iperbole.

Tutto ciò implica che le condizioni imposte; cioè che l'iperbole abbia il vertice coincidente col vertice della catenaria, ed abbia lo stesso raggio di curvatura $\frac{n^2}{m} = a$, porta

$$y = a + m\left(\sqrt{1 + \frac{X^2}{ma}} - 1\right) \cdot \quad y = \left(a + \sqrt{m^2 + \frac{mX^2}{a}} - m\right)$$

$$\frac{y}{a} = 1 + \frac{m}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{ma}\left(\frac{X}{a}\right)^2} - 1\right)$$ poniamo $a = 1$ ed $m = 4$

avremo: $y = 1 + 4\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2} - 1\right) = 1 + 2\sqrt{4 + X^2} - 4 =$

$$\boxed{y = 2\sqrt{4 + X^2} - 3}$$

può scriversi

$$\boxed{\frac{(y + 4 - 1)^2}{4^2} - \frac{X^2}{2^2} = 1}$$

si nota che ad ogni "m" arbitrario

Corrisponde uno ed un solo: $n = \sqrt{m \cdot a}$, affinché l'iperbole abbia lo stesso vertice e lo stesso raggio di curvatura, perciò il rapporto $i = \frac{m}{n}$ = (costante) non può essere condizionato dalla corrispondenza del 3° termine degli sviluppi in serie della catenaria e dell'iperbole. Cioè di iperboli che hanno lo stesso vertice e lo stesso raggio di curvatura nel vertice della catenaria ve ne sono infinite ma nessuna di esse può avere coincidente il 3° termine dello sviluppo in serie delle due curve.

Si noti che posto: $a = 1$ l'equazione dell'iperbole può scriversi:

$$y = (\sqrt{m})\sqrt{m + x^2} - (m - 1)$$

ed al variare di m varia poco la y. Per fare un esempio: la catenaria per $x = 2$ ha: $y = 3{,}762196$

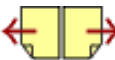
[illegible]

per l'iperbole con $m = 4$; ed $x = 2$, $y = 2{,}656854$

$m = 36$; $x = 2$, $y = 2{,}9473319$

$m = 10000$; $x = 2$, $y = 2{,}9998$

$m = 10^6$; $x = 2$, $y \simeq 3$

Ciò è dovuto alla curvatura dell'iperbole che varia molto più rapidamente di quella della catenaria.

Per x = 1 la catenaria ha y = 1,543080

L'iperbole con m = 4 → y = 1,490712

m = 36 → y = 1,496575

m = 10.000 → y = 1,499987

mentre l'ellisse osculatore y = 1,55051

e la parabola y = 1,5

TAVOLA di CONFRONTO

x	catenaria	parabola	iperbole	ellisse	cerchio
.1	1.005004	1.005	1.004996	1.005004	1.005013
.2	1.020067	1.02	1.019934	1.020067	1.020204
.3	1.045339	1.045	1.044667	1.045343	1.046061
.4	1.081072	1.08	1.078961	1.081096	1.083485
.5	1.127626	1.125	1.122499	1.127719	1.133975
.6	1.185465	1.18	1.174902	1.185751	1.2
.7	1.255169	1.245	1.235738	1.255915	1.285857
.8	1.337435	1.32	1.304542	1.339173	1.4
.9	1.433086	1.405	1.380829	1.436799	1.56411
1.–	1.543081	1.5	1.464102	1.55051	2.0
1.1	1.668519	1.605	1.553871	1.682674	
1.2	1.810656	1.72	1.649658	1.83667	
1.3	1.970915	1.845	1.751	2.017578	
1.4	2.150899	1.98	1.857461	2.233648	
1.5	2.35241	2.125001	1.968627	2.500001	
1.6	2.577465	2.280001	2.084116	2.851089	
1.7	2.828316	2.445001	2.20357	3.425546	
1.8	3.107474	2.620001	2.326662		
1.9	3.417733	2.805001	2.453089		
2	3.762196	3.000001	2.582576		
2.1	4.144314	3.205001	2.714871		

x	$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$y=1+\frac{x^2}{2}$	$y=\sqrt{9+3x^2}-2$	$y=4-\sqrt{9-3x^2}$	$y=2-\sqrt{1-x^2}$
2	3.762196	3.000001	2.582576		
2.1	4.144314	3.205001	2.714871		
2.2	4.567909	3.42	2.849742		
2.3	5.03722	3.645	2.986983		
2.4	5.556947	3.88	3.126402		
2.5	6.132287	4.125	3.267826		

I punti delle linee nel piano

Abbiamo giá dato (Vol I) la definizione eleatica di punto, abbiamo visto vari aspetti del punto, come origine di misure, o di assi; come delimitatore di segmenti, abbiamo visto i punti notevoli di un triangolo. Abbiamo giá distin to i punti propri dai punti impropri (Vol. III). Ab= biamo trattato molti altri aspetti e attributi del pun to, comprese le condizioni di appartenenza e di complanaritá; ora vogliamo considerare i punti delle linee nel piano.

Consideriamo prima i punti appartenenti ad una linea, poi i punti comuni a piú li= nee.

É consigliabile scorrere i vari attributi alla parola "Punto" nell'indice alfabetico e rivederne la trattazione nei precedenti

[illegible] nei precedenti volumi. Considerare il punto come una localizzazione nello spazio ennedimensionale porta a considerare due trajettorie che geometricamente hanno un punto in comune, che nel tempo non è più comune: (la pallottola è passata per quel punto dopo che vi era passato un piccione...). Così due rette nel piano appaiono avere un punto comune, nello spazio tridimensionale possono essere sghembe.

Punti ordinari e singolari delle curve piane
Punti multipli

Sia: $f_{(x,y)} = 0$ l'equazione implicita di una curva Γ, e sia: $P \equiv (x_0 ; y_0)$ un punto di Γ (Cfr. Vol. III teorema del Dini).

Se in P si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \quad , \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0 \; ,$$

la $f(x;y)$ rappresenta il punto P in un tratto di curva ove la tangente varierá con continuitá all'intorno di P, diremo tale punto ORDINARIO della curva. Invece se:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \; ; \; \text{la} \; f(x;y) = 0$$

rappresenta il punto P_s che chiameremo punto Singolare della curva Γ.

Notiamo che la condizione di punto singolare

Notiamo che la condizione di punto singolare di una curva coincide con la condizione necessaria, ma non sufficiente che P_s sia un max od un min.

Consideriamo un intorno di P_s, cioè:

$$\Gamma_{(1)} = f(x_s + h \; ; \; y_s + K)$$

e sviluppiamo la funzione in serie di Taylor.

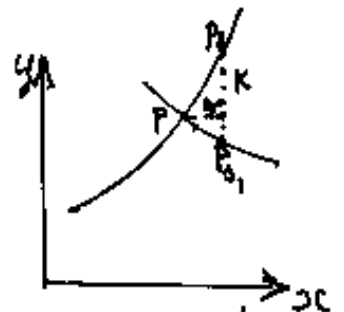
Trattandosi di un punto singolare, sono nulle le derivate del primo ordine e non figurano nello sviluppo, l'ordine delle altre derivate si indica con l'esponente in parentesi; ed avremo:

$$f_{(x_s+h;\,y_s+K)} = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}K\right)^{(2)} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}K\right)^{(3)} + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}K\right)^{(n)} + R_{n+1} = 0$$

Supponiamo siano nulle le derivate di ordine inferiore ad (n), il nostro sviluppo diventa:

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}K\right)^{(n)} + R_{n+1} = 0 \qquad (1)$$

Quando P_1 tende a P_s, cioè $h \to 0$ (ed anche $K \to 0$), e si ha che il rapporto $\frac{K}{h}$ tende ad un numero finito μ, allora sappiamo che la retta passante per s è espressa da:

$$\frac{y - y_s}{x - x_s} = \mu$$

è una retta tangente in P_s; ma, nel nostro caso, il punto singolare P_s, per il quale vale la (1),

il punto singolare P_s, per il quale vale la (1), se dividiamo tale espressione per h^n e ricerchiamo il limite per h tendente a zero otteniamo l'equazione nel rapporto: $\frac{k}{h} = \mu$, cioè:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \binom{n}{1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\cdot\mu + \binom{n}{2}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\mu^2 + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}\mu^n = 0 \qquad (2)$$

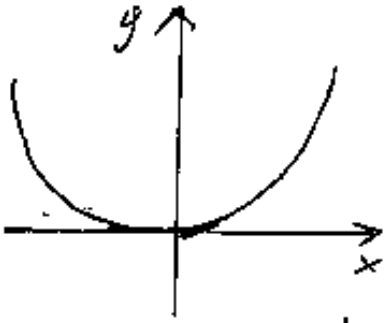
che è una equazione di grado "n" nell'incognita μ, cioè ammette n valori di μ (reali o immaginari) che possono soddisfarla.

Ma ad ogni valore di μ corrisponde una retta tangente in P_s (reale o immaginaria), in questo caso diremo che P_s è un punto MULTIPLO di ordine n, od anche P_s è un punto ennuplo della curva Γ.

Come esempio pratico possiamo considerare le "rodonee" (vedi in questo volume più avanti) a tre, quattro, n foglie che hanno nell'origine un punto rispettivamente triplo, quadruplo, ennuplo.

Occorre però considerare anche il punto singolare detto di ONDULAZIONE in cui la tangente ha contatto con un quadripunto per esempio: $(y = x^4)$ od anche: $(x^4 - 4) = 0$

per esempio: $(y = x^4)$ od anche: $(x^4 - y) = 0$

ed è ondulazione di prima specie, come in figura

ricordando che le curve di IV grado si presentano:

Qualora i punti siano più di 4 sono detti di ondulazione di specie superiore.

Punti doppi, - Nodi - Cuspidi

Nella funzione $f(x,y)$ che abbiamo trattato sopra, se sono nulle solo le derivate del primo ordine e non quelle del secondo ordine avremo: μ_1 e μ_2 (vedi punti singolari) e quindi un punto doppio della $f(x,y)$. Spostiamo gli assi in modo che l'origine O coincida col punto doppio; ricordando che:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sviluppiamo in serie di MacLaurin la espressione della $f(x,y)$, con origine degli assi nel punto doppio e limitiamoci alle derivate terze.

$$f(x_0+h, y_0+k) = \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^2}\right)_{0,0} x^2 + 2\left(\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}\right)_{0,0} xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{0,0} y^2 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{0,0} x^3 + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{0,0} x^2 y +$$

$$+ 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{0,0} x y^2 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{0,0} y^3 = 0$$

L'equazione delle tangenti in funzione del coefficiente angolare μ diventa:

$$\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^2}\right)_{0,0} + 2\left(\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}\right)_{0,0} \mu + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{0,0} \mu^2 = 0$$

ed avrà due radici che possono essere reali, (diverse o coincidenti) oppure immaginarie coniugate a seconda che il

coincidenti; oppure immaginarie coniugate a seconda che il discriminante dell'equazione $\Delta \gtreqless 0$. tale discriminate corrisponde al determinante Hessiano, infatti:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f^2}{\partial y^2} \end{vmatrix} = H = -\Delta$$

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \lesseqgtr 0$$

I) Se : $H<0$ si hanno due tangenti distinte, perciò il punto si dirà:

"Punto doppio a tangenti distinte"

od anche che:

"Nel punto vi è un nodo"

(Per esempio, nell'origine degli assi, il folium di Cartesio, o la lemniscata di Bernouilli, hanno "Un nodo").

II) Se : $H>0$ e nell'origine $f(x_0, y_0) = 0$, ma in un intorno di (x_0, y_0) e la $f(x_0+h, y_0+k)$, con h e K piccolissimi, mantiene lo stesso segno si suol dire che: . .

"in "O" vi è un punto isolato"

(Per esempio la Concoide di Nicomede $(y-a)^2(x^2+y^2) = b^2y^2$, a seconda che: $a<b$, oppure: $a>b$ nell'origine si ha: un nodo oppure un punto doppio isolato)

III. Se : $H=0$ Le direzioni delle tangenti coinci

III Se : **$H = 0$** Le direzioni delle tangenti coincidono nel punto x_0, y_0 di Γ. Perciò il punto: $(x_0; y_0)$ sarà detto:

"Punto doppio a tangenti coincidenti"

oppure: "Cuspide"

la cuspide è detta anche:

Punto di regresso

La cuspide si distingue in due sottocasi: e cioè:

III a) se $H=0$ e se i due rami della curva Γ stanno da banda opposta alla tangente la cuspide si dice:

"Cuspide di I^ specie"

III b) se $H=0$ e e i due rami della curva Γ stanno dalla stessa banda rispetto alla tangente si ha la:

"Cuspide di II specie

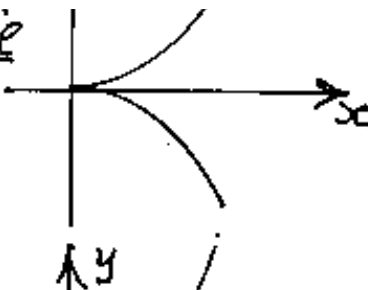
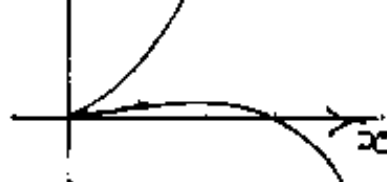
IV) se $H=0$ e se i due rami della curva Γ proseguono oltre (x_0, y_0) e pur avendo la stessa tangente restano da bande opposte alla stessa si ha un:

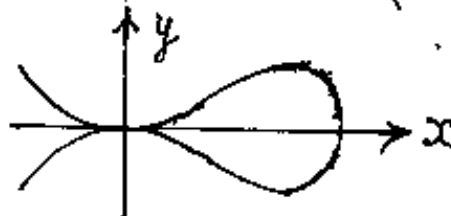
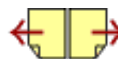
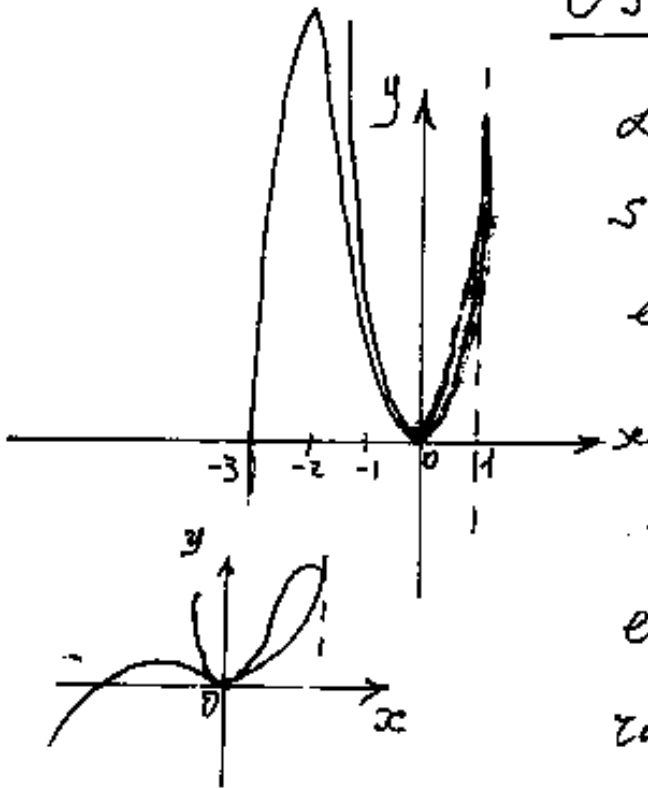
"Tacnodo"

y

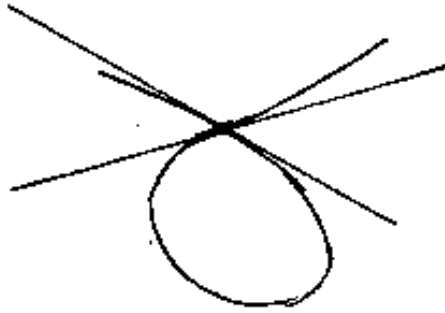
cuspide di I^ specie

cuspide di I specie (parabola cubica)

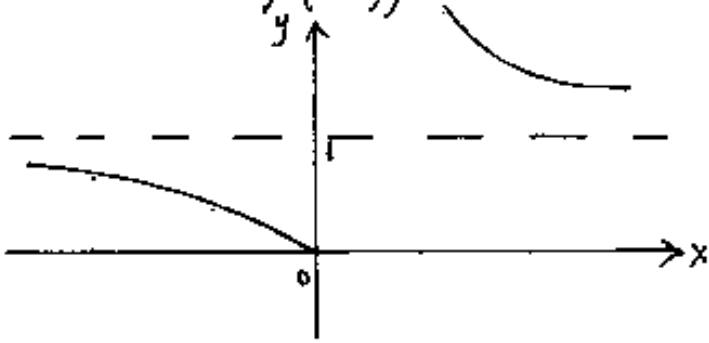
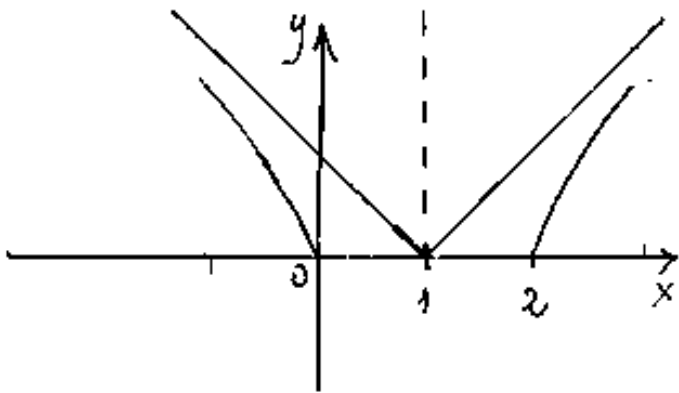
$$y = x\sqrt{x}$$

cuspide di II specie

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0$$
$$y = x^2(1 - \sqrt{x})$$

Tacnodo

$$y^2 - x^4(1-x) = 0$$
$$y = x^2\sqrt{1-x}$$

IV.) se $H=0$ e se i due rami della curva Γ, non solo non si incrociano, pur avendo la stessa tangente in (x_0, y_0), ma proseguono e permangono dalla stessa parte delle ascisse, in questo caso si ha un: "<u>osenodo</u>"

La figura a fianco è solo indicativa per curva esempio: $(y-6x^2)^2 - x^6(1-x) = 0$ cioè: $y = x^2(6 \pm x\sqrt{1-x})$, ma l'osenodo è più evidente nella seconda figura a fianco.

V° - Se in un nodo si hanno due tangenti distinte, ma un ramo della curva ha un

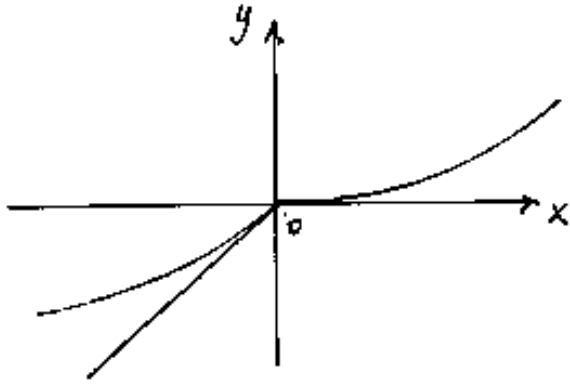
flesso nel nodo, si ha quello che si chiama: "Flecnodo"

Se invece entrambi i rami della curva hanno un flesso nel nodo si ha il: "Biflecnodo".

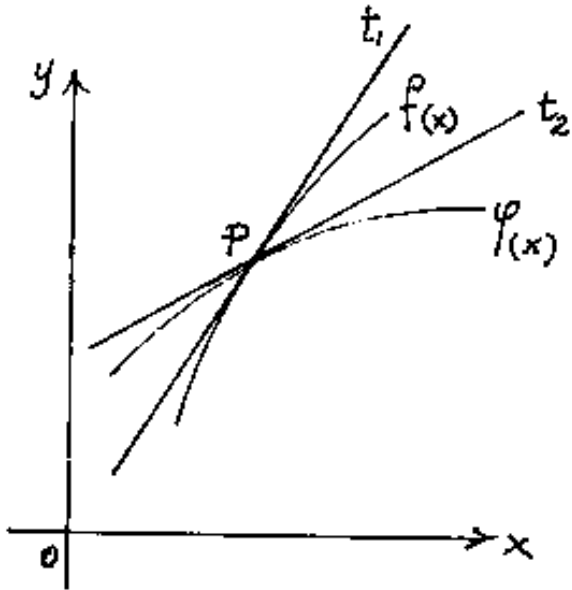
Punti di arresto

Diconsi punti di arresto quei punti nei quali non è possibile effettuare lo sviluppo di Taylor essendo: $f(x,y)=0$.

Per esempio: $y=e^{\frac{1}{x}}$ ha un punto di arresto per $x \to -0$ sul semiasse negativo.

La $y=\left|\sqrt{x^2-2x}\right|$ ha due punti di arresto: $x \to -0$, $x \to 2+$ che delimitano il campo di esistenza della funzione (zero è limite destro del primo ramo, 2 è limite sinistro del secondo ramo di iperbole.)

Punti angolari, o salienti, o vertici

Diconsi punti angolari, o salienti, o vertici, quei

Diconsi punti angolari, o salienti, o vertici, quei punti che uniscono due rami della curva senza che essi abbiano tangente comune. (vedasi anche vol. I studio delle funzioni). La $y = \frac{x}{1+e^{1/x}}$ ha per derivata: $y' = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}/x}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$ ove: $\lim_{x \to \pm\infty}(y') = +\frac{1}{2}$ (asintoto(∞)).

$\lim_{x \to -0}(y') = +1$; $\lim_{x \to +0}(y') = 0$;

ORDINE dei PUNTI di CONTATTO di due CURVE PIANE

Siano $f_{(x)}$ e $\varphi_{(x)}$ due curve piane aventi in comune il punto P. Cioè: $f_{(x_P)} = \varphi_{(x_P)}$.
Siano t_1 e t_2 le rette tangenti in P rispettivamente a $f_{(x)}$ e $\varphi_{(x)}$; si dice che due linee hanno un contatto di ordine "n" quando sono uguali le derivate fino all'ordine "n". Cioè se:

$$f_{(x)} = \varphi_{(x)}\ ;\quad f'_{(x)} = \varphi'_{(x)}\ ;\quad f''_{(x)} = \varphi''_{(x)}$$

$$f'''_{(x)} = \varphi'''_{(x)}\ \ldots\ldots\ f^{(n)}_{(x)} = \varphi^{(n)}_{(x)}\ ;\quad f^{(n+1)}_{(x)} \neq \varphi^{(n+1)}_{(x)}.$$

Se: $f'_{(x)} = \varphi'_{(x)}$ le due linee hanno la stessa tangente nel punto comune. (e la stessa normale)
Se $f''_{(x)} = \varphi''_{(x)}$ le due linee hanno lo stesso cerchio osculatore cioè la stessa curvatura

cerchio osculatore cioè la stessa curvatura nel punto comune.

Se una terza curva $\psi_{(x)}$ ha in P con una delle altre due curve un contatto di ordine $K < n$ anche l'altra ha lo stesso contatto dello stesso ordine essendo $f^{(k)}_{(x)} = \varphi^{(k)}_{(x)} = \psi^{(k)}_{(x)}$.

Abbiamo già trattato, a proposito delle

curve osculatrici l'ordine pari e dispari dei punti comuni; vogliamo dare ora una nuova definizione di curva osculatrice.

Una linea Γ nella cui equazione compaiono K coefficienti arbitrari, si dice osculatrice di un'altra curva $Γ_1$ quando i coefficienti arbitrari sono scelti in modo da avere un contatto del massimo ordine (in genere: K-1)

Si dice che, se il contatto è di ordine dispari le due curve non si attraversano, mentre se il contatto è di ordine pari le due curve si attraversano.

Secondo questa teoria (connessa con l'accettazione dell'ordine degli infinitesimi) il cerchio osculatore, (contatto di ordine due, e quindi pari) attraversa la curva. (Naturalmente è ordine due, se le derivate terze nel punto comune sono

se le derivate terze nel punto comune sono diverse, per la catenaria ed il suo cerchio osculatore nel vertice le y''' sono entrambe nulle.)

Integrali fra limiti infiniti

Abbiamo già introdotto il concetto di integrale improprio (vedi Vol I), per la f(x) che diverga all'infinito, nel campo finito di integrazione. Ora è il campo di integrazione che si estende all'infinito. L'integrale fra limiti infiniti, può essere: convergente, divergente, o non aver significato come abbiamo già visto per gli integrali impropri.

L'integrale: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{K\to\infty}\left(\int_{-K}^{+K} f(x)\,dx\right) = \lim_{K\to\infty}\left[\int_{-K}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{K} f(x)\,dx\right]$

p. es. $\int_0^K e^{-\alpha x}\,dx = \left(\frac{1-e^{-K\alpha}}{\alpha}\right)$; $\lim_{K\to\infty}\left(e^{-K\alpha}\right)=0$ per cui $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}$

$\lim_{K\to\infty}\left(\int_1^K \frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{K\to\infty}\left(\log K\right) = \infty$ per cui: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \infty$ (diverge)

$$\int_0^K \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\int_0^K \frac{d\left(\frac{bx}{a}\right)}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}K\right)\right); \quad \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int^{\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \left(\frac{\pi}{2ab}\right)$$

$$\int_0 \frac{}{a^2+b^2x^2} \quad \left(\frac{}{2ab} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \left(\frac{\pi}{ab} \right)$$

Se esiste una $F(x)$ la cui derivata è $f(x)$ ed esiste $\lim_{x \to +\infty} (F(x))$ l'integrale:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F_{(+\infty)} - F_{(a)}$$

Fondamentale

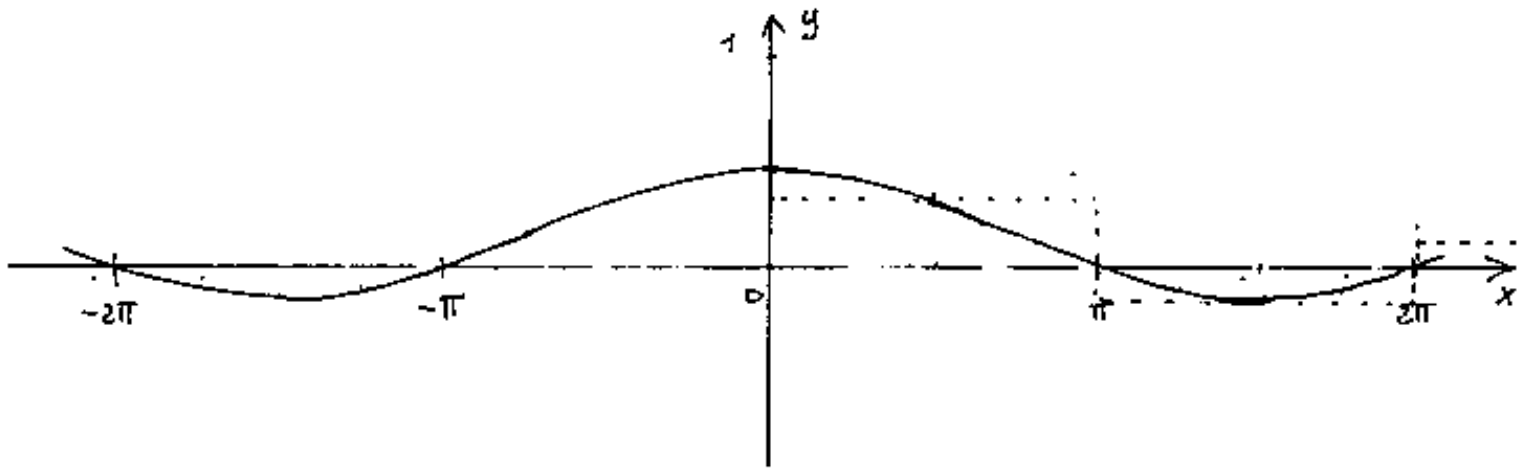
Convergenza fra limiti infiniti dedotta con metodi particolari.

Si abbia: $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \operatorname{rasen}(x)\, dx$

noi sappiamo che: $\left(\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 0\right) \quad \left(\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1\right)$

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx + \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx + \cdots\cdots \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

Se noi consideriamo il grafico: $y = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$

$-2\pi \quad -\pi \quad 0 \quad \pi \quad 2\pi \quad x \quad y \quad 1$

notiamo che le aree comprese fra la curva e l'asse

delle ascisse, sono cappi a segni alterni, per tratti

base lunghi π e che vanno rapidamente diminuendo al crescere di $n\pi$. Poniamo quindi

$$(-1)^n \int_{(n)\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = a_n \qquad \text{con } (n = 0, 1, 2, 3 \cdots)$$

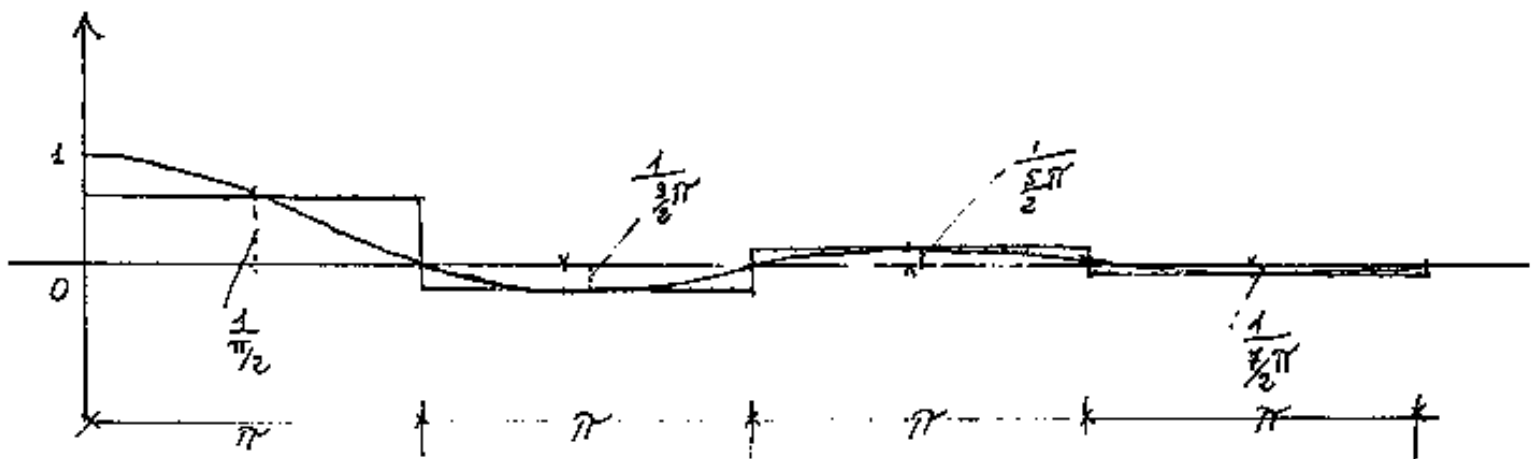
abbiamo così la successione a segni alterni;

$a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots\ldots a_n$ i cui termini

in valore assoluto vanno rapidamente decrescendo e tendono a zero per $n \to \infty$.

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = |a_0| - |a_1| + |a_2| - |a_3| + \cdots \pm |a_n|$$

La serie a segni alterni, a termini decrescenti, con $a_n \to 0$ per $n \to \infty$, è certamente convergente.

Infatti consideriamo la serie delle aree rettangolari in figura.

avremo: $\sum_{1}^{n} \pi \left(\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \right) (-1)^n$ con: $(n = 0, 1, 2, 3 \ldots n)$

cioè la serie:

$$2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} \right) \right]$$

ma in parentesi è la serie ciclometrica $= \frac{\pi}{4}$ (vedi vol II)

per cui le nostre aree

per cui le nostre aree

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2}{(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

Si può dimostrare che anche: $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi/2$

Attenzione, i max ed i min di $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ si hanno per

$x = \operatorname{argratang}(1)$ cioè per $x = 0{,}00$; $x = 4{,}4934094579$ rad ;

$x = 7{,}7252518369$ rad ; $x = 10{,}904121659$ rad ; ecc. ove: $\frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1$.

Gli integrali di Fresnel

Consideriamo i due integrali: (di Fresnel)

$$\int_0^x \operatorname{sen} x^2 \, dx \quad ; \quad \int_0^x \cos x^2 \, dx$$

nei quali facciamo tendere il limite superiore $x \to \infty$.

Per quanto detto precedentemente: (con m = intero)

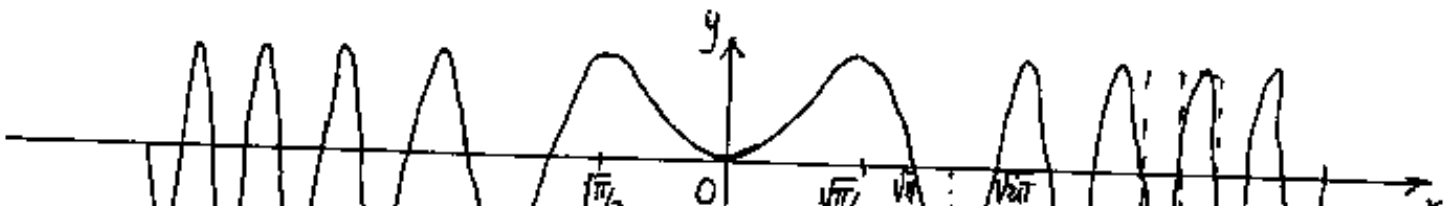
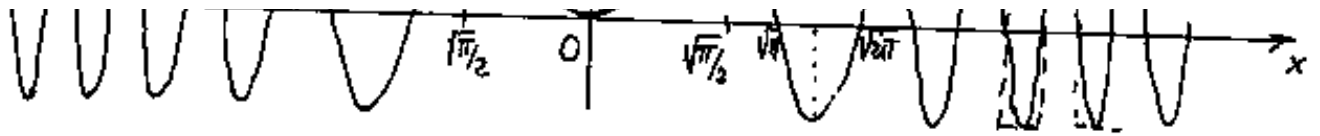
$$\int_0^{\sqrt{2m\pi}} \operatorname{sen} x^2 \, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x^2 \, dx + \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sen} x^2 \, dx + \cdots + \int_{\sqrt{(2m-1)\pi}}^{\sqrt{2m\pi}} \operatorname{sen} x^2 \, dx .$$

ove facemmo la serie $\{a_m\}$, poniamo ora:

$$(-1)^n \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \operatorname{sen} x^2 \, dx = a_n$$

avremo:

$$\int_0^{\sqrt{2m\pi}} \operatorname{sen} x^2 \, dx = |a_0| - |a_1| + |a_2| - |a_3| + \cdots + |a_{2m-2}| - |a_{2m-1}|$$

facciamo il grafico di $\operatorname{sen} x^2$.

Si noti come le aree di segno alterno vadano diminuendo in valore assoluto; d'altra parte: $\left(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}\right)\cdot(1)$ è l'area del rettangolo che contiene una semionda, le aree che sono > 0 e quelle < 0, dopo un po' tendono a compensarsi

$$+\left(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}\right)-\left(\sqrt{(n+2)\pi}-\sqrt{(n+1)\pi}\right) = 2\sqrt{(n+1)\pi}-\left(\sqrt{n\pi}+\sqrt{(n+2)\pi}\right)=\sqrt{\pi}\left[2\sqrt{n+1}-\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right)\right]$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Integrali Curvilinei

Sia Γ una linea curva in campo tridimensionale definita dalle espressioni parametriche:

$$x = x(t) \quad ; \quad y = y(t) \quad ; \quad z = z(t)$$

Consideriamo un tratto finito e continuo di tale curva, delimitato dai punti A e B. definiti rispettivamente dai valori: "a" e "b" del parametro t.

cioè: $X_A = X_{(a)}$; $y_A = y_{(a)}$; $Z_A = Z_{(a)}$

$X_B = X_{(b)}$; $y_B = y_{(b)}$; $Z_B = Z_{(b)}$.

In funzione del punto P, variabile sulla curva Γ, esistono due funzioni $f(P)$ e $\varphi(P)$, che possiamo pensare estendersi in altre dimensioni dello spazio. (Così come: $Z = f(x,y)$ avremo: $\xi = f(x,y,z)$; $\eta = \varphi(x,y,z)$.)

Attribuiamo un verso all'arco $\widehat{AB}$; ($\widehat{AB} > 0$; $\widehat{BA} < 0$) e sia: $a < b$. Dividiamo l'arco $\widehat{AB}$ in "n" parti: $s_1, s_2 \ldots s_n$; Sia: $P_0 = A$, P_1, P_2; ... $P_n = B$ i punti di divisione determinati dal parametro; rispettivamente: $a = t_0, t_1, t_2, \ldots t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \ldots t_n = b$. (ove: $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$). L'intervallo (o incremento) del pa=

(ove: $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$). L'intervallo (o incremento) del parametro sia: $\boxed{\delta_i = t_i - t_{i-1}}$ (per arrivare a ti), e sia $P_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$. A questo intervallo a cui corrisponde il tratto di arco: $\overset{\frown}{P_{i-1} P_i} = s_i$ della curva Γ; corrisponde anche un intervallo o incremento nelle funzioni $\varphi(P)$ ed $f(P)$, avremo cioè:

$$\Delta_i \varphi = \left(\varphi_{(P_i)} - \varphi_{(P_{i-1})}\right) = \left[\varphi(x_i, y_i, z_i) - \varphi(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\right]; \text{ ove: } x_i = x_{(t_i)}; y_i = y_{(t_i)}; z_i = z_{(t_i)}.$$

$\Delta_i f = \left(f(P_i) - f(P_{i-1}) \right) \cdots = \left(L_i - l_i \right)$ ove l_i ed L_i, sono i limiti della $f(P)$ nell'archetto "s_i" di Γ

Sia: "f_i" un numero qualsiasi compreso fra l_i ed L_i cioè: $l_i \leq f_i \leq L_i$. (E appena il caso di aggiungere un esempio dimensionale: sia t_i un numero puro, cui corrisponde geometricamente il punto P_i di Γ, e sia $\delta_i = t_i - t_{i-1}$ l'incremento di t, ancora numero puro, a cui corrisponde l'archetto $s_i = \widehat{P_i P_{i-1}}$ dimensionabile in misure di lunghezza ed a cui corrisponde l'intervallo: $(L - l)$ della $f(P)$ dimensionabile in altra dimensione fisica per esempio Kg. all'interno del quale considero una "f_i". una specie di funzione di funzione).

Consideriamo ora le somme:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} (f_i)(\Delta_i \varphi)}$$ ove (ripetiamo) $\left(l \leq f_i \leq L \right)$; $\Delta_i \varphi = \left(\varphi_{P_i} - \varphi_{P_{i-1}} \right)$.

Se facciamo tendere n ad infinito e quindi a zero gli archetti: s_i; ed al limite esiste ed è finito il valore delle somme di cui sopra, cioè:

finito il valore delle somme di cui sopra, cioè esiste un numero: $I_{A,B}$ che è tale valore, chiameremo $I_{A,B}$ l'integrale curvilineo della $f_{(P)}$ nel differenziale della $\varphi_{(P)}$, nel tratto A:B della curva Γ

$$I_{A,B} = \int_{\widehat{A,B}} f \cdot d\varphi$$

; od anche:

$$\boxed{I_{AB} = \int_{\Gamma} f \cdot d\varphi}$$

Possiamo anche scrivere:

$$I_{\widehat{AB}} = \int f_{(P_t)} \, d\varphi_{(P_t)} = \quad \boxed{I_{AB} = \int_a^b f_{(P_t)} \, \varphi'_{P_{(t)}} \cdot P'_{(t)} \, dt}$$

Ma $P_{(t)} \rightarrow \quad x_p = x_{(t)} \; ; \quad y_p = y_{(t)} \; ; \quad z_p = z_{(t)}$

$$I_{\widehat{AB}} = \int_a^b f(x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}) \cdot d\varphi(x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}) =$$

$$I_{\widehat{AB}} = \int_a^b f(x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}) \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} x'_{(t)} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'_{(t)} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'_{(t)} dt \right]$$

che può scindersi nella somma di tre integrali

$$\boxed{I_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \int_{\widehat{AB}} f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \int_{\widehat{AB}} f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz}$$

Facciamo un esempio:

L'elica: $x = R\cos(t) \; ; \quad y = R\,sen(t) \; ; \quad z = K \cdot t$

arco $\widehat{AB}$ definito da: $0 \leq t \leq \pi/2$; per $t = 0 \rightarrow x = R$; $t = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 0$

Le due funzioni siano: $f = x^2$; $\varphi = x + y + z$; $P = (x\, y\, z)$

Le due funzioni siano: $f_{(P)} = x^2$; $\varphi_{(P)} = x+y+z$; $P \equiv (x, y, z)$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1$$

$$\boxed{\int_\Gamma f \cdot d\varphi} = \int_\Gamma f\,dx + \int_\Gamma f \cdot dy + \int_\Gamma f \cdot dz = \int_R^0 x^2 dx + \int_0^{\pi/2} (R\cos(t))^2 dy + \int_0^{\pi/2} (R\cos t)^2 dz =$$

$$= \int_R^0 x^2 dx + \int_0^{\pi/2} (R^2\cos^2 t)\, d(R\,\mathrm{sen}\,t) + \int_0^{\pi/2} (R^2 \cos^2 t)\, d(Kt) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_R^0 + R^3 \int_0^{\pi/2} (\cos^3 t)\,dt + KR^2 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{-R^3}{3} + R^3 \frac{2}{3} + KR^2 \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{R^2}{12}\left[4R + 3K\pi\right]}$$

$$\left(\int \cos^3 t\,dt = \int \cos^2 t\, d\,\mathrm{sen}\,t = \int (1 - \mathrm{sen}^2 t)\, d\,\mathrm{sen}\,t = \mathrm{sen}\,t - \frac{\mathrm{sen}^3 t}{3} + C\right)$$

Integrali curvilinei estesi ad un curva chiusa.

Se l'integrale: $I_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} f\, d\varphi$ si integra per parti

avremo: $\int_{\widehat{AB}} f\, d\varphi = \left[f \cdot \varphi\right]_A^B - \int_{\widehat{AB}} \varphi\, d\varphi$.

Se l'arco $\widehat{AB}$ si richiude su se stesso, cioè $A = B$

il termine $\left[f \cdot \varphi\right]_A^B = 0$ per cui:

$$\oint_{\Gamma} f\, d\varphi = -\oint_{\Gamma} \varphi\, df$$

(col simbolo $\oint$ intendiamo: "integrale esteso a tutto il ciclo")

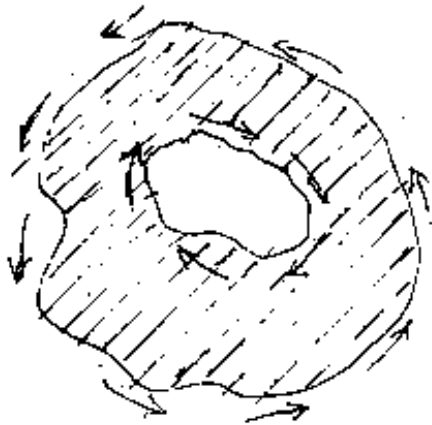
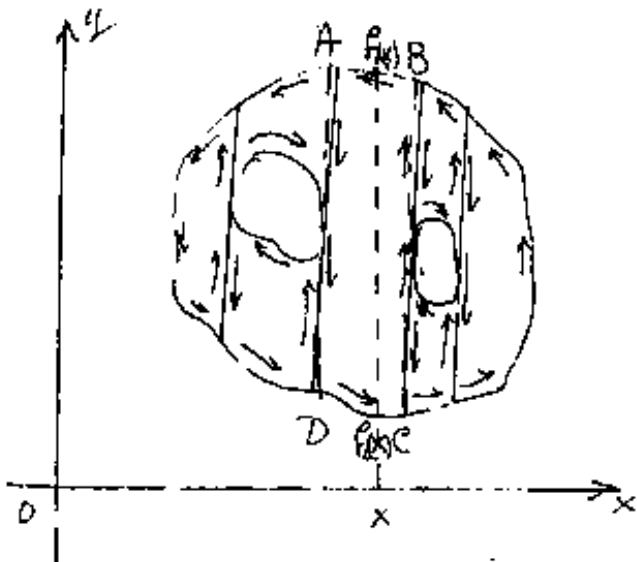
Calcolo delle aree delimitate da circuiti chiusi, mediante integrali curvilinei.

Il circuito non deve essere intrecciato e deve essere piano, definito da: $x = x(t)$; $y = y(t)$.

con t variabile nell'intervallo a, b: $a \leq t \leq b$

ai limiti avremo: $x(a) = x(b)$ ed $y_{(a)} = y_{(b)}$ coincidano affinché la curva sia chiusa, e non può avvenire per valori intermedi, se non è intrecciata.

Assumiamo, come verso positivo, il cammino antiorario sul circuito: in modo che un osservatore, che percorra il circuito in tal senso, avrà l'area da misurare sempre alla sua sinistra; mentre saranno da sottrarre le

aree delimitate da circuiti percorsi nel verso opposto.

Si noti che un'area di tal genere può essere scomposta in aree delimitate sia dalle linee dei circuiti sia dalle linee delle ordinate, rispettando i versi orari e antiorari per considerare le aree negative o positive e farne la somma algebrica. Come si vede nella figura a fianco.

Si noti che una di tali aree come la ABCD può essere espressa da: $\int [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$ che può scriversi $\int_{\widehat{AB}} f(x)\,dx - \int_{\widehat{DC}} f(x)\,dx$ ed anche:

$$-\int_{\widehat{BA}} f(x)\,dx - \int_{DC} f(x)\,dx$$

ed essendo: $\int_{\widehat{CB}} f(x)\,dX = 0$; $\int_{AD} f(x)\,dx = 0$

L'area del circuito: -ABCD sarà:

L area del circuito:-ABCD sarà:

$$A = -\int_{\widehat{DC}} f(x)\,dx + \int_{\widehat{CB}} f(x)\,dx - \int_{\widehat{BA}} f(x)\,dx - \int_{\widehat{AD}} f(x)\,dx =$$

$$A = -\int_{\Gamma} y\,dx$$

Abbiamo visto che per circuiti chiusi: $\int_\Gamma f\,d\varphi = -\int_\Gamma \varphi\,df$

avremo per la formula trovata:

$$\int_\Gamma x\,dy = -\int_\Gamma y\,dx = A$$

ed anche sommando:

$$A = \frac{1}{2}\int_\Gamma (x\,dy - y\,dx)$$

Se poniamo: $t = \frac{y}{x}$ avremo: $dt = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$

cioè: $(x\,dy - y\,dx) = x^2 dt$. sostituendo:

$$A = \frac{1}{2}\oint_\Gamma x^2\,dt$$

Importante formula per il calcolo dell'Area di un circuito chiuso. –

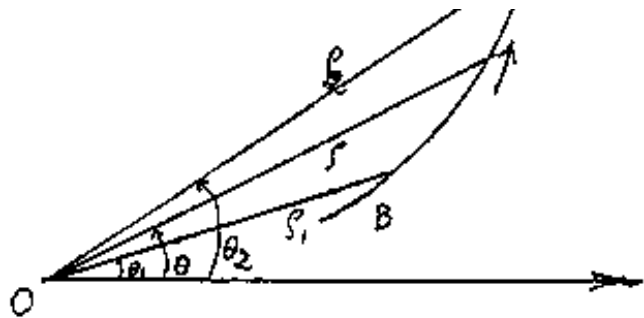
(un'area è sempre delimitata da un circuito chiuso (continuo o discontinuo))

Utilizzeremo questa formula per il calcolo della Cissoide, dell'area del cappio del folium di Cartesio ecc. A cui si rimanda per gli esempi.

Aree dei settori in coordinate Polari

C

O A

Il circuito sia riferito

Si riferisca sia riferita ad un sistema di coordinate polari, ove:

$$x = \rho\cos\theta \quad ; \quad y = \rho\,\text{sen}\,\theta$$

e siano ρ e θ funzioni di un parametro t.

Avremo anche:

$$dx = \cos\theta \cdot d\rho - \rho\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$dy = \text{sen}\,\theta\, d\rho + \rho\cos\theta\, d\theta$$

e quindi ricordando (vedi sopra): $A = \frac{1}{2}\int_{\Gamma}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\int(\rho\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, d\rho + \rho^2\cos^2\theta\, d\theta - \rho\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, d\rho + \rho^2\text{sen}^2\theta\, d\theta)$;

$$A = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \rho^2 d\theta$$

Si noti che il cerchio in coordinate polari è $\rho = R$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$; da cui: $A = R^2\pi$

Qualora l'area sia limitata al settore OBC (vedi figura) delimitato dai segmento $OB = \rho_1$ $OC = \rho_2$ e dall'arco di curva $\widehat{BC}$ di equazione $\rho = \rho(\theta)$ con θ variabile : $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

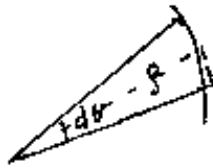
Essendo : $\int_{\widehat{OB}} \rho^2 d\theta = 0$; $\int_{\widehat{CO}} \rho^2 d\theta = 0$ avremo: $\int_{\widehat{BC}} \rho^2 d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$

per cui l'area sarà:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$$

Occorre fare attenzione qualora si applichi la formula ad una spirale, al primo giro occorre calcolare l'integrale, perché se l'area si estende al secondo giro, l'area del I sarebbe calcolata due volte e va sottratta, analogamente se si estende al

terzo giro occorre togliere due volte l'area del I giro ed una volta l'area del secondo, e così via.

Si poteva arrivare alla formula molto più semplicemente considerando che la lunghezza infinitesima di arco $ds = \rho \, d\theta$ può considerarsi base di un triangolo di altezza ρ e quindi di area elementare $dA = \frac{\rho \cdot ds}{2}$ da cui sostituendo $A = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\theta$.

Gli operatori funzionali

Abbiamo già trattato il concetto di operatore in matematica (Cfr. I Vol.), cioè gli operatori aritmetici, algebrici, ecc evidenziando il tipo di operatore mo=nadico che trasforma un numero in un altro numero.
Consideriamo l'operatore "log" (logaritmo) $\log(x) = a$, agisce su "x" e lo trasforma in "a"
Questo operatore algebrico agisce su quantità numeriche e le trasforma in altre quantità nume=riche. Tale operatore consente di esplicitare e risolvere incognite in equazioni altrimenti risolte per tentativi per es: $a^x = b$, senza l'operatore "log" si risolve per tentativi, mentre: $x = \log(b)/\log(a)$ e dalle tavole o con un regolo calcolatore o con un comune calcolatore elettro=nico il risultato è immediato.

Vogliamo ora trattare gli operatori

Vogliamo ora trattare gli operatori funzionali, che agiscono su funzioni e non su numeri; alcuni li abbiamo già trattati senza darle l'appellativo di operatori; per esempio le derivate; i differenziali; gli integrali; ecc. Ma ve ne sono dei nuovi, parlo degli operatori del Brogi che hanno consentito di

esplicitare e risolvere incognite in equazioni a tutt'oggi risolte per tentativi. Alcuni casi sono stati pubblicati (Cfr. Bollettino degli Ingegneri - (organo ufficiale del Collegio Ingegneri della Toscana) N° 12 anno 1972 - N° 2/3 e N° 12 anno 1977)

Ed è stata verificata sperimentalmente la loro validità. (Cfr. Bollettino Ingegneri N° 7/8 anno 1981)

Gli operatori del Brogi consistono in una operazione aritmetica fra la funzione e l'argomento: $sf(x) = f(x) + x$; $df(x) = f(x) - x$; $pf(x) = (f(x))(x)$; $raf(x) = f(x)/x$.

Il più importante è forse il $raf(x) = \frac{f(x)}{(x)}$ il "ra" è quindi il rapporto fra la funzione e l'argomento, è come la definizione di derivata: $\frac{df(x)}{d(x)}$ a cui siano tolti i simboli di differenziale. Per esempio $ra\,sen(x) = \frac{sen(x)}{(x)}$ $ra\log(x) = \frac{\log(x)}{(x)}$. (intendiamo "log" in base e cioè "ln")

Esattamente come per le derivate si può verificare il caso che l'argomento sia funzione della variabile (X); cioè la funzione data sia: funzione di funzione, in tal caso:

$$\frac{d(\log tg x)}{d(\tan g x)} = \frac{1}{\tan g x} ; \quad \frac{d \tan g(x)}{d(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} ; \quad \frac{d \log tg x}{dx} = \frac{1}{tg x \cos^2 x}$$

$$\frac{d \lg tg x}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}.$$

Nel caso del "ra" occorre che l'argomento sia evidenziato (magari con parentesi)

Negli integrali (funzioni inverse delle derivate) l'argomento differenziale rispetto a cui si integra è evidente: $\int \frac{d\,tgx}{tg(x)} = \log tgx + c$.

$\int \frac{dx}{senx \cdot cosx} = \log tgx + c$ infatti: $\int \frac{dx}{\frac{senx}{cosx} \cdot cos^2x} = \int \frac{d\,tgx}{tgx}$

$ralog\,tg(x) = \frac{\log tgx}{x} = K_2$; $ralog(tgx) = \frac{\log(tgx)}{tgx} = K_1$

Mentre le parentesi, in qualche modo, evidenziano l'argomento nelle rispettive funzioni inverse, non potremo scrivere: argralogtg$[K_1]$. La cosa migliorerebbe se scrivessimo:

argralog(tgx)$[K_1]$ = tgx ; argralogtg(x)$[K_2]$ = x

in effetti: argralog$[K_1]$ = tgx.

Quando può diventare poco comprensibile l'espressione algebrica, nel caso di funzione di funzione, si può sempre fare il cambio di variabili: posto: tgx = u; ralog(u) = K_1 ; argralog$[K_1]$ = u.

Il Prof. Giovanni Sansone mi ha più volte sollecitato a trovare tutte le correlazioni del

cercato di trovare tutte le correlazioni del "ra" per farne un'algebra, come esistono i calcoli trigonometrici o logaritmici, ed un giorno difronte alla nostra perplessità, staccò un foglietto del calendario, (che riproduciamo) e con pochi passaggi dimostrò che:

$$\text{raversh}(x) = \text{rasenh}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

scritto il 13-X-72
Dal Prof. Giovanni Sansone

SETTEMBRE
MARTEDI
ss. Cosma e Damiano
26

$$\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1}{x} = \frac{e^x+e^{-x}-2}{2x}$$

$$= \frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{2x} = \frac{\left(2\sinh\frac{x}{2}\right)^2}{2x}$$

$$= \frac{2\sinh^2\frac{x}{2}}{x}$$

$$\frac{e^x}{x} \qquad \frac{e^{-x}}{x}$$

Il Prof. Sansone ci dimostra che $\mathrm{raversh}\,x = \mathrm{rasenh}^2\frac{x}{2}$ e basta conoscere le tav. e^x/x e e^{-x}/x

cioè essendo:

$$\mathrm{raversh}(x) = \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1}{x}$$

$$= \frac{e^x+e^{-x}-2}{2x} =$$

$$= \frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2+\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2-2e^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{2x} =$$

il numeratore è un quadrato perfetto

$$= \frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{2x} =$$

$$= \frac{\left[2\left(\frac{e^{x/2}-e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)\right]^2}{2x} =$$

$$= \frac{2^2\sinh^2\frac{x}{2}}{2x}$$

$$= \frac{\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(x/2\right)}$$

perciò: $\boxed{\mathrm{raversh}(x) = \mathrm{rasenh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

Questa correlazione è stata da noi utilizzata

Questa correlazione è stata da noi utilizzata per il calcolo dei cavi tesi con appoggi a dislivello "h" e distanza orizzontale "d" per funi lunghe l, ove la configurazione assunta dalla fune (catenaria = $y = a \cosh \frac{x}{a}$) può essere disegnata conoscendo "a"

$$a = \frac{d}{2\,\text{argrasenh}\left(\sqrt{\frac{l^2-h^2}{d^2}}\right)}$$

La posizione degli assi cui è riferita la catenaria è determinata dalle coordinate dei punti di attacco: A, e B, espresse da:

$$x_A = a \ln \left| \left(\frac{a}{\ell - h}\right)\left(1 - e^{-d/a}\right) \right|$$

$$y_A = a \cosh\left(\frac{x_A}{a}\right)$$

$$x_B = x_A + d$$

$$y_B = y_A + h$$

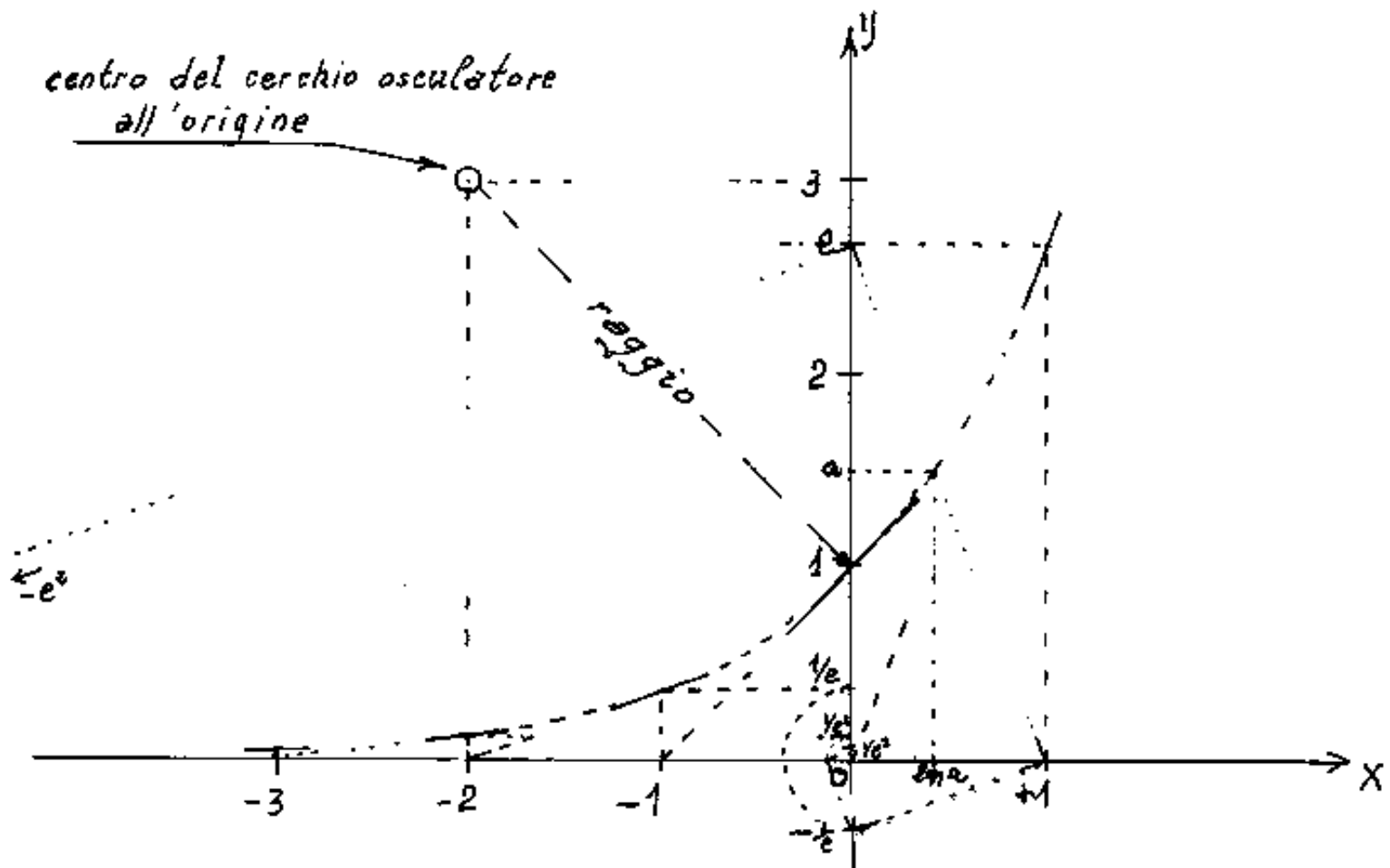
La f(x) e la (x) possono avere dimensioni fisiche anche diverse fra loro, il problema si trova negli stessi termini per le derivate, è il problema di riduzione all'unità: "la velocità è lo spazio percorso nell'unità di tempo" (il "ra" dà la velocità media; le derivate la velocità istantanea).

È chiaro quale importanza possa assumere

nella fenomenologia fisica l'operatore "ra".
Torneremo sull'argomento.

La curva esponenziale

E' la rappresentazione grafica della funzione: $y = e^x$. Se teniamo conto che: $y' = e^x$, la costruzione della curva è facilitata.

Fissato il modulo unitario del grafico e tracciati gli assi di riferimento, si possono fissare i

punti: $x = 0 \rightarrow y = 1$; $x = 1 \rightarrow y = e$. In ogni punto della

punti: $x = 0 \rightarrow y = 1$; $x = 1 \rightarrow y = e$. In ogni punto della curva, la pendenza in quel punto, o tangente alla curva, può tracciarsi unendo quel punto (di ascissa x) con l'ascissa; $(x-1)$ $(y=0)$ abbiamo così la curva inviluppata dalle tangenti.
$\left(y/x = tg\alpha = y_1 = y/1 \right)$.
Ma noi, dato il modulo unitario sappiamo co=struire il reciproco di ogni segmento, ove

il modulo = 1 è l'altezza di un triangolo rettangolo, riferita all'ipotenusa, ove le proiezioni dei cateti, sono il reciproco l'una dell'altra. (Euclide II)

Unito ($x=0$; $y=e$) con ($x=+1$; $y=0$) e da quest'ultimo punto tracciamo la perpendicolare che incontrerà l'asse delle ordinate nel punto: ($x=0$; $y=\frac{1}{e}$)

Nel I volume abbiamo insegnato come si trovano le potenze di un segmento quando sia noto il modulo o segmento unitario; per cui, continuando a tracciare perpendicolari, delimitiamo sugli assi i segmenti: $\frac{1}{e}=e^{-1}$; $\frac{1}{e^2}=e^{-2}$; $\frac{1}{e^3}=e^{-3}$; ecc. che riportiamo in ordinate dai punti di ascissa $x=-1$; $x=-2$; $x=-3$; ecc, ed unendo i punti della curva con le ascisse: $(X-1)$ troviamo le tangenti alla curva, cioè le pendenze della curva in quei punti.

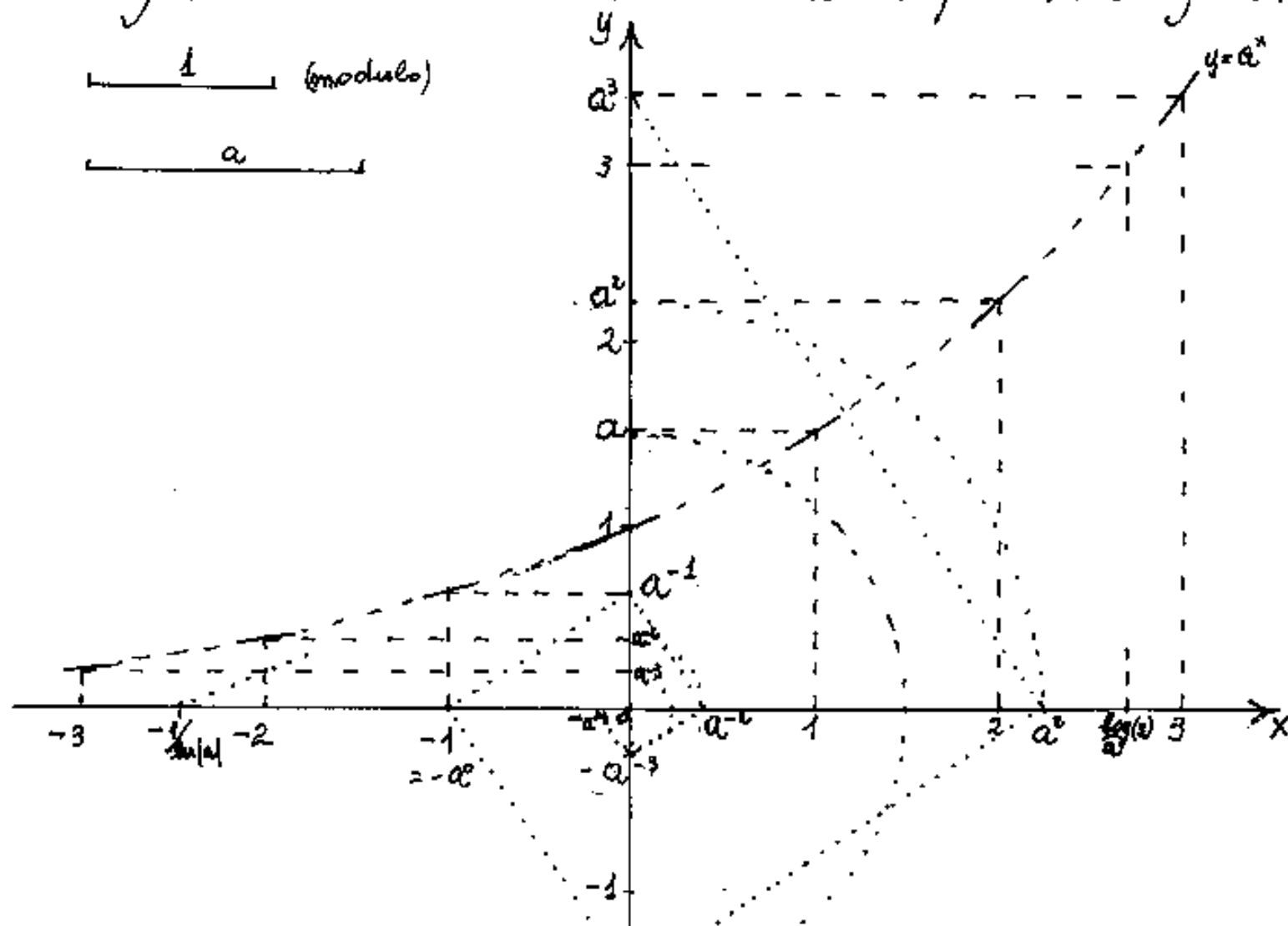
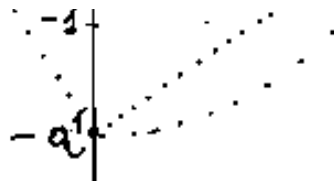
Anche dal punto: ($x=0$; $y=e$) possiamo tracciare la perpendicolare ... retta che ...

ciare la perpendicolare alla retta che u=
nisce questo punto con: (x=-1 ; y=0) e trovere=
mo in ascisse e^2; con una successiva perpendico=
lare troveremo in ordinate: $-e^3$; continuando tro=
veremo in ascisse: $-e^4$ e così via. Ma le po=
tenze del segmento: "e" escono presto dal foglio,

perciò allo scopo di evidenziare graficamente il procedimento, tracciamo la curva: $y = a^x$ con a poco superiore all'unità: $a = 1,50$.

Non è necessario specificare misure, basta tracciare due segmenti, cioè il segmento "a" ed il segmento modulo unitario ed è possibile: $y = a^x$.

-1

$-a^{1}$

Poiché $y' = a^x \cdot \ln|a|$ che può scriversi: $y' = \frac{a^x}{1/\ln|a|}$ è facile tracciare le pendenze; (il segmento $\ln|a|$ può ricavarsi dalla precedente curva ove: $e^{\ln|a|} = a$).

Ovviamente, da questa curva, leggendo in ordinate i numeri, in ascisse leggiamo i rispettivi logaritmi in base a.

Ricordando che il raggio di curvatura di una $y=f(x)$ è dato da $R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, nel caso della $y=e^x$, si ha: $R=\frac{(1+e^{2x})^{3/2}}{e^x}$, che per $x=0$ diventa: $R_{(0)}=\frac{(1+1)^{3/2}}{1}$, cioè: $R_{(0)}=(2)^{3/2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ cioè il raggio di curvatura per $x=0$ della $y=e^x$ è la diagonale di un quadrato di lato 2 facilmente costruibile perchè la diagonale (normale alla tangente) è a 45° rispetto agli assi x ed y, cioè le coordinate del centro del cerchio sono: $C_0 \equiv (-2;+3)$. (vedi figura).

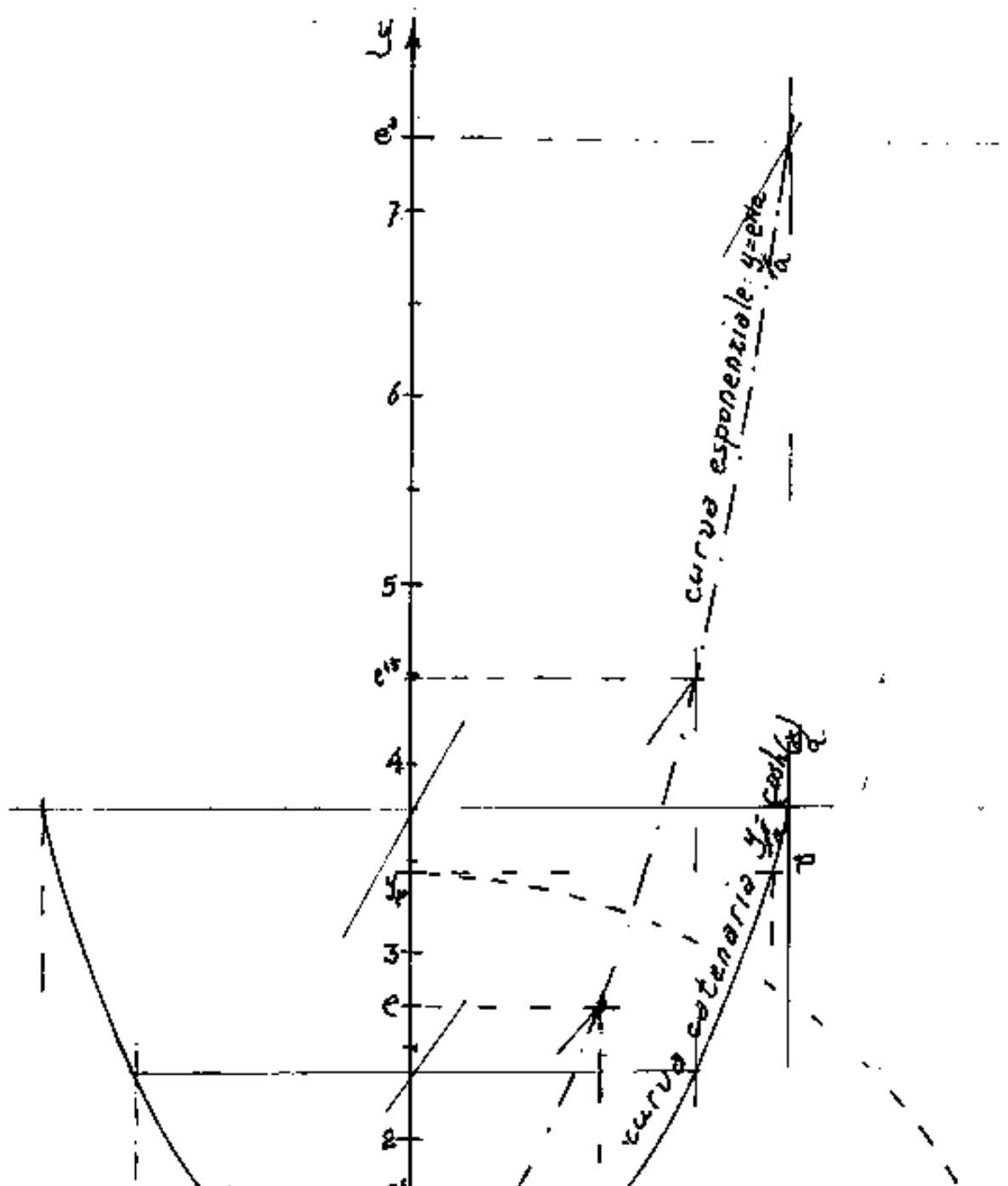
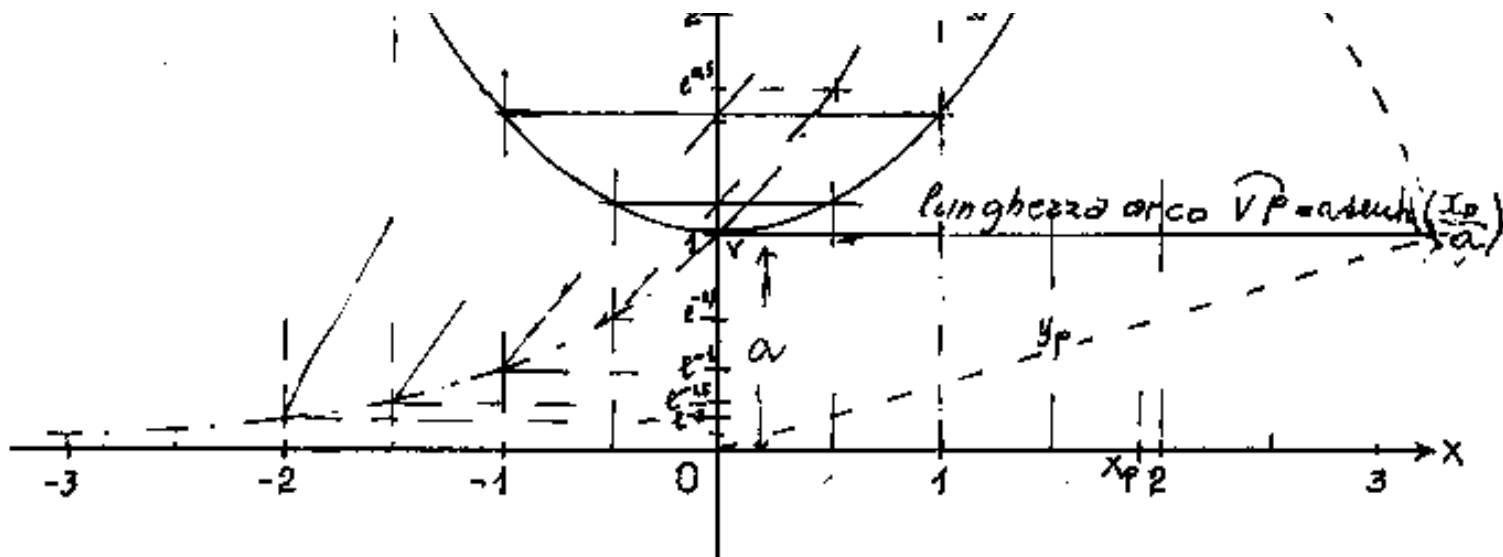
La curva esponenziale è importantissima perchè scambiando gli assi otteniamo la curva logaritmica dei logaritmi naturali o neperiani: $x=\ln|y|$.

La curva esponenziale permette di tracciare le curve delle funzioni iperboliche $y=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (cioè per ogni x e (-x) il valore del coseno iperbolico è la media

fra $y = e^x$ ed $y = e^{-x}$ e poiché l'asse y è simmetrico fra +x e -x, basta unire $y_1 = e^x$ con $y_2 = e^{-x}$ e leggere sull'asse y il valore del coseno iperbolico e riportarlo in ordinate su (x) e su (-x) ottenendo così la curva detta "catenaria" (di modulo 1).

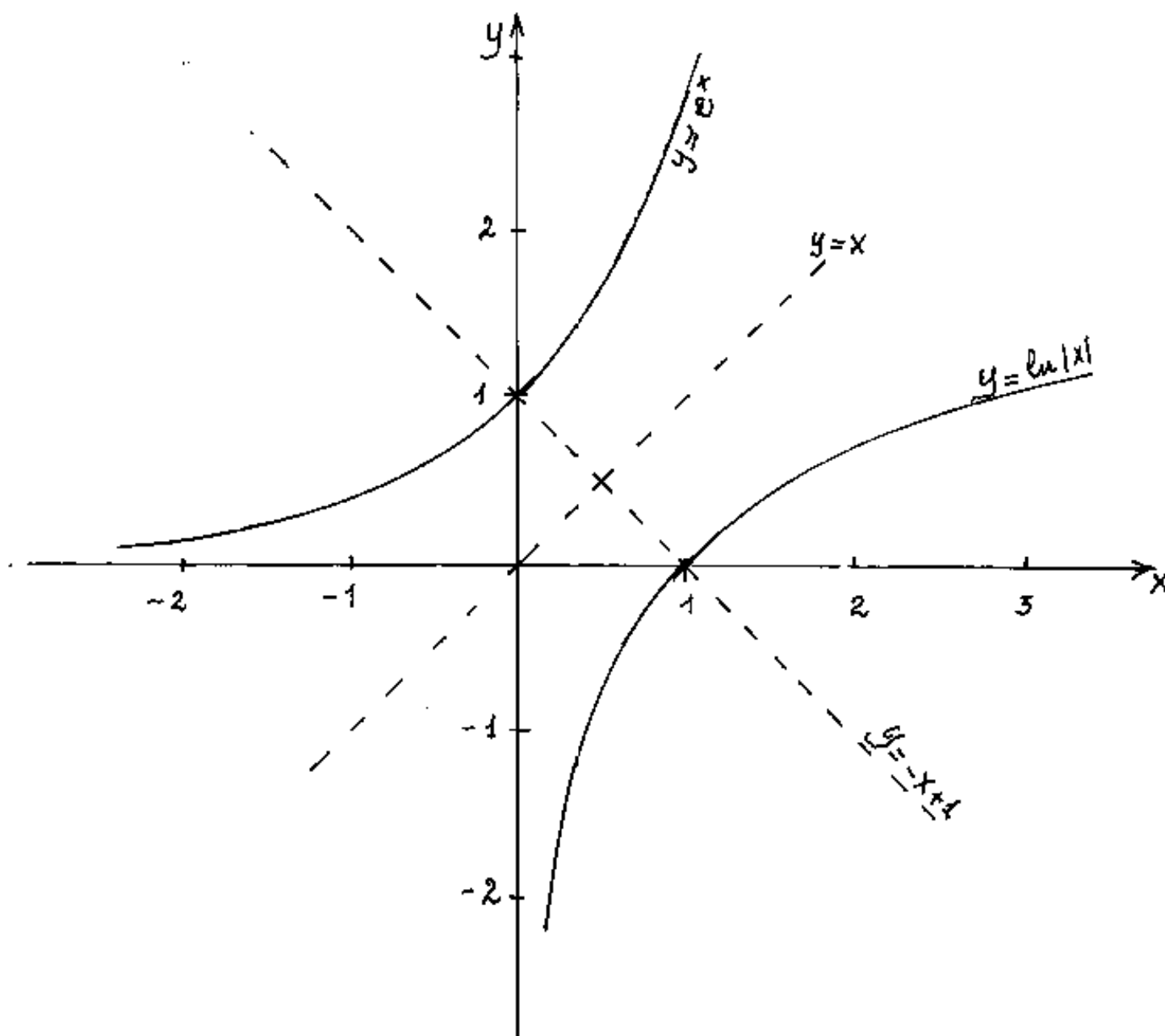
Costruzione grafica della curva catenaria

data $y = e^x$

lunghezza arco $\widehat{VP} = a \sinh\left(\frac{x_P}{a}\right)$

Ricordiamo che la catenaria si usa scrivere $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

ove "a" è il modulo unitario nel nostro caso $a = \overline{OV}$.

La curva logaritmica

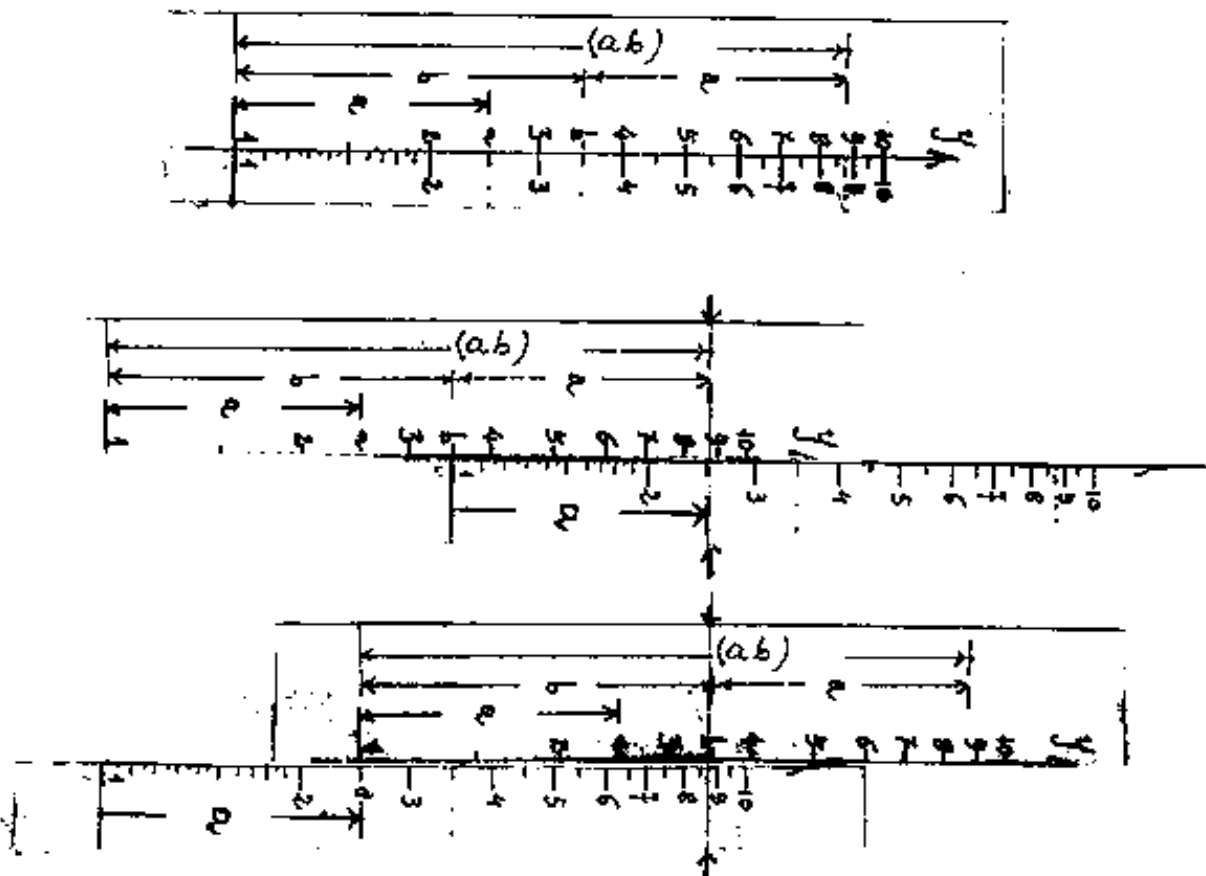
Abbiamo già visto che la curva logaritmica è la curva esponenziale ad assi scambiati:

Si noti la simmetria delle due curve rispetto al: la: $y=x$, però non sono simmetriche rispetto alla: $y=-x+1$; infatti il ramo a sinistra ammette un a: sintoto finito, (l'asse $(-x)$ per e^x; l'asse $(-y)$ per $\ln|x|$), i rami a destra l'asintoto è all'infinito (indefinito) ortogonale al precedente.

Il regolo calcolatore logaritmico

Supponiamo di aver disegnato con molta accuratezza la curva logaritmica, e di graduare l'asse delle ordinate con i numeri che generano le rispettive quantità logaritmiche. (come in figura)
Poiché cambiando base cambia solo la scala delle ordinate e restano le relazioni: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$; $\log(a)^m = m \log(a)$.

In ordinate notiamo che se al segmento indicato con: $(b)=(3,5)$ aggiungiamo il segmento: $(a)=(2,5)$ otteniamo un segmento che è $(a \cdot b)=(8,75)$; infatti: $(2,5) \cdot (3,5)=(8,75)$.
Il segmento delle ordinate dei logaritmi da 1 a 10 può essere amplificato a piacere cambiando scala, a parità di ascisse cambiando base logaritmica:

$$\log_b(K) = \log_a(K) \cdot \log_b(a) = \log_a(K) / \log_a(b).$$

Se su una striscia di carta riportiamo le graduazioni delle ordinate numerandole da due parti, come abbiamo già fatto, e tagliamo la striscia di carta lungo l'asse, le due parti della striscia di carta possono slittare, rimanendo a contatto con l'asse e possiamo materialmente fare la somma dei segmenti a e b.

Si noti che "b" della scala soprastante ed "a" della

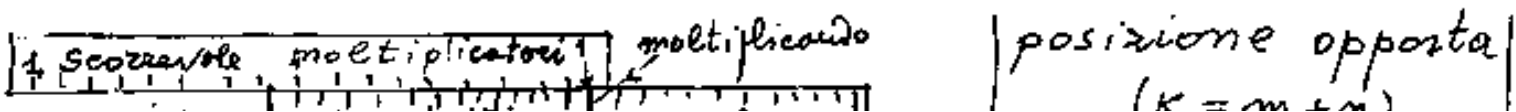
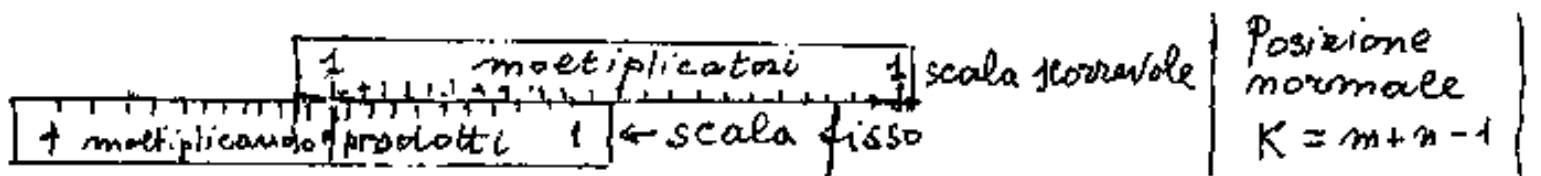
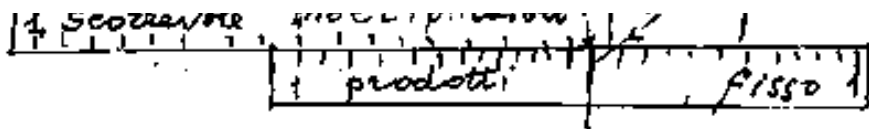
... della scala soprastante ed "a" della scala sottostante fa leggere: $(ab)+(ba)=(ba)$ nella scala soprastante. Mentre "a" della scala sottostante e "b" della scala soprastante fanno leggere $(ba)\cdot(ab)=(ab)$ nella scala sottostante, ed $(ab)=(ba)$.

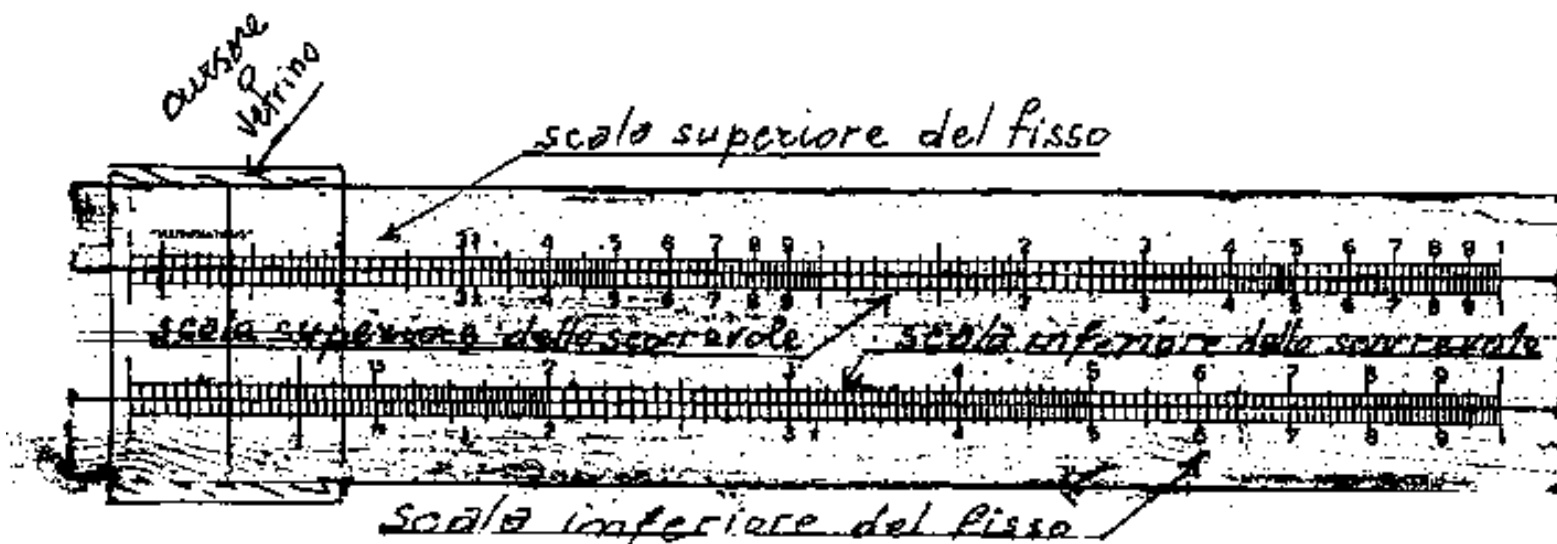
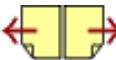
Però notiamo che se "a" e "b" li volessimo molti=plicare per 5, il risultato sarebbe fuori scala.

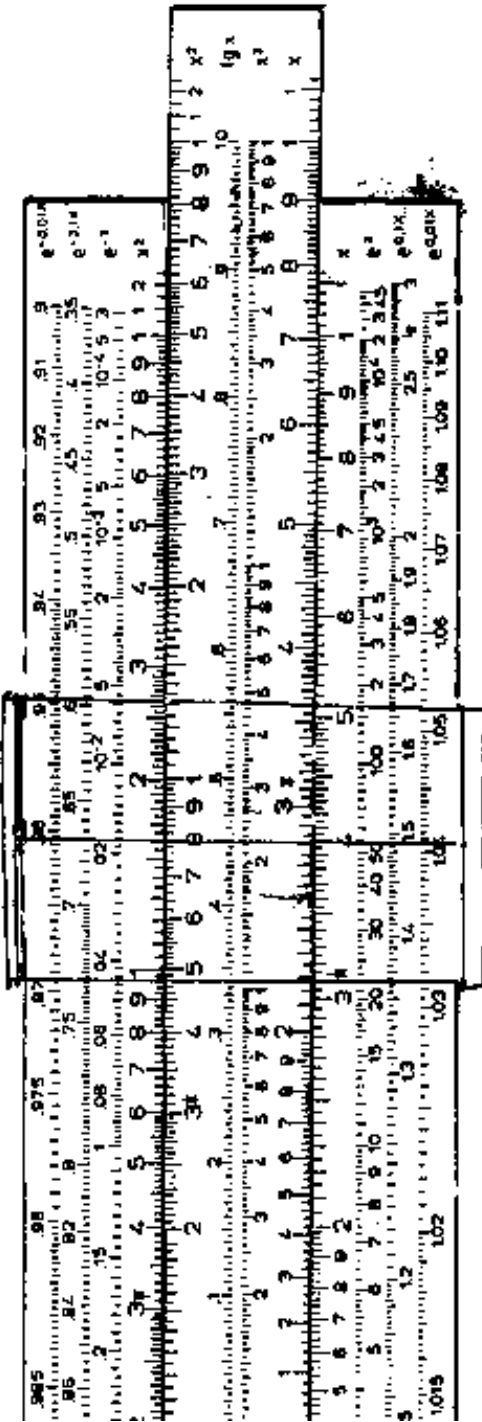
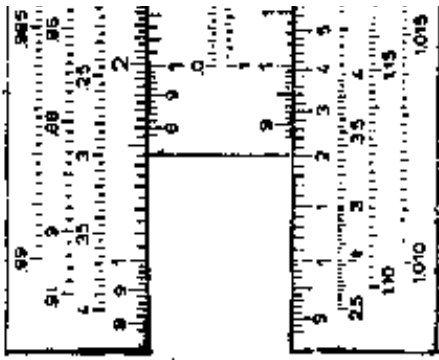
Inoltre se "a" fosse stata: 25 o 250 o 2500 anziché 2,5 come si poteva tenerne conto?

E' ovvio che bisogna fissare delle regole:

La scala inferiore è considerata del fisso su di essa si individua il moltiplicando sul quale si fissa l'inizio (1) della scala soprastante che è l'inferiore dello scorrevole, ogni valore dello scorrevole è un moltiplicatore che si trova in corrispondenza del prodotto da leggersi sulla scala del fisso.

Se "a" ha un numero "m" di cifre prima della virgola, e se "b" ha "n" cifre prima della virgola, se K è il numero di cifre del prodotto (prima della virgola)

1 moltiplicatori 1 scala scorrevole
1 moltiplicando 1 prodotti 1 ← scala fisso
Posizione normale
$K = m + n - 1$

1 Scorrevole moltiplicatori 1 moltiplicando
posizione opposta
($K = m + n$)

Le scale essenziali sono praticamente due; la inferiore che è la fondamentale e la superiore che, essendo doppia, rappresenta i quadrati, ma possono essere anche molteplici come nel regolo a fianco ove si stá moltiplicando sulla inferiore $\sqrt{2}$ ottenuto dalla superiore e $\sqrt{8}$ pure ottenuto dalla superiore e l'ovvio risultato "4" è indicato dal vetrino.

Analogamente si puó dire per la divisione: se al segmento $\log(4)$ tolgo $\log(\sqrt{8})$ ottengo il segmento $\log\left(\frac{4}{\sqrt{8}}\right) = \log\sqrt{2}$. cioè posto il vetrino sul 4 della inferiore si fa

coincidere con l'8 della superiore dello scorrevole, l'1 della inferiore dello scorrevole indica il valore 1,4142.. cioè l'uno della scala superiore dello scorrevole indica 2 quindi $4/\sqrt{8} = \sqrt{2}$. I valori della scala inferiore dello scorrevole sono i moltiplicatori di $\sqrt{2}$ i cui prodotti si leggono sul fisso.

Si notano le scale esponenziali, la scala dei logaritmi in base 10, e la scala dei cubi. Sul retro vi sono le scale delle funzioni trigonometriche; sen(x); cos(x); tang(x); x·π ecc. Alcuni regoli riportano anche la scala dei log(log(x)) mediante la quale è possibile calcolare qualsiasi potenza anche ad esponente frazionario, infatti:

$\log\log a^x = \lg(x \log a) = (\lg x + \log\log(a))$.

Vi sono regoli che riportano scale tecniche per calcoli elettrici, economici, meccanici, ecc.

Fra i molti giochi che sono possibili col regolo calcolatore riportiamo un metodo per trovare la radice reale nelle equazioni ridotte alla forma:

$X^3 \pm PX \pm Q = 0$ oppure: $X^3 \pm HX^2 \pm K = 0$

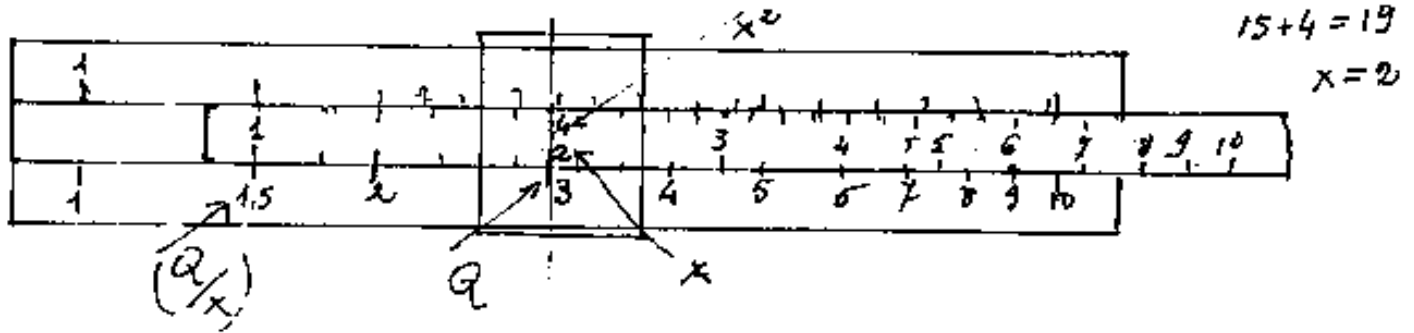
trasformiamo: l'equazione prima in: $X^2 \pm \frac{Q}{X} = \mp P$

esempio numerico: ($X^3 - 19X + 30 = 0$ diventa $X^2 + 30/X = 19$)

Fissato Q sulla scala inferiore del fisso vi si fa scorrere i valori della scala inferiore dello scorrevole che col

suo "1" indica Q/X mentre il filo del vetrino indica X^2 sulla scala superiore dello scorrevole; sommando ad X^2 il valore $\frac{Q}{X}$ dobbiamo avere P. Nel nostro caso: $30/2 = 15$

$15+4=19$

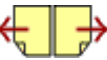
$x=2$

continuando a spostare lo scorrevole arriviamo a : $\frac{30}{3} = 10$ ove $3^2 = 9$ e $10+9=19$ per cui $\boxed{X_2 = 3}$

Se vi sono due radici reali, è reale anche la terza.

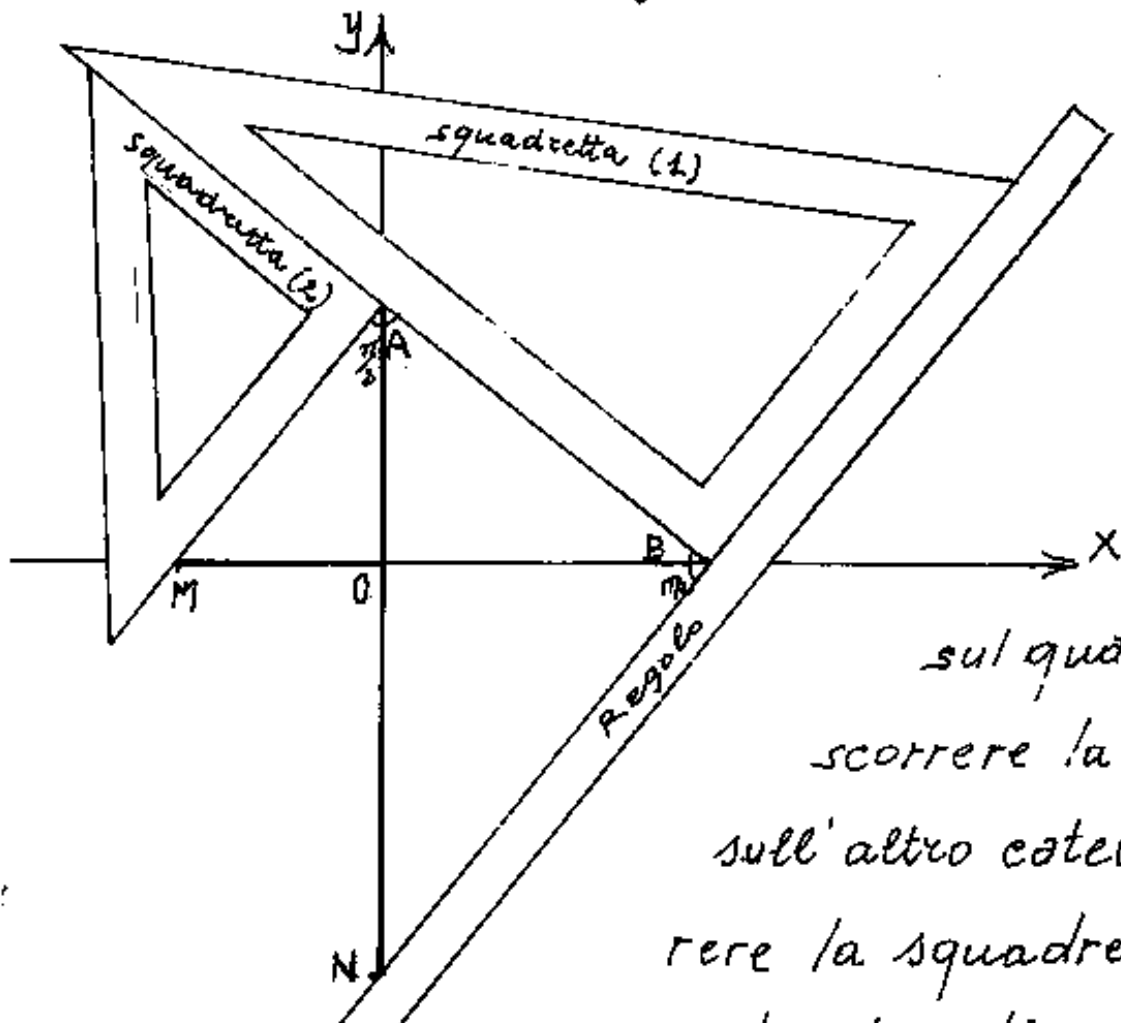
Continuando a spostare lo scorrevole si arriva ad $x = 4,36 = \sqrt{19}$ cioè $x^2 = 19 > 0$, ovvio che la x cresce in valore assoluto, ma dovrà essere $x < 0$, per soddisfare la relazione. Infatti per $x = 5$ si ha $\frac{30}{5} = 6$; $x^2 = 25$; $25 - 6 = 19$ cioè $\boxed{X_3 = -5}$

L'esempio è con numeri interi, con numeri frazionari l'approssimazione è quella del regolo usato. (Nell'esempio le radici sono esatte).

Per il secondo tipo di equazioni : $x^3 \pm Hx^2 \pm K = 0$, da scriversi nella forma : $\boxed{X \pm \frac{K}{X^2} = \mp H}$, il metodo risulta più efficiente, Infatti prendiamo i valori H e K sulla scala superiore del fisso e poniamo l'1 dello scorrevole su H ed il filo del vetrino

su K. In questo posizione, sullo scorrevole, il filo del ve-
trino indica il numero che dividendo K dà come quo-
ziente H, non solo, ma dà anche la radice di tale
numero. Se moviamo lo scorrevole in modo che
l'1 che centrava H si scosti da esso quanto
indicava la radice del dividendo di K, si nota che
il valore della radice del numero indicato dal.

Un metodo per trovare graficamente la radice cubica di un segmento riferito ad un modulo unitario (Risolve il problema di Delo).

Disposti due assi ortogonali x e y, riportiamo il modulo $\overline{OM}$ in ascisse con $x_M = -1$; ed il segmento $\overline{ON}$ con $y_N = -N$. (N è un numero dato da $\overline{ON}/\overline{OM}$)

Si pone su N un regolo che taglia le ascisse

sul quale si fa scorrere la squadretta (1) sull'altro cateto si fa scor=rere la squadretta (2) in

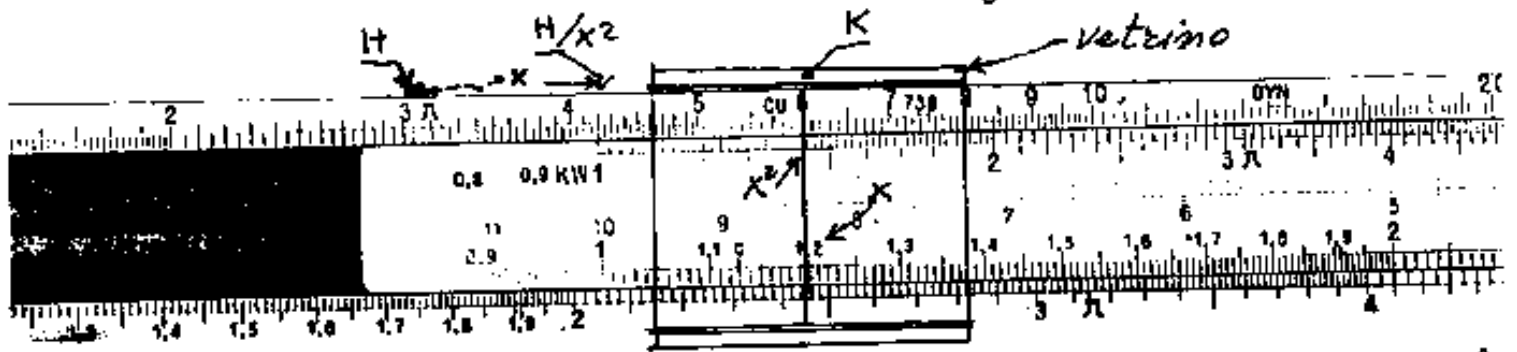
modo che gli angoli retti in A e B abbiano i vertici su gli assi e che il cateto libero della squadretta(2) passi per M; a tal fine basta ruotare il regolo intorno ad N e far scorrere le squadrette; avremo:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \sqrt[3]{\overline{ON}/\overline{OM}}$$

(modulo $\overline{OM} = 1$)

Consideriamo l'equazione : $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$
che diventa : $x + 6/x^2 = 3$; $H = 3$; $K = 6$;
la posizione iniziale del regolo calcolatore è
la divisione nella scala superiore : $\frac{6}{2} = 3$ con
$x = \sqrt{2}$; aumentando il quoziente si arriva a
$3 + \frac{6}{9} > 3$ ove è evidente che qualunque aumento
porta a valori maggiori di 3, cioè non esistono
radici reali > 0 .
Torniamo a : $6/2 = 3$, e muoviamo lo scorrevo-
le in modo da diminuire il dividendo; le radici
saranno negative: per $x = -1,20$; $x^2 = 1,44$; $6/1,44 = 4,17$
$4,17 - 1,20 = 2,97$ dobbiamo diminuire il valore assoluto di x
per: $x = -1,195$, abbiamo $6/x^2 \cong 4,19...$ che assumiamo 4,195
$4,195 - 1,195 = 0$; $x = -1,195$ (il vero valore $x = -1,195823$)
ogni ulteriore spostamento dello scorrevole non
consente : $6/x^2 - x = 3$ $\left(\frac{6}{1} - 1 = 5\right)$, ciò vuol dire
[illegible] sono immaginarie coniugate.

che le altre due radici sono immaginarie coniugate.

H   H/x²   K   vetrino

Il tratto di regolo interessato evidenzia i limiti di precisione.

Il problema di Delo.

Delo è una isoletta delle Cicladi nel mare Egeo ove esistevano due famosi templi dedicati ad Apollo ed a Latona, ed era, nell'antichità famosa per l'oracolo detto di Delo.

Proprio l'oracolo richiese di raddoppiare il volume dell'altare di Apollo, mantenendo la rigorosa forma cubica, allo scopo di far cessare una epidemia che martoriava gli Ateniesi.
La popolazione di Delo, poco esperta di matematica raddoppiò gli spigoli del cubo, e l'epidemia raggiunse i vertici della sua gravità...
Il popolo impressionato consultò Platone, il quale rispose che Apollo ha voluto punire la vostra ignoranza, voi infatti avete costruito un altare cubico di volume otto volte il

precedente e non doppio ...
Voleva dire che il nuovo spigolo doveva essere $\sqrt[3]{2}$ volte il precedente infatti: $(\sqrt[3]{2}\cdot 1)^3 = \quad 2S^3 = V_2 = 2V_1$.
Il disegno precedente ove: $\overline{ON} = 2\overline{OM}$ e dove $\overrightarrow{OA} = \sqrt[3]{2}\,(\overline{OM})$; cioè misurati $\overline{OM}$ ed $\overline{OA}$ in qualsiasi unità di misura lineare e facendone i cubi risulterà:

$$2(OM)^3 = (OA)^3$$

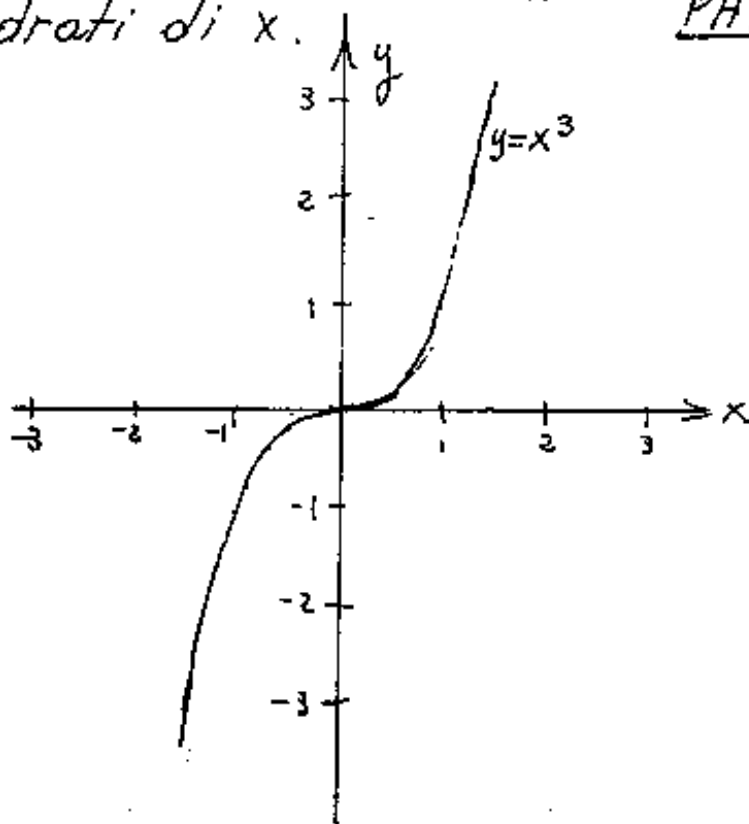
ciò risolve il problema di Delo (sia pure a tentativi).
(vedremo che il problema può risolversi con l'ausilio di curve)

Le linee curve nel piano

LA PARABOLA CUBICA

Abbiamo già trattato le coniche, cioè le curve derivanti da polinomi di 2° grado. (vol. II). Vediamo ora le linee derivanti da polinomi di 3° grado.

La più semplice: $y = x^3$ (parabola cubica)

$y' = 3x^2$; $y'' = 3x$; $y''' = 3$. Cioè si ha un flesso orizzontale per $x = 0$, la pendenza cresce coi quadrati di x.

PARABOLA CUBICA TRASLATA

Se trasliamo questa curva si ha: (x_0 = ascissa del flesso)

$$y - y_0 = (x - x_0)^3$$

$$y = x^3 - (3x_0)x^2 + (3x_0^2)x - (x_0^3 + y_0)$$

cioè:

$$x^3 - Sx^2 + Qx - P = y$$

classica espressione delle equazioni di 3° grado.

equazioni di 3° grado.

Per confronto si ha: $X_o = S/3$; $Q = S^2/3$; cioè

se: $Q = S^2/3$ allora l'equazione ha una sola radice:

$y' = 3X^2 - 2SX + Q = 0$; $(S^2 - 3Q) \gtrless 0$, in quanto non si hanno

massimi e minimi, ma solo un flesso, per $X = S/3$

$y'' = 6X - 2S = 0$; $(X = S/3)$.

$y' = 3X^2 - (6X_0)X + 3X_0^2 = 0$

$y' = x^2 - 2X_0X + X_0^2 = 0$ $(X_0^2 - X_0^2) = 0$ in queste condizioni

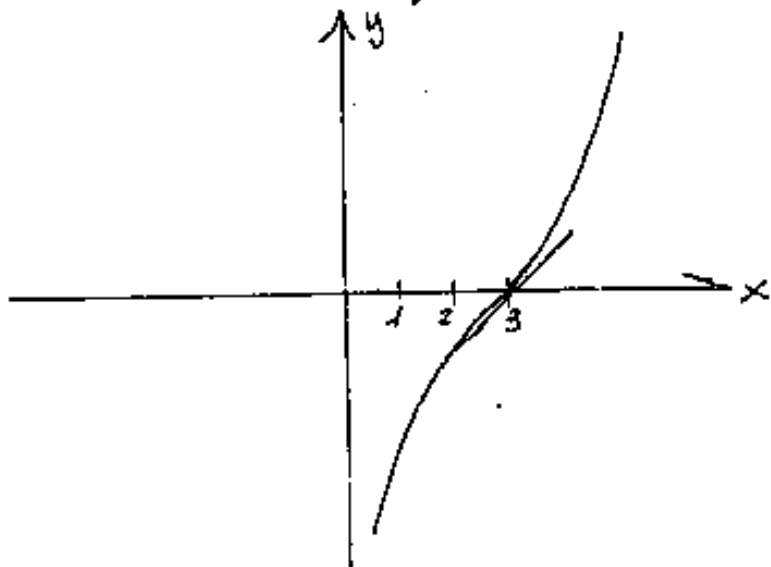
il flesso è solo orizzontale per $X = X_0$ se in y' sostituiamo

$X = S/3$ abbiamo: $y' = \frac{S^2}{3} - \frac{2S^2}{3} + Q = \left(-\frac{S^2}{3} + Q\right)$ che possiamo

porre a piacere per esempio $y' = +1$ avremo: $\boxed{Q = 1 + S^2/3}$

$y = X^3 - SX^2 + (1 + \frac{S^2}{3})X - P$ per esempio poniamo: $S = 9$

$y = X^3 - 9X^2 + 28X - 30$ consideriamo $P = 30$ (visto che è solo

una traslazione) avremo: per $x = S/3 = 3$; $y = 27 - 81 + 84 = 30$

$y' = 3x^2 - 18X + 28$

per $x = 3$; $y' = 27 - 54 + 28 = +1$

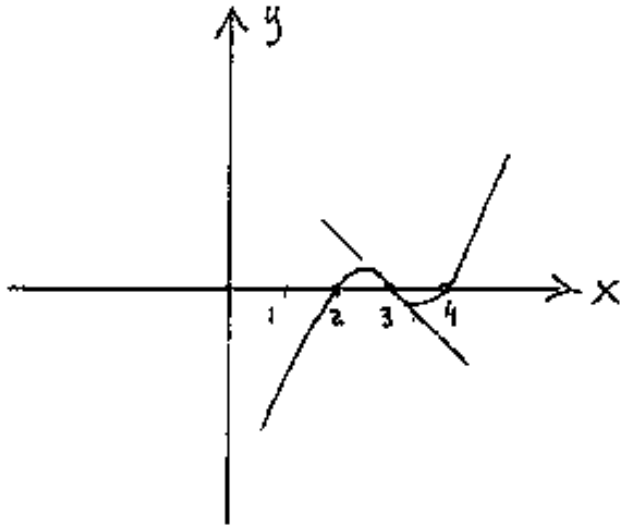
come ci eravamo proposti.

Supponiamo ora di imporre: ($y' = -1$) nel punto di flesso. Avremo:

$-S^2/3 + Q = -1$; $\boxed{Q = S^2/3 - 1}$; $y = X^3 - SX^2 + (\frac{S^2}{3} - 1)X - P$

Poniamo ancora $S = 9$ da cui: $y = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$

Poniamo ancora $S = 9$ da cui [illegible]

$y' = 3x^2 - 18x + 26$ $\qquad \dfrac{18 \pm \sqrt{324 - 312}}{6}$ $\qquad y'' = 6x - 18 = 0 \quad x = 3$

$y' = \dfrac{9 \pm \sqrt{3}}{3} = 3 \pm 0{,}57735$ Avendo scelto, per il flesso, la pendenza negativa, necessariamente la curva presenta un max ed un min. Inoltre avendo scelto P in modo che $y = 0$ nel punto di flesso ∴ l'equaz. avrà tre radici reali.

Se l'ordinata del flesso è pari al valore del massimo o del minimo del caso $y_0 = 0$ e cambiati di segno, cioè se la curva è tangente l'asse delle x si hanno due radici uguali.

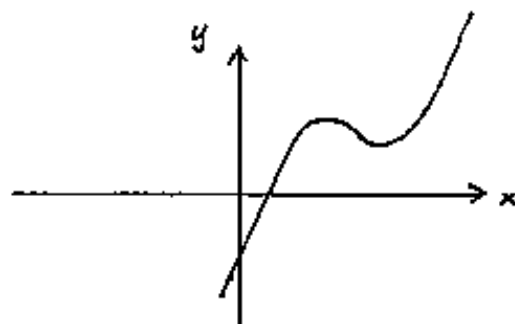
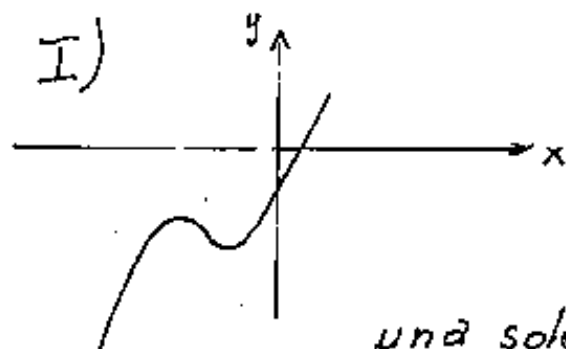
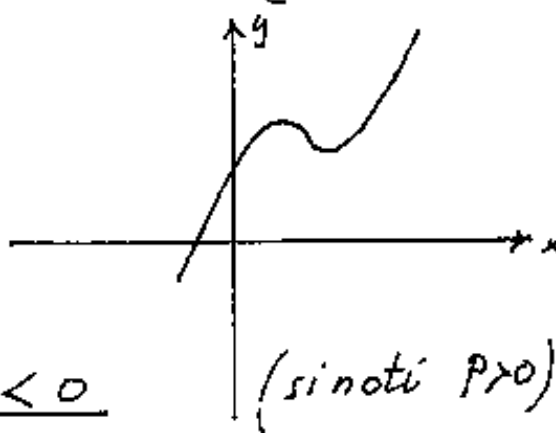
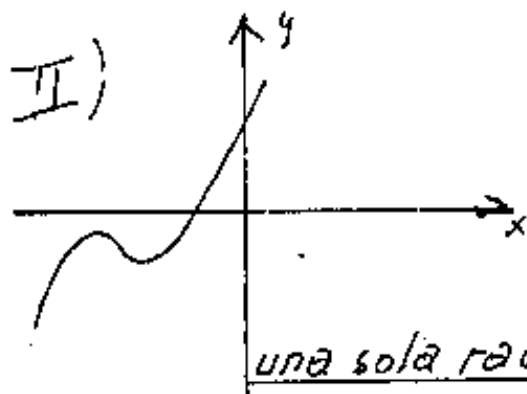
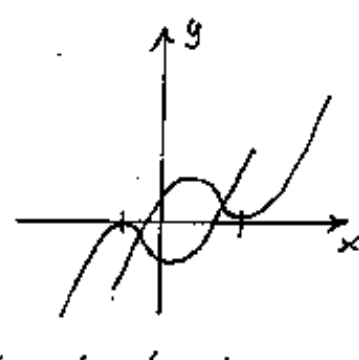
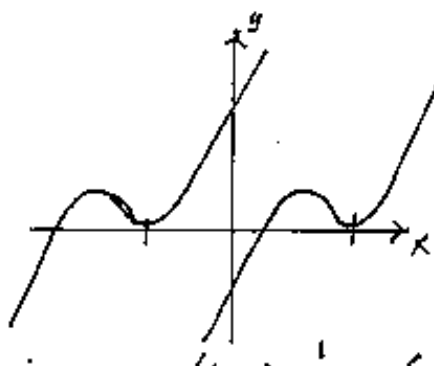
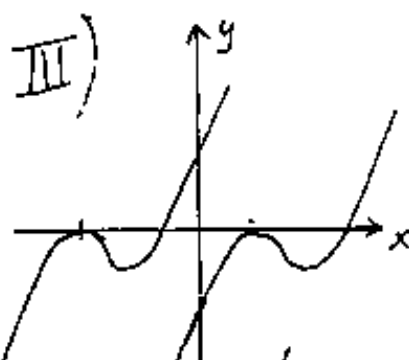
In particolare si hanno i seguenti casi:

I)

una sola radice reale > 0. (si noti P<0)

II)

una sola radice reale < 0 (si noti P>0)

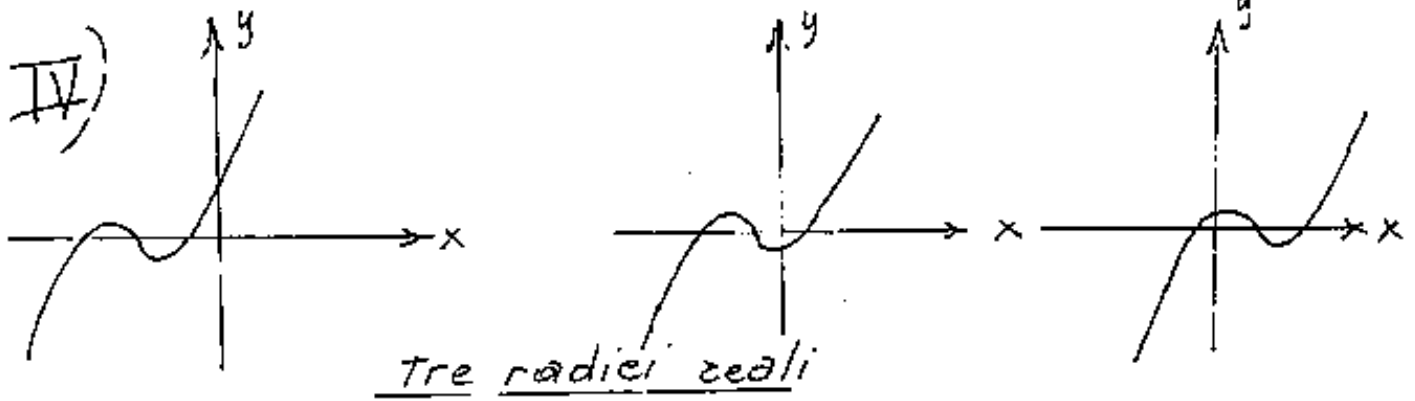
III)

due radici uguali $\gtrless 0$ (si noti che il segno di P non è più determinante)

IV)

y x

y x

y x

Tre radici reali

PARABOLA CUBICA RUOTATA

Supponiamo ora di ruotare gli assi di riferimento:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha \\ y_1 = y \cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

la $y_1 = x_1^3$ diventa:

$$y \cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha = x^3 \cos^3\alpha + 3 \operatorname{sen}\alpha \cos^2\alpha\, x^2 y + 3 \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha\, x y^2 + y^3 \operatorname{sen}^3\alpha = 0$$

ordinando si ha:

$$(\cos^3\alpha) x^3 + (\operatorname{sen}^3\alpha) y^3 + 3(\operatorname{sen}\alpha \cos^2\alpha) x^2 y + 3(\operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha) x y^2 + x \operatorname{sen}\alpha - y \cos\alpha = 0$$

dividendo per $(\cos^3\alpha)$:

$$x^3 + (\tan g^3\alpha) y^3 + 3(\tan g\alpha) x^2 y + 3(\tan g^2\alpha) x y^2 + \left(\frac{tg\alpha}{\cos^2\alpha}\right) x - \frac{y}{\cos^2\alpha} = 0$$

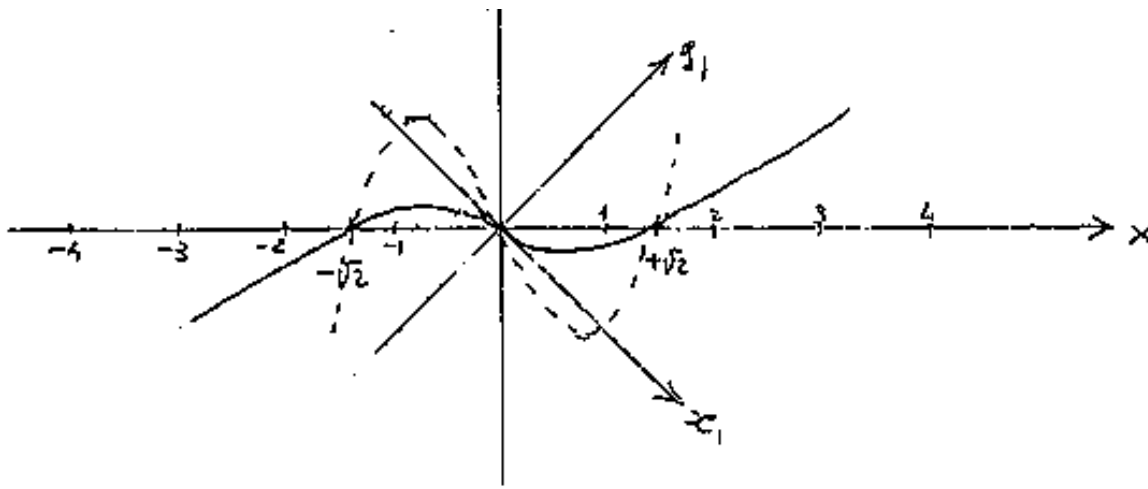
$$\boxed{a_{111} x^3 + a_{222} y^3 + 3 a_{112} x^2 y + 3 a_{122} x y^2 + a_{133} x - a_{233} y = 0}$$

Per visionare un caso concreto poniamo $\alpha = -45°$

$$\boxed{x^3 - y^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - 2x - 2y = 0}$$

per $x = 0$ si ha: $-y^3 - 2y = 0$ da cui: $y = 0$; $y^2 = -2 < \begin{matrix} +\sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i \end{matrix}$

per $y = 0$ si ha $+x^3 - 2x = 0$ da cui $x = 0$; $x = < \begin{matrix} +\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{matrix}$

y

Si hanno tre radici $x_1 = 0$; $x_2 = +\sqrt{2}$; $x_3 = -\sqrt{2}$ ottenibili con la semplice equazione : $x^3 - 2x = 0$. (disegnata a tratto)

PARABOLA CUBICA RUOTATA e TRASLATA

$$(\cos^3\alpha)(x-x_0)^3+(\operatorname{sen}^3\alpha)(y-y_0)^3+3(\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha)(x-x_0)^2(y-y_0)+(3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha)(x-x_0)(y-y_0)^2+\operatorname{sen}\alpha(x-x_0)-\cos\alpha(y-y_0)=0$$

sviluppando si ha:

$$(\cos^3\alpha)(x^3-3x_0x^2+3x_0^2x-x_0^3)+(\operatorname{sen}^3\alpha)(y^3-3y_0y^2+3y_0^2y-y_0^3)+$$

$$+3(\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha)(x^2y-2x_0xy+x_0^2y-x^2y_0+2x_0y_0x-x_0^2y_0)+$$

$$+3(\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha)(xy^2-2y_0xy+xy_0^2-x_0y^2+2x_0y_0y-x_0y_0^2)+$$

$$+(\operatorname{sen}\alpha)(x-x_0)-\cos\alpha(y-y_0)=0$$

ordinando si ha:

$$(\cos^3\alpha)x^3+(\operatorname{sen}^3\alpha)y^3+3(\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha)x^2y+3(\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha)xy^2-$$

$$-3(\cos^3\alpha\, x_0+\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha\, y_0)x^2-3(\operatorname{sen}^3\alpha\, y_0+\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha\, x_0)y^2-$$

$$-6(x_0\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha+y_0\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha)xy+$$

$$+3(x_0^2\cos^3\alpha+2x_0y_0\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha+y_0^2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)x+$$

$$+3(y_0^2\operatorname{sen}^3\alpha+2x_0y_0\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha+x_0^2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha-\cos\alpha)y-$$

$$-\left[\cos^3\alpha\, x_0^3+\operatorname{sen}^3\alpha\, y_0^3+3(\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha)x_0^2y_0+3(\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha)x_0y_0^2-(\operatorname{sen}\alpha)x_0+(\cos\alpha)y_0\right]=0$$

L'equazione generale risulta quindi:

$$\boxed{a_{111}x^3+a_{222}y^3+3a_{112}x^2y+3a_{122}xy^2-3a_{113}x^2-3a_{223}y^2-6a_{123}xy+3a_{133}x+3a_{233}y+a_{333}=0}$$

Il polinomio di 3° grado ora specificato non ha i coefficienti tutti indipendenti fra loro, infatti se dividiamo per a_{111} si ottiene:

$$X^3+(tg^3\alpha)y^3+3(tg\alpha)X^2y+3(tg^2\alpha)Xy^2-3(x_0+y_0)(tg\alpha)X^2-3(y_0 tg^3\alpha+x_0 tg^2\alpha)y^2-$$

$$-6(x_0 tg\alpha+y_0 tg^2\alpha)Xy+3\left(x_0^2+2x_0y_0 tg\alpha+y_0^2 tg^2\alpha+\frac{tg\alpha}{3\cos^2\alpha}\right)X+3\left(y_0^2 tg^3\alpha+2x_0y_0 tg^2\alpha+\right.$$

$$\left.+x_0^2 tg\alpha-\frac{1}{3\cos^2\alpha}\right)y-\left[x_0^3+tg^3\alpha\, y_0^3+3(tg\alpha)x_0^2y_0+3(tg^2\alpha)x_0y_0^2-\frac{tg\alpha}{\cos^2\alpha}x_0+\frac{y_0}{\cos^2\alpha}\right]=0$$

ed anche:

$$X^3 + (\tan^3\alpha) y^3 + 3(\tan\alpha)X^2y + 3(\tan^2\alpha)Xy^2 - 3(X_0 + y_0\tan\alpha)X^2 -$$

$$- 3\tan^2\alpha(X_0 + y_0\tan\alpha)y^2 - 6\tan\alpha(X_0 + y_0\tan\alpha)Xy + \left[3(X_0 + y_0\tan\alpha)^2 + \frac{\tan\alpha}{\cos^2\alpha}\right]X$$

$$+\left[3(\tan\alpha)(X_0 + y_0\tan\alpha)^2 - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right]y - \left[(X_0 + y_0\tan\alpha)^3 - \frac{\tan\alpha}{\cos^2\alpha}X_0 + \frac{1}{\cos^2\alpha}y_0\right] = 0$$

$$\boxed{\underset{a_{111}}{X^3} + \underset{a_{333}}{(\tan^3\alpha)\, y^3} + \underset{a_{113}}{3(\tan\alpha)X^2y} + \underset{a_{133}}{3(\tan^2\alpha)Xy^2}}$$

I primi quattro termini sono indipendenti dalla traslazione, dipendono solo dalla ruotazione ciò consente di determinare: $\boxed{\alpha = \arctan(a_{113}/3)}$

$$-3(X_0 + y_0\tan\alpha)\left[X^2 + (\tan^2\alpha)y^2 + 2X(\tan\alpha)y\right]$$

$$\boxed{-3(X_0 + y_0\tan\alpha)(X + (\tan\alpha)y)^2}$$

I successivi tre termini cioè: il 5°, 6°, 7°, sono tutti moltiplicati per: $-3(X_0 + y_0\tan\alpha)$ e sono un quadrato perfetto.

noto α, queste osservazioni permettono di determinare:

$$\boxed{(X_0 + y_0\tan\alpha) = -a_{113}/3}$$

Solo il termine noto permette di trovare l'altra equazione per determinare: $X_0; y_0$

$$-a_{333} - (-a_{113}/3)^3 = -\frac{\tan\alpha}{\cos^2\alpha}X_0 + \frac{1}{\cos^2\alpha}y_0$$

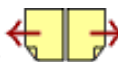
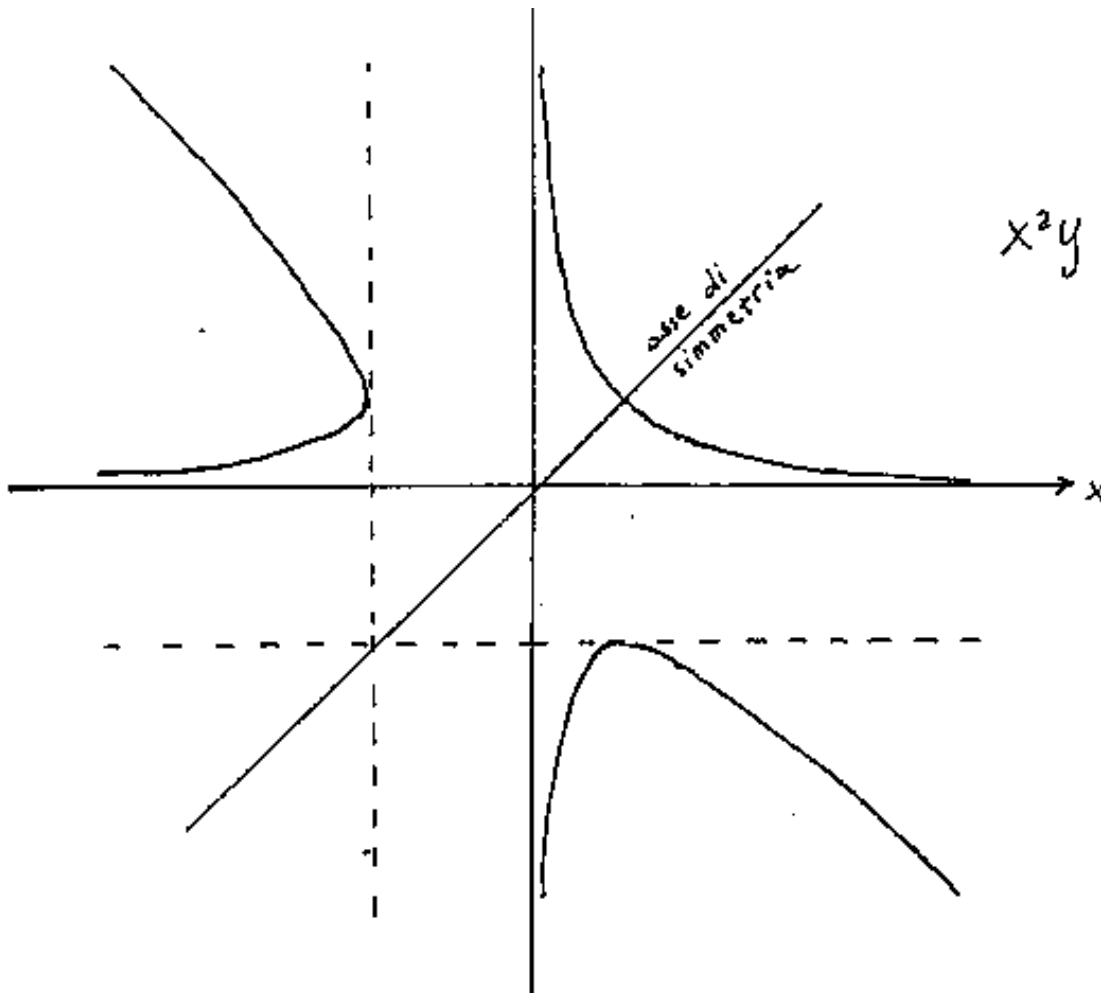
$$\begin{cases} -(\tan\alpha)x_0 + y_0 = \cos^2\alpha\left[\left(\frac{a_{113}}{3}\right)^3 - a_{333}\right] \\ (\tan\alpha)x_0 + \tan^2\alpha\, y_0 = -a_{113}/3 \tan\alpha \end{cases}$$

$$y_0 = \frac{\cos^2\alpha\left[\left(\frac{a_{113}}{3}\right)^3 - a_{333}\right] - a_{113}/3 \tan\alpha}{(1 + \tan^2\alpha)}$$

$$\boxed{y_0 = \cos^4\alpha\left[\left(\frac{a_{113}}{-3}\right)^3 - a_{333}\right] - \left(\frac{a_{113}}{3}\right)\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha}$$

asse di simmetria

$x^2y + xy^2 = K.$

x

Con questi esempi si è voluto esporre il contributo dei termini di 3° grado del polinomio. Prima di continuare diamo un cenno sugli integrali algebrici e le curve razionali.

Integrali algebrici - curve razionali

Abbiamo già visto (vol. I) come razionalizzare un integrale del tipo: $\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$, cioè

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\, x + t$, ove elevando a quadrato

ponendo: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$ ove elevando a quadrato

sparisce ax^2 ed $x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$.

Consideriamo ancora l'integrale:

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$ e generalizziamolo

nella forma: $\boxed{\int f(x,y)\,dx}$

ove la x e la y sono legate da: $\boxed{y^2 - ax^2 - bx - c = 0}$

Proviamoci a scrivere il polinomio nella forma:

$$a_{222}y^3+(3a_{122}X-a_{223})y^2+(3a_{112}X^2-6a_{123}X+3a_{233})y+(a_{111}X^3-3a_{113}X^2+3a_{133}X+a_{333})=0$$

posto $z=\left(y-\frac{a_{122}X+a_{223}}{a_{222}}\right)$ $\qquad y=a_{222}z+a_{122}X-a_{223}$

avremo l'equazione ridotta in z: $z^3+mz+n=0$

ove:

$$m=\left(3a_{112}X^2-6a_{123}X+3a_{233}-3a_{122}X^2+6a_{122}a_{223}X-3a_{223}^2\right)$$

$$n=\left[2(a_{122}X-a_{223})^3-(a_{122}X-a_{223})(3)(a_{112}X^2-2a_{123}X+a_{233})+(a_{111}X^3-3a_{113}X^2+3a_{133}X+a_{333})\right]$$

posto: $A=\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$; $B=\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$

$$z=(A+B)\ \text{reale};\qquad \text{se}:\left(\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}\right)>0$$

come si vede i calcoli divengono complessi.

Lo stesso avviene se proviamo l'intersezione con una retta qualsiasi.

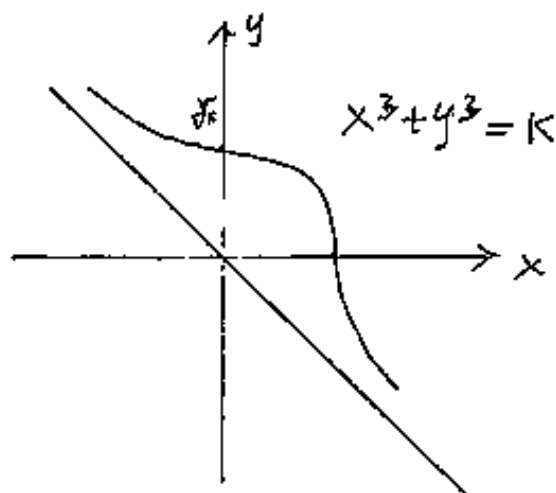
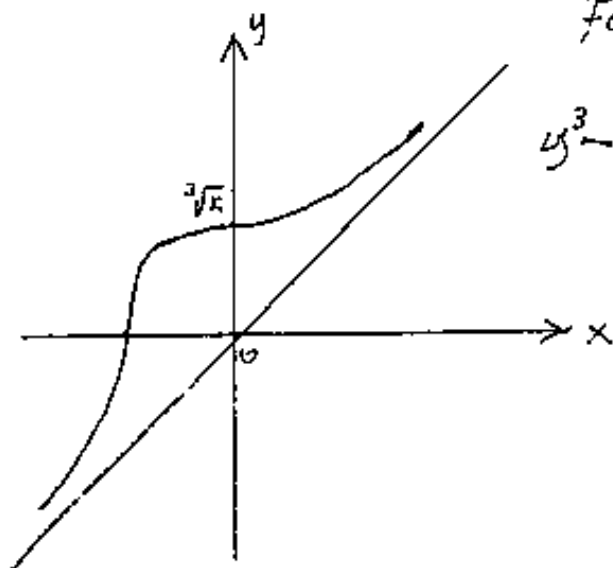
Noi abbiamo accennato al caso di curve simmetriche rispetto alla: $y=x$; in questo caso i coefficienti della x e della y di ugual grado sono

uguali, per cui possiamo scrivere:

$$x^3 + y^3 + 3a_{12}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_2x^2 + a_2y^2 + a_1x + a_1y + a_{11}xy + a_0 = 0$$

facciamo degli esempi:

$y^3 - x^3 = K$

$x^3 + y^3 = K$

ed ancora più in generale:

$$F(x,y) = 0$$

Tutti i punti: (x,y) che soddisfano questa equazione costituiscono <u>una curva algebrica Γ</u>.

Se è possibile esprimere le coordinate di ciascun punto di Γ in funzione di un parametro t (razionalmente) cioè:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

<u>La curva è razionale</u> o, come si dice: <u>è di genere zero</u>.

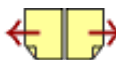
In questo caso è possibile razionalizzare qualunque integrale del tipo: $\int f(x,y)\,dx$ ove: la x e la y sono legate da $F(x,y)=0$, funzione razionale di x ed y; ed essendo: $x = x(t)$ ed $y = y(t)$ avremo: $\int f(x,y) = \int f\left(x(t), y(t)\right) x'(t)\,dt$.

Questo integrale è detto: <u>abeliano</u> o <u>integrale algebrico</u>.

brico.

Le funzioni: $F(x,y)=0$, espresse da polinomi di 2° grado.
sono le coniche e le coniche sono curve razionali.

A noi interessano ora le $F(x,y)=0$ espresse
da polinomi di 3° grado.

Abbiamo già visto le curve di un binomio
simmetrico di 2° grado, vediamo ora un

trinomio simmetrico di 3° grado:

$$x^3 + y^3 = 3a\,xy.$$

questa curva è detta folium di Cartesio,

Per razionalizzare un integrale: $\int f(x,y)\,dx$ qualunque sia la funzione, se la x e la y sono legate dall'espressione del folium di Cartesio, basta porre:

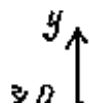
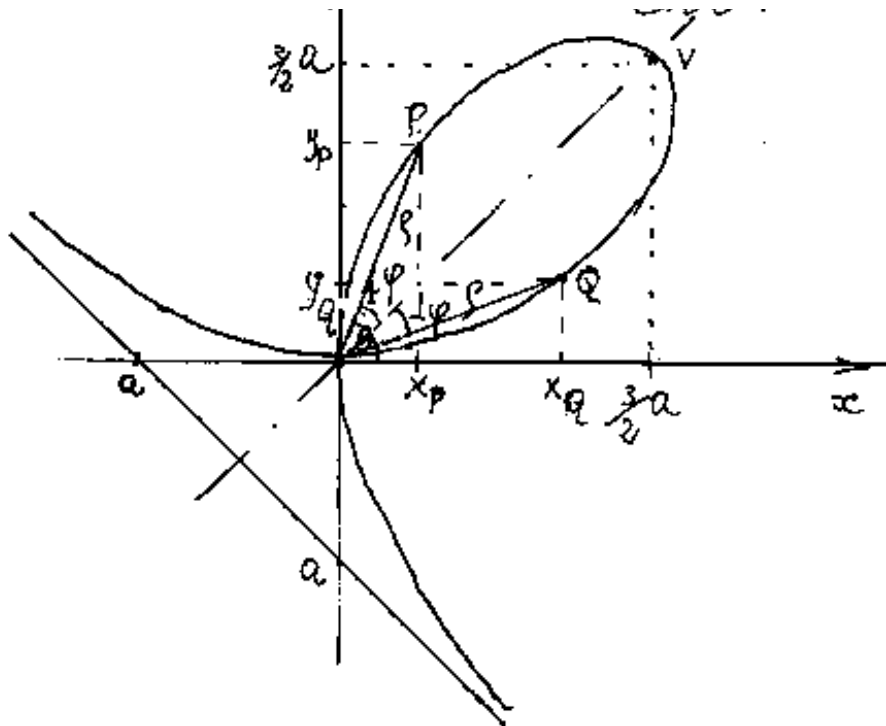
$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad ; \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad ; (t = y/x)$$

IL FOLIUM di CARTESIO

Abbiamo già visto che l'espressione algebrica:

$x^3 + y^3 - 3a\,xy = 0$ è il folium di Cartesio

che tali coordinate possono essere espresse parametricamente da: $x = \frac{3at}{1+t^3}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

La curva può essere espressa in coordinate polari sostituendo $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$

cioè: $\rho^3\cos^3\theta + \rho^3\text{sen}^3\theta = 3a\rho^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

cioè: $\rho = \frac{3a\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\text{sen}^3\theta + \cos^3\theta}$

$$\rho = \frac{\quad}{sen^3\theta + \cos^3\theta}$$

ed anche:

$$\rho = \frac{3}{2}a\left(\frac{sen\,2\theta}{sen^3\theta + \cos^3\theta}\right)$$

Per $\theta = 45°$ $\quad \rho = \frac{3}{2}a \; \frac{1}{\frac{2}{2\sqrt{2}}}$

$$\rho_{45°} = \frac{3a}{\sqrt{2}} = K$$

Poichè la curva è simmetrica rispetto alla retta $y=x$, poniamo: $\theta_1 = (45° + \varphi)$; $\theta_2 = (45° - \varphi)$ sostituendo si ha:

$$\boxed{\rho =} \rho_1 = \rho_2 = \frac{\operatorname{sen}(90 \pm 2\varphi)}{\operatorname{sen}^3(45 \pm \varphi) + \cos^3(45 \pm \varphi)} \tfrac{3}{2} a = \boxed{\frac{3}{2} a \sqrt{2} \, \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos\varphi(1 + 2\operatorname{sen}^2\varphi)}}$$

che può anche scriversi: $\boxed{\frac{3}{2} a \sqrt{2} \, \frac{(2\cos^2\varphi - 1)}{\cos\varphi(3 - 2\cos^2\varphi)} = \rho}$

Tabella delle coordinate e parametro del folium di Cartesio

φ	θ_1	θ_2	$\rho / \frac{3}{2}a$	$X_P/\frac{3}{2}a = Y_Q/\frac{3}{2}a$	$Y_P/\frac{3}{2}a = X_Q/\frac{3}{2}a$	$t_2 = 1/t_1$
0	45°	45°	$\sqrt{2}$	1	1	1
5°	50°	40°	1,377127	0,885200	1,054940	0,83909963
10°	55°	35°	1,272675	0,729976	1,042514	0,70020754
15°	60°	30°	1,118146	0,559073	0,968343	0,57735027
20°	65°	25°	0,934294	0,394850	0,846758	0,46630766
25°	70°	20°	0,739025	0,252761	0,694456	0,36397027
30°	75°	15°	0,544331	0,140883	0,525783	0,26794919
35°	80°	10°	0,356142	0,0618434	0,350731	0,17632698
40°	85°	5°	0,175528	0,0152983	0,1748602	0,08748866

40°	85°	5°	0,175528	0,0152983	0,1748602	0,08748866
45°	90°	0	0	0	0	0
50°	95°	-5°	-0,175763	0,0153188	-0,175095	-0,08748866
55°	100°	-10°	-0,360068	0,062525	-0,354598	-0,17632698
60°	105°	-15°	-0,5656854	0,1464102	-0,5464102	-0,26794919
65°	110°	-20°	-0,81390175	0,27837078	-0,7648175	-0,36397027
70°	115	-25°	-1,1451388	0,48395656	-1,0378482	-0,46630766
90°	135°	-45°	∞	∞	−∞	-1

Notiamo che per ogni valore di φ si ha un solo valore di ρ; ma che lo stesso valore di ρ può aversi da $-\varphi$; per valori di $\varphi > 45$, ($\cos\varphi = -\cos(180-\varphi)$), abbiamo ρ negativi.

Ma utilizzando la simmetria è possibile avere due valori simmetrici per ogni x_1, ciò si ottiene ruotando gli assi X ed Y di $+45° = \pi/4$ rad.

Se ruotassimo di $-45°$ espliciteremmo la $X_2 \equiv -y_1$ avremmo il cappio simmetrico sulla y_2, ma ad ogni X_2 avremmo tre valori (3 reali o 2 immaginari ed uno reale).

Sappiamo che:

$$\operatorname{sen}(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

applichiamo le formule:

$$\begin{cases} X = x_1 \cos(\alpha) - y_1 \operatorname{sen}(\alpha) \ ; \\ Y = y_1 \cos(\alpha) + x_1 \operatorname{sen}(\alpha) \ ; \end{cases} \qquad \begin{cases} X = (x_1 - y_1)\, 1/\sqrt{2} \ ; \\ Y = (x_1 + y_1)\, 1/\sqrt{2} \ ; \end{cases}$$

sostituendo nella:

$$X^3 + Y^3 = 3aXY \qquad \text{si ha:}$$

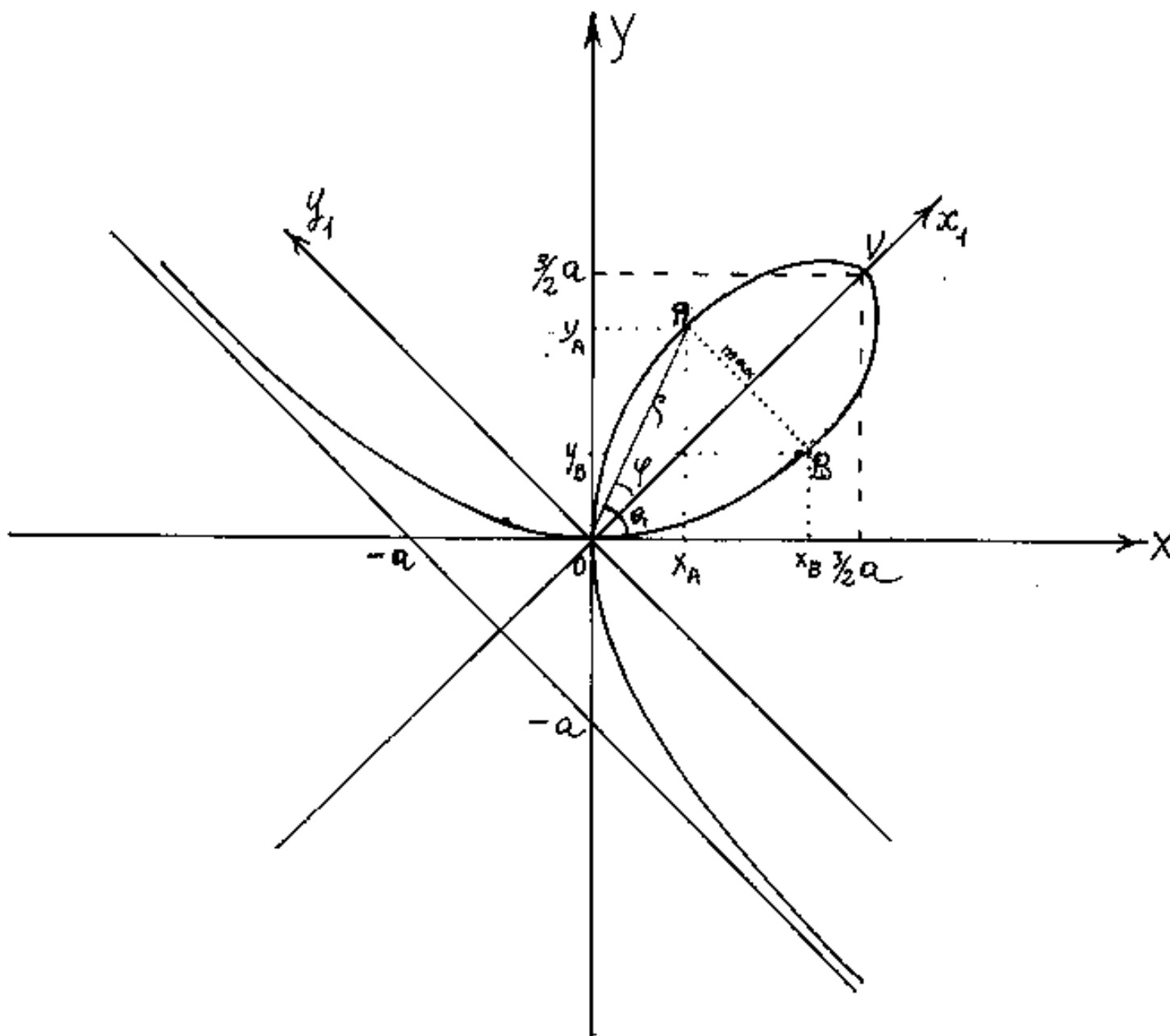
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x_1^3-3x_1^2y_1+3x_1y_1^2-y_1^3\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x_1^3+3x_1^2y_1+3x_1y_1^2+y_1^3\right)=\frac{3a}{2}\left(x_1^2-y_1^2\right)$$

$$2x_1^3+6x_1y_1^2=3\sqrt{2}\,a\left(x_1^2-y_1^2\right)$$

$$\left(x_1^3+3x_1y_1^2\right)=\frac{3a}{\sqrt{2}}\left(x_1^2-y_1^2\right)\ ;\quad \left(\text{posto: } K=\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(3x_1+K\right)y_1^2=x_1^2\left(K-x_1\right)$$

$$\boxed{y_1=x_1\sqrt{(K-x_1)/(K+3x_1)}}$$

<u>abbiamo così esplicitato</u> y_1

$x_1 = \rho\cos(\varphi)$; $y_1 = \rho\,\mathrm{sen}(\varphi)$ sostituendo nella equazione: $y_1 = x_1\sqrt{(K - x_1)/(K + 3x_1)}$ elevato a quadrato si ha:

$$(\rho^2\,\mathrm{sen}^2\varphi) = (\rho^2\cos^2\varphi)(K - \rho\cos\varphi)/(K + 3\rho\cos\varphi)$$

$$(K + 3\rho\cos\varphi)(1 - \cos^2\varphi) = K\cos^2\varphi - \rho\cos^3\varphi$$

$$(K+3\rho\cos\varphi)(1-\cos^2\varphi) = K\cos^2\varphi - \rho\cos^3\varphi$$

$$K - K\cos^2\varphi + 3\rho\cos\varphi - 3\rho\cos^3\varphi = K\cos^2\varphi - \rho\cos^3\varphi$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{K(2\cos^2\varphi - 1)}{3\cos\varphi - 2\cos^3\varphi}$$

$$\boxed{\rho = \frac{K\cos(2\varphi)}{\cos\varphi(3-2\cos^2\varphi)}}$$

Identica a quella già calcolata e che ora rappresenta l'equazione in polari ad assi ruotati.

Eseguiamo <u>la derivata prima</u> della:

$$y_1 = x_1\sqrt{(K-x_1)/(K+3x_1)}$$

avremo:

$$y_1' = (1)\cdot\left(\sqrt{(K-x_1)/(K+3x_1)}\right) + (x_1)\,\frac{[(-1)(K+3x_1)-(K-x_1)(3)]}{2\sqrt{(K-x_1)/(K+3x_1)}}\cdot\frac{1}{(K+3x_1)^2}$$

riducendo allo stesso denominatore:

$$y_1' = \frac{(2)(K-x_1)(K+3x_1) - Kx_1 - 3x_1^2 - 3Kx_1 + 3x_1^2}{2\sqrt{(K-x_1)(K+3x_1)^3}} =$$

$$y_1' = \frac{2K^2 + 6Kx_1 - 2Kx_1 - 6x_1^2 - 4Kx_1}{2\sqrt{(K-x_1)(K+3x_1)^3}} =$$

$$y_1' = \frac{K^2 - 3x_1^2}{\sqrt{(K-x_1)(K+3x_1)^3}}$$

La conoscenza della derivata prima ci consente di calcolare molte caratteristiche del folium di Cartesio.

1) <u>Per $x_1 = 0 \rightarrow y_1' = \pm 1$</u>

Cio' vuol dire che le tangenti nell'origine degli assi sono a ±45° rispetto ad x_1 cioè sono gli assi principali: x ed y. Nell'origine degli assi il folium di

li : X ed Y. Nell'origine degli assi il folium di Cartesio ha un punto doppio a tangenti distinte (a 90°) cioè ha: "un nodo ordinario".

2) Per $x_1 = K$, cioè $x_1 = \overline{OV}$ (nel vertice V);
$y' = \infty$ (si ha una tangente ortogonale ad x_1)

3) Per $x_1 = -K/3 \rightarrow y'_1 = \infty$ (asintoto) $x_1 = -\frac{K}{3} = -\frac{a}{\sqrt{2}}$

4) per $x_1 = +K/3 = \frac{\pm a}{\sqrt{2}} \longrightarrow y' = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1{,}154700538$

Vogliamo ora calcolare la corda massima del cappio e la sua posizione, cioè cerchiamo il massimo ed il minimo relativo di y_1'. Poniamo:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = 0 \qquad \text{cioè: } \frac{K^2 - 3x_1^2}{\sqrt{(K-x_1)\cdot(K+3x_1)^3}} = 0$$

si ha per: $\boxed{x_1 = \frac{K}{\sqrt{3}}}$ cioè: $\boxed{x_1 = a\sqrt{3/2}}$

si può scrivere: $\frac{K}{3}\sqrt{3} = x_1 = (0{,}577350269)K = (1{,}224744871)a$

a cui corrisponde:

$$y_1 = \frac{K}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(K - \frac{K}{\sqrt{3}}\right)/\left(K + 3K/\sqrt{3}\right)} = \frac{K}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}} = \frac{K}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{4\sqrt{3}-6}{6}}$$

$$y_1 = \frac{K}{3}\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \pm K(0{,}227083346)$$

ed anche:

$$y_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{3}-3} = a\sqrt{\sqrt{3}-\frac{3}{2}} = \pm a(0{,}481716522)$$

La corda massima è quindi: $2y_1 = c$

...alla corda massima è quindi: ...

$$\overline{AB} = c = \frac{2}{3} K \sqrt{2\sqrt{3} - 3} = (0,454166692) K$$

$$\overline{AB} = c = 2a \sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{2}} = (0,963433044) a$$

Calcoliamo gli estremi della corda in coordinate polari:

$$tg\,\varphi = \frac{y_1}{x_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1} \Rightarrow \varphi = 21°\,28'\,14'',53\,;$$

$$(45° + \varphi) = \theta_1 = 66°\,28'\,14'',53\,; \quad (45° - \varphi) = 23°\,31'\,45'',47 = \theta_2$$

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = a\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{3} - \frac{3}{2}} = \quad \rho = a\sqrt[4]{3} = a(1,316074013)$$

ed anche: $\rho = K\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\sqrt{3} - \frac{1}{3}} = \boxed{\rho = \frac{K}{3}\sqrt{2\sqrt{3}}}$

$$\rho = K(0{,}620403239)$$

Le coordinate polari sono riferite all'asse principale X per cui le coordinate x ed y saranno:

$$X_A = \rho\cos\theta_1 \; ; \; Y_A = \rho\,\text{sen}\,\theta_1 \quad \text{(coordinate del max)}$$

$$X_B = \rho\cos\theta_2 \; ; \; Y_B = \rho\,\text{sen}\,\theta_2 \quad \text{(coordinate del min)}$$

$$X_A = \frac{X_1 - Y_1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}-3}\right) = a(0{,}525400384) = Y_B$$

$$Y_A = \frac{X_1 + Y_1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}-3}\right) = a(1{,}206650423) = X_B$$

$\left(a = \frac{K}{3}\sqrt{2}\right)$

$$X_A = \frac{K}{3}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{2}}\right) = K(0{,}247676116) = Y_B$$

$$Y_A = \frac{K}{3}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{2}}\right) = K(0{,}568820464) = X_B$$

Per verificare i valori: X_A ed Y_A ; X_B, Y_B dei punti estremi della massima corda del cappio,

applichiamo il teorema del Dini: $\left(y' = \frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right)$,

alla funzione implicita:

$$\boxed{x^3 + y^3 - 3axy = 0}$$

avremo:

$$\frac{-\partial f/\partial x = -(3x^2 - 3ay)}{\partial f/\partial y = (3y^2 - 3ax)} = \boxed{y' = \frac{(ay - x^2)}{(y^2 - ax)}}$$

Imponiamo alla "pendenza" della tangente al folium di Cartesio di essere inclinata rispetto ad X di 45°, cioè: $tang(\alpha) = y' = 1$. per cui:

$$(ay - x^2) = (y^2 - ax)$$

ed anche:

$$\boxed{x^2 + y^2 - ax - ay = 0}$$

equazione di un cerchio ad assi traslati di:

$x_c = \frac{a}{2}$; $y_c = \frac{a}{2}$; $R = a/\sqrt{2}$; può scriversi:

$$\boxed{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}}$$

è un cerchio che passa per l'origine degli assi, ha il centro sull'asse di simmetria: $y = x$ e taglia il folium nei punti estremi A e B della corda massima, infatti sostituendo x_A ed y_A nella sua equazione abbiamo:

$$x_A^2 = \left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}-3}\right)\right]^2 = \frac{a^2}{4}\left(2\sqrt{3}\right)\left(1 - \sqrt{2\sqrt{3}-3}\right)$$

$$-ax_A = \qquad = -\frac{a^2}{4}\left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{2\sqrt{3}-3}\right)$$

$-a\,x_A = \ldots \frac{[illegible]}{4}(\ldots)$ [illegible]

$$y_A^2 = \left[\frac{a}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}-3}\right)\right]^2 = \frac{a^2}{4}\left(2\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2\sqrt{3}-3}\right)$$

$$-a\,y_A = -\frac{a^2}{4}\left(2\sqrt{3}+2\sqrt{2\sqrt{3}-3}\right)$$

sommando

$$x_A^2 + y_A^2 - a\,x_A - a\,y_A = 0$$ (verificato)

e che A è un punto del folium:

$$\left(x_A^3 = 0,14503445\right) + \left(y_A^3 = 1,756889343\right) - \left[\left(x_A = 0,525400384\right)(3)\left(1,206650423 = y_A\right)\right] = 0$$

$$= 1,901923788 - 1,901923788 = 0$$ (verificato)

I raggi di curvatura nel folium di Cartesio

Abbiamo le seguenti equazioni del folium di Cartesio:

1) Implicita negli assi fondamentali X e Y

$$X^3 + y^3 - 3XY = 0$$ (parametro $a = 1$)

oppure:

$$X^3 + y^3 - 3aXy = 0$$

2) Parametrica in t (riferita ad X ed Y)

$$X = \frac{3at}{1+t^3}$$

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

$\left(\frac{y}{X} = t = \operatorname{tg}(x)\right)$

3) coordinate polari $\rho; \theta$ (con $\theta = 0$ su X)

$$\rho = 3a \frac{\operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta)}{\operatorname{sen}^3(\theta) + \cos^3(\theta)}$$

4) ad assi x_1, y_1 ruotati di 45° rispetto X, Y (esplicita y_1)

$$y_1 = X_1 \sqrt{\left(\frac{3a}{\sqrt{2}} - X_1\right) / \left(\frac{3a}{\sqrt{2}} + 3X_1\right)}$$

$$y_1 = X_1\sqrt{\left(\frac{3a}{\sqrt{2}} - X_1\right)\Big/\left(\frac{3a}{\sqrt{2}} + 3X_1\right)}$$

oppure:

$$y_1 = X_1\sqrt{(K - X_1)/(K + 3X_1)}$$ ove: $\left(K = \frac{3}{\sqrt{2}}a\right)$

5) Coordinate polari ρ; φ riferite ad x_1

x_1 = asse di simmetria $\theta = 45° \pm \varphi$

$$\rho = K\frac{\cos(2\varphi)}{3\cos(\varphi) - 2\cos^3(\varphi)}\ ;\quad \rho = \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)\frac{\cos(2\varphi)}{3\cos(\varphi) - 2\cos^3(\varphi)}$$

Le espressioni in coordinate polari sono suscettibili di assumere aspetti diversi operando opportune trasformazioni trigonometriche, che possono essere utili in casi particolari.

6) Parametriche in t_1 (riferite ad x_1, y_1)

$$x_1 = K\frac{(1-t_1^2)}{(1+3t_1^2)} \quad ; \quad y_1 = \frac{Kt_1(1-t_1^2)}{(1+3t_1^2)}$$

Abbiamo le seguenti derivate prime delle espressioni del folium di Cartesio.

1') $$y' = \frac{(ay - x^2)}{(y^2 - ax)}$$ (ottenuta col teorema del Dini)

2') $$\frac{dx}{dt} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3)}$$

3')

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \boxed{\rho' = 3a\left(\frac{\cos(2\theta)\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right) - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\left(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\right)}{\left(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta\right)^2}\right)}$$

(espressione poco agevole)

Calcoliamo ora l'area del cappio,

data la simmetria possiamo calcolare l'area di metà cappio compresa fra l'arco $\overset{\frown}{OV}$ e la retta: $y = x$. Utilizziamo le espressioni parametriche $x = \frac{3at}{1+t^3}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$; ove: $\frac{y}{x} = t$.

lungo la retta $\overline{OV}$, $\frac{y}{x} = 1$ cioè $t = 1$:

Abbiamo visto che l'area espressa da un integrale curvilineo è:

$$A = \int_{\overline{VO}} x^2 dt + \int_{\overset{\frown}{OV}} x^2 dt$$

ma: $\int_{\overline{VO}} x^2 dx = 0$ per cui $A = \int_{\overset{\frown}{OV}} x^2 dt$; $0 \leq t \leq 1$;

$$A = \int_0^1 \left(\frac{3at}{(1+t^3)}\right)^2 dt = 3a^2 \int_0^1 \frac{3t^2 dt}{(1+t^3)^2} = 3a^2 \int_0^1 \frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^2} = 3a^2 \left[\frac{-1}{1+t^3}\right]$$

$$A = 3a^2 \left[-\frac{1}{2} - (-1)\right] \qquad \boxed{A = \frac{3a^2}{2}}$$

Quindi l'area del cappio del folium di

Cartesio è tre volte l'area del triangolo staccato dall'asintoto sugli assi X ed Y.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 3a\,\frac{[1(2-t^3)+t(-3t^2)](1+t^3)^2 - t(2-t^3)2(1+t^3)(3)t^2}{(1+t^3)^4}$$

$$= 3a\,\frac{(2-4t^3)(1+t^3) - 6t^3(2-t^3)}{(1+t^3)^3}$$

$$= 3a\,\frac{2-4t^3+2t^3-4t^6-12t^3+6t^6}{(1+t^3)^3}$$

$$= 3a\,\frac{2t^6-14t^3+2}{(1+t^3)^3} =$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = 6a\,\frac{t^6-7t^3+1}{(1+t^3)^3}}$$

$$\boxed{R = \frac{\left(x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}\right)^{3/2}}{\left(x'_{(t)}\cdot y''_{(t)} - y'_{(t)}x''_{(t)}\right)}}$$

$$R = \frac{\left[\left(3a\frac{(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\right)^2 + \left(3a\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}\right)^2\right]^{3/2}}{\left(3a\frac{(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\right)\left(6a\frac{t^6-7t^3+1}{(1+t^3)^3}\right) - \left(3a\frac{(2t-t^4)}{(1+t^3)^2}\right)\left(18at^2\frac{(-2+t^3)}{(1+t^3)^3}\right)}$$

$$R = \frac{\left(\frac{3a}{(1+t^3)^2}\right)^3\left[1-4t^3+4t^6+4t^2-4t^5+t^8\right]^{3/2}}{\quad}$$

$$r = \frac{\ldots}{\frac{18a^2}{(1+t^3)^5}\left[t^6-7t^3+1-2t^9+14t^6-2t^3+12t^3-12t^6+3t^9\right]}$$

$$R = \left(\frac{3a}{2(1+t^3)}\right)\frac{\left[t^8+4t^6-4t^5-4t^3+4t^2+1\right]^{3/2}}{\left[t^9+3t^6+3t^3+1\right]}$$

Per $X=0$; $t=0$; $R=\frac{3}{2}a=(1{,}5)a$

$X=\frac{3}{2}a$; $t=1$; $R=\frac{3\sqrt{2}}{16}=(0{,}265165)a$

(come già trovato)

Calcoliamo ora il raggio di curvatura con le formule parametriche: $y = tx$; $t = y/x$

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad ; \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3a\frac{(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 3a\,\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3)}$$

Se poniamo $y' = 1$ si ottiene l'equazione di 4° grado:

$$t^4 - 2t^3 + 0 - 2t + 1 = 0$$

che risulta soddisfatta per:

$t_1 = 2{,}29663 = tg(66°28'14'',52)$
$t_2 = 0{,}4354206 = tg(23°31'45'',48)$
} tangenti degli argomenti θ dei punti estremi della corda massima.

$t_3 =$
$t_4 =$
} $= -0{,}3660254 \pm i(0{,}9306049)$ } radici immaginarie.

Verificata la formula, calcoliamo le derivate

verificata la formula, calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3a\,\frac{(-6t^2)(1+t^3)^2-(1-2t^3)\,2(1+t^3)\,3t^2}{(1+t^3)^{\not 4\,3}}$$

$$= 18a\,t^2\left(\frac{(-1)(1+t^3)-(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\right) =$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = 18a\,t^2\,\frac{(-2+t^3)}{(1+t^3)^3}}$$

Calcoliamo il raggio di curvatura in funzione di x_1 e con modulo K.

$$R = \frac{(1 + y_1'^2)^{3/2}}{y_1''}$$

Sostituiamo:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{(K^2 - 3X_1^2)}{\sqrt{(K-X_1)(K+3X_1)^3}}\right)^2\right]^{3/2}}{\left[\frac{-4K^3}{\sqrt{(K-X_1)^3 \cdot (K+3X_1)^5}}\right]}$$

$$R = \left(\frac{\left[(K-X_1)(K+3X_1)^3 + (K^4 - 6K^2X_1^2 + 9X_1^4)\right]^{3/2}}{(K-X_1)(K+3X_1)^{\frac{3}{3}}\sqrt{(K-X_1)(K+3X_1)^3}}\right)\left(\frac{(K-X_1)(K+3X_1)\sqrt{(K-X_1)(K+3X_1)^3}}{-4K^3}\right)$$

$$R = \frac{\left[(K-X_1)(K^3 + 9K^2X_1 + 27KX_1^2 + 27X_1^3) + (K^4 - 6K^2X_1^2 + 9X_1^4)\right]^{3/2}}{(-4K^3)(K+3X_1)^2}$$

$$R = \frac{\left[K^4 + 9K^3X_1 + 27K^2X_1^2 + 27KX_1^3 - K^3X_1 - 9K^2X_1^2 - 27KX_1^3 - 27X_1^4 + K^4 - 6K^2X_1^2 + 9X_1^4\right]^{3/2}}{(-4K^3)(K+3X_1)^2}$$

$$R = \frac{\left[2K^4 + 8K^3X_1 + 12K^2X_1^2 - 18X_1^4\right]^{3/2}}{(-4K^3)(K+3X_1)^2}$$

$$R = \frac{2\sqrt{2}\left[K^4 + 4K^3X_1 + 6K^2X_1^2 - 9X_1^4\right]^{3/2}}{4(-K^3)(K+3X_1)^2}$$

$$R = \frac{\left[K^4 + 4K^3x_1 + 6K^2x_1^2 - 9x_1^4\right]^{3/2}}{-\sqrt{2}\,K^3(K+3x_1)^2}$$

$$R = \frac{\ldots}{-\sqrt{2}\,K^3(K+3x_1)^2}$$

Per $x_1 = 0 \rightarrow \quad R = \frac{K}{\sqrt{2}} = 0{,}707K; \quad R = \frac{3}{2}a \quad ; R = (1{,}5)a$

Per $x_1 = \overline{OV} = K \quad R = -\frac{K}{8} = (0{,}125)K; \quad R = \frac{3\sqrt{2}}{16}a \quad ; R = 0{,}265165a$

Agli estremi della corda massima del cappio $y_1' = 0$;

$x_1 = \frac{K}{\sqrt{3}} = 0{,}577350269 \; ; \quad R = K\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6\sqrt{3}}} = (0{,}847486585)K = a\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{3}}\right) =$

$= R = (1{,}797790535)a$

Facciamo la derivata seconda da:

$$y_1' = \frac{(K^2 - 3X_1^2)}{\sqrt{(K-X_1)\cdot(K+3X_1)^3}}$$

$$y_1'' = \left[\left(-6X\sqrt{(K-X_1)(K+3X_1)^3}\right) - (K^2-3X_1^2)\,\frac{(-1)(K+3X_1)^3+(K-X_1)(3)(K+3X_1)^2(3)}{2\sqrt{(K-X_1)(K+3X_1)^3}}\right]\frac{1}{(K-X_1)(K+3X_1)^3}$$

$$y_1'' = \frac{-12X(K-X_1)(K+3X_1)^3 - (K^2-3X_1^2)(K+3X_1)^2(9(K-X_1)-(K+3X_1))}{2\sqrt{(K-X_1)^3\cdot(K+3X_1)^3}\;(K+3X_1)^3}$$

$$y_1'' = \frac{-12X_1(K-X_1)(K+3X_1) - (K^2-3X_1^2)(8K-12X_1)}{2\sqrt{(K-X_1)^3\cdot(K+3X_1)^5}}$$

$$y_1'' = \frac{-6X_1(K^2+2KX_1-3X_1^2) - (K^2-3X_1^2)(4K-6X_1)}{\sqrt{(K-X_1)^3\cdot(K+3X_1)^5}}$$

$$y_1'' = \frac{-6K^2X_1 - 12KX_1^2 + 18X_1^3 - 4K^3 + 6K^2X_1 + 12KX_1^2 - 18X_1^3}{\sqrt{(K-X_1)^3(K+3X_1)^5}}$$

$$y'' = \frac{-4K^3}{\ldots}$$

$$y_1'' = \frac{-4K^3}{\sqrt{(K-x_1)^3 \cdot (K+3x_1)^5}}$$

E' bene ricordare che queste derivate sono state ricavate dalla forma esplicitata relativa agli assi x_1; y_1 ruotati di $45° = \pi/4$ rispetto agli assi principali x ed y.

Correlazioni fra gli elementi del folium di Cartesio

L'equazione ordinaria del folium di Cartesio è l'equazione implicita:

$$X^3 + Y^3 - 3aXY = 0$$

Mediante una rotazione di $45° = \pi/4$ degli assi X ed Y che abbiamo chiamato x_1 ed y_1 nella posizione ruotata, si è potuto esplicitare la variabile dipendente ottenendo l'equazione esplicita:

$$y_1 = x_1 \sqrt{(K - x_1)/(K + 3x_1)} \quad ; \left(K = \frac{3a}{\sqrt{2}}\right)$$

per ogni valore di x_1 da $-\infty$ a $+\infty$ si ha:

$$-\infty \leq x_1 < \left(-\frac{K}{3} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \quad ;$$

$$x_1 = \left(-\frac{K}{3} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \quad ; \quad (\text{asintoto}) \quad (y_1 = \pm\infty)$$

$$\left(-\frac{K}{3} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\right) < x_1 < 0 \quad ; (\text{valori simmetrici}) \quad \begin{matrix} -\infty < y_1 < 0 \\ +\infty > y_1 > 0 \end{matrix}$$

$$x = 0 \quad ; \quad y_1 = 0 \quad (\text{punto doppio: nodo ordinario})$$

$$0 < x_1 < \left(\frac{K}{\sqrt{3}} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) a\right)$$ (valori simmetrici) $$0 \lessgtr y_1 \lessgtr \frac{K}{3}\sqrt{2\sqrt{3}-3}$$

$$x_1 = \left(\frac{K}{\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \quad ; \quad y_1 = \begin{cases} +\frac{K}{3}\left|\sqrt{2\sqrt{3}-3}\right| & \text{(massimo)} \\ -\frac{K}{3}\left|\sqrt{2\sqrt{3}-3}\right| & \text{(minimo)} \end{cases}$$

$$\left(\frac{K}{\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}\right) < x_1 < \left(K = \frac{3}{2}a\right)$$ (valori simmetrici) max $>$ $y_1 \geq 0$, min $>$ $y_1 \leq 0$

$$x_1 = \left(K = \frac{3}{2}a\right) \qquad y_1 = 0$$ (limite del cappio)

Vogliamo ora correlare x_1 ed y_1, con X, Y.

Notiamo che per ogni valore di x_1 cui corrispondono le due ordinate: $+y_1$ e $-y_1$; indicheremo con A e B i due estremi di una corda generica: $A \equiv (x_1 ; +y_1)$; $B \equiv (x_1 ; -y_1)$. Avremo:

$$X_A = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad Y_A = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}$$

$$X_B = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad Y_B = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}$$

Dati x_1 ed y_1 si trovano X ed Y.

inversamente:

$$x_{1_A} = \frac{X_A + Y_A}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y_{1_A} = \frac{Y_A - X_A}{\sqrt{2}}$$

$$x_{1_B} = \frac{X_B + Y_B}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y_{1_B} = \frac{Y_B - X_B}{\sqrt{2}}$$

Esiste un valore limite della X che è

Esiste un valore limite della X che è maggiore di: $X = \frac{3}{2}a$, e che si ha quando l'ordinata y è tangente il cappio.

Per calcolare questo valore di X limite a destra delle Y reali, basta cercare la $y'_1 = 1$

cioè:

$$y'_1 = \frac{(K^2 - 3x_1^2)}{\sqrt{(K - x_1)(K + 3x_1)^3}} = 1 \qquad (y'_1 f(K))$$

$$y'_1 = \frac{(\frac{9}{2}a^2 - 3x_1^2)}{\sqrt{(\frac{3}{\sqrt{2}} - x_1)(\frac{3}{\sqrt{2}} + 3x_1)^3}} = 1 \qquad (y'_1 f(a))$$

$$y_1' = \frac{\frac{3}{2}(3a^2 - 2x_1^2)}{\sqrt{\left(\frac{3a - \sqrt{2}x_1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3a + 3\sqrt{2}x_1}{\sqrt{2}}\right)^3}} = \frac{3(3a^2 - 2x_1^2)}{2\left(\frac{3(a+\sqrt{2}x_1)}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\left(\frac{3a - \sqrt{2}x_1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3(a+\sqrt{2}x_1)}{\sqrt{2}}\right)}}$$

$$\boxed{y_1' = \frac{(3a^2 - 2x_1^2)}{\sqrt{3(3a - \sqrt{2}x_1)(a + \sqrt{2}x_1)^3}}} = 1$$

cioè:

$$(3a^2 - 2x_1^2)^2 = 9a^4 + 24\sqrt{2}\,a^3x_1 + 36a^2x_1^2 - 12x_1^4$$

infine l'equazione:

$$16x_1^4 - 48a^2x_1^2 - 24\sqrt{2}\,a^3x = 0$$

che semplificata diventa:

$$(x_1)\left(x_1^3 - 3a^2x_1^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}a^3\right) = 0$$

sapevamo la risoluzione $x_1 = 0$.

l'equazione di terzo grado ammette una sola radice reale

$$x_1 = \left(\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)a$$

$$\boxed{x_1 = (2,01336 0766)\,a}$$

od anche:

$$x^{\circ}_1 = \left(\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{3}\right)K \quad ; \quad x_1 = (0,949107361)\,K$$

l'espressione di x_1 può scriversi:

$$x_1 = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt[3]{2}\right)a \text{ ; od anche } x_1 = \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}+\sqrt[6]{2}\right)a$$

$$y_1 = x_1\sqrt{(K-x_1)/(K+3x_1)} = x_1\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}a-x_1\right)/\left(\frac{3}{\sqrt{2}}a+3x_1\right)}$$

$$y_1 = \left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{3}\right)K = (0,10916)\,K \;=\; y_1 = \left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)a = (0,22156333)\,a$$

Costruzione grafica approssimata del foglio di Cartesio.

Tracciati gli assi principali X; Y e gli assi ruotati di 45°: x_1 ed y_1 dal centro O si prendo su x_1 un segmento $\overline{OV} = K$ che sarà la lunghezza del cappio.

Con apertura di compasso pari a $\frac{7}{9}\overline{OV} = R = \frac{7}{9}K$ si riporta su X il segmento $\overline{OC} = R = \frac{7}{9}K$. quindi centro in C e raggio R si traccia un arco di cerchio che vada dall'ordinata $x_1 \cong -0{,}2K$. all'ordinata $x_1 \cong 0{,}92\,K$.

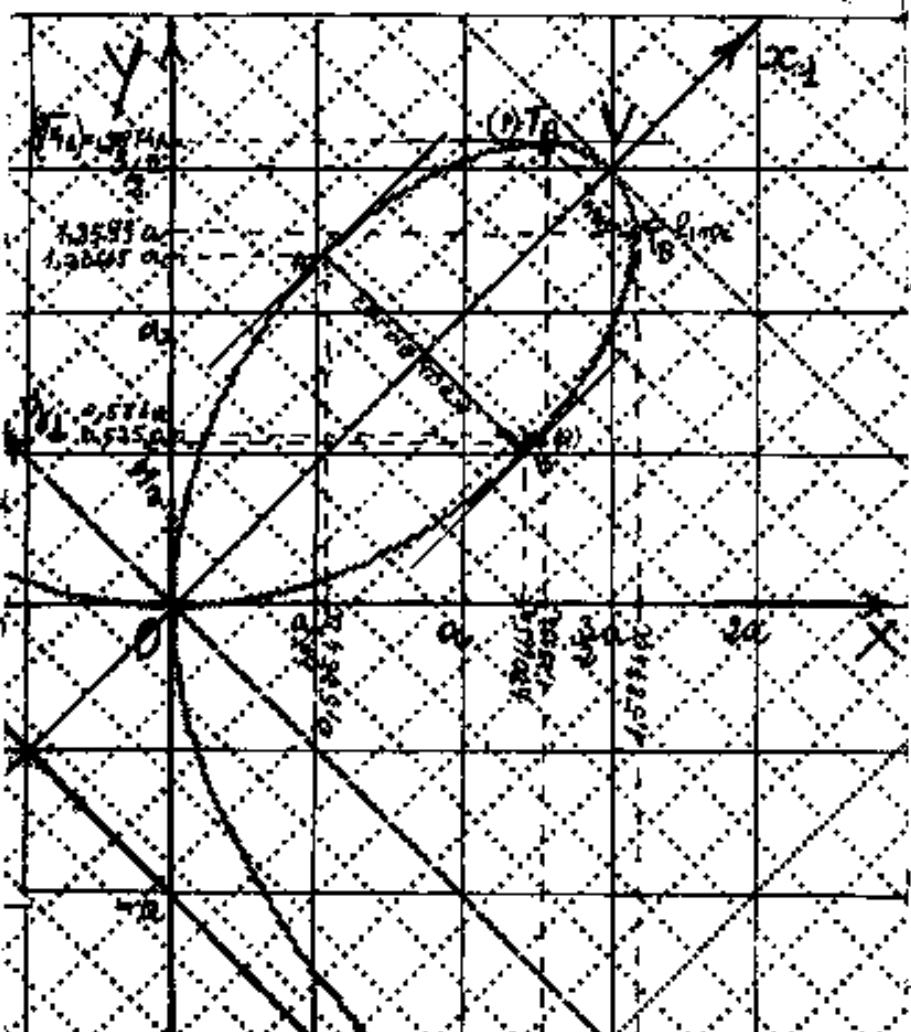
Analogamente con centro C_1 in Y; $(OC_1 = R)$ quindi con raggio $\approx 0.16\,K$ si raccorano i due archi di cerchio facendo centro su x_1 ove si intersecano i raggi che delimitano gli archi.

gli errori.

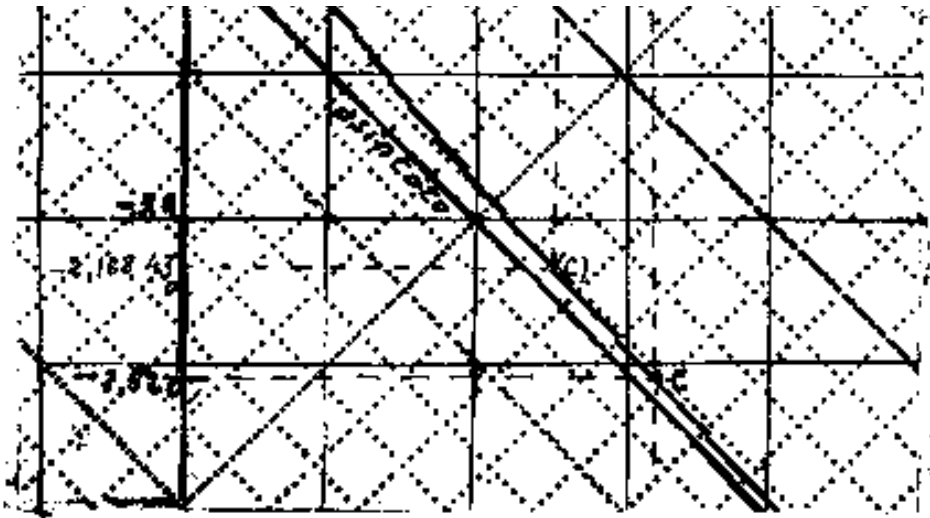
Diamo una tabella degli errori ove x_1 ed y_1 sono le coordinate per $K=1$, ed y_c le ordinate del cerchio.

x1/K	y1/K	Yc/K	y1-Yc/K
0.10	0.08321	0.08443	-.00122
0.20	0.14142	0.14462	-.00320
0.30	0.18209	0.18654	-.00445
0.40	0.20889	0.21321	-.00432
0.50	0.22361	0.22620	-.00259
0.60	0.22678	0.22620	0.00058
0.70	0.21776	0.21320	0.00456
0.80	0.19403	0.18652	0.00751
0.90	0.14796	0.14459	0.00337

Naturalmente vi sono costruzioni più precise. questa è molto semplice.

Per una visione degli elementi calcolati ripro= duciamo un grafico del folium di Cartesio ove nelle direzioni X ed Y si è sovrapposta una quadret= tatura di lato $a/2$, mentre nelle direzioni x_1 ed y_1 si è sovrapposta una quadrettatura di lato $(K/10)$, in tal modo si possono verificare i valori numerici del= le grandezze misurate in modulo "a" ed in modulo K.

Si riporta anche una tabella dei raggi di curvatura (in funzione di x_1/k)

TABELLA

x_1/k	R/k	R/a
0.-	.707106	1.5
.1	.737438	1.564344
.2	.796297	1.689203
.3	.853172	1.809852
.4	.887621	1.882929
.5	.883966	1.875176
.6	.830615	1.762001
.7	.720994	1.52946
.8	.555648	1.178708
.9	.346225	.734455
.91	.323824	.686934

[illegible]	[illegible]	[illegible]
.91	.323824	.686934
.92	.301315	.639186
.93	.278752	.591323
.94	.256192	.543466
.95	.233699	.495750
.96	.211342	.448324
.97	.189200	.401355
.98	.167361	.355027
.99	.145924	.309551
1.00	.125000	.265165

Per simmetria, al punto di tangenza della X lim. corrisponde una Y_{max} ove l'ascisso è tangente.
Poiché Y_{max} e X_{max} (o lim) sono gli estremi di una corda che indicheremo con T_A e T_B determinata da:

$$x_{1 \, \widehat{T_A}} = x_{1 \, \widehat{T_B}} = \left(\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)a = \left(\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{3}\right)K$$

ove:

$$y_{1 \, \widehat{T_A}} = +\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)a = \left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{3}\right)K$$

$$y_{1 \, \widehat{T_B}} = -\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)a = -\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{3}\right)K$$

ed in coordinate $X;Y$ avremo:

per $X=(\sqrt[3]{2})a \rightarrow \boxed{Y_{max} = Y_{lim} = (\sqrt[3]{4})}$ (Y_P)

però per $X=(\sqrt[3]{2})_a$ si ha anche un Y_Q ed un Y_C;
sostituendo $X=(\sqrt[3]{2})_a$ nella: $X^3+Y^3-3aXY=0$; si ha:
$\left(2+Y^3-3\sqrt[3]{2}\,Y=0\right)$ che divisa per: $(Y-\sqrt[3]{4})$ ci dà l'equazione di 2° grado: $\boxed{Y^2+(\sqrt[3]{4})Y-\sqrt[3]{2}}=0$

$$y = \frac{-\sqrt[3]{4}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt[3]{16}}{4} + \sqrt[3]{2}} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2}} =$$

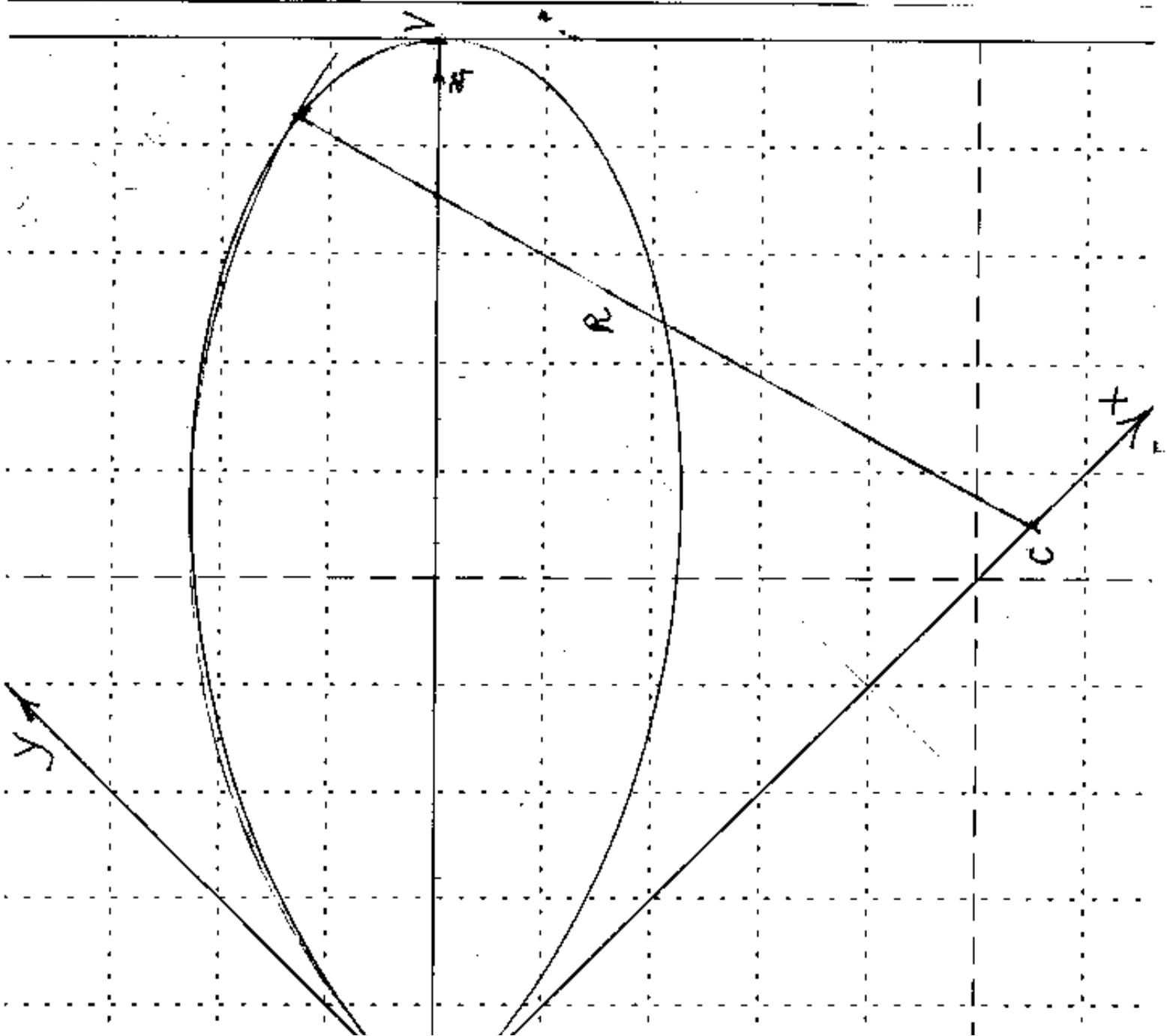
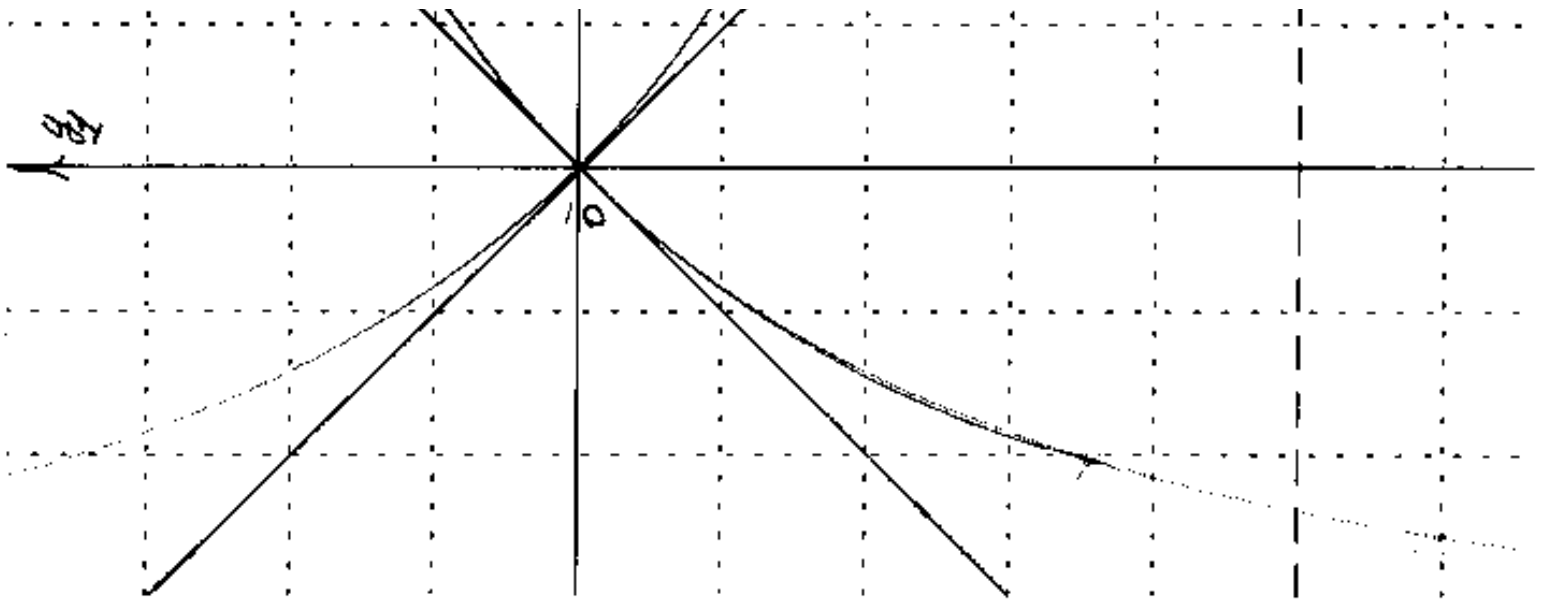
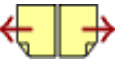
$$= \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt{1+2} = \boxed{y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}}$$

quindi le tre radici sono:

$$y_{max} = y_{\underline{p}} = \left(\sqrt[3]{4}\right)a = +(1,587401052)\,a$$

$$y_{\underline{q}} = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)a = +(0,581029111)\,a$$

$$y_{\underline{c}} = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)a = -(2,168430163)\,a$$

Su un disegno eseguito col computer si è sovrapposto un arco della costruzione approssimata per evidenziare l'errore.

La simmetria ed i moduli unitari

Abbiamo già dato la definizione di simmetria nel I° Vol. ed accennato al concetto di equi=
librio, così connesso con la simmetria.
Nel IV Vol abbiamo trattato la simmetria nei cristalli, ed infine nel trattare il folium di cartesio abbiamo detto: " utilizzando la sim=
metria ..." (sottointeso: equazione o curva simmetrica)
Poiché l'utilizzazione della simmetria con=
sente, in genere, di semplificare e di abbassare il n° delle incognite nei problemi di matematica applicata, in particolare in scienza delle costru=
zioni. In questa sede, evidenziando l'esperienza del folium di Cartesio, vogliamo trattare della simmetria utilizzata nelle equazioni e nelle curve.
Consideriamo l'equazione del folium di

Cartesio riferita agli assi X ed Y:

$$X^3 + Y^3 - 3aXY = 0$$

anche se priva del termine noto e già in forma ridotta è pur sempre una equazione di 3° grado, e se tracciamo un retta parallela all'asse y, o all'asse X i punti comuni sono sempre tre, (tutti e tre reali e diversi, tre reali di cui due uguali, uno solo reale)

Se notiamo che una curva qualsiasi ammette un'asse di simmetria, se assumiamo tale asse come ascisse, le ordinate (essendo simmetriche) dipenderanno da una radice quadrata, l'equazione di 3° grado diventa di secondo; nel caso del folium:

$$y_1 = x_1 \sqrt{\frac{(K - x_1)}{(K + 3x_1)}}$$

e se tracciamo rette parallele ad y_1 i punti comuni sono sempre due: (due reali, o due immaginari).

(Cercheremo di utilizzare la simmetria anche per altre curve). Per quanto concerne i moduli, abbiamo visto (per il folium di Cartesio) che $\overline{OV} = K = \frac{3a}{\sqrt{2}}$

si noti che il raggio di curvatura nell'origine è $\frac{3}{2}a$, $(= \frac{K}{\sqrt{2}})$; nel vertice è: $K/8$, $(= \frac{3}{16}a\sqrt{2})$, anche la scelta del modulo può semplificare.

Un'altro modo di utilizzare la simmetria per le curve è quello di rappresentarle in coordinate polari, assumendo come origine

coordinate polari, assumendo come origine degli angoli (argomenti), l'asse di simmetria; punti simmetrici avranno lo stesso raggio (modulo) e l'argomento (angolo), dello stesso valore di segno opposto. Ciò può ulteriormente semplificare se consideriamo: $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ per es. la trisettrice di MacLaurin: $\rho = \frac{1}{\cos(\theta/3)}$; che tratteremo.

Evoluta ∃

Dicesi evoluta di una curva piana Γ il luogo dei centri di curvatura di Γ.
Se ∃ è la curva evoluta di Γ, Γ è la curva evolvente di ∃.

Poiché ogni raggio di curvatura R, in un punto P di Γ, giace su una retta che è normale in P a Γ, ma il centro C di curvatura, che giace su ∃, è anche il punto di tangenza delle rette $\overline{PC} = R$ sulla curva ∃; la curva evoluta ∃ può considerarsi l'inviluppo delle rette normali all'evolvente Γ.
L'evoluta ∃ è detta anche sviluppata, l'evolvente Γ è detta anche sviluppante.

Siano: $x_{(t)}$; $y_{(t)}$ le coordinate parametriche di Γ. L'equazione delle rette normali a Γ nel punto $(x_{(t)} ; y_{(t)})$ è:

$$f(x,y,t) \equiv (x - x_t)\,x'_{(t)} + (y - y_{(t)})\cdot y'_{(t)} = 0$$

$$f'(x,y,t) \equiv \left(x\,x''_{(t)} - x'^2_{(t)} - x_{(t)}x''_{(t)} + y\,y''_t - y'^2_{(t)} - y_{(t)}\,y''_{(t)} = 0\right)$$

$$f'_{(t)} \equiv (x - x_{(t)})\,x''_{(t)} + (y - y_{(t)})\,y''_t = x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}$$

dalla f ricaviamo: $-\left(\frac{y - y_{(t)}}{x_t}\right) = (x - x_t)$;

che sostituiamo nella $f'_{(t)}$:

$$(y - y_t)\left[y''_{(t)} - \frac{y'_{(t)}\,x''_{(t)}}{x'_{(t)}}\right] = \left(x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}\right)$$

ed otteniamo:

$$\left(y - y_{(t)}\right) = \left(\frac{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}}{y''_{(t)} x'_{(t)} - y'_{(t)} x''_{(t)}}\right) x'_{(t)}$$

ed analogamente:

$$\left(x - x_t\right) = -\left(\frac{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}}{y''_{(t)} x'_{(t)} - y'_{(t)} x''_{(t)}}\right) y'_{(t)}$$

ma noi sappiamo che:

$$\left(\frac{\left(x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}\right)^{3/2}}{y''_{(t)} x'_{(t)} - y'_{(t)} x''_{(t)}}\right) = R_{(t)}$$

è il raggio di curvatura di Γ nel punto $(x_{(t)}; y_{(t)})$

perciò:

$$\begin{cases} x = x_{(t)} - \left(\dfrac{R_{(t)}}{\sqrt{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}}}\right) y'_{(t)} \\[2ex] y = y_{(t)} + \left(\dfrac{R_{(t)}}{\sqrt{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}}}\right) x'_{(t)} \end{cases}$$

sono le coordinate parametriche della curva $\exists$

($\exists$ = Evoluta di Γ)

Possiamo anche scrivere:

(essendo: $\dfrac{y'_{(t)}}{\sqrt{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}}} = \dfrac{d y_{(t)}}{d s_{(t)}} = \operatorname{sen} \alpha$; $\dfrac{x'_{(t)}}{\sqrt{x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}}} = \dfrac{d x_{(t)}}{d s_{(t)}} = \cos \alpha$;)

$$\begin{cases} x = x_{(t)} - R_{(t)} \dfrac{dy_{(t)}}{ds_t} \\ y = y_{(t)} + R_{(t)} \dfrac{dx_{(t)}}{ds_{(t)}} \end{cases}$$

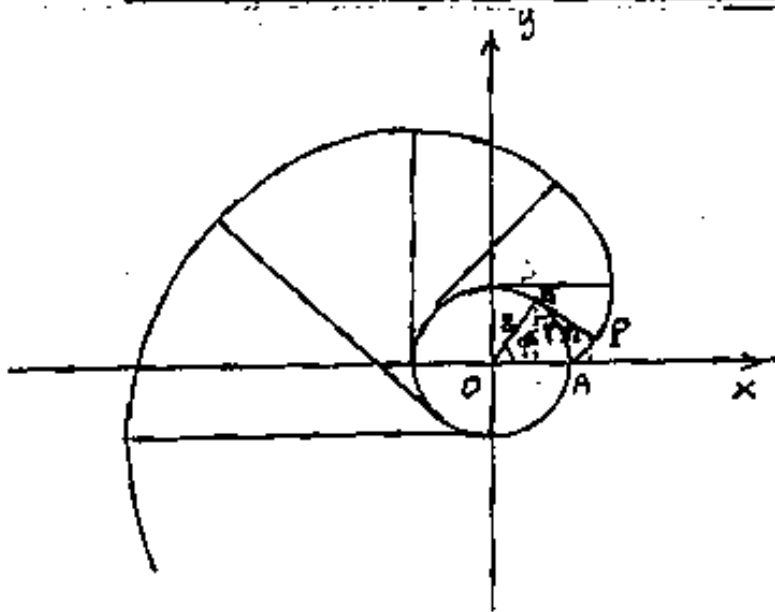
$$\begin{cases} x_c = R_{(p)} \cos(\widehat{x_{(p)} n_{(p)}}) + x_{(p)} \\ y_c = R_p \cos(\widehat{y_{(p)} n_{(p)}}) + y_{(p)} \end{cases}$$

Ove si nota che la distanza fra il punto P di Γ da cui parte la normale ed il punto C di ∃ ove tale normale diventa tangente ad ∃ è appunto il raggio R_p di curvatura in P.

Con ciò resta dimostrato che il luogo geometrico dei centri di curvatura di una linea Γ (evoluta o sviluppata di Γ) è anche l'inviluppo delle rette normali a Γ.

Cerchiamo ora il problema inverso: data l'evoluta trovare l'evolvente. Vi sono curve che hanno sia l'evoluta, sia l'evolvente.

Nel cerchio l'evoluta si riduce al suo centro.

L'Evolvente di un Cerchio

sia r il raggio del cerchio, e sia $\overline{OB} = r$, un raggio che ha ruotato dell'angolo φ dalla posizione iniziale $\overline{OA}$.

Sulla perpendicolare di $\overline{OB}$ da B riportiamo il segmento $\overline{BP}$ pari all'arco $\widehat{BA}$; ($\overline{BP} = \widehat{BA}$); il punto P è un punto dell'evolvente del

BA ; (BP – BA) ; il punto è un punto ...

cerchio. $\overline{BP} = r\varphi$, avremo:

$$x = r\left[\cos\varphi + \varphi \operatorname{sen}\varphi\right]$$

$$y = r\left[\operatorname{sen}\varphi - \varphi\cos\varphi\right]$$

Equazioni parametriche dell'evolvente di un cerchio

elevando a quadrato e sommondo si ha:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = r^2 [1 + \varphi^2]$$

che è la legge pitagorica : $\rho^2 = r^2 + (r\varphi)^2$

Costruzione dell'evolvente di un cerchio

Se avvolgiamo dello spago su un cilindro, ed all'estremo libero dello spago poniamo una punta scrivente, messo il cilindro in verticale su un foglio, svolgiamo, tenendo teso lo spago e con la punta scrivente sul foglio, si traccerà: L'evolvente (le spire di spago non debbono sovrapporsi perché varierebbero il raggio del cilindro)

a evoluta

Punta scrivente

C

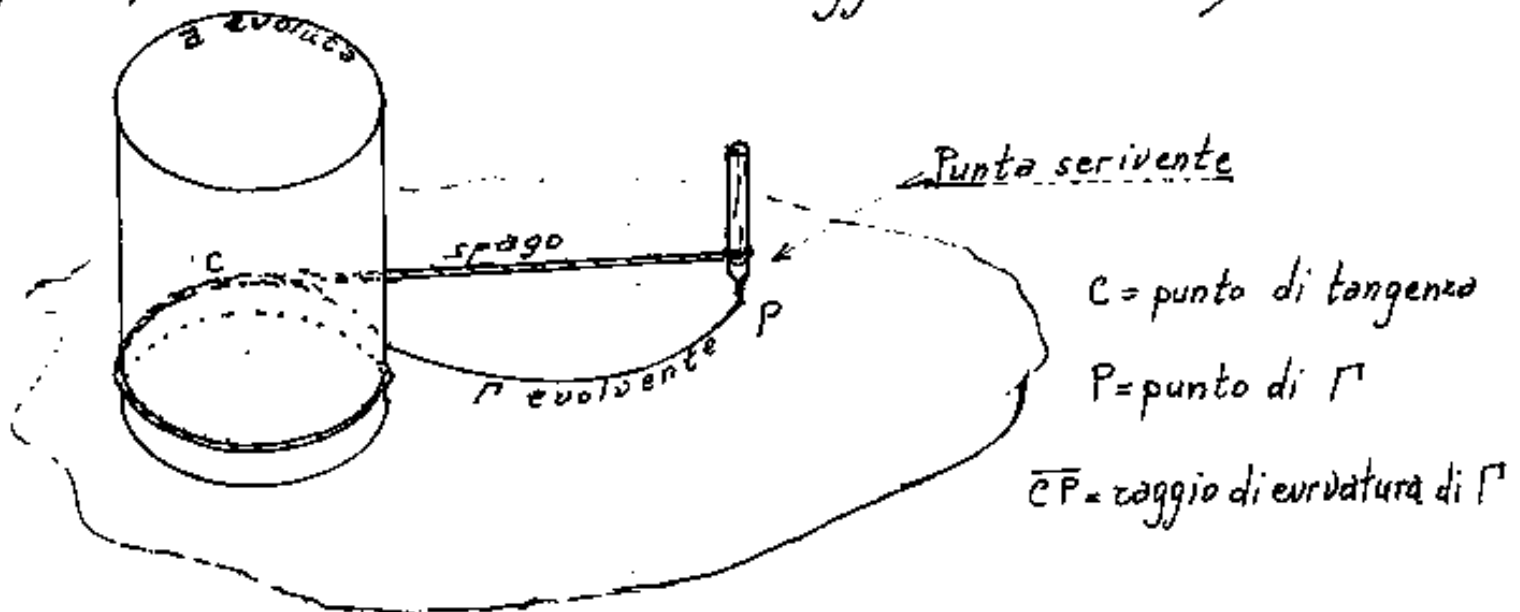
spago

P

Γ evolvente

C = punto di tangenza

P = punto di Γ

$\overline{CP}$ = raggio di curvatura di Γ

L'evoluta e l'evolvente sono curve importan=tissime per la costruzione dei denti degli in=granaggi meccanici. (V. Speluzzi Tessarotto - Disegno di Macchine pag. 746 § 169 ed Hoepli)

(Per l'evoluta delle coniche Cfr II Vol)

Rettificazione dell'evoluta

Sia R il raggio di curvatura di una curva Γ e sia ∃ la sua evoluta.

Abbiamo già visto che l'equazione dell'evoluta in parametriche può scriversi:

$$\begin{cases} X = x_{(t)} - R_{(t)} \dfrac{d y_{(t)}}{d s_{(t)}} \\ Y = y_t - R_t \dfrac{d x_{(t)}}{d s_{(t)}} \end{cases}$$

ove $(x_{(t)} ; y_{(t)})$ è un generico punto di Γ ed R il suo raggio di curvatura. Se cambiamo parametro, (ciò è possibile data la genericità di: $(x = x_{(t)} ; y = y_{(t)})$) avremo, prendendo come parametro l'arco "s" di curva, che: $\dfrac{d x_{(t)}}{d s_{(t)}} = x'_s$; $\dfrac{d y_{(t)}}{d s_{(t)}} = y'_s$;

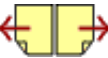
e le equazioni di ∃ diventano:

$$\begin{cases} X = x_{(s)} - R_{(s)}\, y'_{(s)} \\ Y = y_{(s)} + R_s\, X'_{(s)} \end{cases}$$

derivando abbiamo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = x'_{(s)} - R_{(s)} y''_{(s)} - y'_{(s)} R'_{(s)} \\ \\ \dfrac{dy}{ds} = y'_{(s)} + R_{(s)} x''_{(s)} + x'_{(s)} R'_{(s)} \end{cases}$$

quadrando e sommando:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = x'^2_{(s)} + y'^2_{(s)} + R^2_{(s)}\left(x''^2_{(s)} + y''^2_{(s)}\right) + R'^2_{(s)}\left(x'^2_{(s)} + y'^2_{(s)}\right) - 2R_{(s)}\left(x'y'' - y'x''\right) + 2R_{(s)}R'_s\left(y'y'' + x'x''\right)$$

$$\text{ma}: \left(x'^2_{(s)} + y'^2_{(s)}\right) = 1 \; ; \; \left(x'_{(s)} x''_{(s)} + y'_{(s)} y''_{(s)}\right) = 0 \; ; \; R_s = \frac{\left(x'^2_{(s)} + y'^2_{(s)}\right)^{3/2}}{\left(x'_{(s)} y''_{(s)} - y'_{(s)} x''_{(s)}\right)} = \frac{1}{\left(x'_{(s)} y''_{(s)} - y'_{(s)} x''_{(s)}\right)}$$

$$R_{(s)}\left(x'_{(s)} y''_{(s)} - y'_{(s)} x''_{(s)}\right) = 1 \; ; \; \left(x'_{(s)} y''_{(s)} - y'_{(s)} x''_{(s)}\right)^2 = \underbrace{\left(x'^2_{(s)} + y'^2_{(s)}\right)}_{=1}\left(x''^2_{(s)} + y''^2_{(s)}\right) - \underbrace{\left(x'_{(s)} x''_{(s)} + y'_{(s)} y''_{(s)}\right)}_{=0}$$

$$R_{(s)} = \frac{1}{\sqrt{x''^2_{(s)} + y''^2_{(s)}}} \; ; \; \boxed{\frac{1}{R^2_{(s)}} = \left(x''^2_{(s)} + y''^2_{(s)}\right)}$$

Per cui la nostra espressione ottenuta quadrando e sommando diventa:

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 = 1 + 1 + R'_{(s)} - 2$$

$$\boxed{R'_{(s)} = \left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2}$$

e poiché i simboli X ed Y sono dell'evoluta, se poniamo $d(s_1)$ l'arco infinitesimo di evoluta:

$$ds_1^2 = dX^2 + dY^2 \; ; \text{ avremo: } R'^2_{(s)} = \left(\frac{d(s_1)}{ds}\right)^2$$

$$\boxed{R'_{(s)} = \pm\frac{ds_1}{ds}} \; ; \; \int ds_1 = \int R'_{(s)}\, ds$$

$$s_1 = R - R_0$$

Questa formula esprime una notevolissima proprietà:

L'arco di evoluta (s_1), compreso fra due punti, è uguale alla differenza dei raggi di curvatura dell'evolvente, corrispondenti agli stessi due punti.

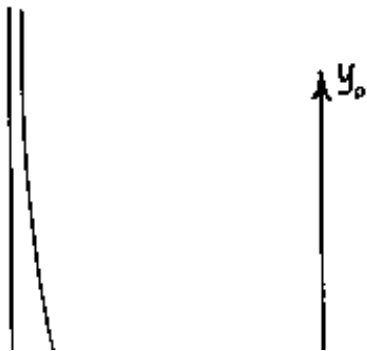
(Analiticamente giustifico la costruzione dell'evolvente del cerchio)

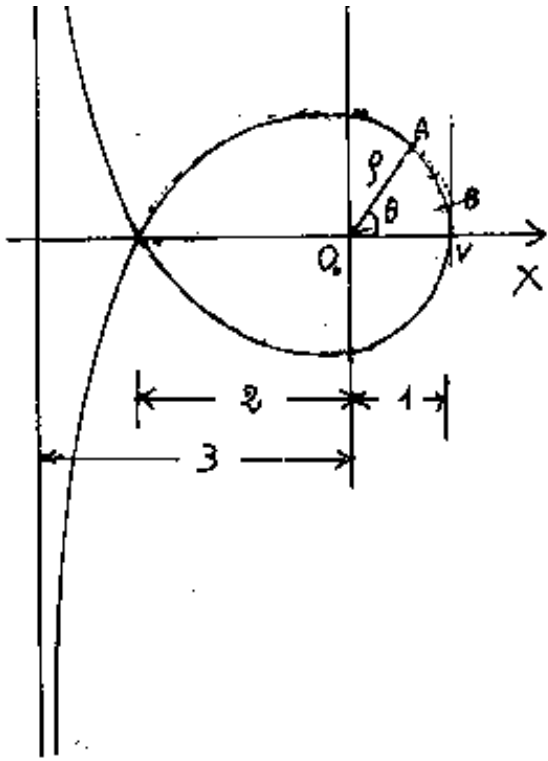
Trisettrice di Maclaurin

Fra le curve esprimibili con polinomi di terzo grado, vi è anche la curva trisettrice di Maclaurin. Il problema della trisezione dell'angolo, problema classico, unitamente al problema di Delo è stato già esposto in più parti dal I° al V° vol. La lumaca di Pascal, (altra curva trisettrice) sarà trattata in seguito.

Il Maclaurin rappresentò in coordinate polari la curva:

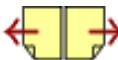
$$\rho = \frac{1}{\cos(\theta/3)}$$

che poi fu detta trisettrice di Maclaurin.

Per trisezionare l'angolo θ basta tracciare un arco di cerchio di centro Q e raggio ρ, che incontrerà la retta paral-

y_0

la ad y (x=1) nel punto B

$\widehat{VOB} = \frac{1}{3}\widehat{VOA}$.

La curva in coordinate parametriche diventa:

$$\begin{cases} x_0 = \cos(\theta)/\cos(\theta/3) \\ y_0 = \operatorname{sen}\theta/\cos(\theta/3) \end{cases}$$

derivando:

$$\frac{dy_\circ}{dx_\circ} = \frac{\cos(\theta)\cos(\theta/3) + (1/3)\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta/3)}{(\frac{1}{3})\,\mathrm{sen}(\theta/3)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta/3)}$$

calcoliamo l'asintoto

$$x = \lim_{\theta \to 270^\circ} \left(\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta/3)} \right) = \frac{0}{0} = \lim_{\theta \to 270^\circ}{}'' \frac{-\mathrm{sen}(\theta)}{(-\frac{1}{3})(\mathrm{sen}(\theta/3)} =$$

$$= \quad x_\circ = -3 \quad \text{(ascissa dell'asintoto)}$$

Operiamo una traslazione di assi in modo che l'origine sia nel punto doppio della curva. Occorre eliminare θ; poniamo $\varphi = \frac{\theta}{3}$, e ricordiamo che:

$$\mathrm{sen}(3\varphi) = 3\,\mathrm{sen}(\varphi) - 4\,\mathrm{sen}^3\varphi \; ; \quad \cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi .$$

per cui:

$$x_\circ = \frac{4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)} = 4\cos^2(\varphi) - 3$$

e spostando l'origine e tenendo conto di riferire il disegno ad un modulo lineare (segmento unitario) a abbiamo

$$\frac{x_\circ}{a} - 2 = 4\cos^2\varphi - 3 \; ; \quad \left(\frac{x_\circ}{a} + 1\right)/4 = \cos^2(\varphi) \; ; \; \mathrm{sen}^2\varphi = (3 - x/a);$$

sostituendo:

$$\frac{y}{a} = \left(4\,\text{sen}^2 - 3\right)\frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} = \boxed{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{(3 - x/a)}{1 + x/a}} = y/a}$$

elevando a quadrato:

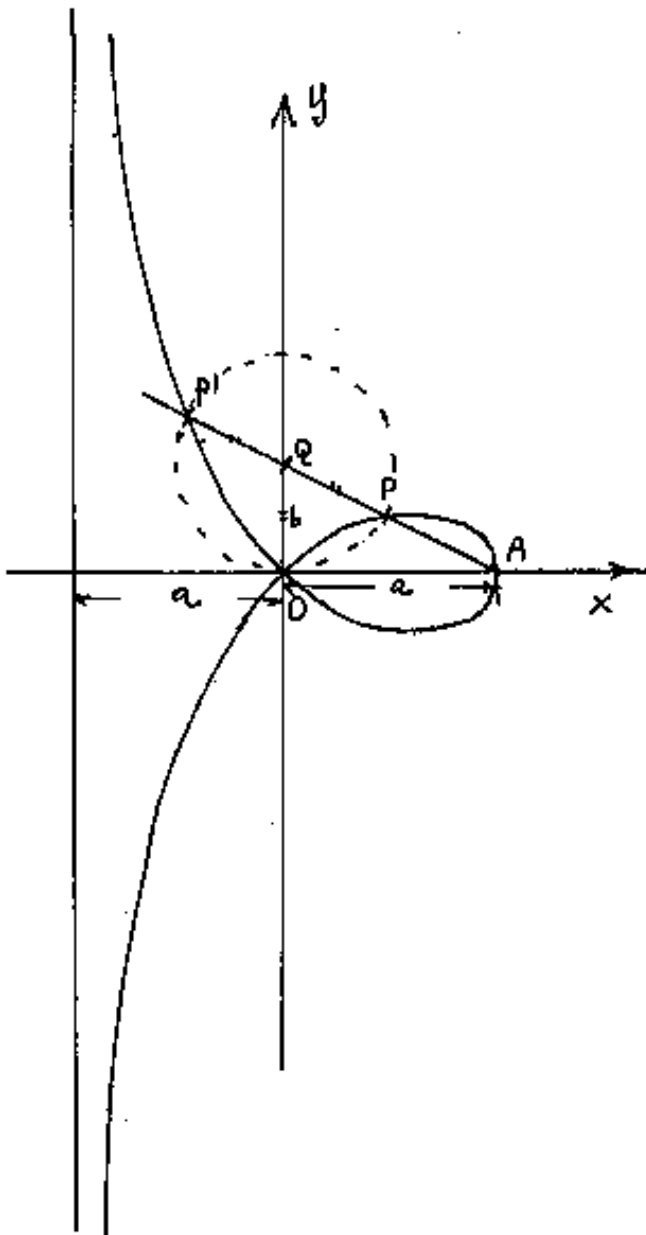
$$\left(\frac{y}{a}\right)^2\left(1+\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{x}{a}\right)^2\left(3-\frac{x}{a}\right) \;; \quad \frac{x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2x}{a^3} + \frac{y^2}{a^2} = 0$$

moltiplicando per a^3:

$$\boxed{x^3 - 3ax^2 + y^2x + ay^2 = 0}$$

(equazione cartesiana della trisettrice di Maclaurin)

LA STROFOIDE (retta)

La curva che abbiamo ora trattato, cioè la trisettrice di Maclaurin, assomiglia alla strofoide,

Se dal punto A sulle ascisse tracciamo tutte le rette di equazione:

$$+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

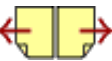
e tenendo fisso "a" facciamo variare "b", varierà il punto Q sulle ordinate essendo: $\overline{OQ}=b$. Quindi da Q si staccano due segmenti sulla retta: $\overline{PQ}=\overline{QP'}=b=\overline{QO}$ i punti P e P' sono i punti della strofoide.

Quindi i punti della strofoide sarebbero deter=

minati dall'intersezioni di tali rette con cerchi di equazione : $x^2+(y-b)^2=b^2$ cioè : $x^2+y^2=2by$; da cui : $b=\left(\frac{x^2}{2y}+\frac{y}{2}\right)$ che, sostituito nell'equazione delle rette : $bx+ay=ab$ cioè : $\frac{x^3}{2y}+\frac{xy}{2}+ay=\frac{ax^2}{2y}+\frac{ay}{2}$; e moltiplicando per. $2y$ otteniamo:

$$x^3-ax^2+xy^2+ay^2=0$$

equazione cartesiana della strofoide

cioè:

$$A = 3\int_0^{\pi} \frac{d\,\theta/3}{\cos^2 \theta/3} = 3\left[\tan \theta/3\right]_0^{\pi}$$

$$A = 3\left[tg(\pi/3) - tg\,0\right] = 3\sqrt{3}$$

(per l'intero cappio) $A = 5,196152423\ a^2$

(per il semicappio) $A = \frac{3}{2}\sqrt{3} = 2,5980762 11\ a^2$

Se per il calcolo dell'area del cappio volessimo utilizzare le coordinate cartesiane avremmo:

$$A = \int_{\Gamma} y\,dx \quad ; \quad A = 2\int_0^3 \sqrt{\frac{(3ax^2 - x^3)}{(a+x)}}\,dx$$

di non comoda risoluzione.

Se per il calcolo dell'area del cappio, volessimo utilizzare un integrale curvilineo

[p]otessimo utilizzare un integrale curvilineo

cioè: $A = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x^2 dt$ avremmo:

$$A = 2\frac{1}{2}\oint_{0}^{\sqrt{3}} a^2\left(\frac{3-t^2}{1+t^2}\right)^2 dt$$

anche questo meno comodo di quello da noi utilizzato.

Trasformiamo in parametriche le coordinate x ed y ove: $y = \sqrt{\frac{3ax^2 - x^3}{(a+x)}}$

cioè: posto: $y = tx$

$$t^2x^2(a+x) = 3ax^2 - x^3$$

$$(t^2+1)x^3 = (3-t^2)ax^2$$

$$x = a\frac{(3-t^2)}{(1+t^2)} \quad ; \quad y = a\frac{(3t-t^3)}{(1+t^2)}$$

per $t = 0$; $x = 3a$; $y = 0$ (coordinate di V)

per $t = 1$; $x = a$; $y = a$

per $t = \sqrt{3}$; $x = 0$; $y = 0$ (origine degli assi)

per $t = 2$; $x = -0,2$; $y = -0,4$

per $t = 3$; $x = -0,6$; $y = -1,8$

---- ; ---- ; ----

$t = \infty$; $x = -1$; $y = -\infty$ (limite asintotico)

Volendo calcolare l'area del cappio, possiamo molto semplicemente avvalerci della formula per il calcolo delle aree in coordinate polari:

per il calcolo delle aree in coordinate polari:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \rho^2 \, d\theta$$

e se consideriamo la espressione di Maclaurin:

$$\rho = \frac{1}{\cos(\theta/3)}$$

ricordando la diversa origine e considerando il doppio di un solo ramo avremo: $A = 2\,\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{1}{\cos\frac{\theta}{3}}\right)^2 d\theta$

$$R = \frac{\left((3a-x)(a+x)^3 + (9a^4 - 6a^2x^2 + x^4)\right)^{3/2}}{(3a-x)(a+x)^2\sqrt{(3a-x)(a+x)^3}} \cdot \frac{(3a-x)(a+x)\sqrt{(3a-x)(a+x)^3}}{-12a^3}$$

$$R = \frac{\left((3a-x)(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)+(9a^4-6a^2x^2+x^4)\right)^{3/2}}{(a+x)^2(-12a^3)}$$

$$R = \frac{(3a^4+9a^3x+9a^2x^2+3ax^3-a^3x-3a^2x^2-3ax^3-x^4+9a^4-6a^2x^2+x^4)^{3/2}}{-12a^3(a+x)^2}$$

$$\boxed{R = \frac{(12a^4+8a^3x)^{3/2}}{(-12a(a+x)^2)}}$$

può scriversi:

$$\boxed{R = \frac{2a^2(3a^2+2ax)^{3/2}}{-3\cdot(a+x)^2}}$$

od anche:

$$\boxed{R = \frac{2\left(3+2\frac{x}{a}\right)^{3/2}}{-3\left(1+\frac{x}{a}\right)^2}}$$

per $x = 0$: $-R = 2a\sqrt{3}$: $-R = (3,4641016)a$;

per $X = 0$; $-R = 2a\sqrt{3}$; $-R = (3,4641016)a$;

per $x = \frac{1}{2}a$; $R = \frac{64}{27}a$; ; $-R = (2,37037037)a$;

per $x = 1a$; $R = \frac{5\sqrt{5}}{6}a$; $-R = (1,86338998)a$;

per $x = 2a$; $R = \frac{14}{27}\sqrt{7}a$; $-R = (1,37187105)a$;

per $x = 3a$; $R = \frac{9}{8}a$; $-R = (1,125)a$; (limite)

facciamo la derivata seconda

$$y'' = \frac{(-2x)\sqrt{(3a-x)(a+x)^3} - (3a^2-x^2)\dfrac{(-1)(a+x)^3+(3a-x)\,3\,(a+x)^2}{2\sqrt{(3a-x)(a+x)^3}}}{(3a-x)(a+x)^3}$$

$$y'' = \frac{(-4x)(3a-x)(a+x)^3 + (3a^2-x^2)\left[(a+x)^3-(3a-x)\,3\,(a+x)^2\right]}{2(3a-x)(a+x)^3\sqrt{(3a-x)(a+x)^3}}$$

$$y'' = \frac{2(-6ax+2x^2)(a+x)+(3a^2-x^2)\left[a+x-9a+3x\right]}{2\sqrt{(3a-x)^3(a+x)^5}}$$

$$y'' = \frac{2\left[-6ax+2ax^2-6ax^2+2x^3\right]+2\left[-12a^3+4ax^2+6a^2x-2x^3\right]}{2\sqrt{(3a-x)^3(a+x)^5}}$$

$$\boxed{y'' = \frac{-12a^3}{\sqrt{(3a-x)^3(a+x)^5}}}$$

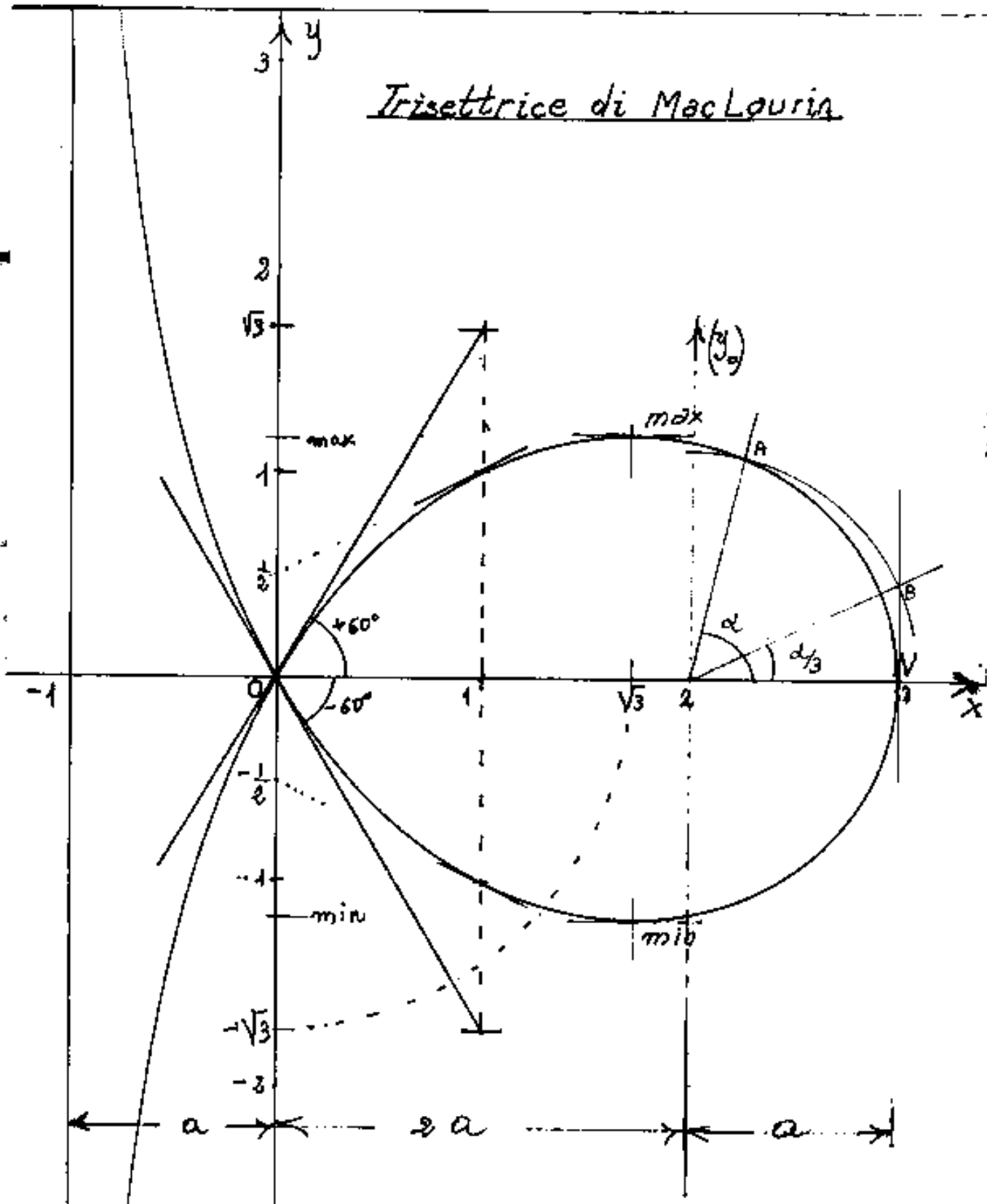
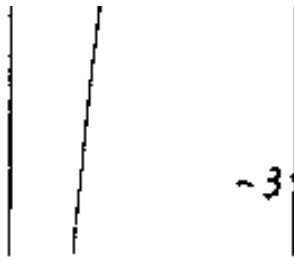
Ora possiamo calcolare i raggi di curvatura

Ora possiamo calcolare i raggi di curvatura

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

$$R = \left(1 + \frac{(3a^2 - x^2)^2}{(3a-x)(a+x)^3}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\sqrt{(3a-x)^3(a+x)^5}}{-12a^3}\right)$$

Trisettrice di MacLaurin

-3

per $x = -a$; $y' = \infty$; $y = \infty$; (asintoto verticale)

per $x = +a$; $y' = \frac{1}{2}$; $y = \pm a$;

per $x = 3a$; $y' = \infty$; $y = 0$; (ascissa limite)

per $X = 2,066075\,a$ ed $X = 0,452874a$ si ha $y' = \pm 1$.
(radici di: $x^4 - 6a^2x^2 - 4a^3x + 3a^4 = 0$)

Possiamo esplicitare y^2 e l'equazione diventa:

$$y^2 = x^2 \frac{(a-x)}{(a+x)}$$

oppure si può scrivere:

$$a(x^2 - y^2) = x(x^2 + y^2)$$

sostituiamo: $x = \rho \cos\theta$; $y = \rho \operatorname{sen}\theta$;

$$a(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\rho^2 = \rho\cos\theta(\rho^2)$$

$$\rho = \frac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

equazione polare della strofoide

se scriviamo:

$$y = x\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}$$

si nota che per $x = a \rightarrow y = 0$, mentre per $x = -a$ si ha $y = \infty$ (asintoto verticale).

Area della Strofoide:

$$A = \int_0 y\,dx \; ; \quad A = 2\int_0^a x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx =$$

$$A = -2\int_0^a (a-x)\, d\sqrt{a^2-x^2} = -2a\left[\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a + 2\int_0^a x\, d\sqrt{a^2-x^2} = \text{(per parti)}$$

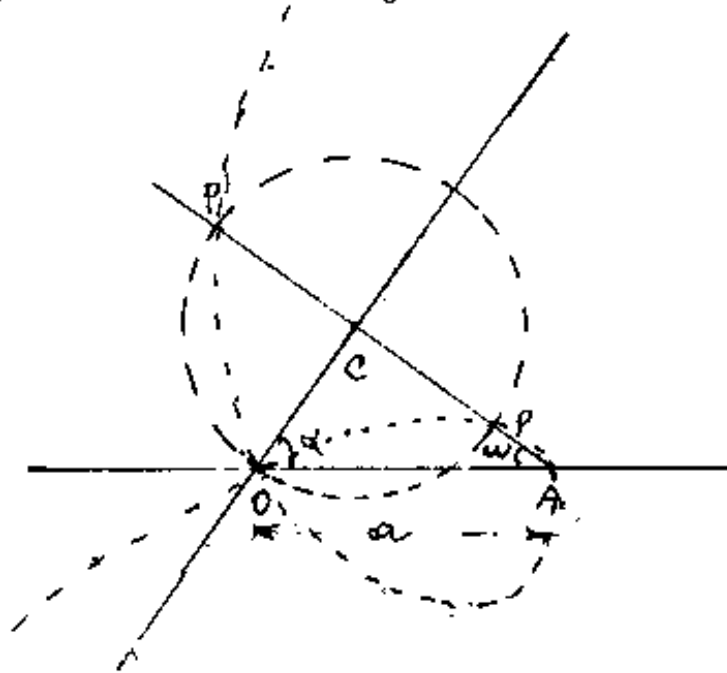
$$A = +2a^2 + 2\left[x\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a - 2\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx = -2a^2 + 0 - 2a^2\,\frac{\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)}{2}$$

$$A = +2a^2 - \frac{\pi}{2}a^2$$

$A = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)a^2$ = area del cappio

$A = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)a^2$ = area compresa fra la curva e l'asintoto

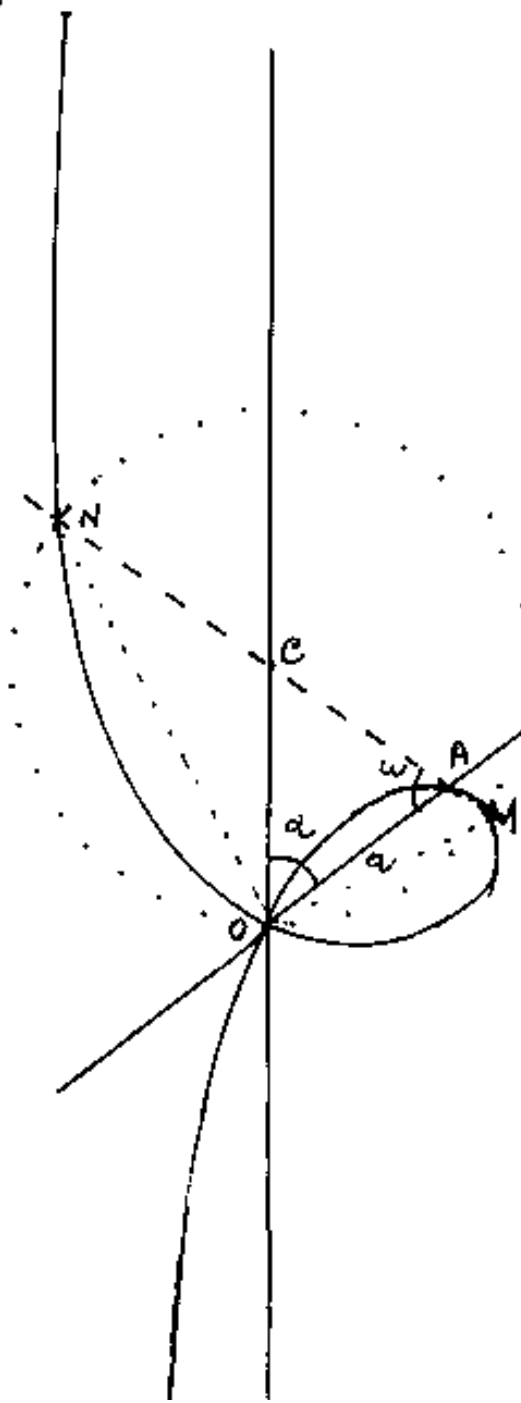
Le strofoidi oblique e generali

La strofoide che abbiamo trattato è più propriamente detta strofoide retta.
Consideriamo ora due rette che in O formano l'angolo α, ed $\overline{OA} = a$ = costante (come per la strofoide retta ove α era $\frac{\pi}{2} = 90°$).
Per A tracciamo una retta qualsia= si che incontrerà in C la retta incli= nata di α nel vertice O; centro in C e raggio $\overline{CO}$ tracciamo una circonferenza che incontrerà in P e P' la retta uscente da A. il luogo dei punti P e P' è una curva detta strofoide obliqua, (se α non è retto).

presi A come polo e la retta per $\overline{OA} = a$ come asse polare, detto ω l'angolo variabile in A avremo: $r = \overline{OC} = \frac{a}{sen(\alpha+\omega)} sen(\omega)$; ed il lato $\overline{AC} = \frac{a}{sen(\alpha+\omega)} sen\alpha$ quindi detto $\rho_p = AP = \overline{AC} - r$ ed $\rho_{p'} = AP' = AC + r$ sarà:

$$\rho = a \frac{sen\alpha \pm sen\omega}{sen(\alpha+\omega)}$$

Come si vede dal disegno, la strofoide inclinata non presenta particolari assi di simmetria per i quali far passare gli assi cartesiani di riferimento, quindi non riteniamo opportuno trasformare in cartesiane la relazione data in coordinate polari con origine in A e direzione iniziale $\longleftarrow = a$.

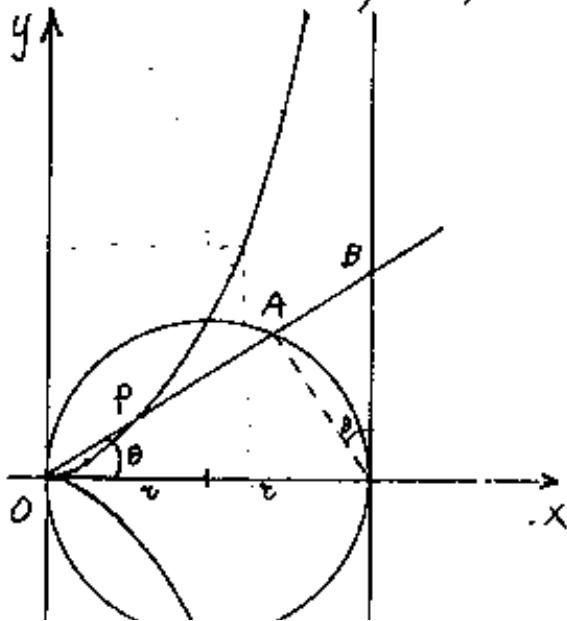
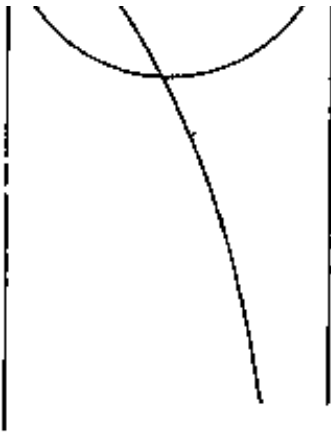
Il nome strofoide deriva dal greco: στρόφος = cordone, cinghia; forse meglio: στροφάς = che si rivolge in giro, roteante.

Il nome di <u>strofoidi generali</u> fu dato alle curve aventi la seguente proprietà:

Dati due punti fissi estremi di una base ed un angolo dato α si abbia che gli angoli alla base φ e ψ, dati due numeri n ed m, che: $n\varphi \pm m\psi = \alpha$.

Nella strofoide inclinata, i triangoli isosceli NCO ed OCM, essendo $N\hat{O}M$ retto, posti: $\overline{ON} = \rho_1$; $\overline{OM} = \rho_2$; abbiamo: $\boxed{\rho_1^2 + \rho_2^2 = (2r)^2}$

La cissoide e la duplicazione del cubo

La cissoide, detta anche Curva di Diocle, perché fu studiata da Diocle per risolvere l'antico problema della duplicazione del cubo (Problema di Delo)

Il problema consisteva nel trovare lo spigolo ℓ_2 di un cubo di volume doppio di un cubo di noto spigolo ℓ_1, cioè: $\ell_2^3 = 2\ell_1^3$; $\ell_2 = \ell_1\sqrt[3]{2}$; ma, come sappiamo, i problemi in cui ricorre la radice cubica non possono essere risolti col solo ausilio della squadra e del compasso, (come già abbiamo visto a proposito della trisezione dell'angolo).

Consideriamo il cerchio: $x^2 - 2xr + y^2 = 0$ e la retta: $x_1 = 2r$ ad esso tangente; dall'origine O degli assi tracciamo una retta qualsiasi: $y = (\tan\theta)x$ essa incontrerà in A il cerchio ed in B la retta ad esso tangente,

in B la retta ad esso tangente, riportando $\overline{OP} = \overline{AB}$, il punto P è un punto della Cissoide.

$\overline{OB} = 2r/\cos\theta$; $\overline{OA} = 2r \cdot \cos\theta$

$\overline{OP} = \overline{BA} = 2r\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right) = 2r \operatorname{sen}^2\theta/\cos\theta$

Si ha così l'equazione della cissoide in coordinate polari:

$$\rho = 2r \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$$

l'equazione in coordinate polari può anche scriversi:

$$\rho = 2r \tan(\theta) \cdot \sin(\theta)$$

possiamo anche scrivere: $\rho \cos\theta = 2r \sin^2\theta$

che in cartesiane diventa:

$$\left(x = (2r)\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right)$$

$$x(x^2+y^2) = (2r)y^2$$ equazione in cartesiane.

ponendo $2r = a$ si usa scrivere:

$$x^3 = y^2(a-x)$$ altra forma della stessa equazione

Se poniamo $\overline{OL} = 2a$ avremo:

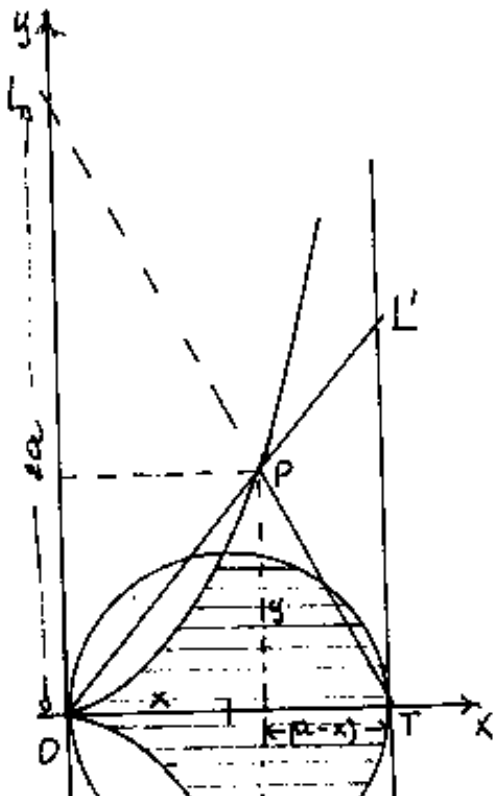
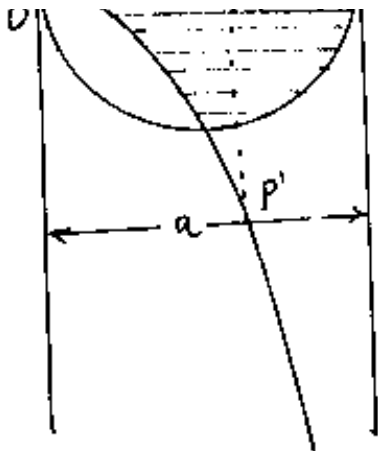
$$(a-x) : y = a : 2a$$

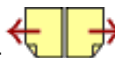
cioè: $(a-x) = y/2$: sostituendo: $\left[x^3 = \frac{y^3}{2}\right]$

D'altra parte $\overline{TL'} : a = \frac{y}{x}$

cioè: $\left(\frac{\overline{TL'}}{a}\right)^3 = \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2$

ossia: $\overline{TL'}^3 = 2a^3$

$$\overline{TL'} = a\sqrt[3]{2}$$

che risolve il problema della duplicazio=

che risolve il problema della duplicazione del cubo.

L'area della cissoide: $A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2 d\theta$ compresa fra due raggi diverge ad infinito per $\theta_2=\pi/2$, noi vogliamo l'area: $A=2\int_0^a y\,dx$, invece è convergente ed è: "$3\pi r^2$" (tre volte l'area del cerchio)

Per risolvere l'integrale $A = \int_0^a y\,dx$, è opportuno trasformare le coordinate in parametriche ponendo: $[y = t \cdot x]$ sostituendo nella: $x^3 = y^2(a - x)$ si ha

$x^3 = at^2x^2 - t^2x^3$; $x = at^2 - t^2x$; $\boxed{x = \frac{at^2}{1+t^2}}$; $\boxed{y = \frac{at^3}{1+t^2}}$

Utilizziamo la notevolissima formula degli integrali curvilinei: $A = \frac{1}{2}\oint x^2\,dt$. avremo, considerando l'area compresa fra la corda $\overline{P'P}$ ed i due rami di cissoide: e siano $+t$ e $-t$ i parametri che determinano P e P'

$$A = \frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{OP'}} x^2\,dt + \frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{P'P}} x^2\,dt + \frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{PO}} x^2\,dt$$

con ciò abbiamo circuitato l'area.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{-t} x^2\,dt + \frac{1}{2}\int_{-t}^{+t} x^2\,dt + \frac{1}{2}\int_t^{0} x^2\,dt$$

abbiamo posto i limiti di integrazione

$$A = -\int_0^t x^2\,dt + x^2 t = 4t^2\frac{t^5}{(1+t^2)^2} - 4t^2\int_0^t \frac{t^4}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$A = 4t^2\frac{t^5}{(1+t^2)^2} - 4t^2\int_0^t \frac{(t^2+1)(t^2-1)+1}{(1+t^2)^2}\,dt =$$

$$A = 4t^2\frac{t^5}{(1+t^2)^2} - 4t^2\int \frac{(t^2-1)}{(1+t^2)} + \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt =$$

$$(1+t^2)^2 \qquad \int_0 (1+t^2) \qquad (1+t^2)^2$$

$$A = 4\tau^2 \frac{t^5}{(1+t^2)^2} - 4\tau^2 \int_0^t \left(1 - \frac{2}{(1+t^2)} + \frac{1}{(1+t^2)^2}\right) dt$$

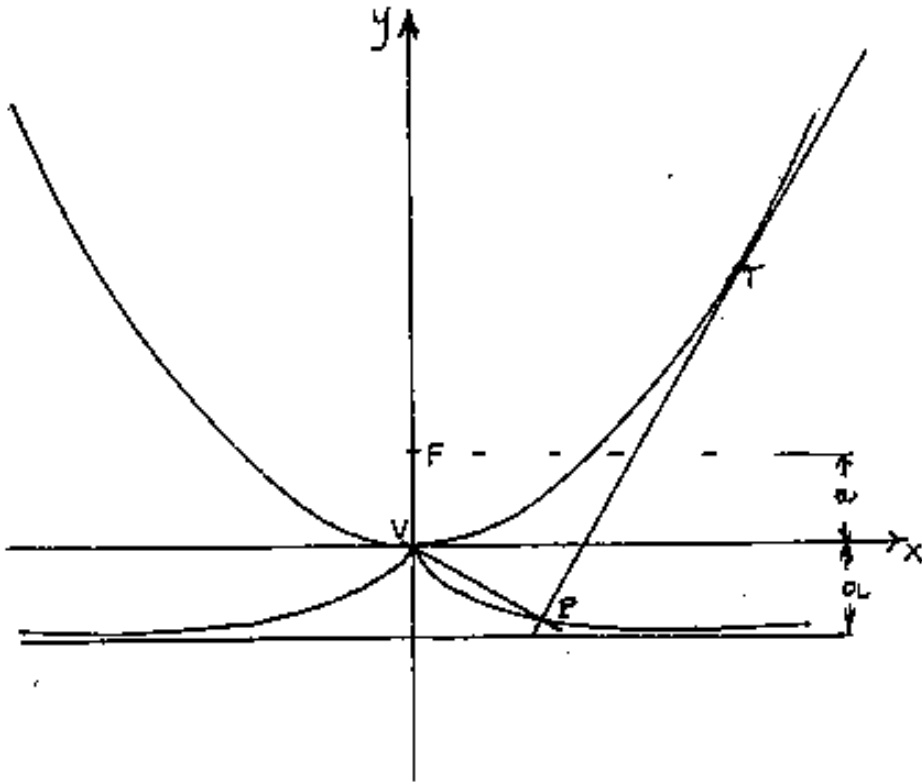
$$A = \frac{4\tau^2 t^5}{(1+t^2)^2} - 4\tau^2 \left[t - 2\arctg[t] + \frac{1}{2}\arctg\, t + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} \right]^t = 6\tau^2 \arctg\, t + 2\tau^2 t$$

$$A = 6\tau^2 \arctg(t) + \frac{2\tau^2 t}{(1+t^2)^2}\left[2t^4 - 2 - 4t^2 - 2t^4 - 1 - t^2\right]$$

$$\boxed{A = 6\tau^2 \arctang(t) - \frac{2\tau^2 t(3+5t^2)}{(1+t^2)^2}}$$

area del triangolo curvilineo P'OP

se $t \to \infty$ $\quad A = 6\tau^2 \frac{\pi}{2} - 0 \quad \boxed{A = 3\tau^2 \pi}$ come già detto.

La cissoide come podaria di una parabola rispetto al vertice v.

Sia: $y = \frac{x^2}{4a}$ l'equazione della parabola, $y' = \tan\alpha = \frac{x_T}{2a}$, perciò l'equazione della normale, per l'origine, alla retta tangente in T sarà: $y = \frac{-2a}{x_T} x$, che può scriversi:

$x_T = -2a \frac{x}{y}$. poiché l'equazione della retta tangente in T può scriversi: $\frac{y - y_T}{x - x_T} = \left(\frac{x_T}{2a}\right)$ ed $y_T = \frac{x_T^2}{4a}$,

sostituendo x_T abbiamo: $y - \frac{4a^2x^2}{y^2 4a} = \frac{-x}{y}\left(x + \frac{2ax}{y}\right)$:

$$y^3 - x^2 a = y(-x^2) - 2ax^2 \Rightarrow \boxed{y^3 = -x^2(y+a)}$$

che è l'equazione di una cissoide ove la retta asintoto sia $y = -a$ ed il cerchio: $x^2 + (y+r)^2 = r^2$ cioè l'ordinata negativa in y cambia i segni.

cioè l'ordinata negativa su y cambia i segni.

Perciò la cissoide può essere definita come la podaria di una parabola con polo nel vertice.

La parola "cissoide" deriva dal greco:

κισσο-ειδής = simile all'edera = cissoide.

(vedi la porzione tratteggiata nella precedente figura.

Cissoidi oblique e curve cissoidali

Anche per la cissoide si può considerare il caso: cissoide obliqua quando i punti O e T non sono diametralmente opposti in questo caso l'equazione diventa:

$$(x^2+y^2)(x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha) = 2r y^2$$

Polinomio di 3° grado non simmetrico se sostituiamo: $x = \rho\cos\omega$; $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\omega$; otteniamo:

$$\rho^2(\rho\cos\omega\cos\alpha - \rho\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\alpha) = 2r\rho^2\mathrm{sen}^2\omega$$

da cui:

$$\rho = 2r\frac{\mathrm{sen}^2\omega}{\cos(\alpha+\omega)}$$

che per $\alpha = 0$ torna la cissoide di Diocle che abbiamo trattato

Le cissoidi generali possono ottenersi

de cissoidi generali possono ottenersi

quando siano date due curve arbitra=
rie ed un punto O fisso dal quale trac=
ciamo rette che segano le due curve nei
punti M ed N, si riporta da O il segmen=
to $\overline{PO} = \overline{MN}$ (nella stessa direzione di $\overline{MN}$) per
tracciare la curva.

La curva di Jerabek

Consideriamo un cerchio di raggio r e centro C e la retta tangente in A. Sia O il punto medio di $\overline{AC} = r$; $\overline{AO} = \overline{OC} = \frac{r}{2}$; si tracci per O una retta che incontra in E il cerchio di centro O e raggio $\frac{r}{2}$ ed in F la tangente per A al cerchio di raggio r. Preso $\overline{OM} = \overline{FE}$ (equiversi), il luogo dei punti M è una cissoidale di equazione polare: $\overline{OM} = \rho$; $C\hat{O}M = \theta$; $\rho = r\cos\theta + \frac{r}{2\cos\theta}$ e di equazione cartesiana:

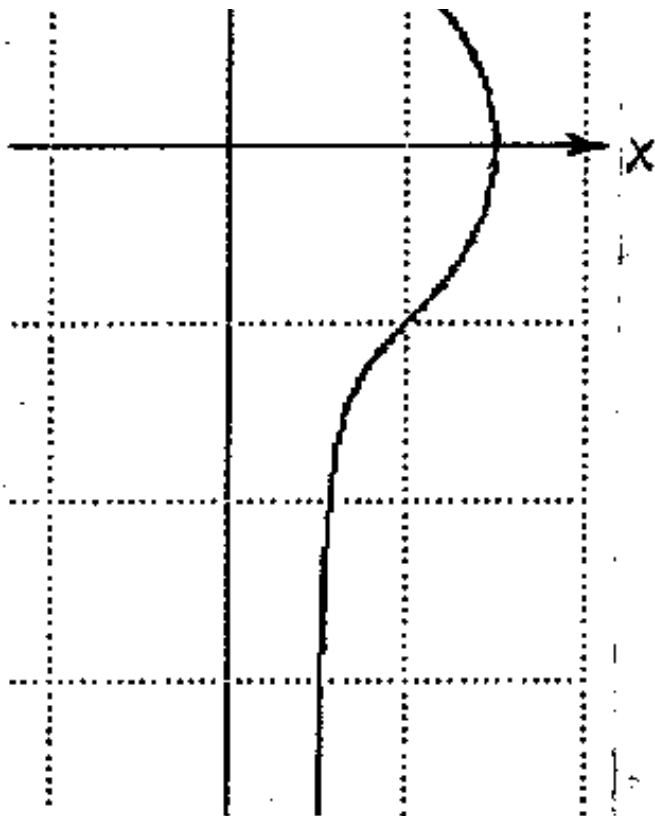
$$r(3x^2+y^2) = 2x(x^2+y^2)$$

$$y = \sqrt{\frac{(2x^3 - 3rx^2)}{(r-2x)}}$$

$$y = x\sqrt{\frac{(2x-3r)}{(r-2x)}}$$

y

questa è la curva di JERABEK ed è una

x

JERABEK ed è una cissoide.

La cicloide ed il problema della tautócrona.

La cicloide è il luogo geometrico (traettoria) di un punto connesso ad una circonferenza che rotola, senza strisciare, su una retta, mantenendosi sempre sullo stesso piano.

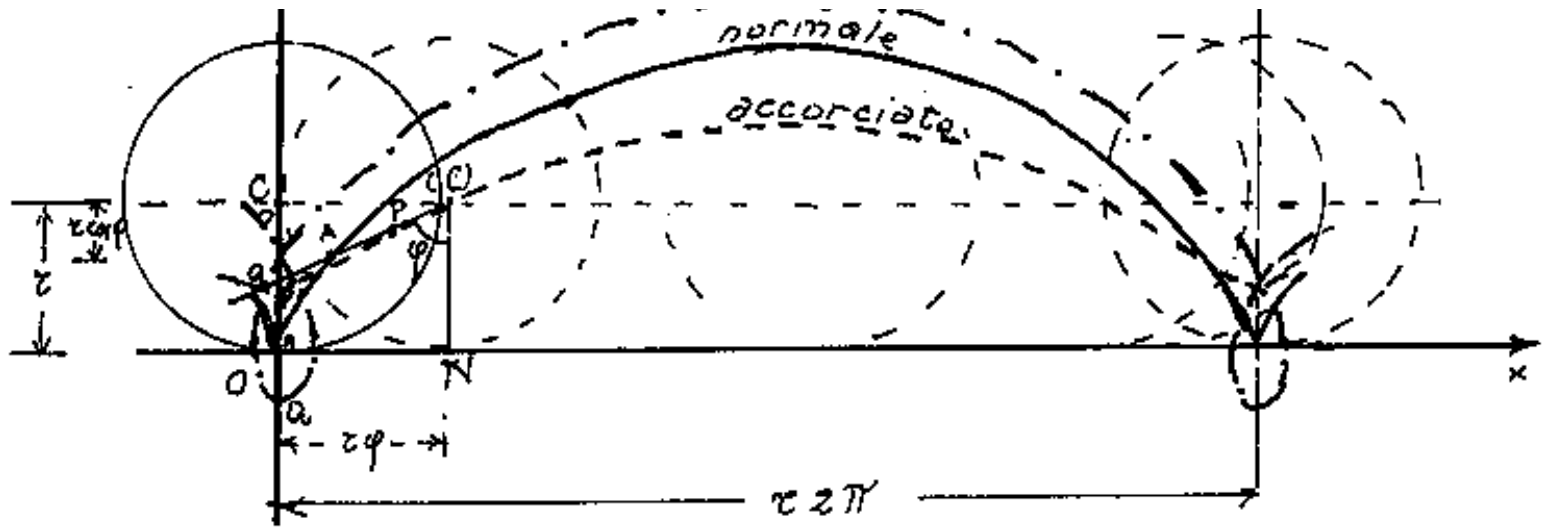
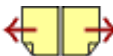
Se il punto è sulla circonferenza la cicloide è detta normale.

Se il punto è esterno alla circonferenza la cicloide è detta allungata

Se il punto è interno alla circonferenza la cicloide è detta accorciata.

y

allungata

normale

Supponiamo, per semplicità, che quando la circonferenza è tangente alle ascisse nell'origine "O" degli assi, i punti di cui si cerca le traettorie siano sull'asse delle y al disotto del centro C della circonferenza. La circonferenza abbia raggio r.

A coincide con l'origine O degli assi cioè giace sulla circonferenza, quindi descriverà la cicloide normale sia "a" la distanza dal centro C dei punti Q e P e precisamente con $a > r$ si abbia Q che descriverà una cicloide allungata. Con $a < r$ si abbia P che descriverà una cicloide accorciata

Facciamo rotolare la circonferenza nel verso delle ascisse di un angolo φ, se non v'é slittamento, l'ascissa del centro C è l'ascissa del nuovo punto N di tangenza cioè $\overline{ON} = x_N = x_C = r\varphi$.

Per la cicloide normale (punto A) avremo:

$$\begin{cases} x_A = r(\varphi - \operatorname{sen}(\varphi)) \\ y_A = r(1 - \cos(\varphi)) \end{cases}$$

cicloide normale

Per la cicloide allungata o accorciata (Punto Q con $a > r$)

Per la cicloide allungata e accorciata (Punto Q con a > r ; " P " a < r)

avremo:

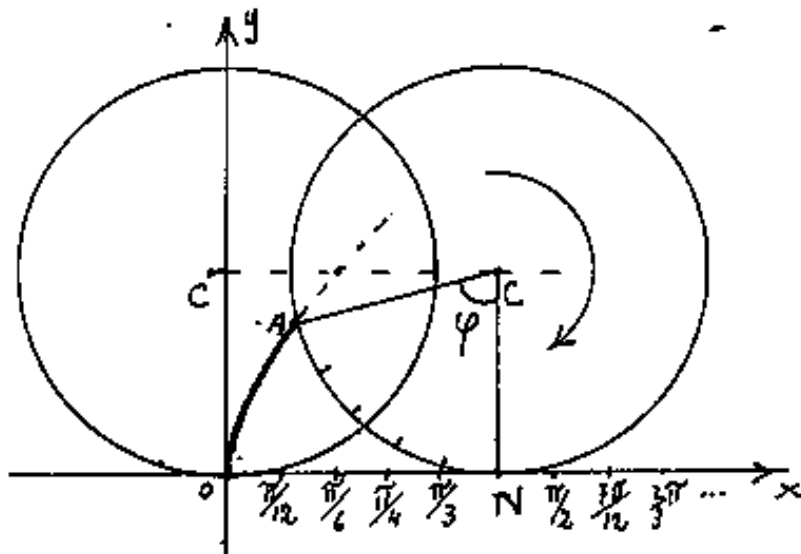
$$\begin{cases} x = r\varphi - a\,sen(\varphi) \\ y = r - a\cos(\varphi) \end{cases}$$

Dividendo per r e ponendo $K = a/r$ si ottiene la generalizzazione della formula della cicloide

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r(\varphi - K\,sen\,\varphi) \\ y &= r(1 - K\cos\varphi) \end{aligned}} \quad \begin{cases} \text{normale} \rightarrow K = 1 \\ \text{accorciata} \rightarrow K < 1 \\ \text{allungata} \rightarrow K > 1 \end{cases}$$

Si noti che per $K = 0$ si ha il moto (traettoria) del centro C della circonferenza, cioè la retta $y = r$.

Allo scopo di apprezzare meglio la generazione della cicloide normale, riportiamo una tabellina ove figurano l'angolo φ di quanto ha ruotato la circonferenza; $x_N = r\varphi = x_C$ = sviluppo della circonferenza sulle ascisse; x ed y = coordinate cartesiane della cicloide; ρ, θ = coordinate polari della cicloide. Raggio della circon=

TABELLA

cicloide normale $r = 1$

φ	X_N	cartesiane		polari	
		X	Y	ρ	θ
0	0	0	0	0	90
15	0.26180	0.00298	0.03407	0.03420	85.00129
30	0.52360	0.02360	0.13397	0.13604	80.01018
45	0.78540	0.07829	0.29289	0.30318	75.03451
60	1.04720	0.18117	0.50000	0.53181	70.08229
75	1.30900	0.34307	0.74118	0.81673	65.16195
90	1.57080	0.57080	1.00000	1.15144	60.28243
105	1.83260	0.86667	1.25882	1.52831	55.45342
120	2.09440	1.22837	1.50000	1.93879	50.68550
135	2.35619	1.64909	1.70711	2.37354	45.99037
150	2.61799	2.11799	1.86603	2.82276	41.38116

135	2.35619	[illegible]	1.70711	[illegible]	[illegible]
150	2.61799	2.11799	1.86603	2.82276	41.38116
165	2.87979	2.62098	1.96593	3.27634	36.87261
180	3.14159	3.14159	2.00000	3.72419	32.48163
195	3.40339	3.66221	1.96593	4.15652	28.22752
210	3.66519	4.16519	1.86603	4.56409	24.13260
225	3.92699	4.63410	1.70711	4.93853	20.22276
240	4.18879	5.05482	1.50000	5.27268	16.52808
255	4.45059	5.41652	1.25882	5.56087	13.08350
270	4.71239	5.71239	1.00000	5.79926	9.92947
285	4.97419	5.94011	0.74118	5.98618	7.11235
300	5.23599	6.10201	0.50000	6.12246	4.68436
315	5.49779	6.20489	0.29289	6.21180	2.70255
330	5.75959	6.25959	0.13397	6.26102	1.22612
345	6.02139	6.28021	0.03407	6.28030	0.31086
360	6.28319	6.28319	-.00000	6.28319	-0.00000

gio della circonferenza generatrice: ($r = 1$)

Per diverso r moltiplicare x_N, y, x, ρ per r.

L'area della cicloide

Si racconta che Galileo (Pisa-1564/Arcetri 1642), (uno dei più grandi scienziati di tutti i tempi), dedicò anche particolari studi alla cicloide, ma non disponendo del calcolo infinitesimale, (che nasce alla sua scuola, ma sarà perfezionato oltre un secolo dopo) e volendo calcolare l'area della cicloide, disegnò su cartoncino parecchie cicloidi con circonferenze generatrici di diverso raggio, ritagliò, con cura, la figura delle cicloidi, le circonferenze generatrici, e quadrati di area precalcolata, quindi pesò, con la bilancia di precisione, le varie figure, (circa 2000 pesate) quindi comparati i valori e l'errore probabile espresse la legge che: "l'area della cicloide è tre volte l'area del cerchio generatore." Legge, poi confermata esatta.

Calcoliamo l'area:

differenziando le equazioni trovate si ha:

$$\begin{cases} dx = r(1-K\cos\varphi)\,d\varphi \\ dy = r(K\sin\varphi)\,d\varphi \end{cases}$$

$$dy = r(K \operatorname{sen}\varphi) d\varphi$$

l'area:
$$A = \int y \cdot dx$$

$$A = \int_0^{2\pi} r(1 - K\cos\varphi) \cdot r(1 - K\cos\varphi)\, d\varphi$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2K\cos\varphi + K^2\cos^2\varphi)\, d\varphi$$

$$A = r^2 \left[\varphi - 2K \operatorname{sen} \varphi + K^2 \frac{\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \varphi}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$A = r^2 \left[2\pi - 0 + K^2 \pi \right]$$

$$\boxed{A = r^2 \pi \left(2 + K^2 \right)}$$

e per $K = 1$ = cicloide normale:

$$\boxed{A = 3 r^2 \pi}$$ (Legge di Galileo)

per $K = 0$ si ha:

$$\boxed{A = r \cdot 2r\pi = 2r^2\pi}$$

che è l'area del rettangolo della traettoria del centro C della circonferenza, quindi la formula trovata è da ritenere valida per: $(0 \leq K \leq 1)$ cioè per cicloidi normali e per cicloidi accorciate; per cicloidi allungate, occorre definire a quale area si riferisce la formula.

A tal fine calcoliamo l'area del cappio: occorre fissare quali valori di φ soddisfano

[illegible] fissare quali valori di φ soddisfano

$\frac{X'}{r} = 0 = \varphi - K \operatorname{sen} \varphi \Rightarrow \frac{1}{K} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi}$ e ponendo, (come vedremo) $\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi} = \operatorname{rasen}(\varphi)$ avremo: $\varphi = \operatorname{argrasen}\left[\frac{1}{K}\right]$

notiamo che φ è reale se e solo se $K > 1$; un valore di $\varphi =$ zero, l'altro valore può desumersi dalle tavole che riportano $\operatorname{rasen} \varphi$. — per esempio per.

$K = 1{,}20 \quad \varphi = 58{,}^{\circ}8277707 = 1{,}0267382992 \text{rad.}$; $\frac{1}{K} = 0{,}833335$.

per $\frac{X}{r} = 2\pi$; $\varphi = 2\pi$ e $\varphi = 301{,}^{\circ}1722293 = 5{,}256447016 \text{rad.}$

ma, nel caso di cicloide allungata, la curva si estende anche ad un tratto negativo di ascisse perciò: dalla $\frac{y}{r} = 1 - K\cos\varphi = 0$ quindi $\cos\varphi = \frac{1}{K}$.

per $K = 1{,}20 \rightarrow \varphi = 33{,}^\circ 5573097 6 = 0{,}5856855435$ rad.

Questo φ è il limite delle ordinate negative; quando $\varphi = 0$ l'ordinata della curva è $(1-K)\cdot r$ ed essendo: $K > 1$, è $y < 0$.

Se sostituiamo il φ che dà $y = 0$ nella formula dell'area, troviamo l'area del semicappio che si estende alle ordinate negative:

$$A_{<0} = r^2\left[\arccos\left(\frac{1}{K}\right) - 2K\sqrt{1-\left(\frac{1}{K}\right)^2} + \frac{K^2}{2}\left(\frac{1}{K}\sqrt{1-\left(\frac{1}{K}\right)^2} + \arccos\left(\frac{1}{K}\right)\right)\right]$$

$$A_{<0} = r^2\left[\left(\arccos\left(\frac{1}{K}\right)\right)\left(1+\frac{K^2}{2}\right) - 2\sqrt{K^2-1} + \frac{1}{2}\sqrt{K^2-1}\right]$$

$$\boxed{A_{<0} = r^2\left[\left(\arccos\left(\frac{1}{K}\right)\right)\left(1+\frac{K^2}{2}\right) - \frac{3}{2}\sqrt{K^2-1}\right]}$$

area del semicappio di ordinate < 0

Nel caso di $K = 1{,}20$

$$A_{<0} = r^2\left[(0{,}5856855435)(1{,}72) - \frac{3}{2}\sqrt{0{,}44}\right]$$

$$= r^2\left[1{,}007379135 - 0{,}994987437 1\right]$$

$$A_\infty = r^2\left[0,0123916977\right]$$

Area > 0 perché in zona ove: $(dx<0)$ ed $(y<0)$: $(-)(-)=(+)$.

Calcoliamo ora l'area per φ che da' $(x=0)$

avremo per $K=1,20$; $\varphi = 1,026738293$ rad. avremo $A_{430} = 0,0313847372 > 0$

se a questa togliamo 0,0123916977 si ha: 0,0189930395 , anche questa area > 0, perché: $y>0$ e $dx>0$, perché le x crescono nel verso delle ascisse. Quindi l'area della cicloide non può mai essere < 0.

L'area di un tratto di cicloide compresa fra le ordinate $y(\varphi_1)$ ed $y(\varphi_2)$ è:

$$A_{\varphi_1-\varphi_2} = r^2\left[\varphi - 2K\,sen\,\varphi + K^2\,\frac{sen\,\varphi\cos\varphi + \varphi}{2}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

Tratti di cicloide per K = 1,20

φ	X	y	Aree dei tratti $r = 1$
0	0	$-(0,20)\,r$	0
			+0,0123916976 (underlined) = +0,0123916976 (I)
33°, 33' 26" = = 0,5856855435 rad	$-(0,07763941 4)\,r$	0	
			+0,0313848437 2 (underlined) = +0,0189930395 (II)
58° 49' 40" = 1,026738292 rad.	0	$(0,378865167)\,r$	
			+10,77569399 (underlined) = +10,7443 0925 (III)
301° 10' 20" = = 5,256447016 rad	$2\pi\,r$	$(0,378865167)\,r$	
			10,79468703 (underlined) = +0,0189930394 (IV)
326° 26' 34" = = 5,69749976 rad	$(6,360824722)\,r$	0	
			10,80707873 (underlined) = +0,0123916976 (V)
360 2π rad	$2\pi\,r$	$-(0,20)\,r$	

I numeri sottolineati sono le aree progressive, i numeri non sottolineati sono le aree dei singoli tratti

Si noti che le aree dei tratti sono tutte positive:

Si noti che le aree dei tratti sono tutte positive:

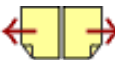
nel I tratto perché $y<0$ e $dx<0$ cioè $(-)(-)=(+)$

nel II tratto perché $y>0$ e dx crescente nel verso + cioè $dx>0$

nel III tratto $y>0$; $dx>0$

nel IV tratto $y>0$; $dx>0$

nel V tratto $y<0$; $dx<0$ perché nel verso negativo $(-)(-)=(+)$.

Cioè vale ancora $A = r^2\pi(2+K^2) = r^2(\pi)(2+1{,}2^2) = r^2(10{,}8070873)$

Quindi la formula:

$$A = r^2\left[\varphi + 2K\,\mathrm{sen}\,\varphi + K^2\left(\frac{\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + \varphi}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$A = r^2\left[(2+K^2)\pi\right]$$

è valida in generale

$K<1$ = cicloide accorciata

$K=1$ = cicloide normale

$K>1$ = cicloide allungata

Nel caso della cicloide allungata; l'area calcolata è quella tratteggiata in figura.

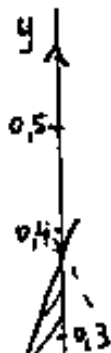
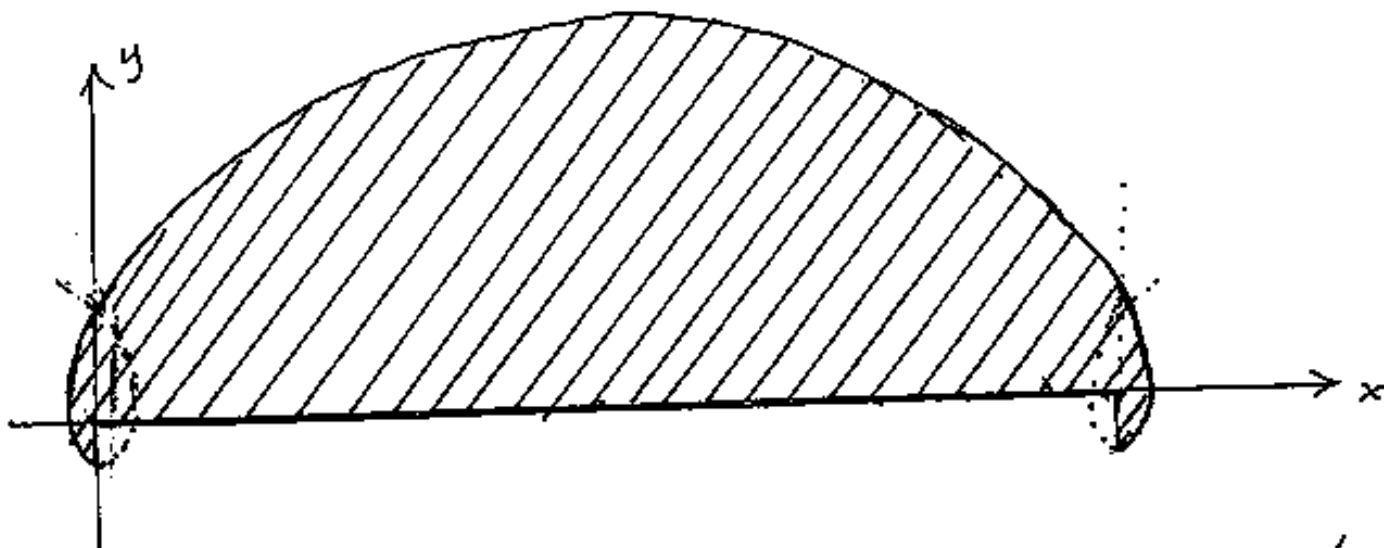
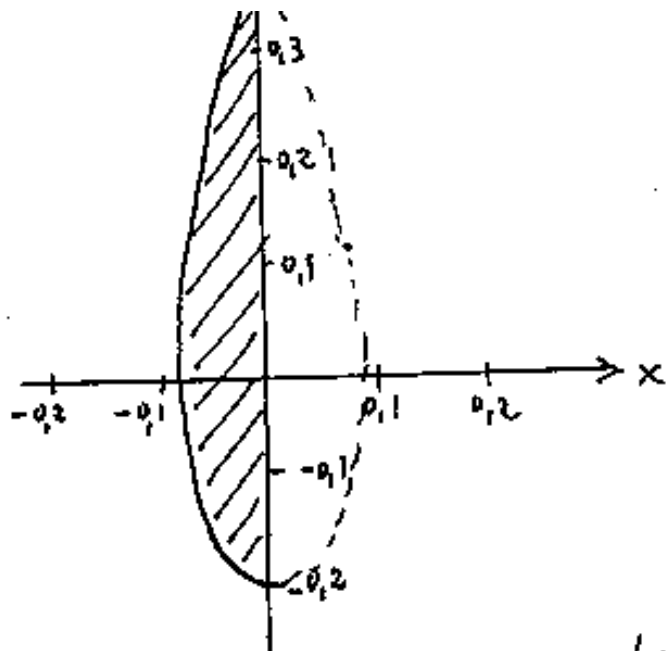
y

x

y

0,5

0,4

0,3

Per $K = 1{,}2$ abbiamo disegnato a fianco il semicappio che si estende al ciclo precedente della

al ciclo precedente della circonferenza, a cui corrisponde il simmetrico che invade il ciclo successivo della circonferenza.

Se, nel calcolo delle aree limitiamo la formula a $\varphi < 2\pi$

L'area calcolata sarà delimitata dalla $y = r(1 - k\cos\varphi)$.

Lunghezza della cicloide

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$ sostituendo:

$$ds = r\left(\sqrt{(1 - K\cos\varphi)^2 - (K\operatorname{sen}\varphi)^2}\right) d\varphi$$

$$ds = r\left(\sqrt{1 - 2K\cos\varphi + K^2}\right) d\varphi$$

$$s = r\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{1+K^2 - 2K\cos\varphi}\right) d\varphi$$

ove per $K=0$ si ha: $s = 2r\pi$ che è la lunghezza del tratto percorso dal centro della circonferenza generatrice, (cioè: caso limite di cicloide accorciata)

Per $K = 1$

$$s = r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\, d\varphi = r\int_0^{2\pi}\sqrt{2\left(2\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi$$

$$s = 4r\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2} = -4r\left[\cos\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi} = -4r(-1-1)$$

$$s = 8r$$

La lunghezza della cicloide normale è otto volte il raggio della circonferenza generatrice

Nel caso generale di $K \neq 0$ e $K \neq 1$ si ha:

$$s = r \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2K\left(\frac{1+K^2}{2K} - \cos\varphi\right)} \right) d\varphi$$

$$s = r \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2K\left(\frac{1+K^2}{2K} - \left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\right)} \right) d\varphi$$

$$s = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2K\left(\frac{1+K^2-2K}{2K} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi$$

$$s = r \int_0^{2\pi} 2\sqrt{K\left(\frac{(1-K)^2}{4K} + 1 - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi$$

$$s = 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{(1-K)^2+4K}{4}\right) - K\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi$$

$$s = 4r \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{(1-K)^2+4K}{4}\right)\left(1 - \frac{4K}{4K+(1-K)^2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\frac{\varphi}{2}$$

$$s = 2r\sqrt{4K+(1-K)^2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{4K}{4K+(1-K)^2}\right)\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

.10

e cambiando variabile: $\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; $t = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$

$0 \leq \varphi/2 \leq \pi$; $\pi/2 \leq t \leq -\pi/2$ per: $dt = -\frac{d\varphi}{2}$ cambieremo i limiti di integrazione: $\theta = \arcsen\left(\sqrt{\frac{4K}{4K + (1-K)^2}}\right)$.

$$S = 4r\left(\sqrt{4K + (1-K)^2}\right)\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(1 - \sen^2\theta \sen^2 t\right)}\, dt$$

classico integrale ellittico di 2ª specie.

Controlliamo se la formula è valida ai casi limite.

per $K=0$: $s = 4r(1)\int_0^{\pi/2}(1-0)\,dt = \underline{2r\pi}$ (torna)

per $K=1$: $s = 8r\int_0^{\pi/2}\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2(t))}\,dt = 8r\int_0^{\pi/2}\cos(t)\,dt =$

$$s = 8r\left[\operatorname{sen}(t)\right]_0^{\pi/2} = \underline{s = 8r} \quad \text{(torna)}$$

Calcoliamo ora la lunghezza della cicloide con $K = 1{,}2$

$$s = 4r\sqrt{4(1{,}2)+(0{,}2)^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(1-\frac{4(1{,}2)}{4(1{,}2)+(0{,}2)^2}\operatorname{sen}^2(t)\right)}\,dt$$

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{4(1{,}2)}{4(1{,}2)+(0{,}2)^2}}\right) = 84^\circ{,}78409149$$

$$\left(4\sqrt{4(1{,}2)+(0{,}2)^2}\right) \simeq (8{,}8)$$

$$s = r(8{,}8)\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)\operatorname{sen}^2(t)}\right)dt$$

dalle tavole degli integrali ellittici abbiamo:

$\theta = 84^\circ \rightarrow 1{,}0182)$ interpolando

$\theta = 84° \rightarrow 1,0172$
$\theta = 85° \rightarrow 1,0127$
interpolando: $\theta_1 = 84°,78409149 \rightarrow 1,0137$

$s = 8,92\, r$ allungata rispetto alla normale

per $K = 0,8$

$$s = r(7,2)\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{1-0,98765\,\mathrm{sen}^2 t}\right)dt$$

$\theta = 83°,62062983$ → $\theta = 83° \rightarrow 1,0223$; $\theta = 84° \rightarrow 1,0172$ interpolando → $1,0191$

$s = r(7,2)\,1,0191 =$ $s = (7,33752)\,r$ accorciato rispetto alla normale

Se cerchiamo l'equazione cartesiana della cicloide, riusciamo solo ad esplicitare la x.

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1 - y/r}{K}\right)$$

$$\left(x/r\right) = \left(\arccos\left(\frac{1 - y/r}{K}\right) - \sqrt{K^2 - \left(1 - \frac{y}{r}\right)^2}\right)$$

$$\frac{s}{r} = \int_0^{\varphi} \left(\sqrt{1 + K^2 - 2K\cos\varphi}\right) d\varphi$$

$(K\cos\varphi = 1 - y/r)$

$d\varphi = d\left(\arccos\left(\frac{1 - y/r}{K}\right)\right)$

derivando φ rispetto a $d\left(\frac{1 - y/r}{K}\right)$ si ha:

$$\frac{d\varphi}{d\left(\frac{1 - y/r}{K}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - y/r}{K}\right)^2}}$$

sostituendo:

$$s/r = \int_0^{\arccos\left(\frac{1 - y/r}{K}\right)} \left(\sqrt{1 + K^2 - 2\left(1 - y/r\right)}\right) \left(\frac{-d\left(\frac{1 - y/r}{K}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - y/r}{K}\right)^2}}\right)$$

$$s/r = \int_0^{\arccos\left(\frac{1 - y/r}{K}\right)} \sqrt{\frac{1 + K^2 - 2\left(1 - y/r\right)}{K^2 - \left(1 - y/r\right)^2}} \left(-d\left(1 - y/r\right)\right)$$

$$\frac{dy}{ds} = +\sqrt{\frac{K^2-(1-y/c)^2}{(K^2-1+2y/c)}} = +\sqrt{\frac{K^2-1+2y/c-(y/c)^2}{(K^2-1+2y/c)}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{dy}{ds} = +\sqrt{1-\frac{(y/c)^2}{(K-1+2y/c)}}$$

(ove α è l'inclinazione della retta tangente)

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\frac{(y/r)^2}{(K^2-1+2y/r)}}}{\sqrt{\frac{(y/r)^2}{(K^2-1+2y/r)}}}$$

$$\tan\alpha = y' = \frac{+1}{y/r}\sqrt{K^2-1+\frac{2y}{r}-\left(\frac{y}{r}\right)^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{r}{y}\sqrt{K^2-\left(1-\frac{y}{r}\right)^2}}$$

controlliamo:

$$\frac{d(x/r)}{d(y/r)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-(y/r)}{K}\right)^2}}\left(-\frac{1}{K}\right) - \frac{-2\left(1-y/r\right)(-1)}{2\sqrt{K^2-\left(1-y/r\right)^2}}$$ (la derivata è in d/r)

$$\frac{d(x/r)}{d(y/r)} = \frac{1}{\sqrt{K^2-\left(1-\frac{y}{r}\right)^2}} + \frac{\left(-1+y/r\right)}{\sqrt{K^2-\left(1-y/r\right)^2}}$$

$$\frac{d(y/r)}{d(x/r)} = \boxed{\frac{dy}{dx} = y' = \frac{r}{y}\sqrt{K^2-\left(1-y/r\right)^2}}$$ (torna)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-K\cos(\varphi)}{K\operatorname{sen}(\varphi)}$$

$$dx \quad K\,sen(\varphi)$$

Possiamo calcolare le tangenti alla cicloide .

TANGENTE, NORMALE, SOTTOTANGENTE, SOTTONORMALE

retta tangente in un punto T della cicloide

$$\frac{y - y_T}{X - X_T} = y' = \frac{dy}{dX}$$

$$y = y'_{(x)} + (y_T - y' \cdot X_T)$$

$$y = \left(\frac{1}{y_T/r}\sqrt{K^2 - (1 - y_T/r)^2}\right)X + Y_T - \left(\frac{r^2}{y_T}\sqrt{K^2 - (1 - \frac{y_T}{r})^2}\right)\left(\arccos\left(\frac{1 + y_T/r}{K}\right) - \sqrt{K^2 - (1 - \frac{y_T}{r})^2}\right)$$

$$y = y_T + \left(\frac{r}{y_T}\sqrt{K - (1 - y_T/r)^2}\right)\left(X - r\left(\arccos\left(\frac{1 + y_T/r}{K}\right) - \sqrt{K^2 - (1 - \frac{y_T}{r})^2}\right)\right)$$

(equazione della retta tangente in T (in funzione di y_T)

$$y = \left(\frac{1 - K\cos(\varphi_T)}{K\operatorname{sen}(\varphi_T)}\right)X + r(1 - K\cos(\varphi_T)) - \left(\frac{1 - K\cos(\varphi_T)}{K\operatorname{sen}(\varphi_T)}\right)r(\varphi_T - K\operatorname{sen}(\varphi_T))$$

$$y/r = (1 - K\cos(\varphi_T))\left(\frac{X/r}{K\operatorname{sen}(\varphi_T)} + 1 - \frac{\varphi_T}{K\operatorname{sen}(\varphi_T)} - 1\right)$$

$$y = \left(\frac{1 - K\cos(\varphi_T)}{\ldots}\right)(X - r \ldots)$$

$$y = \left(\frac{1 - K\cos(\varphi_T)}{K \operatorname{sen}(\varphi_T)} \right) \left(X - r \right)$$

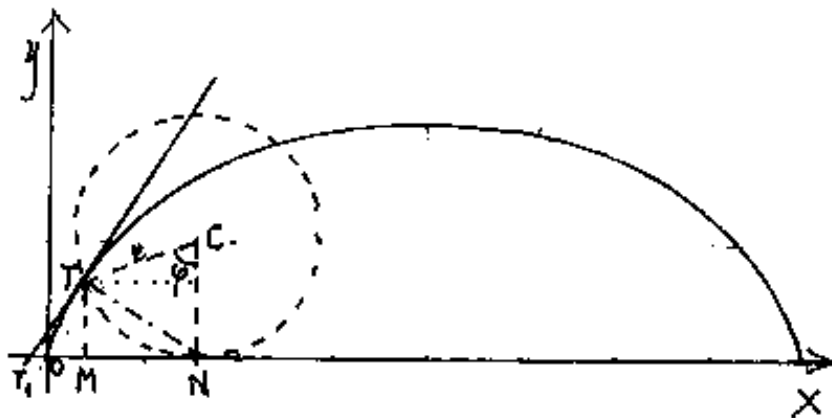
Equazione della retta tangente alla cicloide nel punto T determinato dalla rotazione φ_T della circonferenza generatrice.

Equazione della normale per T alla cicloide.

$$y = \frac{-X}{f'(x_T)} + y_T + \frac{x_T}{f'(x_T)}$$

$$y = -X\left(\frac{K\,sen(\varphi_T)}{1-K\cos(\varphi_T)}\right) + r\left(\left(1-K\cos(\varphi_T)\right) + \frac{\left(\varphi_T - K\,sen(\varphi_T)\right)}{\left(1-K\cos(\varphi_T)\right)}\left(K\,sen\,\varphi_T\right)\right)$$

Sottotangente e sottonormale

Ricordando che dicesi: "sottotangente" e "sottonormale", rispettivamente i segmenti: $\overline{T_1M}$ ed $\overline{MN}$, cioè le proiezioni su X dei segmenti di tangente e di normale delimitati dal punto T di tangenza e dall'incontro con le ascisse e che: $S_t = -\frac{yx'}{y'}$; ed $S_N = \frac{yy'}{x'}$, in particolare per la sottonormale alla cicloide si

particolare per la sottonormale alla cicloide si ha:

$$\boxed{S_N} = \frac{yy'}{x'} = \frac{r^2(1-\cos(\varphi))(\operatorname{sen}(\varphi))}{r(1-\cos\varphi)} = \boxed{r\,\operatorname{sen}(\varphi)}$$

$$\boxed{S_N = r\,\operatorname{sen}(\varphi)}$$

È la proiezione sull'asse delle ascisse del raggio ruotato di φ.

I rapporti fra la lunghezza dell'arco di cicloide normale e l'ordinata.

$$s = -4r\left[\cos(\varphi/2)\right]_0^{\varphi} = 4r\left(1-\cos(\varphi/2)\right)$$

$$y = r(1-\cos\varphi) = 2r\,\text{sen}^2\frac{\varphi}{2} = 2r\left(1-\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) = 2r\left(1-\cos(\varphi/2)\right)\left(1+\cos(\varphi/2)\right)$$

$$\boxed{\frac{s}{y} = \frac{2}{\left(1+\cos(\varphi/2)\right)}}$$

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \left(1-\frac{s}{4r}\right) = \sqrt{1-y/2r}\ ;$$

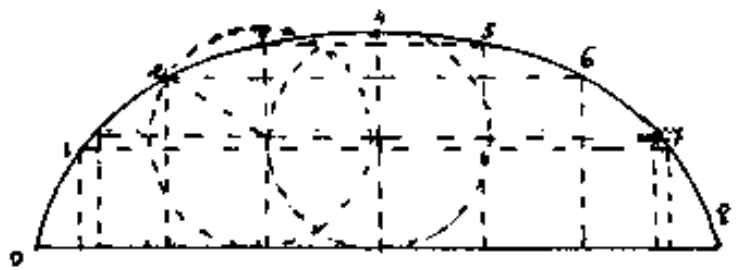
$$\boxed{s = 4r\left(1 \mp \sqrt{1-y/2r}\right)}\ ; \qquad \boxed{y = \left(s - s^2/8r\right)}$$

s/r	y/r	$\cos(\varphi)$	$\varphi_{(rad)} = \frac{x_r}{r}$	x
0	0	1	0	0
1	7/8	1/8	$(0,4601)\pi$	$(\pi-2,688)$
$4-2\sqrt{2}$	1	0	$\pi/2$	$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$
2	3/2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$(\pi-1,9132)$
3	15/8	$-7/8$	$(0,8391)\pi$	$(\pi-0,9895)$

La tabella a fianco consente una facile costruzione di punti caratteristici della cicloide normale, ove la cicloide viene divisa in archi lunghi r, (salvo

4	2	-1	π	π
5	15/8	$-7/8$	$(1,16086)\pi$	$(\pi+0,9885)$
6	3/2	$-1/2$	$\frac{4}{3}\pi$	$(\pi+1,9132)$
$4+2\sqrt{2}$	1	0	$\frac{3}{2}\pi$	$(\frac{3}{2}\pi+1)$
7	7/8	1/8	$(1,539893)\pi$	$(\pi+2,688)$
8	0	1	2π	2π

i punti $y=1$).

(la cicloide rettificata è: $\underline{8 \cdot r}$)

Il Baricentro della Linea Cicloide.

$$ds = r\sqrt{1+K^2-2K\cos(\varphi)}\ d\varphi.$$

Sappiamo che, per simmetria, l'ascissa del baricentro :

$$\boxed{x_G/r = \pi}$$

Dobbiamo trovare l'ordinata: $\boxed{y_G = \frac{S_{(x)}}{8r}}$;

Il momento statico rispetto ad x:

$$S_{(x)} = \int y \cdot ds = \int_0^{2\pi} r^2(1-K\cos(\varphi))\left(\sqrt{1+K^2-2K\cos(\varphi)}\right)d\varphi$$

Per la cicloide normale $K=1$; ricordando che: $(1-\cos(\varphi)) = 2\,\mathrm{sen}^2(\frac{\varphi}{2})$

$$S_{(x)} = r^2\int_0^{\varphi=2\pi}\left(2\,\mathrm{sen}^2(\varphi/2)\sqrt{2(2\,\mathrm{sen}^2(\varphi/2))}\right)d\varphi = 8r^2\int_0^{\varphi/2\pi}\mathrm{sen}^2(\varphi/2)\,\mathrm{sen}(\varphi/2)\,d(\varphi/2)$$

$$S_{(x)} = -8r^2\int_0^{\varphi=2\pi}(1-\cos^2\tfrac{\varphi}{2})\,d(\cos(\tfrac{\varphi}{2})) = -8r^2\left[\cos(\tfrac{\varphi}{2})-\tfrac{1}{3}\cos^3(\tfrac{\varphi}{2})\right]_0^{\varphi=2\pi}$$

$$S_x = -8r^2\left[\left(-1-(-\tfrac{1}{3})\right)-\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\right] = -8r^2\left(-2+\tfrac{2}{3}\right) = 8r^2\left(2-\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\boxed{S_x = 8r^2(4/3)} = \left(\frac{32}{3}r^2\right)$$

$$y_G = \frac{S_x}{} = \frac{8r^2(4/3)}{} \quad \boxed{y_G = 4/r}$$

$$y_G = \frac{S_x}{L} = \frac{8r^2(4/3)}{8r} \; ; \quad \boxed{y_G = \frac{4}{3} r}$$

Se vogliamo l'area della superficie del solido generato dalla cicloide per una rotazione intorno le ascisse, basta moltiplicare $S_{(x)}$ per l'angolo di rotazione. Per un giro completo: $\boxed{A} = \left(\frac{32}{3} r^2\right) 2\pi = \boxed{\frac{64}{3} r^2 \pi}$

Baricentro dell'area della cicloide normale

$X_G = r\pi$ (per simmetria); $y_G = \dfrac{S_{(x)}}{Area}$

$$S_x = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\left(r^2(1-\cos\varphi)\right)^2}{2} \right) r(1-\cos\varphi)\, d\varphi = \frac{r^3}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos\varphi)^3\, d\varphi ;$$

$$S_x = \frac{r^3}{2}\int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi)\, d\varphi = \frac{r^3}{2}\left[\varphi - 3\sin\varphi + \frac{3}{2}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi) - \sin\varphi + \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$S_x = \frac{r^3}{2}\left[\frac{5}{2}\varphi - 3\sin\varphi + \frac{3}{2}(\sin\varphi\cos\varphi) + \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$S_x = \frac{r^3}{2}\left((5\pi - 0 + 0 + 0) - (0)\right)$$

$$S_x = \frac{5}{2} r^3 \pi$$

quindi:

$$y_G = \frac{\left(\frac{5}{2} r^3 \pi\right)}{3 r^2 \pi} \qquad y_G = \frac{5}{6} r$$

Se vogliamo il volume del solido generato

dall'area della cicloide normale, che ruota intorno all'asse delle ascisse, basta moltiplicare S_x per l'angolo. (nel caso di un giro completo) avremo:

$$V = S_x \cdot 2\pi = \left(\frac{5}{2} r^3 \pi\right) \cdot (2\pi)$$

$$\boxed{V = 5 r^3 \pi^2}$$

I raggi di curvatura della Cicloide

Le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = r(\varphi - K \operatorname{sen}\varphi) \\ y = r(1 - K\cos\varphi) \end{cases}$$

consentono il calcolo del raggio di curatura applicando la formula:

$$R = \frac{\left(x'^2_{(\varphi)} + y'^2_{(\varphi)}\right)^{3/2}}{y''_{(\varphi)} x'_{(\varphi)} - y'_{(\varphi)} x''_{(\varphi)}} \quad (\varphi = \text{parametro})$$

$$x'_{(\varphi)} = \frac{dx_{(\varphi)}}{d\varphi} = r(1 - K\cos\varphi) \rightarrow x'^2_{(\varphi)} = r^2(1 + K^2\cos^2\varphi - 2K\cos\varphi)$$

$$y'_{(\varphi)} = \frac{dy_{(\varphi)}}{d\varphi} = r(+K\operatorname{sen}\varphi) \rightarrow y'^2_{(\varphi)} = r^2(+K^2\operatorname{sen}^2\varphi)$$

$$x'^2_{(\varphi)} + y'^2_{(\varphi)} = r^2(1 + K^2 - 2K\cos\varphi)$$

$$x''_{(\varphi)} = r(+K\operatorname{sen}\varphi) \rightarrow \quad y''_{(\varphi)} x'_{(\varphi)} = r^2(K\cos\varphi - K^2\cos^2\varphi)$$

$$y''_{(\varphi)} = r(+K\cos\varphi) \rightarrow \quad y'_{(\varphi)} x''_{(\varphi)} = r^2(\qquad + K^2\operatorname{sen}^2\varphi)$$

$$\left(y''_{(\varphi)} x'_{(\varphi)} - y'_{(\varphi)} x''_{(\varphi)}\right) = r^2(K\cos\varphi - K^2)$$

$$R = r\frac{(1 + K^2 - 2K\cos\varphi)^{3/2}}{(K\cos\varphi - K^2)}$$

$$(K\cos\varphi - K^2)$$

Se la cicloide è normale: $K = 1$

$$R = r\frac{2\sqrt{2}(1-\cos\varphi)\sqrt{(1-\cos\varphi)}}{(1-\cos\varphi)}$$

$$\boxed{R = r(2\sqrt{2})\sqrt{(1-\cos\varphi)}} \qquad R = (r)2\sqrt{2\left(2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)}; \qquad \boxed{R = r\left(4\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right)}$$

per $\varphi = 0 \rightarrow R = 0$; nel vertice $\varphi = \pi \rightarrow R = 4r$

Abbiamo visto che le equazioni parametriche, sono state trasformate in cartesiane esplicitando x:

$$x = r\left(\arccos\left(\frac{1-y/r}{K}\right) - \sqrt{K^2-(1-y/r)^2}\right)$$

e che difficilmente è esplicitabile in y. (posto r=1)

Consideriamo gli assi scambiati e deriviamo in X

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-y}{K}\right)^2}}\left(\frac{-1}{K}\right) - \frac{2(1-y)(-1)}{2\sqrt{K^2-(1-y)^2}}\right) = \frac{1-1+y}{K\sqrt{1-\left(\frac{1-y}{K}\right)^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{K^2-(1-y)^2}}$$

facciamo la derivata seconda:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{K^2-(1-y)^2-y(1-y)}{[K^2-(1-y)^2]^{3/2}} = \frac{K^2-1+2y-y^2-y+y^2}{[K^2-(1-y)^2]^{3/2}} = \frac{(K^2-(1-y))}{(K^2-(1-y)^2)^{3/2}}$$

$$-R = \frac{(1+x'^2)^{3/2}}{x''} = \frac{\left(1+\frac{y^2}{K^2-(1-y)^2}\right)^{3/2}}{\frac{K^2-(1-y)}{(K^2-(1-y)^2)^{3/2}}} = \frac{\left(K^2-(1-y)^2+y^2\right)^{3/2}}{\left(K^2-(1-y)\right)}$$

$$\therefore R = \frac{(K^2-1+2y-y^2+y^2)^{3/2}}{(K^2-1+y)}$$ e reintroducendo r abbiamo

R funzione di y

$$-R = r\frac{\left(K^2 - 1 + 2y/r\right)^{3/2}}{\left(K^2 - 1 + y/r\right)}$$

posto $y/r = (1 - K\cos\varphi)$ sostituendo si ha:

$$-R = r\frac{\left(K^2 - 1 + 2(1 - K\cos\varphi)\right)^{3/2}}{K^2 - 1 + 1 - K\cos\varphi} = \frac{\left(K^2 + 1 - 2K\cos\varphi\right)^{3/2}}{K(K - \cos\varphi)}$$

$$-R = r\frac{\left(1 + K^2 - 2K\cos\varphi\right)^{3/2}}{\left(K^2 - K\cos\varphi\right)}$$

(già trovata)

Qualora $K=1$ (cicloide normale)

$$R = \frac{(1-1+2y)^{3/2}}{(1-1+y)} = R = \frac{2y\sqrt{2y}}{y}$$

$$\boxed{R = r \cdot 2\sqrt{2y/r}}$$ (espresso in y per la cicloide normale)

od anche: $R = (2\sqrt{2})(\sqrt{y/r})\,r = \boxed{R = 2\sqrt{2}\sqrt{r \cdot y}}$

da cui: $\left(\frac{R^2}{8}\right) = (ry)$ oppure: $R^2 = (8r)y$

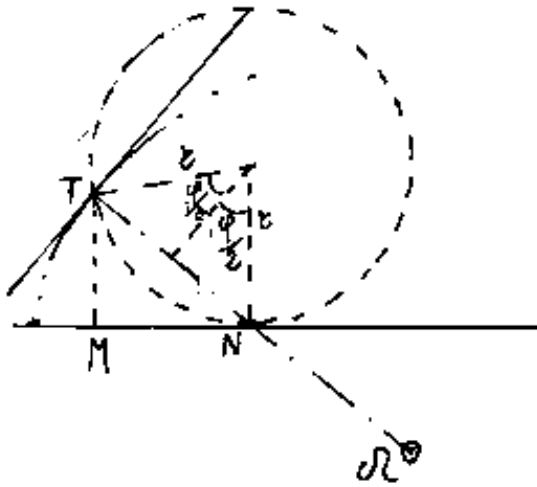
cioè: $\boxed{y : R = R : 8(r)}$ $(y : R = R : 4\phi)$

Nella cicloide ordinaria il raggio di curvatura è medio proporzionale fra l'ordinata corrente ed il quadruplo del diametro della circonferenza generatrice.

quando $y = 2r \Rightarrow R = \sqrt{(2r)(8r)} = 4r$ (come già trovato)

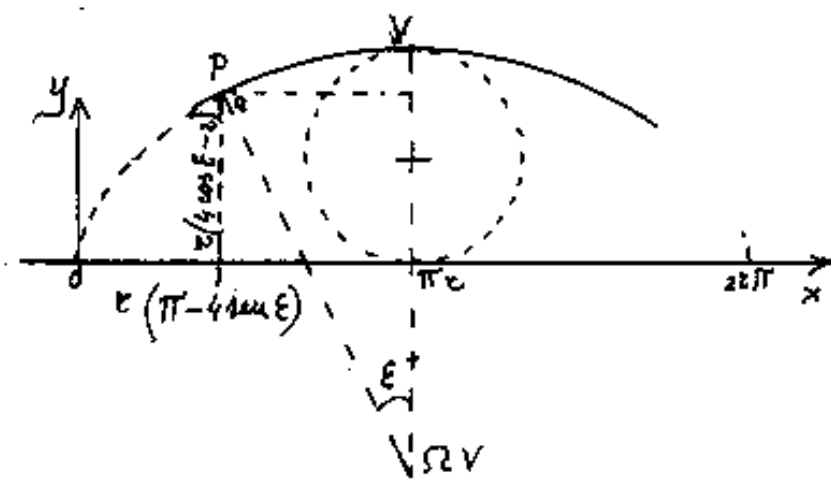
quindi nel vertice $R = 2y$

La formula: $\boxed{R = r\left(4 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}\right)}$ consente importanti osservazioni. Si noti infatti che se T è un pun

to della cicloide, il segmento $\overline{TN}$ della sua normale e corda della circonferenza generatrice è dato $\left(\overline{TN} = 2r\,sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) = R/_2$. Quindi raddoppiando $\overline{TN}$ si ha il centro Ω di R : $\boxed{\overline{\Omega T} = 4\,r\,sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$ per ciascun punto della cicloide.

La costruzione grafica della cicloide utilizzando i raggi di curvatura

Si nota che il raggio $R = 4r \operatorname{sen}(\varphi/2)$, varia proporzionalmente a $\operatorname{sen}(\varphi/2)$, che la variazione di $\operatorname{sen}(\varphi/2)$, cioè: $d(\operatorname{sen}(\varphi/2)) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\varphi}{2})\,d\varphi$; che tale variazione è minima per $\varphi = \pi$; $(\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}$; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0)$. Cio' vuol o

Cio' vuol dire che il cerchio osculatore, nel vertice della cicloide, di raggio pari a $4r$, copre sensibilmente la cicloide per un tratto abbastanza grande.

Calcoliamo l'errore:

Sia V il vertice della cicloide a cui corrisponde il centro ΩV del cerchio osculatore nel vertice il cui Raggio $R = 4r$.

Un punto P della circonferenza che stia su un raggio inclinato di ε rispetto alla normale in V. (cioè: $\overline{\Omega_V V}$)

gio inclinato di ε rispetto alla normale in V, (cioè: $\overline{\pi_r V}$), avrà per coordinate: $x_p = (\pi \mp 4\,\mathrm{sen}\,\varepsilon)r$; $y_p = (4\cos(\varepsilon) - 2)r$;

Un punto Q_1 della cicloide abbia la stessa ascissa $x_p = x_{Q_1} = (\pi \pm 4\,\mathrm{sen}\,\varepsilon)r = r(\varphi - \mathrm{sen}\,\varphi) = -r(\mathfrak{J}\mathrm{sen}\,\varphi)$ da cui mediante l'operatore $\mathfrak{J}\mathrm{sen}\,\varphi = (\mathrm{sen}\,\varphi - \varphi)$ è possibile esplicitare $\varphi_{Q_1} = \arg \mathfrak{J}\mathrm{sen}[4\,\mathrm{sen}\,\varepsilon \pm \pi]$. Se Q ha la stessa ordinata y_{Q_1}

$y_Q = r(4\cos\varepsilon - 2) = r(1 - \cos\varphi) = y_p$; $\cos\varphi = (3 - 4\cos\varepsilon)$ da cui $\varphi_Q = \arccos(3 - 4\cos\varepsilon)$ (valore di φ_Q affinché: $y_p = y_Q$:

da cui $\operatorname{sen}(\varphi_Q) = \operatorname{sen}[\arccos(3-4\cos\varepsilon)] = \sqrt{1-(3-4\cos\varepsilon)^2}$

Sostituendo:

$$x_Q = \left(\arccos(3-4\cos\varepsilon) - \sqrt{1-(3-4\cos\varepsilon)^2}\right) r$$

Per $\varepsilon = 5°$ ove: $y_{cerchio} = r(1{,}984778792)$; $X_{cerchio} = r(2{,}793080688)$

per la cicloide avente la stessa y; $X_{cicloide} = (2{,}792969683)r$

con un errore di $\Delta x = (0{,}000111005)\,r$ (in ascisse)

cioè se la circonferenza generatrice ha per raggio:

$r = 1$ cm l'errore è $\simeq \frac{1}{1000}$ di millimetro

$r = 10$ cm " " $\simeq \frac{1}{100}$ " "

$r = 1$ m " " $\simeq \frac{1}{10}$ " "

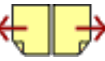
Con r 1 metro la cicloide è lunga 8 metri (grande per un disegno e l'errore grafico di $\simeq \frac{1}{10}$ di millimetro è quasi tollerabile.

Per $\varepsilon = 10°$ ed $r = 1$ metro; $\Delta x = 0{,}000893949$ cioè $\simeq \frac{9}{10}$ di millimetro

Infine con $\varepsilon = 20°$ l'errore $\Delta x = (0{,}0073495)\,r$, che per una cicloide lunga 24 cm, cioè $r = 3$ cm, l'errore Δx è $\simeq \frac{2}{10}$ di mm. non più accettabile per un buon disegnatore.

Questi errori sono calcolati solo sulla diversità in

questi valori sono calcolati sulla differenza in ascissa fra P e Q di pari ordinata $y_P = y_Q$, ma in effetti il metodo non è ortodosso, perché se noi calcolassimo l'errore nelle ordinate $\Delta_y = y_P - y_{Q_1}$ a parità di ascisse $x_P = x_{Q_1}$, troveremmo valori diversi.

Consideriamo un punto Q della cicloide, le cui coordinate sono definite dalle equazioni parametriche in funzione di r e di φ;

L'evoluta della cicloide

Abbiamo già visto che il raggio di curvatura in un punto T della cicloide è dato da $R = 2\overline{TN}$ cioè dal doppio del segmento di normale che va da T al punto N d'incontro con le ascisse (ed N è anche il punto di tangenza del cerchio generatore.

Il luogo geometrico di tutti i punti $\mathcal{R}$ centro dei cerchi osculatori della cicloide si chiama Evoluta della cicloide mentre la cicloide è la Evolvente di quella evoluta.

Cerchiamo l'equazione dell'evoluta:

$$X_{\mathcal{R}} = X_P = \overline{ON} + \overline{NP}$$

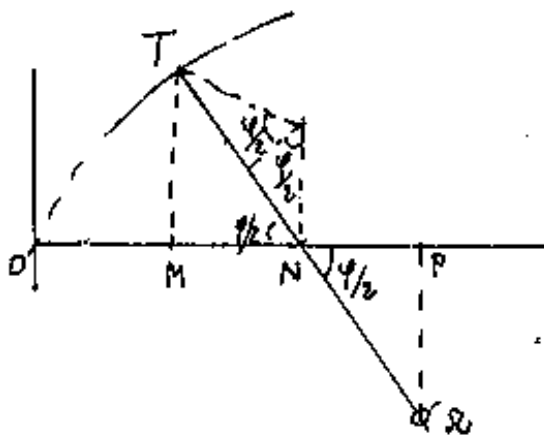
$$X_{\mathcal{R}} = r\varphi + \overline{\mathcal{R}N}\cos\varphi/2 =$$

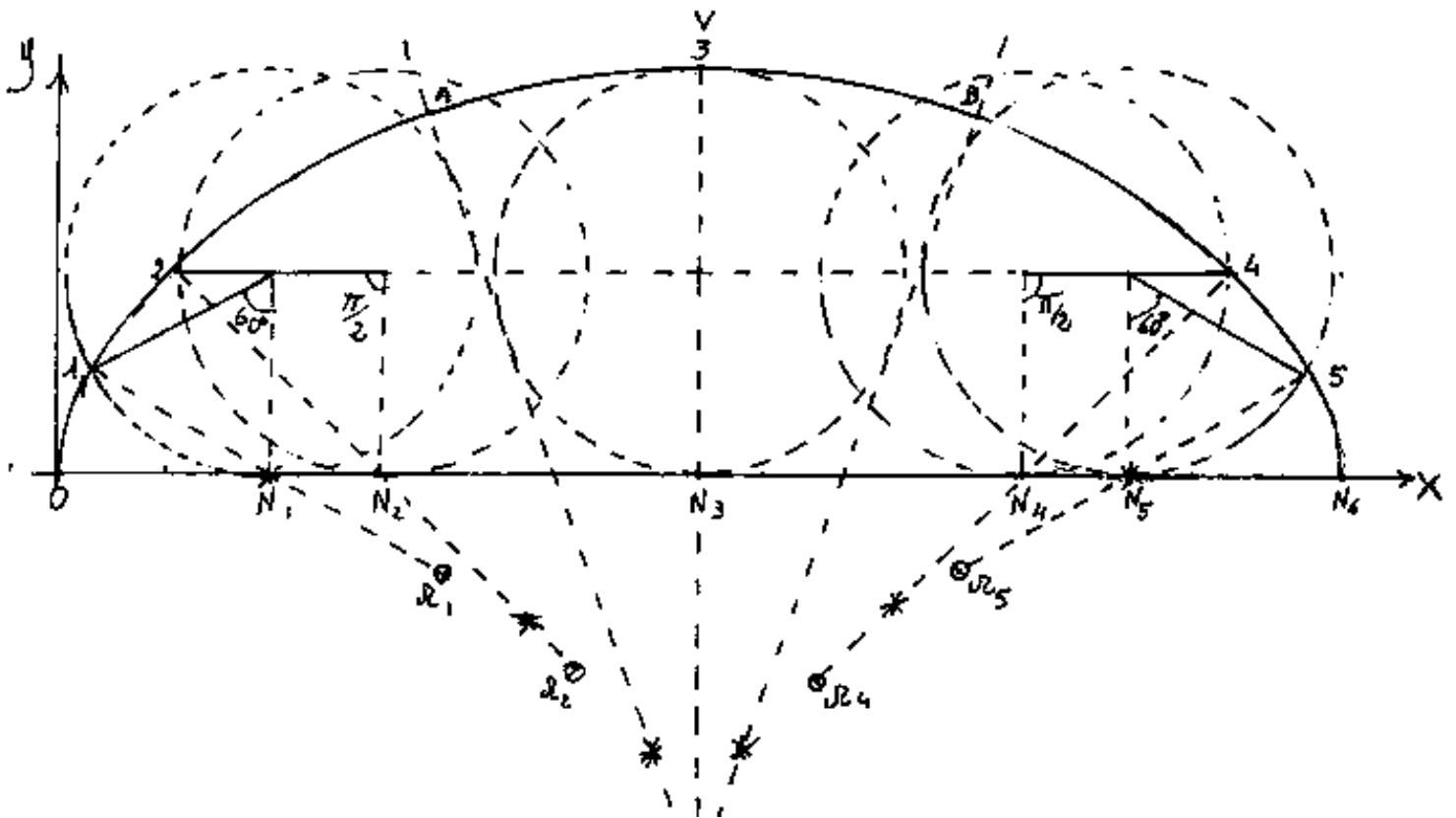
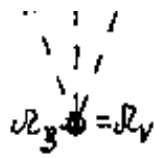
$$X_{\mathcal{R}} = r\varphi + \frac{R}{2}\cos\varphi/2$$

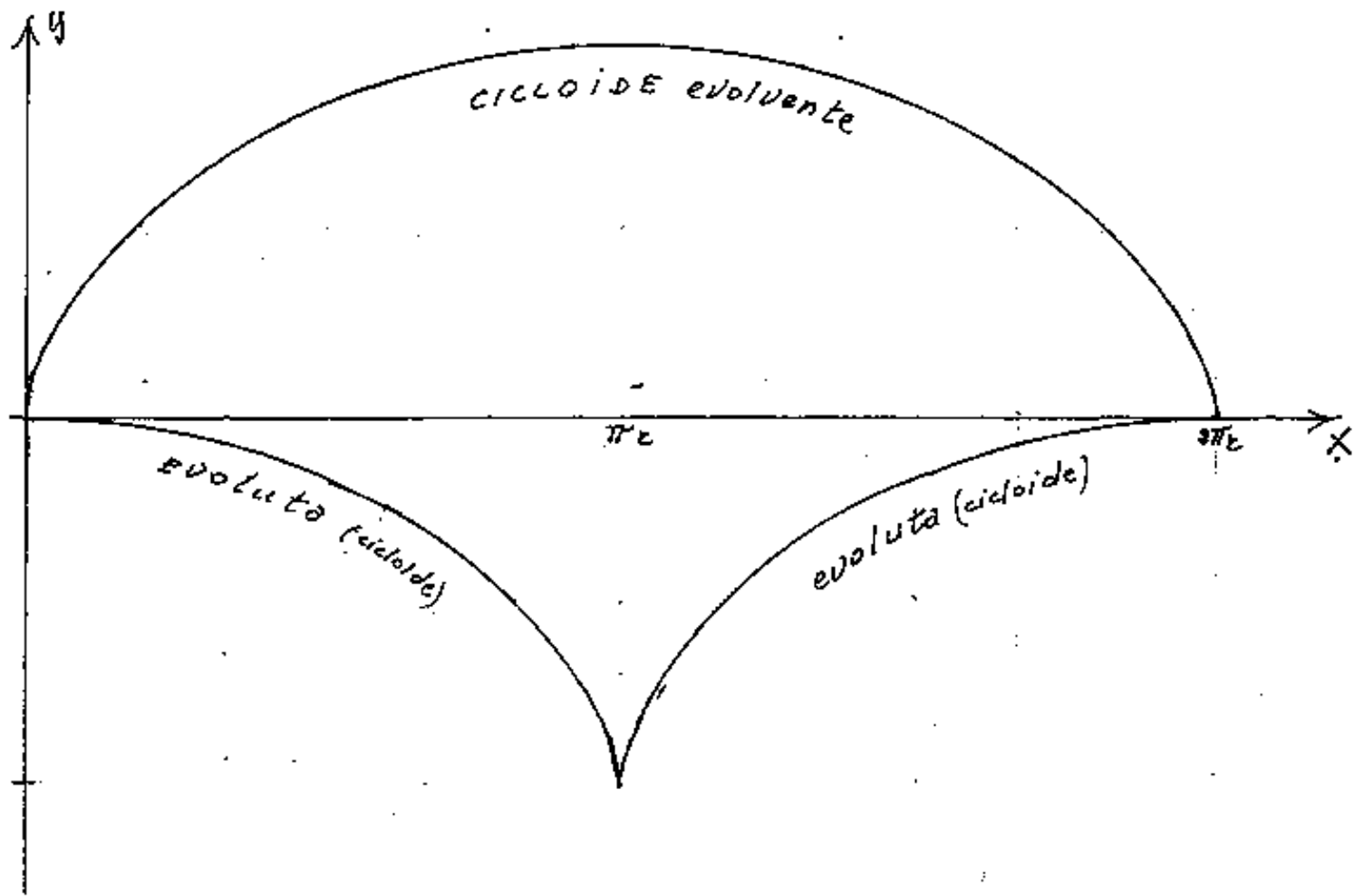
$$X_{\mathcal{R}} = r\varphi + \left(2r\,\text{sen}\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}$$

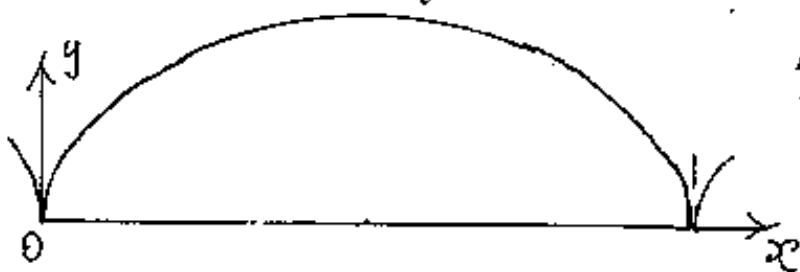
$$\boxed{X_{\mathcal{R}} = r(\varphi \pm \text{sen}\,\varphi)}$$

$$Y_{\mathcal{R}} = \frac{-R}{2}\text{sen}\frac{\varphi}{2} = -\left(2r\,\text{sen}\frac{\varphi}{2}\right)\text{sen}\frac{\varphi}{2} = \left(2r\,\text{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right) = \boxed{Y_{\mathcal{R}} = -r(1-\cos\varphi)}$$

ma i valori trovati per x_α ed y_α sono ancora le coordinate parametriche di una cicloide ad $y<0$ avente la circonferenza generatrice con lo stesso raggio r che rotola su una retta $y=-2r$ ed inizia col centro O degli assi che corrisponde al vertice, mentre la cuspide si trova per $x_\alpha = \pi \cdot r$.

Modo di procedere

Si segna in ascisse un segmento pari alla lunghezza della circonferenza generatrice: $(2\pi)r$.
Si tracciano perpendicolari in $X_{N_1} = \frac{\pi}{3}r$; $X_{N_2} = \frac{\pi}{2}r$; $X_{N_3} = r\pi$; $X_{N_4} = \frac{3}{2}\pi r$; $X_{N_5} = \frac{5}{3}\pi r$; in questi punti si tracciano le tangenti circonferenze generatrici, e si trovano facilmente i punti della corrispondente cicloide: 1, 2, 3, 4, 5, 6; rispettivamente: $\varphi_1 = 60°$; $\varphi_2 = 90°$; $\varphi_3 = 180°$; $\varphi_4 = 270°$; $\varphi_5 = 300°$.

$R_3 = R_V$

Trovato il centro $R_3 = R_V$ sulla normale da N_3 alla x ; $\overline{N_3 R_V} = 2r_i$ si tracciano le tangenti al cerchio di N_3 per delimitare l'arco $\widehat{AB}$ di centro R_V e raggio: $4r$. Si unisce 2 con N_2 e si raddoppia il segmento: $(2-N_2)2 = 2R_2$ per trovare il centro del cerchio osculatore in 2, analogamente in 1,4,5 si tracciano i cerchi e si raccordano in 0 e 6 con centri in N_1 ed N_5. Si notino * i centri per raccordare.

L'evoluta di una cicloide è ancora composta da due rami della stessa cicloide ad assi spostati:

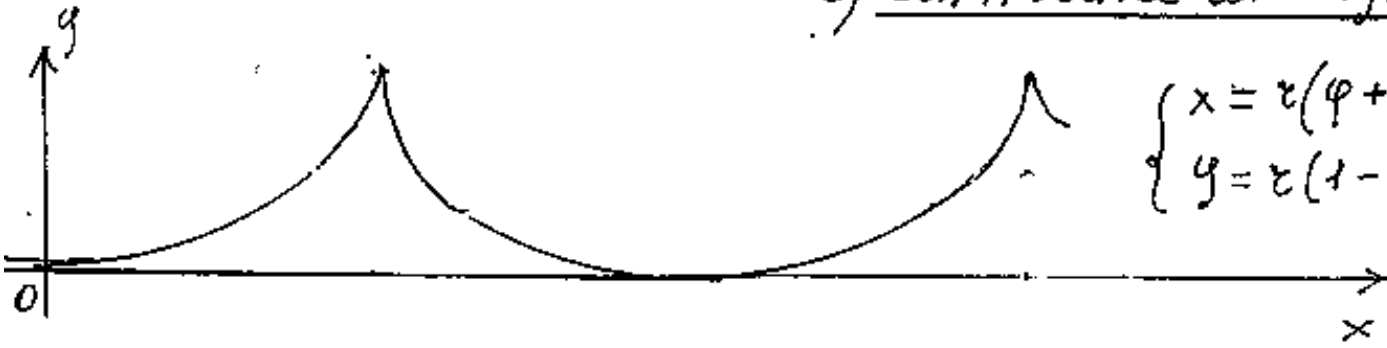
Si distinguono due tipi di cicloide:

1) con la cuspide all'origine

$$\begin{cases} x = r(\varphi - \sin\varphi) \\ y = r(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

2) con il vertice all'origine

y

O

x

$$\begin{cases} x = r(\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \\ y = r(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

L'evoluta della cicloide con cuspide all'origine è una cicloide con vertice all'origine, ma con ordinate di segno opposto.

una costruzione grafica, con la quale possiamo renderci conto della precisione con la quale riusciamo a disegnare è la seguente.

Tracciato un segmento divisibile in 24 parti (per es. 24 cm.), sul suo asse si fissano due punti da banda opposta pari a due raggi r (ove: $r = \frac{24}{2\pi}$. è il raggio della circonferenza generatri ce.) Con centro sull'asse si traccia questa circonferenza in modo che sia tangente al segmento (e lo sarà nel suo punto di mezzo)

Si divide la circonferenza in 24 parti facendo centro sugli estremi dei due diametri: orizzontale e verticale e dei due dia metri a 45°.

Si numerano i punti sulla circonferenza a partire con 0 nel punto di tangenza, ove si sovrapporrà 24.

Si numerano le divisioni del segmento da 0 a 24 con 12 nel punto di tangenza con la circonferenza che porta i n° 0 e 24.

Si numera con gli stessi numeri la retta $y = r$, luogo delle posizioni del centro della circonferenza generatrice.

posizioni del centro della circonferenza generatrice.
Si uniscono con rette orizzontali i punti di divisione della cir-
conferenza (la somma dei due è sempre 24). Si tracciano archetti di raggio
r e centro sulla retta dei centri nei punti 1, 2, 3, .. ora numerati
fino ad incontrare l'omonima retta orizzontale : 1, 2, 3 ...
i punti di incontro sono punti della cicloide che si unicono con
gli omonimi sulle ascisse e raddopiando i segmenti si trovano
i corrispondenti centri Ω dei cerchi osculatori.

Il disegno, sia per la simmetria, sia per le particolari caratteristiche della cicloide ammette una molteplicità di controlli per verificare la curatezza del disegno.

Le rette orizzontali distano come le differenze dei coseni di φ moltiplicate per r.

Nel disegno si è evidenziata la costruzione del punto 8 della cicloide come intersezione della retta 8 con l'archetto di raggio r e centro 8.

Per i punti 1, 2, 3 od anche 23, 22, 21 l'errore grafico può essere alto.

È anche importante confrontare i punti della cicloide evolvente coi punti della cicloide evoluta. (Cioè ponendo i corrispondenti in verticale)

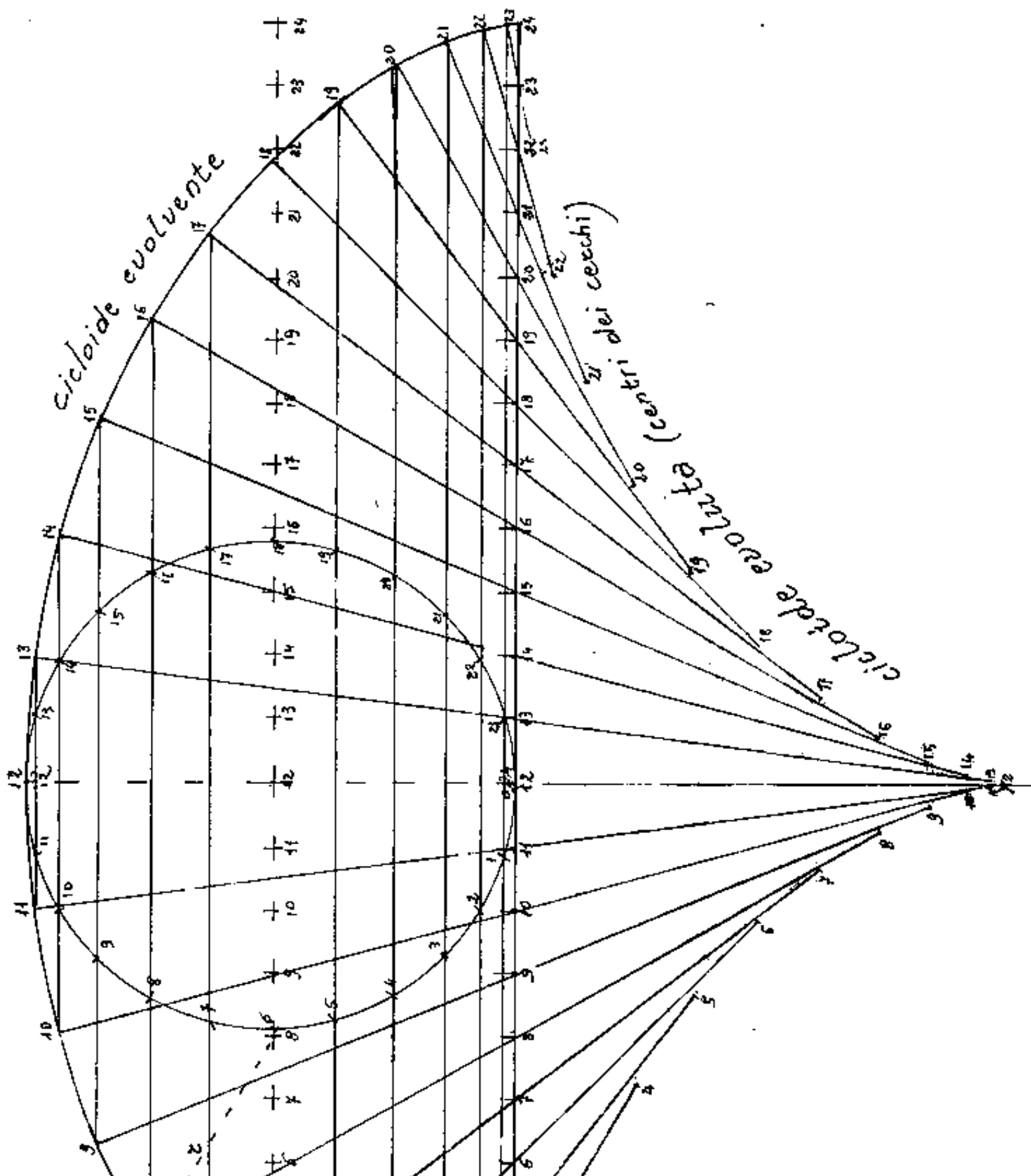
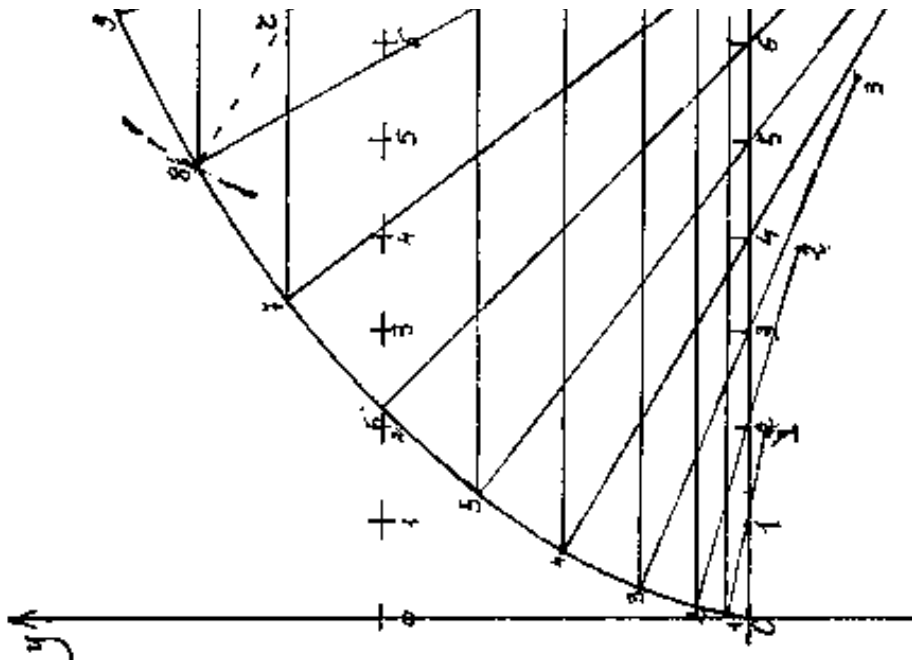
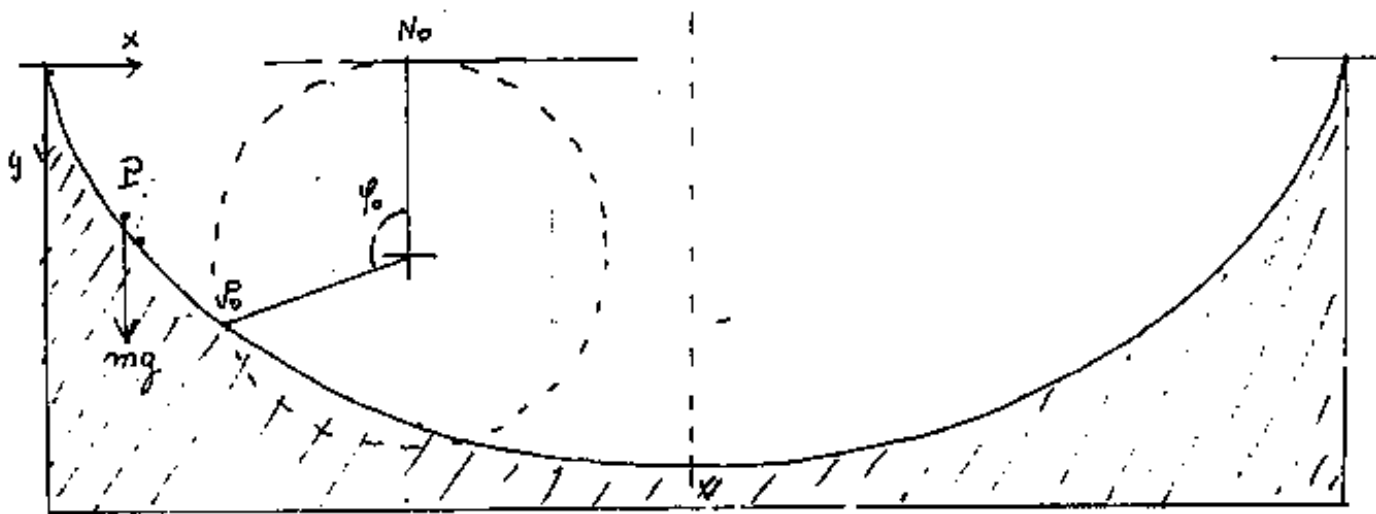
punti evoluta : 0 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 : (evolvente)
punti evolvente : 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 (evoluta)

(Basta prendere un foglio di carta trasparente per

rilevare la corrispondenza.

Nel disegno si è utilizzata la frazione $\frac{22}{\pi} = 7,002817496$ arrotondando a 7 (come facevano gli antichi ove: $\pi \simeq \frac{22}{7}$)

Cicloide evolvente

cicloide evoluta (centri dei cerchi)

Il problema della tautócrona

Consideriamo, in campo gravitazionale, una vaschetta a profilo cicloidale priva di attriti.

Un punto P di massa m e quindi di peso "mg" venga abbandonato in un punto qualsiasi della cicloide: Esso tenderà a scivolare verso il basso cioè secondo la direzione della gravità, nel cui verso abbiamo posto l'asse delle y.

Calcoliamo il tempo impiegato dal punto per passare da P_0 a P_1

La differenza ΔE di energia potenziale per passare da P_0 a P_1 sarà:

sare da P_0 a P_1 sarà:

$$\Delta E = mg(y_1 - y_0)$$

D'altra parte la perdita di energia potenziale si sarà trasformata in energia cinetica: $E_c = \frac{1}{2} m V^2$.

cioè:

$$\frac{1}{2} m V^2 = mg(y_1 - y_0)$$

per cui:

$$\boxed{V^2 = 2g(y_1 - y_0)}$$

(nota formula della fisica)

sostituendo y si ha:

$$v^2 = 2g\left((1-\cos\varphi_1)-(1-\cos\varphi_0)\right)r$$

$$v^2 = 2g\left(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1\right)r$$

Sia N il punto di contatto del cerchio generatore della cicloide con l'asse x e sia φ l'angolo che il raggio passante per N forma col raggio passante per il punto P della cicloide, generato dal cerchio in N.

Le coordinate di P sono:

$$x = r(\varphi - \operatorname{sen}\varphi)$$
$$y = r(1 - \cos\varphi)$$

derivando rispetto al tempo avremo:

$$\frac{dx}{dt} = r(1-\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = r(\operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi/dt$$

essendo la velocità: $v = \frac{ds}{dt}$ da cui: $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

cioè: $v^2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{(dy)^2 + (dx)^2}{(dt)^2}$

$$v^2 = r^2\left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2\left(\operatorname{sen}^2\varphi\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 =$$

$$\boxed{v^2 = r^2\left(2 - 2\cos\varphi\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

$$v^2 = 2r^2(1-\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

confrontando con la:

$$v^2 = 2g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)r \quad (\text{ove } \varphi_1 = \varphi) \text{ (generico)}$$

si ha:

$$2r^2(1-\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)r$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right)}$$

$$dt = \sqrt{\frac{r}{g}}\sqrt{\frac{(1-\cos\varphi)}{(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}}\,d\varphi$$

Integrando fra 0 e t_1 avremo:

$$t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\sqrt{\frac{(1-\cos\varphi)}{(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}}\right)d\varphi$$

Poiché t_1 è essenzialmente positivo, assumeremo positivo

Poiché t_1 è essenzialmente positivo, ...

il segno delle radici.

tenuto conto che: $(1-\cos\varphi) = 2\operatorname{sen}^2 \varphi/2$

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\sqrt{\frac{2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi/2}{(2\cos^2 \varphi_0/2 - 2\cos^2 \varphi/2)}} \right) d(\varphi/2).$$

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\frac{-d\cos(\varphi/2)}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0/2 - \cos^2 \varphi/2}} \right)$$

$$t_1 = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\left(\frac{\cos(\varphi/2)}{\cos(\varphi_0/2)}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\cos^2 \varphi/2}{\cos^2 \varphi_0/2}\right)}} =$$

$$t_1 = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[\arccos\left(\frac{\cos \varphi/2}{\cos \varphi_0/2}\right)\right]_{\varphi_0}^{\varphi}$$

$$t_1 = +2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[\arccos\left(\frac{\cos \varphi/2}{\cos \varphi_0/2}\right) - \arccos \frac{\cos \varphi_0/2}{\cos \varphi_0/2}\right)$$

$(\arccos 1 = 0)$

$$\boxed{t_1 = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \left(\arccos\left(\frac{\cos \varphi/2}{\cos \varphi_0/2}\right)\right)}$$

ed anche:

$$\boxed{t_1 = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[\arcsen\left(\frac{\cos \varphi/2}{\cos \varphi_0/2}\right) - \frac{\pi}{2}\right]}$$

Per giungere al punto più basso (V) ove: $\varphi_1 = \pi$

$\frac{\varphi_1}{2} = \pi/2 \quad \cos \frac{\varphi_1}{2} = 0 \quad : (\varphi_1 = \varphi)$ sostituendo abbiamo:

che il tempo T per raggiungere il punto più basso è:

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

Indipendente dal punto di partenza (4°)

Cioè qualunque sia il punto di partenza impiega lo stesso tempo a raggiungere il vertice.

Cioè, se disponiamo di una vaschetta a profilo cicloidale, e da due punti qualsiasi lasciamo liberi due corpi, essi si incontreranno in V.

Il problema inverso è quello di cercare la curva, in un piano verticale, tale che, abbandonando su di essa un punto pesante, qualunque sia dove abbandoniamo il punto, esso impiega sempre lo stesso tempo per giungere al vertice.

La risposta a tale problema è che la curva richiesta è <u>una cicloide</u>; perciò la cicloide si chiama anche: <u>curva tautòcrona</u>.

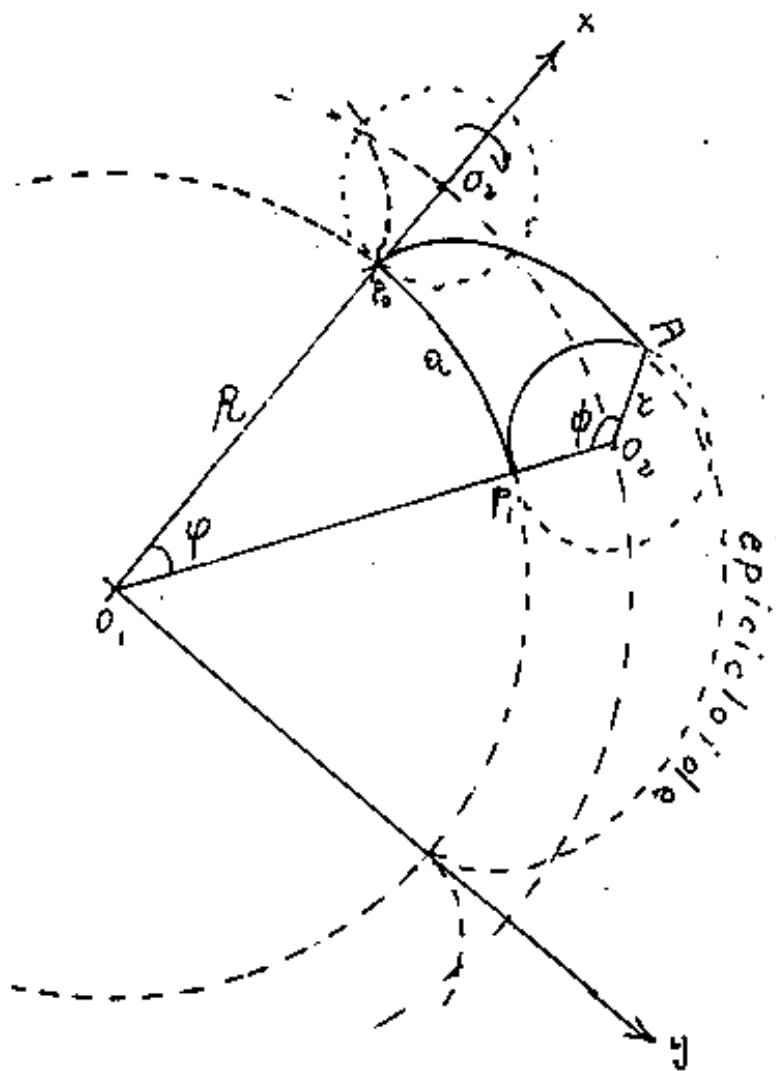
Così il pendolo di Hüygens dove, in assenza di attriti, la massa puntiforme, per l'energia cinetica acquisita, risale ad una quota pari a quella di partenza. Generalizzazione del principio Galileiano dell'isocronismo delle piccole oscillazioni.-

Qui infatti (sulla vasca a profilo cicloidale) sono isocro

ne le oscillazioni qualunque sia il punto di partenza.

La formula del pendolo è solo approssimata, quella della cicloide è esatta. Tuttavia a causa dell'attrito ha trovato scarse applicazioni pratiche. Invece sarebbe fondamentale proprio per lo studio dell'attrito.

Epicicloide, ipocicloide, pericicloide

Epicicloide

L'epicicloide è la traettoria di un punto A di una circonferenza di raggio r, che rotola senza strisciare su un'altra circonferenza fissa di raggio R, esternamente ad essa.

Questo movimento è condizionato dall'uguaglianza degli archi che sono venuti a contatto:

$$R\varphi = r\phi \qquad \frac{R}{r} = \frac{\phi}{\varphi}$$

Quando la circonferenza mobile ha compiuto un

Quando la circonferenza mobile ha compiuto un intero giro, il suo arco $r\phi = r2\pi$; sulla circonferenza fissa sarà stato percorso l'arco $R\varphi = 2r\pi$.
Inversamente quando sulla circonferenza fissa è stato compiuto il giro $R2\pi$ si verificano casi diversi a seconda che $R \gtreqless r$ e che: $R = nr$ abbia n intero. In figura abbiamo posto $R = 4r$

in modo che in un giro completo intorno al cerchio fisso, si generino quattro epicicloidi intere.

Con "n" tendente all'infinito, "r" tende a zero per cui una circonferenza può riguardarsi come costituita da infinite epicicloidi di raggio nullo.

Se n non è intero avverrà che al primo giro avremo una frazione di epicicloide (eventualmente oltre un numero intero di epicicloidi)

se "n" = $\frac{l}{m}$ dopo "m" giri, il punto che traccia le epicicloidi, sarà tornato al punto di partenza ed avrà tracciato "l" epicicloidi che mutuamente si sovrappongono in parte su parte. Se n è intero qualunque sia il numero di giri si producono sempre le stesse epicicloidi.

Se i numeri R e r sono incommensurabili (come il lato e la diagonale di un quadrato) per quanti giri compia la circonferenza mobile intorno alla fissa non si verificherà mai che il punto tracciante

torni al punto di partenza, cioè che ad un numero intero di giri corrisponda un numero intero di archi di epicicloide. (Il fenomeno non ammette frequenze è aperiodico)

$$ds^2=(n+1)^2\left[\operatorname{sen}^2((n+1)\varphi)+\operatorname{sen}^2(\varphi)-2\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}((n+1)\varphi)+\cos^2((n+1)\varphi)+\cos^2(\varphi)-2\cos(\varphi)\cos((n+1)\varphi)\right]r^2$$

$$ds^2=r^2(n+1)^2\left[2-2\cos\{(n+1)\varphi-\varphi\}\right]d\varphi^2 = ds^2=(n+1)^2r^2\cdot 2\left(1-\cos(n\varphi)\right)d\varphi^2$$

$$ds^2=(n+1)^2\;2\cdot 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\varphi}{2}\right)d\varphi^2\,r$$

$$\boxed{ds=2(n+1)\operatorname{sen}\left(\frac{n\varphi}{2}\right)r\,d\varphi}$$

Lunghezza dell'epicicloide

$$L=\int_0^{2\pi}2(n+1)\operatorname{sen}\left(\frac{n\varphi}{2}\right)r\,d\varphi$$

$$L=\left[-2(n+1)\left(\frac{2}{n}\right)\cos\left(\frac{n\varphi}{2}\right)\right]_0^{2\pi}\cdot r$$

$$L=-4\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\cos(n\pi)-1\right]r$$

$$\boxed{L=4\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[1-\cos(n\pi)\right]r}$$

Formula che calcola la lunghezza di tutti gli archi (o frazione di archi) di epicicloide quando la circonferenza mobile, compie un giro com

pleto intorno alla circonferenza fissa.

Qualora si voglia la lunghezza di un solo arco completo di epicicloide: $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$$L = 4\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(1 - \cos(\pi)\right) r$$

$$\boxed{L = 8\left(\frac{n+1}{n}\right) r}$$

(valida in generale anche per $n = \infty$)

L'equazione può anche scriversi, ponendo ($R = nr$)

$$x = r\left((n+1)\cos\varphi - \cos\left((n+1)\varphi\right)\right)$$

$$y = r\left((n+1)\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\left((n+1)\varphi\right)\right)$$

ed anche (r = modulo)

$$x/r = (n+1)\cos\varphi - \cos[(n+1)\varphi]$$

$$y/r = (n+1)\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}[(n+1)\varphi]$$

(Epicicloidi) nei parametri φ ed n

ove: $n = \frac{R}{r}$ è sempre > 0, per cui: $(n+1) > 1$.

Per ogni diverso "n" si ha una diversa epicicloide; tal volta chiamata con nomi diversi. Come vedremo, alcune curve che nascono da diversa impostazione di luogo geometrico, sono un caso particolare di epicicloide.

Prima di trattare i casi particolari, completiamo i calcoli.

Differenziando si ha:

...di cicloidale si ha:

$$\frac{dx}{d\varphi} = (n+1)\left(\operatorname{sen}((n+1)\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi)\right)r$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = (n+1)\left(\cos(\varphi) - \cos((n+1)\varphi)\right)r$$

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2) = r^2(n+1)^2\left[\left(\operatorname{sen}((n+1)\varphi) - \operatorname{sen}\varphi\right)^2 + \left(\cos(\varphi) - \cos((n+1)\varphi)\right)^2\right](d\varphi)^2$$

L'Area dell'epicicloide

$$\left(A = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \rho^2 \, d\theta \right)$$

$$\rho^2 = (x^2 + y^2); \qquad \theta = \operatorname{arctang}\left[\frac{y}{x}\right],$$

$$d\theta = d\operatorname{arctang}\left[\frac{y}{x}\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$d\theta = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right) =$$

$$d\theta = \frac{1}{\rho^2}(xy' - yx')\,d\varphi$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy' - yx')\,d\varphi}$$

$$(xy') = r^2(n+1)\left[(n+1)\cos(\varphi) - \cos((n+1)\varphi)\right]\cdot\left[\cos(\varphi) - \cos((n+1)\varphi)\right]$$

$$(xy') = r^2(n+1)\left[(n+1)\cos^2\varphi + \cos^2((n+1)\varphi) - (n+2)\cos\varphi\cos((n+1)\varphi)\right]$$

$$yx' = r^2(n+1)\left[(n+1)\operatorname{sen}(\varphi) - \operatorname{sen}((n+1)\varphi)\right]\left[\operatorname{sen}((n+1)\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi)\right]$$

$$yx' = r^2(n+1)\left[-(n+1)\operatorname{sen}^2\varphi - \operatorname{sen}^2((n+1)\varphi) + (n+2)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}((n+1)\varphi)\right]$$

$$(xy' - yx') = r^2(n+1)\left[(n+1)+1-(n+2)\cos\left((n+1)\varphi-\varphi\right)\right]$$

$$(xy' - yx') = r^2(n+1)(n+2)\left(1-\cos(n\varphi)\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2(n+1)(n+2)}{n}\right)\int_0^{2\pi}\left(1-\cos(n\varphi)\right)d(n\varphi) =$$

$$= \frac{r^2(n+1)(n+2)}{2n}\left[n\varphi-\mathrm{sen}(n\varphi)\right]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{A = r^2(n+1)(n+2)\pi}$$

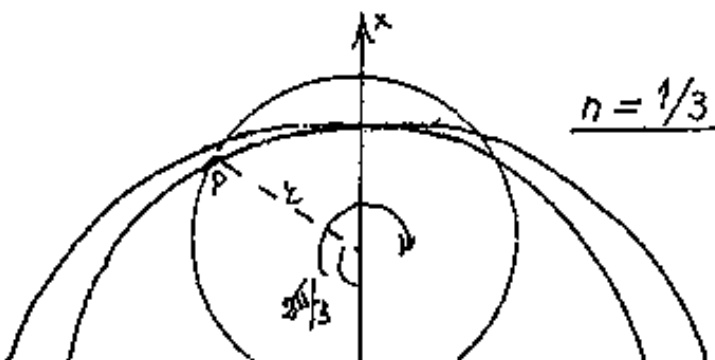
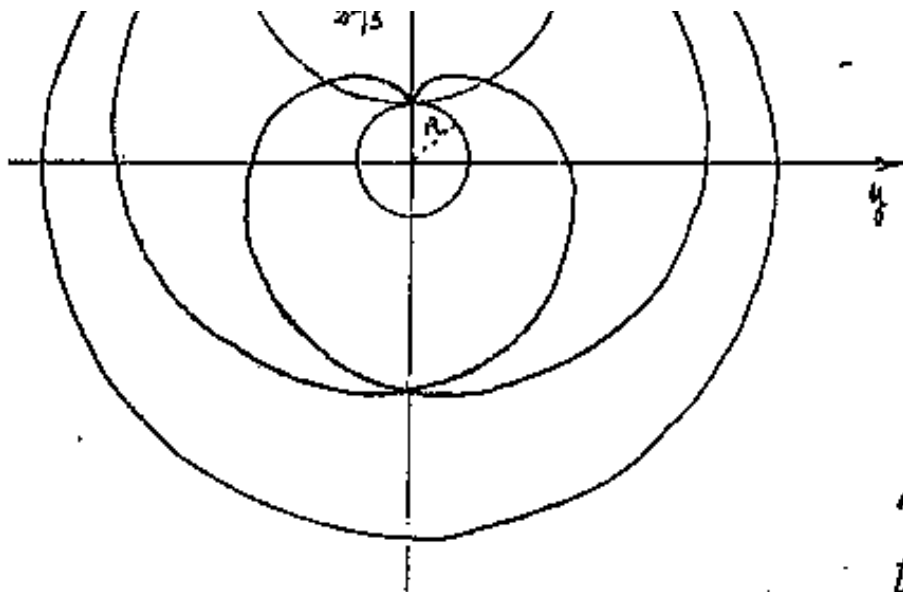
L'equazione generale delle curve Epicicloidi, espressa parametricamente nel parametro φ per determinare le coordinate di un punto di una singola curva; e nel parametro n, per determinare il tipo di curva; è data da:

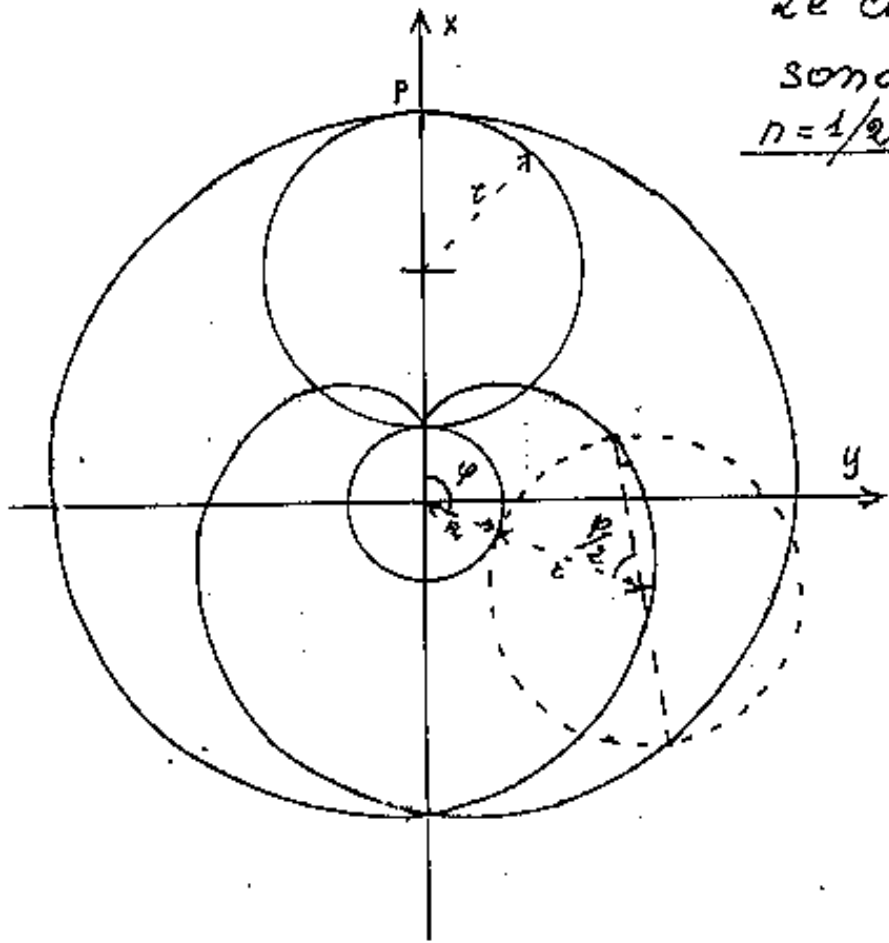
$$\frac{x}{r} = \left[(n+1)\cos\varphi - \cos((n+1)\varphi)\right]$$
$$\frac{y}{r} = \left[(n+1)\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}((n+1)\varphi)\right]$$

Vediamo cosa succede al variare di $n = R/r$ ove R = raggio circonferenza fissa ed r = r = raggio circonferenza mobile.

Per: $n = 0$ si ha il punto origine degli assi

Per: $0 < n < 1$ si ha $R < r$, il punto di r descrive $n/2$ spirali crescenti ed $n/2$ spirali decrescenti, tornando all'origine dopo n giri.

$n = 1/3$

all'origine dopo n giri

Nella figura a fianco abbiamo posto $m = 1/3$ quando la circonferenza mobile ha compiuto un giro il punto è in P.

Le curve con $R<r$ cioè $n<1$ sono dette Pericicloidi

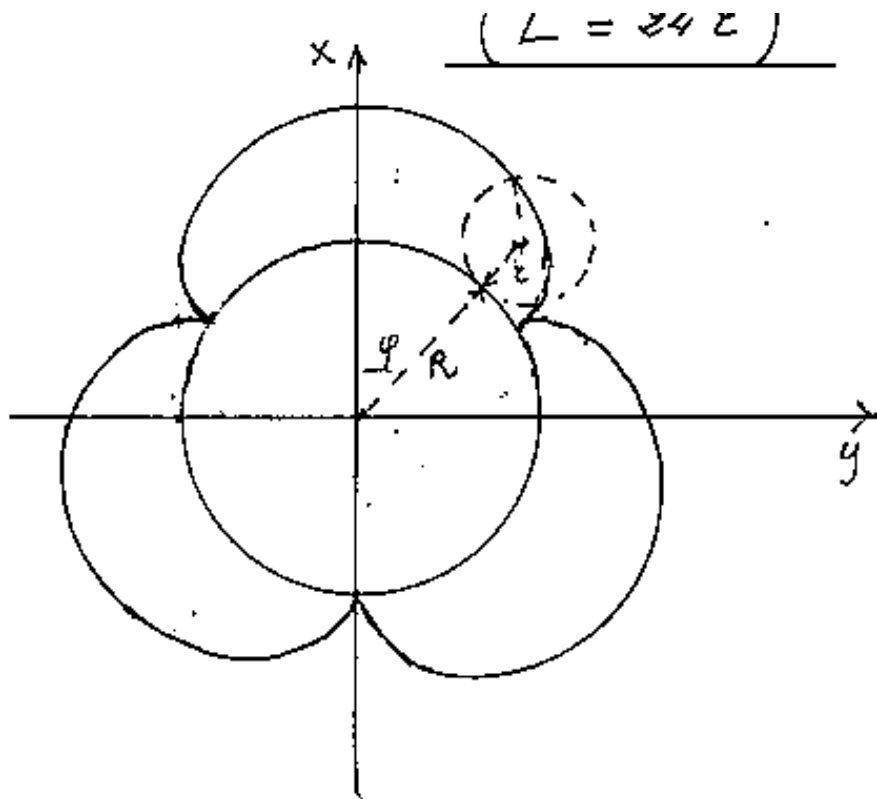
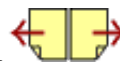
$n = 1/2$

Per $n = \frac{1}{2}$ si ha la figura disegnata a fianco, ove si nota che P, dopo un giro si trova diametralmente opposto alla posizione di origine per cui mentre l'estremo di un diametro descrive la spirale crescente, l'altro estremo descrive la spirale decrescente. Le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = r\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right)\right) \\ y = r\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\varphi\right)\right) \end{cases}$$

La lunghezza dell'intera linea: $\left[L = 8\,\frac{n+1}{n}\,r\right]$

$$(L = 24\,r)$$

$(L = 24\,r)$

Nella figura a fianco si è posto $n=3$ (se $n>1$ è intero, si hanno tante ipocicloidi quant'è n.)

Area delle lunule epicicloidali

Affinché si abbiano lunule complete, poniamo: $\frac{R}{r} = n$ = intero in tal modo, in un giro completo dell'epicicloide vi saranno n lunule complete.

Abbiamo visto che l'area dell'epicicloide che abbia fatto un giro completo è:

$$A = r^2(n+1)(n+2)\pi = R^2\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}\pi$$

Se a questa area togliamo l'area del cerchio fisso: $R^2\pi$, otteniamo l'area fra la linea epicicloidale e la circonferenza fissa.

$$A_E = R^2\pi\,\frac{(n+1)(n+2)-n^2}{n^2} = \frac{R^2\pi}{n^2}(n^2+3n+2-n^2)$$

$$A_E = r^2\pi(3n+2)$$

quindi l'area di una lunula A.

quindi l'area di una lunula A_L

$$A_L = r^2\pi\left(3 + \frac{2}{n}\right)$$

Questa formula può scriversi:

$$A_L = 3r^2\pi + \frac{2r^2\pi}{n}$$

ove per n tendente all'∞ anche R tende all'infinito, cioè la circonferenza fissa diventa una retta, il termine $+\frac{2r^2\pi}{n}$, per $n \to \infty$ è nullo e ritorna l'area della cicloide

$$\boxed{A = 3r^2\pi} \quad \text{(Galileo)}$$

Per $n=1$ si ha la cardioide:

$$\boxed{A = 5r^2\pi}$$

e rappresenta l'area fra la circonferenza fissa e la cardioide se aggiungiamo l'area del cerchio fisso abbiamo: $\underline{A_c} = 5r^2\pi + r^2\pi \; \underline{= 6r^2\pi}$.

Per $\underline{n=2} \to \underline{A = 4r^2\pi}$; per $\underline{n=3} \to A = \underline{\frac{11}{3}r^2\pi}$

$n=4 \to \underline{A = \frac{7}{2}r^2\pi}$; $n=5 \to \underline{A = \frac{17}{5}r^2\pi}$

Si noti che la lunghezza dell'arco di epicicloide che delimita una lunula è (Vedi pag 157) $L = 8r\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (indipendente da π) che per $n \to \infty$ è la lunghezza

della cicloide: $L = 8r$. L'arco di circonferenza fissa che delimita una lunula è $\frac{1}{n} 2R\pi = \frac{2r\pi}{}$ (indipendente da n). Il rapporto fra l'arco di epicicloide e l'arco di circonferenza (o meglio il suo inverso è):

$\frac{L}{L_c} = \frac{2\pi r}{8r(1+\frac{1}{n})}$ (indipendente da r) che per $n \to \infty$, nella cicloide, si ha: $L/L_c = \pi/4 = 0{,}785398\ldots$

$4/\pi = 1{,}273239545$ = rapporto fra raggio ed arco di circonferenza 45°. —

La cardiode

Una importante epicicloide si ha quando: $R = r$ cioè quando $n = 1$ si ha un unico arco di epicicloide che si richiude su se stesso e si ripete ad ogni giro. Questa curva è chiamata:

Cardioide,

a causa della sua forma ed ha caratteristiche particolari: per esempio $\overline{PA} = \overline{AP_1} = 2r = a$.

Le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} X/r = 2\cos\varphi - \cos(2\varphi) \\ y/r = 2\,\mathrm{sen}\,\varphi - \mathrm{sen}(2\varphi) \end{cases}$$

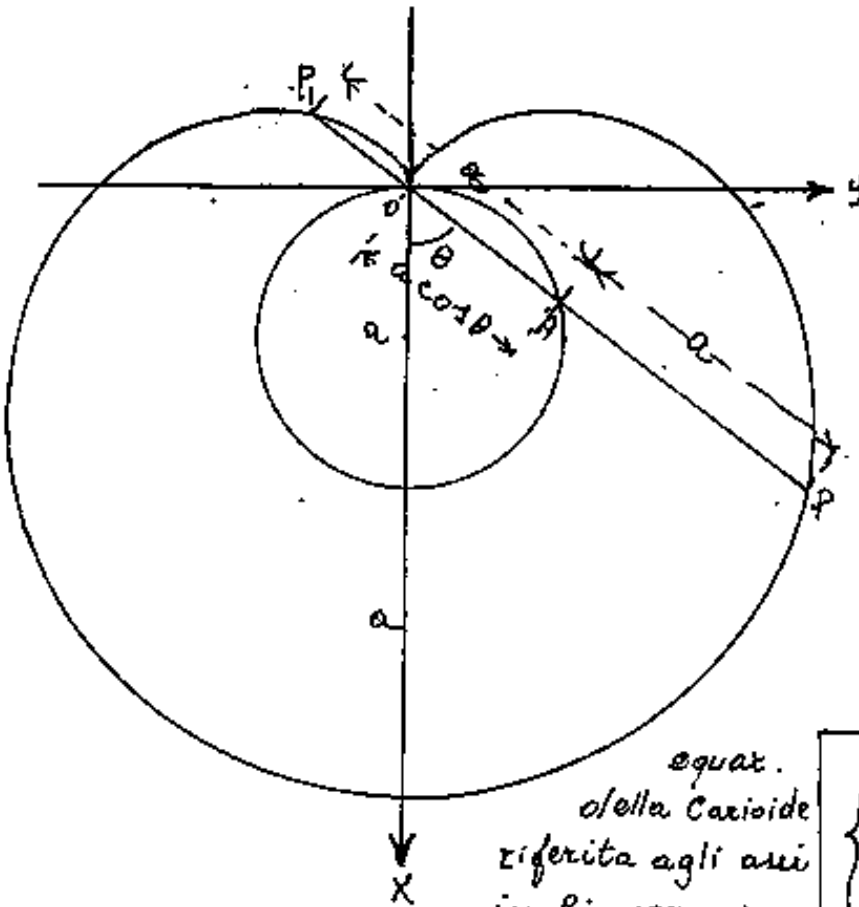
equazioni della Cardioide (come epicicloide con R=1)

dedotte dalle equazioni generale delle epi=

desunte dalle equazione generale delle epicicloidi:

$$\begin{cases} x/r = \left[(n+1)(\cos\varphi) - \cos((n+1)\varphi)\right] \\ y/r = \left[(n+1)(\operatorname{sen}\varphi) - \operatorname{sen}((n+1)\varphi)\right] \end{cases}$$

Dovranno essere modificate per trovare le equazioni ordinarie della cardioide.

cominciamo col riferirsi al sistema di assi in figura, le equazioni parametriche dell'epicicloide con $n=1$ diventano: posto: $(a=2r)$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}\cos(2\varphi) - a\cos\varphi + a/2 \\ y = a\,\text{sen}\varphi - a/2\,\text{sen}(2\varphi) \end{cases}$$

ed essendo: $(\cos(2\varphi)+1) = 2\cos^2\varphi$

$$\begin{cases} x = a\cos^2\varphi - a\cos\varphi \\ y = a\,\text{sen}\varphi - a(\text{sen}\varphi\cos\varphi) \end{cases}$$

equaz. della Cardioide riferita agli assi in figura.

$$\begin{cases} y = a\,\text{sen}\varphi(1-\cos\varphi) \\ x = -a\cos\varphi(1-\cos\varphi) \end{cases}$$

dividendo membro a membro $\frac{y}{x} = \text{tang}\,\theta = -\text{tang}\,\varphi$

elevando a quadrato e sommando:

$$\rho^2 = x^2+y^2 = a^2(1-\cos\varphi)^2(\text{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi) = a^2(1-\cos\varphi)^2$$

avremo quindi $(\theta = -\varphi)$; $\rho = \pm a(1-\cos\varphi)$

$\text{sen}\varphi = -\text{sen}\theta$; $\cos\varphi = \cos\theta$; $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\,\text{sen}\theta$

$(1-\cos\varphi)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2$ da cui: $\cos\varphi = 1-\sqrt{(x/a)^2+(y/a)^2}$ ed anche:

$$\left(1-\cos\varphi\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2$$ da cui: $\cos\varphi = 1-\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2}$ ed anche:

$$\frac{x}{a} = -\left(1-\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2}\right)$$

$$\frac{x}{a} = -\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2}+\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2\right)$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2-\frac{x}{a}\right) = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2}$$ da cui

$$\boxed{\left(x^2+y^2-ax\right)^2 = a^2\left(x^2+y^2\right)}$$ equazione: della cardioide in cartesiane.

Equazioni della cardioide in coordinate polari:

$$\rho = \begin{cases} a(1+\cos\theta) = \overline{OP} \\ a(1-\cos\theta) = \overline{OP_1} \end{cases}$$

La lunghezza della cardioide:

$L = 8\left(\frac{n+1}{n}\right)r$ ove: $n=1$

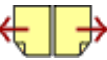
$$L = 16r$$

La cardioide può anche essere definita come il luogo geometrico dei punti equidistanti dall'estremo di tutte le corde di un cerchio che hanno in comune l'altro estremo; e l'equidistanza è pari al diametro del cerchio. ($\overline{AP} = AP_1 = a = 2r$).

Concoide

Dicesi concoide di una curva piana, la linea ottenuta dall'estremo di un segmento di lunghezza costante (intervallo) posto sulle rette uscenti da un punto (Polo), di cui l'altro estremo è nel punto di intersezione di queste rette con la curva.

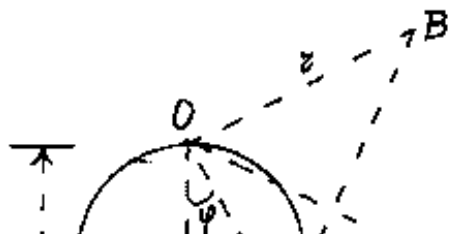
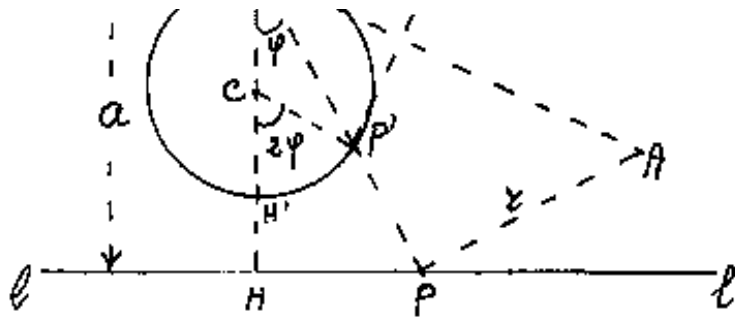
punto di intersezione di quelle delle con [illegible]
data (direttrice).

Per quanto sopra la cardioide è quindi la concoide di una circonferenza (direttrice) il cui "polo" è sul cerchio, nell'origine degli assi, e e l'intervallo è pari al diametro "a" del cerchio.

Inversione

Dicesi inversione di un insieme di punti P del piano (per esempio i punti di una linea), un altro insieme di punti P' tali che, detti: "O" il polo d'inversione, ed il segmento "r" - raggio d'inversione, si abbia:

$$(\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^2$$

(con $\overline{OP}$ ed $\overline{OP'}$ misurati sulla stessa retta)

La costruzione grafica di P', quando sono noti: O, r, P; può farsi ricordando il secondo teorema di Euclide; per esempio: supponiamo di volere l'inversione della retta "l" e sia "O" il polo distante "a" da "l", uniamo "O" con "P" (generico di l) e da "O" e da "P", perpendicolarmente ad $\overline{OP}$, tracciamo i segmenti $\overline{OB} = \overline{PA} = r$, quindi unito "O" con "A", da "B" si traccia la perpendicolare ad $\overline{OA}$ che incontrerà in "P'" la retta $\overline{OP}$.

Dimostriamo che l'inversa della

retta "ℓ" è una circonferenza per "O" con tangente in "O" parallela ad "ℓ". Abbiamo $\overline{OH}$ = "a" = $\overline{OP}\cos(\varphi)$;

$\overline{OP} = a/\cos(\varphi)$; $\overline{OP'} = \frac{r^2\cos(\varphi)}{a}$; per $\varphi = 0 \rightarrow \cos(\varphi) = 1$; $\frac{r^2}{2a} = \frac{\overline{OH'}}{2} = \rho =$ = raggio della circonferenza, infatti: $\rho^2(1+\cos(2\varphi))^2 + \rho^2 \sin^2(2\varphi) = \overline{OP'}^2 =$ $= \rho^2(2+2\cos(2\varphi)) = 4\rho^2\cos^2(\varphi)$; $\overline{OP'} = 2\rho\cos(\varphi)$; sostituendo ρ torna:

$$\overline{OP'} = r^2\cos(\varphi)/a$$

c.v.d.

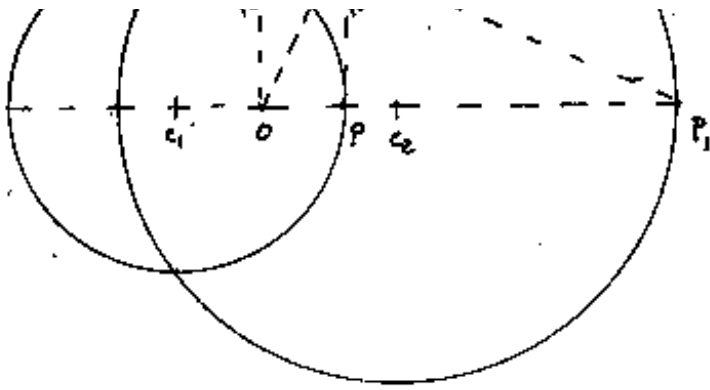
Però non possiamo dire biunivoca la corrispondenza dei punti nell'inversione, infatti non esiste il punto in= verso del polo "O", punti P indefinitamente vicini ad O, determinano una direzione, nella quale c'è il corrispondente punto P' indefinitamente lontani; ma se P coincide con O, manca la direzione, ed un punto all'infinito non ha senso.

-I punti di una circonferenza di raggio r, rimango= no se stessi se il polo è il centro.

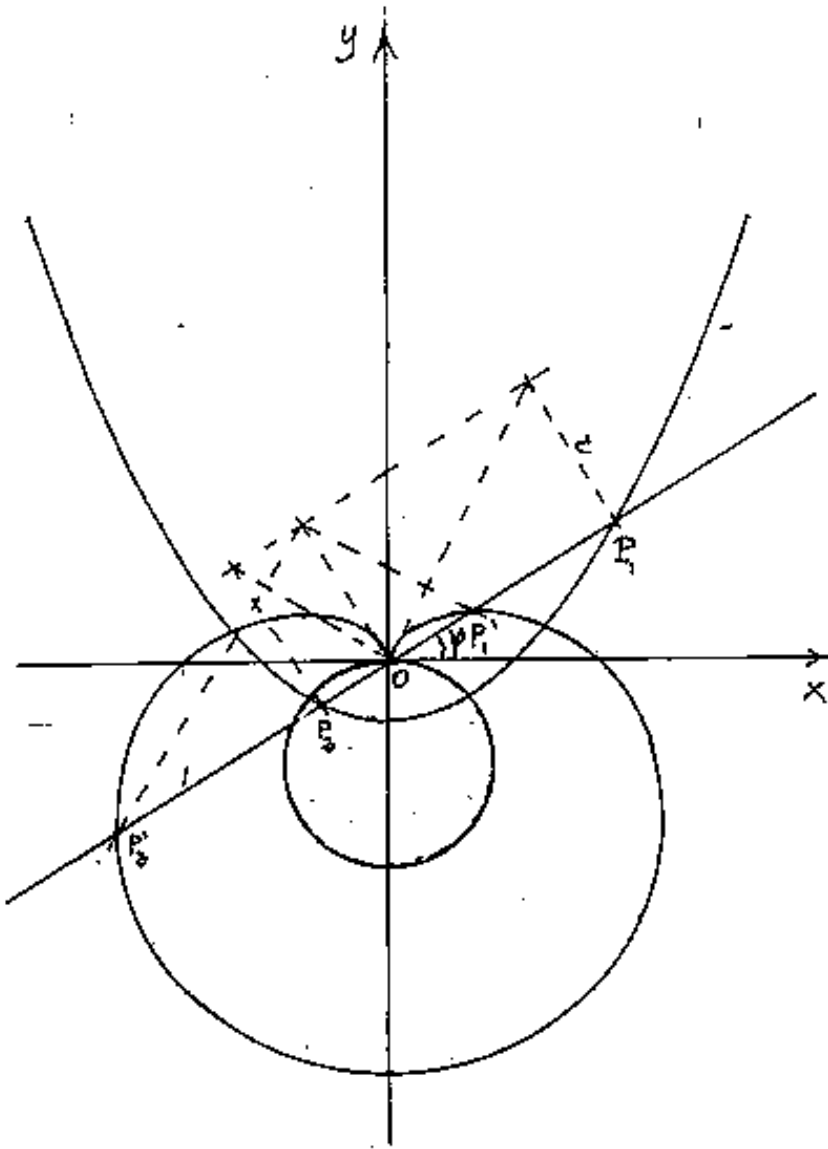
-Le rette uscenti dal polo O, rimangono se stesse, anche se diversamente punteggiate.

-Abbiamo visto che ad un cerchio passante per O cor= risponde una retta parallela alla tangente in O ove: $a=\frac{r}{2\rho}$ è la distanza delle rette parallele, ρ il raggio del cerchio ed r il raggio d'inversione.

Ad un cerchio non passante per O corrisponde un cerchio non passante per O. In figura abbiamo preso O interno alla circonferenza. L'angolo formati

C_1 O P C_2 P_1

da due linee è uguale a quello delle linee corrispondenti, cioè la rappresentazio è conforme. Se poniamo in O l'origine delle coordinate $P \equiv (x; y)$; $P_1 \equiv (x'_1; y'_1)$ avremo:

$x' = \frac{x r^2}{x^2+y^2}$;	$y' = \frac{y r^2}{x^2+y^2}$

L'inversione di una parabola

Sia "r" il raggio di inversione, e poniamo il centro "O" di inversione nel fuoco della parabola. Poniamo anche l'origine degli assi nel fuoco della parabola.

L'equazione della parabola riferita a tali assi sarà:

$$y = \frac{x^2}{4a} - a$$

ove "a" è la distanza del fuoco dal vertice della parabola.

Tracciamo per "O" una retta qualsiasi, di equazione: $y = x \tan(\varphi)$ con "φ" variabile arbitraria.

Questa retta incontrerà la parabola in due

Questa retta incontrerà la parabola in due punti: P_1 e P_2; le cui coordinate si ottengono facendo sistema con le due equazioni;

avremo:

$$\left(x \tan g(\varphi)\right) = \left(\frac{x^2}{4a} - a\right)$$

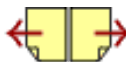
cioè

$$x^2 - 2(2a\,tang(\varphi))x - 4a^2 = 0$$

$$X_p = 2a\,tang(\varphi) \pm \sqrt{4a^2 tang^2(\varphi) + 4a^2}$$

$$X_p = 2a\left(\frac{sen(\varphi) \pm 1}{\cos\varphi}\right)$$

$$y_p = x \cdot tang\alpha = 2a\left(\frac{sen\,\varphi \pm 1}{\cos^2\varphi}\right) sen\,\varphi =$$

$$y_p = 2a\,sen\,\varphi\left(\frac{(sen\,\varphi \pm 1)}{(sen\,\varphi + 1)(sen\,\varphi - 1)}\right)$$

$$y_p = 2a\left(\frac{sen\,\varphi}{(sen\,\varphi \mp 1)}\right)$$

Il segmento $\overline{OP}$ di retta, compreso fra il centro "O" e la parabola è dato da:

$$\overline{OP} = x/\cos\varphi$$

cioè:

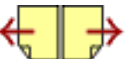
$$\overline{OP} = 2a\left(\frac{sen\,\varphi \pm 1}{\cos^2\varphi}\right)$$

$$\overline{OP} = 2a\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi \mp 1}\right)$$

Il punto "P'" (inverso di P) correlato con "P" dalla relazione d'inversione:

$$\overline{OP'} = r^2 / \overline{OP}$$

cioè:

$$\overline{OP'} = \frac{r^2}{2a}\left(\operatorname{sen}\varphi \mp 1\right)$$

avrà per coordinate cartesiane; (in quanto insiste sulla stessa retta di P e dalla stessa banda rispetto ad "O"):

$$\boxed{\begin{array}{l} X_{P'} = \overline{OP'} \cos\varphi \\ Y_{P'} = \overline{OP'} \operatorname{sen}\varphi \end{array}}$$

$$\begin{cases} X_{P'} = \left(\frac{r^2}{2a}\right)\left(\operatorname{sen}\varphi \mp 1\right)\cos\varphi \\ Y_{P'} = \left(\frac{r^2}{2a}\right)\left(\operatorname{sen}\varphi \mp 1\right)\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

elevando a quadrato e sommando si ha:

$$X_{P'}^2 + Y_{P'}^2 = \left(\frac{r^2}{2a}\right)^2\left(\operatorname{sen}\varphi \mp 1\right)^2$$

$$\left(\operatorname{sen}\varphi \mp 1\right) = \left(\frac{2a}{r^2}\right)\sqrt{X_{P'}^2 + Y_{P'}^2}$$

$$\left(\operatorname{sen}\varphi\right) = \left(\frac{2a}{r^2}\right)\left(\sqrt{X_{P'}^2 + Y_{P'}^2}\right) \pm 1$$

$$Y_{P_1} \Big/ \left(\frac{r^2}{2a}\right) = \left(\frac{2a}{r^2}\right)^2\left(X_{P'}^2 + Y_{P'}^2\right) \pm \left(\frac{2a}{r^2}\right)\sqrt{X_{P'}^2 + Y_{P'}^2}$$

dividendo tutto per $\left(\frac{2a}{r}\right)^2$ e separando la radice si ha:

$$\left(X_{P'}^2 + Y_{P'}^2\right) - \left(\frac{r^2}{\ldots}\right)Y = \left(\frac{r}{\ldots}\right)\sqrt{X_{P'}^2 + Y_{P'}^2}$$

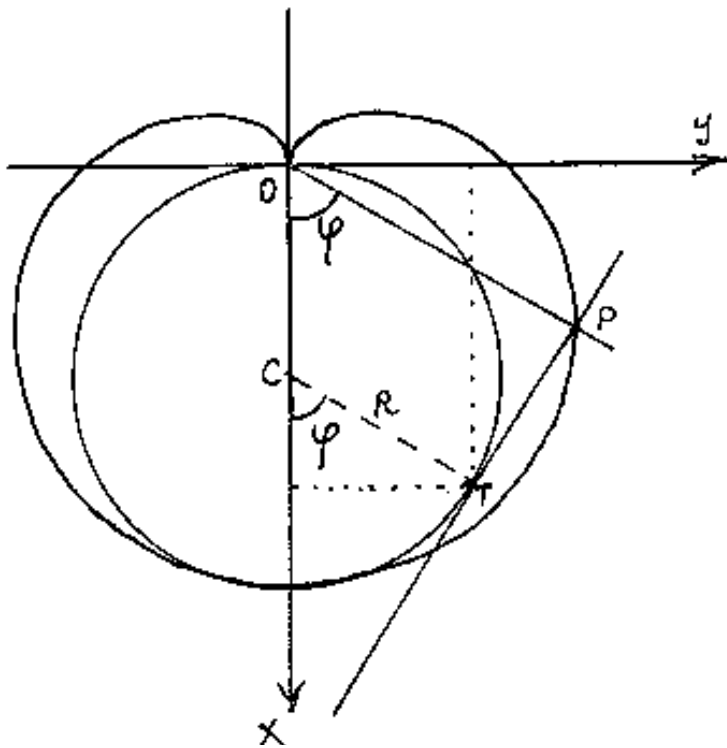
$$\left(X_{P_1}^2 + y_{P_1}^2\right) - \left(\frac{r^2}{2a}\right) y = \left(\frac{r}{2a}\right) \sqrt{X_{P_1}^2 + y_{P_1}^2}$$

ponendo : $\left(\frac{r^2}{2a}\right) = K$ = (diametro delle circonferenze dell'epicicloide), ed elevando a quadrato si ha:

$$\left[X_{P_1}^2 + y_{P_1}^2 - K y\right]^2 = K^2\left(X_{P_1}^2 + y_{P_1}^2\right)$$

equazione della cardioide.

Sulla base di quanto ora dimostrato possiamo definire la Cardioide come l'inversa di una parabola che abbia il centro di inversione nel fuoco e per raggio d'inversione $r = \sqrt{2a \cdot K}$ la media geometrica fra la doppia distanza del fuoco dal vertice nella parabola ed il diametro delle circonferenze che generano la cardioide come "epicicloide" con $n = 1$.

La podaria di un cerchio

Ricordiamo che dicesi podaria di una curva piana, il luogo dei piedi delle normali, alle rette tangenti la curva, condotte da un punto O.

x ... da un punto O.

Assumiamo "O" come origine degli assi, per cui le rette uscenti da O avranno per equazione:

$$y = \tan(\varphi)\, x$$

mentre le rette ad esse normali avranno per equazione:

$$y = -\frac{x}{\tan(\varphi)} + q$$

queste ultime dovranno essere tangenti al nostro cerchio.

Scegliamo il cerchio di equazione:

$$(X-R)^2 + y^2 = R^2$$

avente il centro $C \equiv (R;0)$ sulle ascisse.

Le coordinate del punto T di tangenza, (essendo il raggio in T parallelo alla retta per l'origine) saranno: $X_T = R(\cos\varphi + 1)$; $y_T = R \operatorname{sen}\varphi$

queste coordinate dovranno soddisfare la retta tangente, per cui:

$$q = y_T + X_T/\operatorname{tang}(\varphi) = R \operatorname{sen}\varphi + R(\cos\varphi + 1)/\operatorname{tang}(\varphi)$$

$$q = R\,\frac{(\operatorname{sen}^2\varphi/\cos\varphi + \cos\varphi + 1)\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$q = R\,\frac{\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi + \cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$q = R\,\frac{(1+\cos\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}$$

L'equazione delle rette tangenti al cerchio:

$$y = \frac{-X\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} + R\left(\frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\right)$$

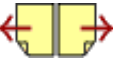
$$y = \frac{[illegible]}{\operatorname{sen}\varphi} + R\left(\frac{[illegible]}{\operatorname{sen}\varphi}\right)$$

Facendo sistema con le rette per l'origine ad esse normali, troviamo le coordinate dei punti P piedi delle normali alle tangenti la circonferenza, cioè la Podaria.

$$\frac{sen(\varphi)}{cos(\varphi)} X = -\frac{cos(\varphi)}{sen(\varphi)} x + \frac{R(1+cos\varphi)}{sen\varphi}$$

$$(sen^2(\varphi) + cos^2\varphi)x = R\, cos\varphi(1+cos\varphi)$$

per cui:

$$X = R\, cos\varphi(1+cos\varphi)$$
$$y = R\, sen\varphi(1+cos\varphi)$$

equazioni parametriche di una cardioide

elevando a quadrato e sommando:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{R^2}} = (1+cos\varphi)$$

$$cos(\varphi) = \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{R^2}} - 1\right)$$

$$X = R\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{R^2}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{R^2}}\right)$$

$$XR = x^2+y^2 - R\sqrt{x^2+y^2}$$

cioè:

$$(x^2+y^2-XR)^2 = R^2(x^2+y^2)$$

equazione cartesiana di una cardioide

Perciò possiamo definire la cardioide come la podaria di una circonferenza

come la podaria di una circonferenza rispetto ad un punto della circonferenza stessa.

AREA della CARDIOIDE

L'area delle epicicloidi è $A = r^2(n+1)(n+2)\pi$ con $n = 1$ diventa: $A = 6r^2\pi$ L'area della cardioide è sei volte l'area del cerchio generatore.

LA LUMACA di PASCAL

La cardioide è un caso particolare della Lumaca di Pascal, infatti l'equazione cartesiana della Lumaca di Pascal è:

$$(x^2+y^2-bx)^2 = a^2(x^2+y^2)$$

ove ponendo: $(b=a)$ otteniamo l'equazione della cardioide.

Analogamente a quanto detto per la cardioide, possiamo definire la lumaca di Pascal:

La Podaria di un cerchio di raggio a rispetto ad un punto che disti b dal centro del cerchio.

La Concoide di un cerchio di diametro b passante per il punto P (polo) e con "intervallo" a. ecc.

Naturalmente al variare del rapporto a/b varia la configurazione della Lumaca di Pascal.

Se nell'equazione cartesiana, sostituiamo: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\,\text{sen}\,\varphi$; $(x^2+y^2) = \rho^2$; otteniamo:

mo: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $(x^2+y^2) = \rho^2$; otteniamo:

$$\left(\rho^2 - b\rho\cos\varphi\right)^2 = a^2\rho^2$$

$$\rho^2 - b\rho\cos\varphi = a\rho \qquad \text{dividendo per } \rho$$

$$\boxed{\rho = b\cos\varphi + a}$$

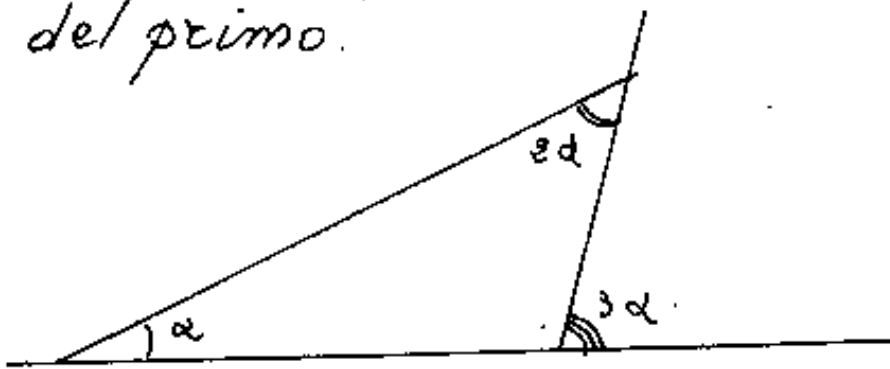
Equazione della Lumaca di Pascal in coordinate polari.

Curva trisettrice dell'angolo

Un modo per affrontare il problema della trisezione di un angolo, (problema già proposto fin dall'antichità, e a tutt'oggi non risolto, perché non è possibile, col solo ausilio della riga e del compasso, risolverlo) è quello di considerare un triangolo che abbia un angolo doppio dell'altro, l'angolo esterno essendo la somma dei due è il triplo del primo.

2α

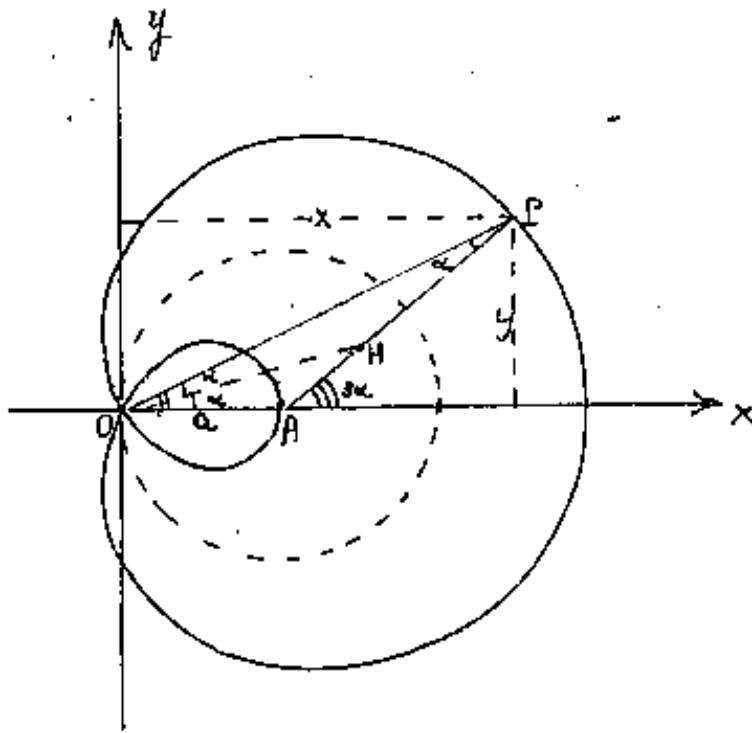
3α

α

Se nel triangolo, anche il terzo angolo è doppio del secondo, avremo: $\alpha = \frac{\pi}{7}$; $2\alpha = \frac{2\pi}{7}$; $3\alpha = 3\pi/7$ ed abbiamo il problema dell'ettagono, che abbiamo già trattato (v. vol I).

Consideriamo ora la curva luogo geometrico dei punti P tali che dati i punti O ed A nel triangolo AOP l'angolo

punti O ed A nel triangolo AOP, l'angolo in O sia doppio di quello in P.

Poniamo gli assi cartesiani con l'origine in O ed il lato $\overline{OA}$ del triangolo OAP sulla retta delle ascisse. Dal centro tracciamo una retta qualsiasi inclinata di α, e

dal punto A una retta inclinata di $\frac{3}{2}\alpha$; il punto comune a queste due rette è un punto P del luogo geometrico cercato.

Conduciamo la bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$ e sia H il punto d'incontro su $\overline{AP}$, si ha: $O\hat{P}A = \alpha = H\hat{O}P = A\hat{O}H$; $O\hat{H}A = P\hat{O}A = 2\alpha$; $O\hat{A}H \equiv O\hat{A}P$.

Perciò i triangoli: OAH ed PAO sono simili: $\frac{\overline{OA}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{HO}}$ da cui: $\overline{AH} = \overline{OA}^2/AP$

$\overline{OH} = \overline{HP} = (\overline{AO})(\overline{PO})/\overline{AP}$ $\quad \overline{AH} + \overline{HP} = \overline{AP} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{AP}} + \frac{(\overline{OA})(\overline{OP})}{AP}$

per cui: $\overline{AP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OA}\,\overline{OP}$; ed anche:

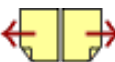
$$AP^2 = \overline{OA}(\overline{OA} + \overline{OP})$$

riferendosi alle coordinate di P abbiamo:

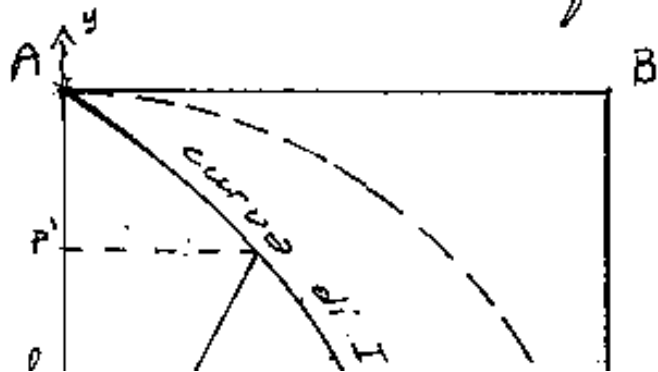
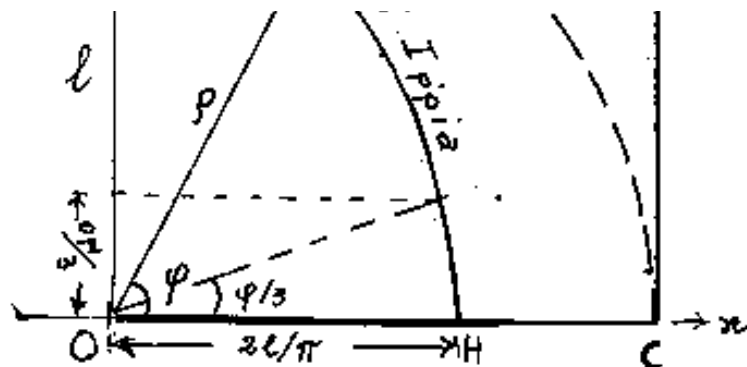
$$\overline{AP}^2 = (x-a)^2 + y^2 = a\left(a + \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$x^2 + a^2 - 2ax + y^2 = a^2 + a\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{(x^2+y^2-2ax)^2 = a^2(x^2+y^2)}$$

Equazione della Lumaca di Pascal ove $b = 2a$. Cioè se nell'equazione della Lumaca di pascal si pone $b = 2$ si ottiene la curva trisettrice dell'angolo $\widehat{PAX} = 3\,\widehat{OPA}$.

La quadratrice di Ippia

Anche la curva detta quadratrice di Ippia (fu trovata da Ippia da Elide nel 420 a.C.) era nata come trisettrice, e fu detta quadratrice perché si prestava alla quadratura del cerchio (da altri fu detta di Ippia o di Dinostrato). Altre curve trisettrici sono state esposte al seguito del folium di Cartesio. (Trisettrice di Maclaurin; cissoide o curva di Diocle).

Consideriamo un quadrato di lato "l" e vertici: OABC. Siano fissi i lati $\overline{OC}$ e $\overline{BC}$, mentre $\overline{OA}$ ruota intorno ad O fino a sovrapporsi ad $\overline{OC}$, contemporaneamente $\overline{AB}$ slitta parallelamente a se stesso fino a sovrapporsi ad $\overline{OC}$.

Il punto comune ai due lati mobili descrive la curva di Ippia.

Mentre il lato $\overline{OA}$ descri=ve un arco pari a $\frac{\pi}{2} = 90°$ il lato $\overline{AB}$ si sposta di l. perciò se invertiamo il moto e consideriamo il lato $\overline{OC}$ che sdoppiato uno sale parallelamente l'altro ruota intorno ad "O" avremo: $\overline{OP'} : \overline{OA} = \widehat{POC} : \widehat{AOC}$ cioè: $y : l = \varphi : \frac{\pi}{2}$; poniamo: $\varphi = m\left(\frac{\pi}{2}\right)$, avremo:

(gli assi x; y gli abbiamo posti noi per comodità di linguaggio)

anche: $y = m\ell$; $y = \ell \cdot \varphi/\pi/2$; cioè: $\frac{y}{\varphi} = \ell/\pi/2 = \text{cost.}$

$\ell/\pi/2 = \overline{OH}$. (condizione limite) ; $x = \rho\cos(\varphi)$

$\overline{OP'} = \varphi(\overline{OH}) = \varphi(\text{cost.}) = y$ cioè la curva di Ippia riporta in misura lineare in y la misura angolare φ. Se quindi in opportuna scala prendiamo $\ell = \pi/2$ avremo il valore in radianti di φ sulle y.

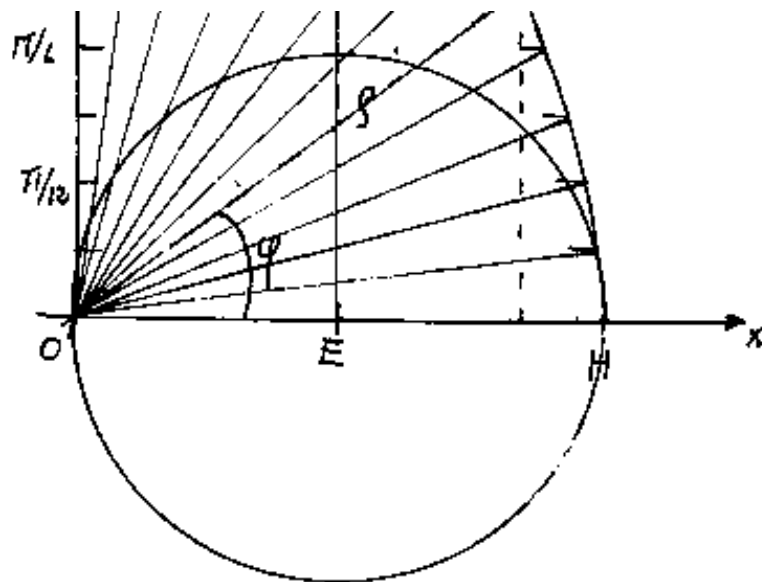
Lo sfrazionamento di un angolo si riduce allo sfrazionamento di un segmento.

Se $\overline{OH}$ è il diametro di un cerchio, ℓ è la semicirconferenza rettificata.

scalimetro: 1:200 (dm)

Il rettangolo OADE è equivalente al cerchio di diametro $\overline{OH}$.

$\rho = (y/\text{sen}(\varphi))$

A D $\pi/2$ $\frac{5}{12}\pi$ $\pi/3$ $\pi/4$ $\pi/6$ φ curva di Ippia

Notiamo inoltre che nella curva di Ippia:

$x = \rho \cos\varphi$; $y = \rho \operatorname{sen}\varphi = f(x)$ avremo (come per tutte le curve) che: $f(x)/x = \operatorname{raf}(x) = \operatorname{tang}(\varphi)$

$$\boxed{y = \frac{\ell}{\pi/2}\varphi} \; ; \; \boxed{x = \frac{\ell}{\pi/2}\varphi \cdot \operatorname{tang}\varphi}$$ (equazioni parametriche in φ)

ove solo utilizzando operatori speciali è possibile esplicitare la y. Infatti mentre la X è esplicitabile:

$$x = \frac{\ell}{\pi/2}\left(\frac{\pi/2}{\ell}y\right)\left(\operatorname{tang}\left(\frac{y\cdot\pi/2}{\ell}\right)\right)$$

$$\boxed{x = y \operatorname{tang}\left(\frac{y\cdot\pi}{2\ell}\right)}$$

se indichiamo con $\mathcal{P}f(x) = \left(f(x)\right)(x)$ (operatore del Brogi)

avremo:

$$\varphi\cdot\operatorname{tang}(\varphi) = \mathcal{P}_{tg}\,\varphi = \frac{x\pi}{2\ell} \supset \varphi = \arg\mathcal{P}_{tg}\left[\frac{\pi x}{2\ell}\right]$$

$$y = \frac{\ell}{\pi/2}\left(\arg\mathcal{P}_{tg}\left[\frac{x\pi}{2\ell}\right]\right)$$

$$y = \frac{\ell}{\pi/2}\left(\arg tg\left[\frac{x\pi}{2\ell}\right]\right)$$

Poiché la curva di Ippia è detta anche di Dinostrato, riportiamo come viene presentata la curva quadratrice di Dinostrato.

Quadratrice di Dinostrato

Diconsi quadratrici quelle linee trascendenti che permettono la quadratura del cerchio o la rettificazione della circonferenza.
Il problema della quadratura del cerchio è antichissimo (Dinostrato - geometra Greco, amico di Platone IV sec a.C) ed essendo impossibile risolverlo col solo ausilio della riga e del compasso il problema divenne addirittura proverbiale per le cose impossibili. Dante stesso nell'ultimo canto del Paradiso alla conclusione scrive: (Versi 133 e seg):

«Qual è 'l geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io .....»

La quadratrice di Dinostrato può pensarsi generata da un punto mobile M tale che la proiezione di M su un'asse a partire da un origine "O"; $\overline{OM}=\rho$

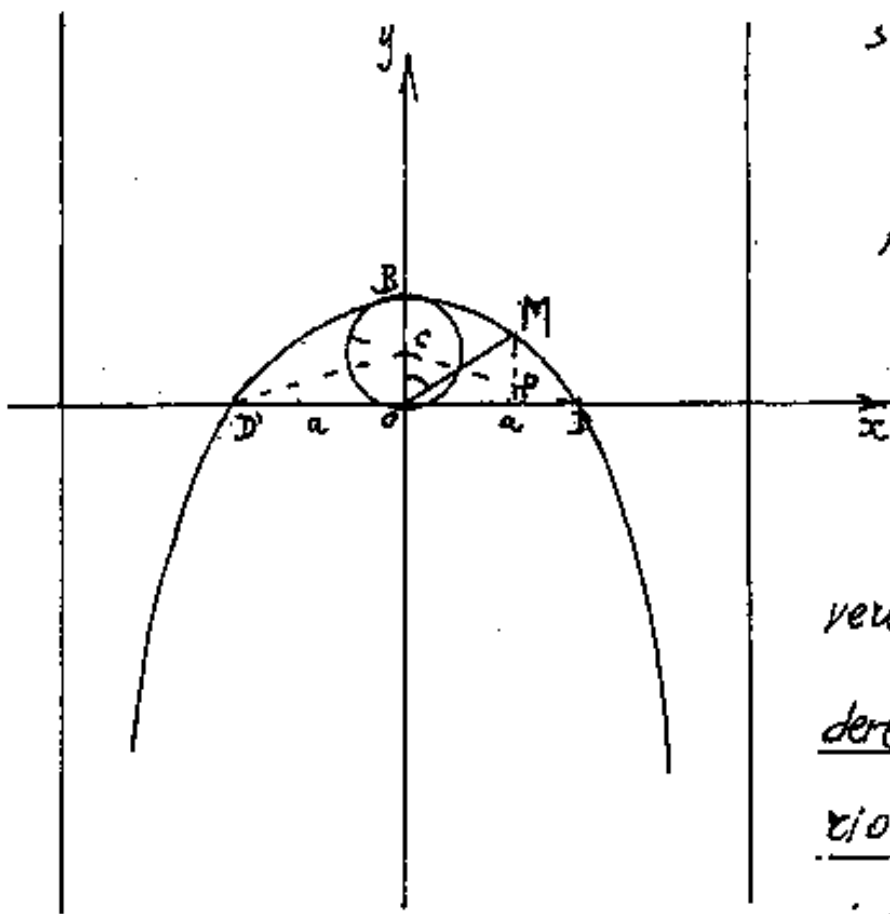
(sarebbe la nostra $x = \rho \cos\theta$) stia ad un segmento fisso $\overline{OD}$ come l'angolo che la normale per O (il nostro y) forma con $\overline{OH}$ sta all'angolo retto $B\hat{O}D$: $\left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OD}} = \frac{B\hat{O}H}{B\hat{O}D}\right)$ ove B e D sono punti fissi! Noi riportiamo il discorso in comode coordinate cartesiane ponendo: $\overline{OD} = a$; $B\hat{O}D = \frac{\pi}{2}$; avremo:

$$\frac{x}{a} = \frac{\operatorname{arccotg} y/x}{\pi/2} \quad \text{cioè :} \quad \frac{x\pi}{2a} = \operatorname{arccotg} y/x$$

ed anche :

$$\boxed{y = x \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$$

Equazione cartesiana della quadratrice di Dinostrato

$$\boxed{\overline{OB} = \frac{2a}{\pi}}$$

In figura abbiamo posto: $B\hat{O}M \simeq 1$ rad.

Data la proporzionalità:

$$\frac{\overline{OP}}{a} = \frac{B\hat{O}M}{\pi/2}$$

La curva può risolvere il problema di dividere l'angolo $B\hat{O}M$ arbitrario in un numero qualsiasi di parti. Per $B\hat{O}M/n$ basterà prendere $\overline{OP}/n$. Quindi può essere trisettrice dell'angolo $B\hat{O}M/3 \rightarrow \overline{OP}/3$.

Come rettificatrice della circonferenza: $\overline{OB}\,\pi = 2a$

cioè la circonferenza di diametro $\overline{OB}$ equivale al segmento $\overline{D'D} = 2a$. L'area del cerchio di diametro $\overline{OB}$ equivale l'area del triangolo: D'CD.

In coordinate polari l'equazione diventa:

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta}\left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right) \qquad \rho = \frac{\overline{OB}}{\cos\theta}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Concoidi

Si definiscono concoidi quelle linee ottenute riportando segmenti uguali ed opposti (detti "intervallo") sulle rette uscenti da un polo, a partire dai punti di intersezione, di queste rette, con una prefissata retta direttrice, distante "a" dal polo.

Come polo prendiamo l'origine degli assi "O" e come retta direttrice, una retta parallela ad un asse; per esempio: $y = a$ resta da determinare una regola per precisare l'intervallo b.

La concoide di Nicomede

Fra le concoidi, la più importante è la concoide di Nicomede (II° sec. a.C.), curva connessa al problema di Delo, (cioè alla duplicazione del cubo e alla trisezione dell'angolo). I problemi "classici" della matematica greca sorgevano da problemi astronomici (per esempio la costruzione delle meridiane solari). Si è po-

... (per esempio la costruzione delle meridiane solari). Si è potuto sapere che: Pappo (famoso per i teoremi che portano il suo nome) usò per la trisezione dell'angolo la concoide di Nicomede connessa ad un'opera di Diodoro (I sec. a.C.) sulle meridiane solari. (Cfr. Collectio mathematica, libro IV cap. 27).

(Cfr. O. Neugebauer: "Le scienze esatte nell'antichità", ed. Feltrinelli).

La concoide di Nicomede ha il periodo "b" costante.
La formula in coordinate cartesiane è:

$$(y-a)^2(y^2+x^2)-b^2y^2=0$$

trasformata in polari:

$$(\rho \operatorname{sen}\theta - a)^2(\rho^2\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\cos^2\theta) - b^2\rho^2\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

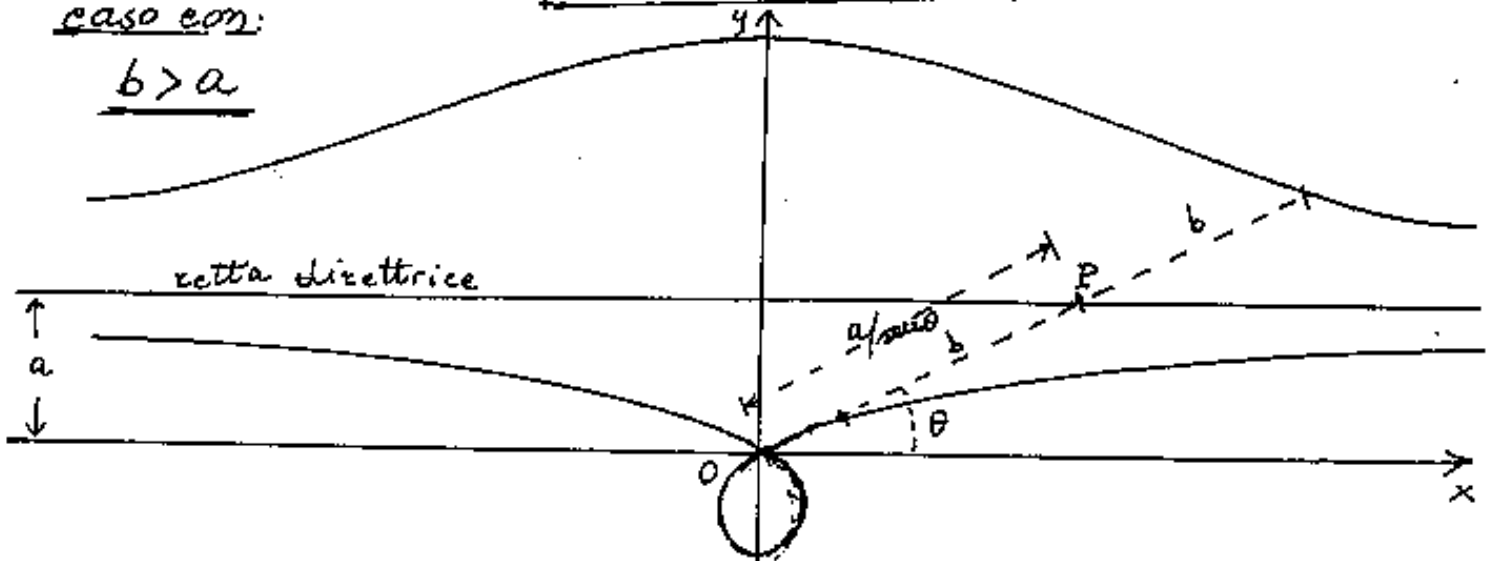
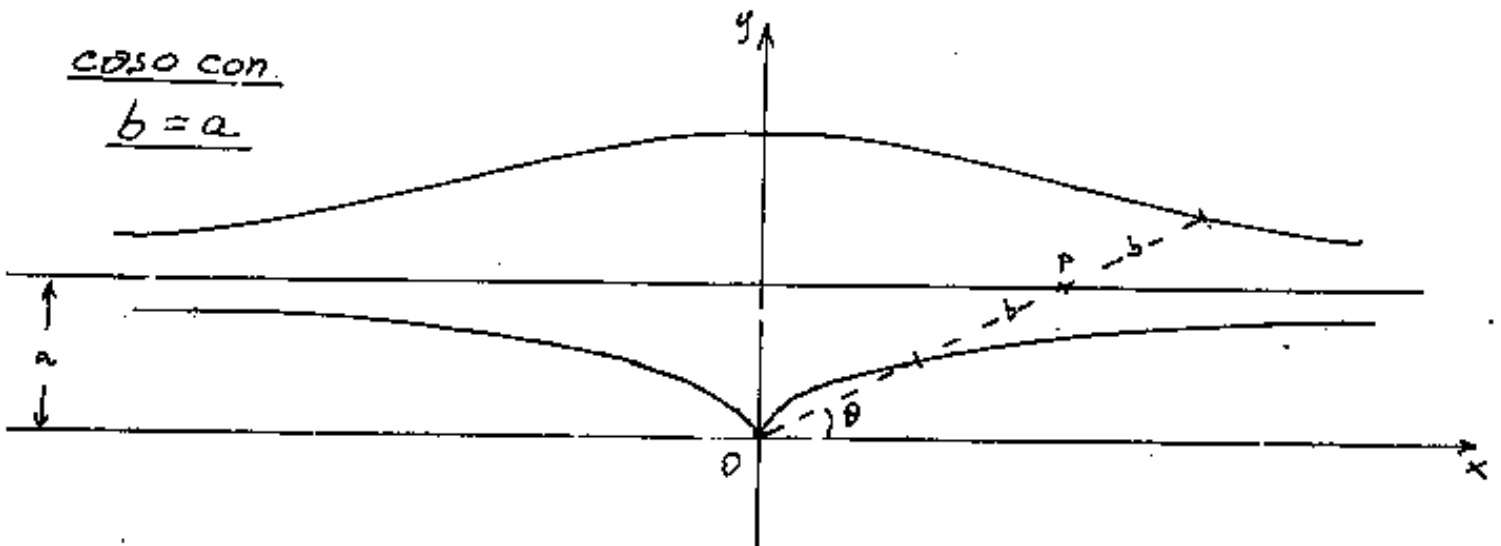
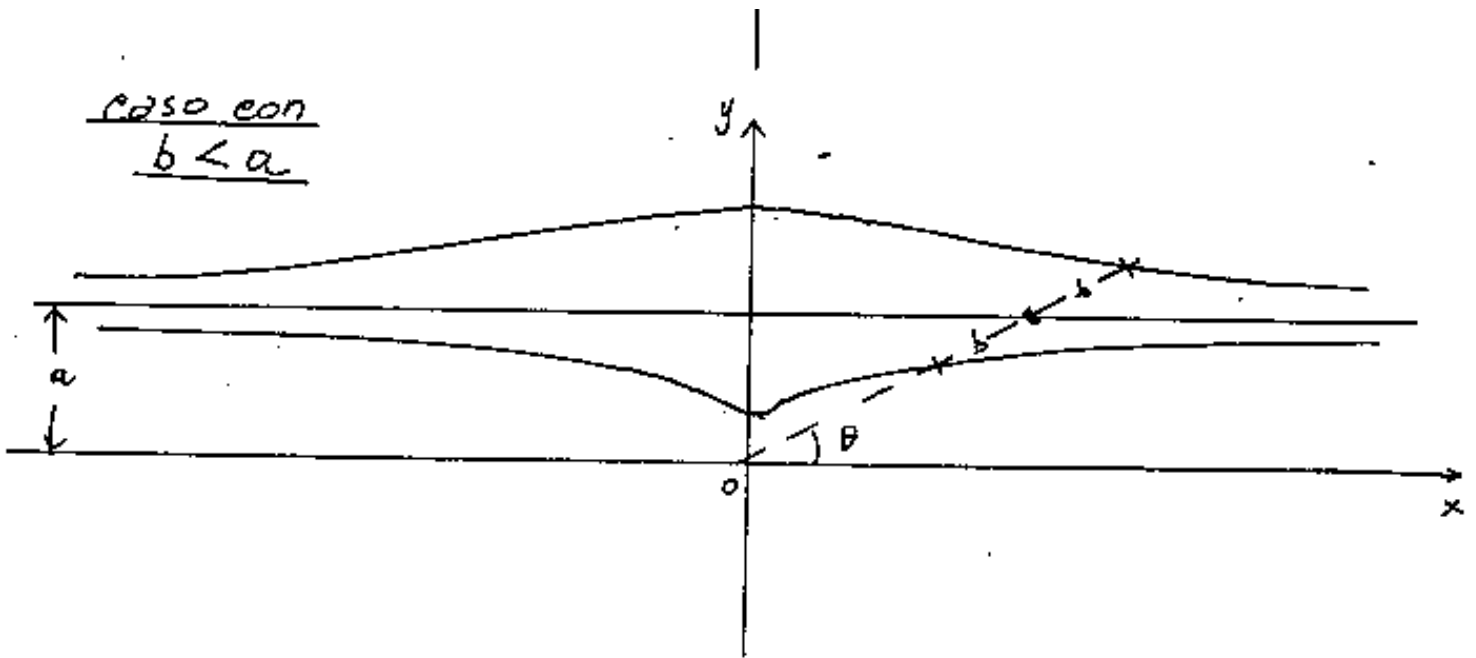
$$\rho = \frac{a}{\operatorname{sen}\theta} \pm b$$

caso con:
$b > a$

retta direttrice

caso con:
$b = a$

caso con
$b < a$

y
a
b
b
θ
o
x

concoide slusiana

Nella concoide di Sluse l'intervallo non è costante per tutte le rette, ma, prefissato un segmento "b", se dal punto M di intersezione delle rette per "O" con la direttrice riportiamo l'intervallo $\overline{MP} = \overline{MP_1}$ (P e P_1 sono i punti dei due rami della concoide) dovrà essere: $(\overline{OM})(\overline{MP}) = b^2$

Per il secondo teorema di Euclide risulta facile costruire la concoide slusiana (vedi figura) la cui equazione in cartesiane è:

$$a(y-a)(x^2+y^2) - b^2y^2 = 0$$

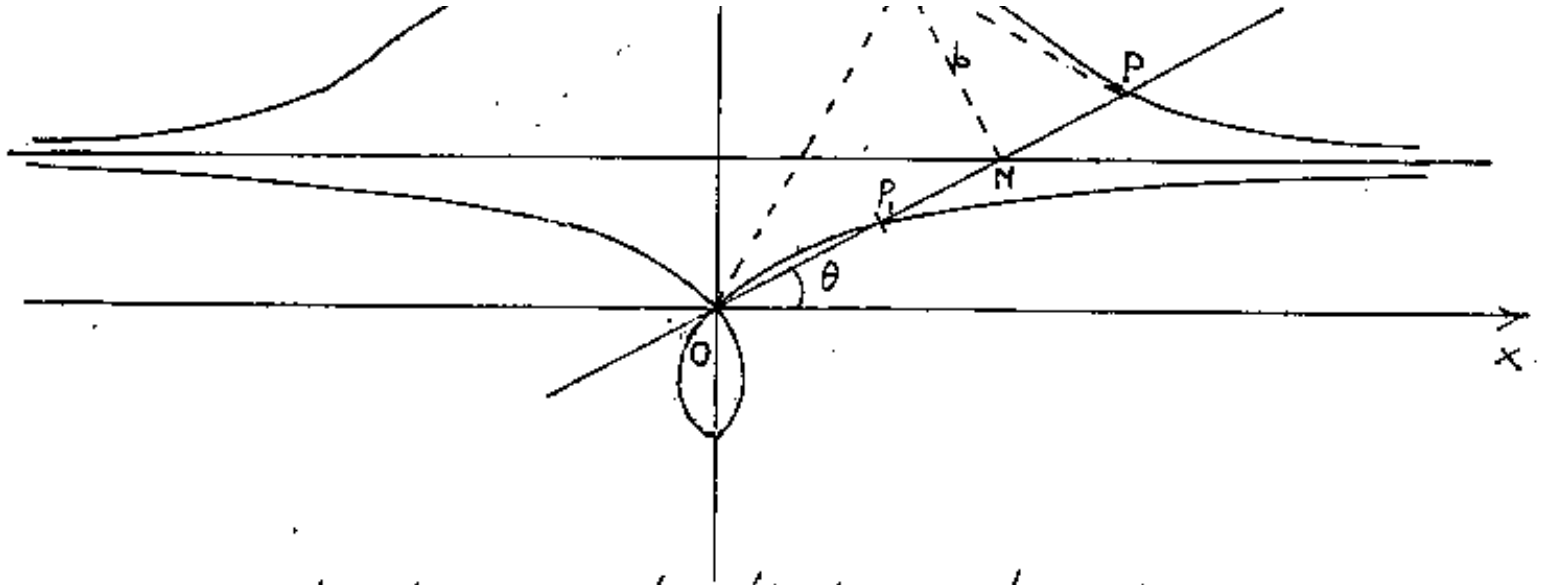
trasformando in polari:

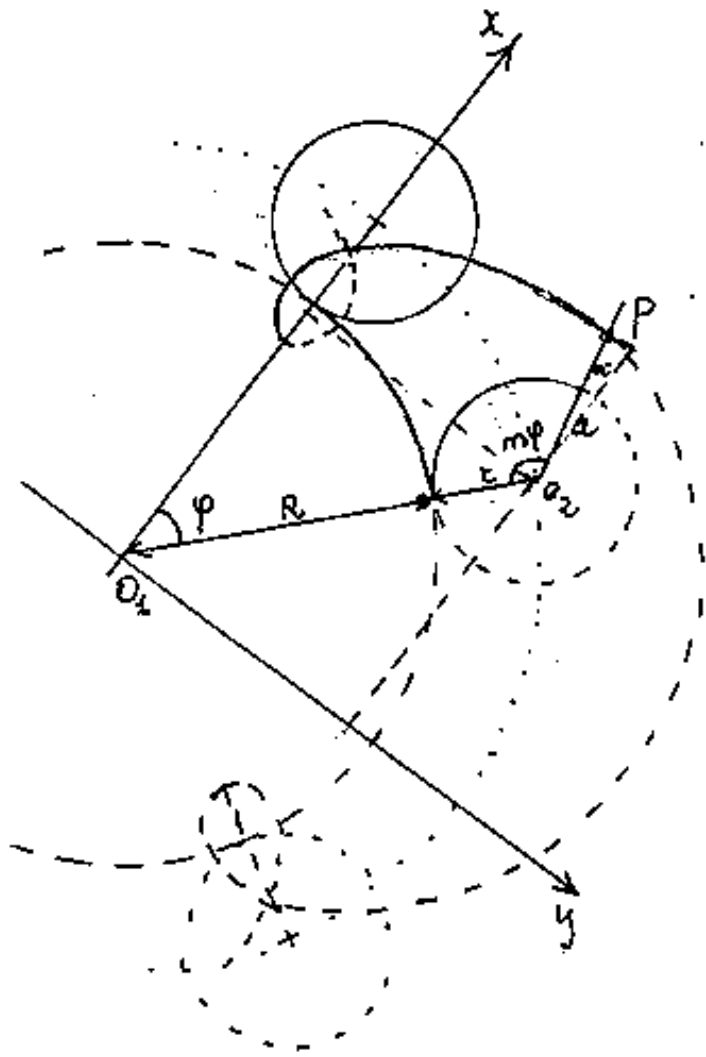
$$a(\rho \operatorname{sen}\theta - a)(\rho^2) - b^2\rho^2\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

$$\rho = \frac{b^2\operatorname{sen}^2\theta}{a\operatorname{sen}\theta} + \frac{a^2}{a\operatorname{sen}\theta}\ ; \quad \rho = \frac{a}{\operatorname{sen}\theta} \pm b^2/a \operatorname{sen}\theta$$

$$\rho = \frac{b^2\operatorname{sen}^2\theta + a^2}{a\operatorname{sen}\theta}$$

caso $b > a$

y

curve simili alla concoide di Nicomede

Le epicicloidi allungate (o accorciate)

Sia R il raggio della circonferenza fissa e sia r il raggio della circonferenza mobile, ove: $R/r = n$.

Sia "a" la distanza della punta scrivente dal centro della circonferenza mobile; cioè $\overline{O_2P} = a$ è un raggio prolungato (o accorciato) della circonferenza mobile. Le coordinate del centro O_2 della circonferenza mobile sono:

$$\begin{cases} x_{O_2} = (R+r)\cos\varphi = r(n+1)\cos\varphi \\ y_{O_2} = (R+r)\,\text{sen}\,\varphi = r(n+1)\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

poniamo $\alpha = (n\varphi + \varphi) - 180$; $(\alpha = (n+1)\varphi - 180)$

$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen}[(n+1)\varphi]$; $\cos\alpha = -\cos[(n+1)\varphi]$

$$\begin{cases} X_P = X_{O_2} + a\cos(\alpha) \\ Y_P = Y_{O_2} - a\operatorname{sen}(\alpha) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} X_P = r(n+1)\cos\varphi - a\cos[(n+1)\varphi] \\ Y_P = r(n+1)\operatorname{sen}\varphi - a\operatorname{sen}[(n+1)\varphi] \end{cases}}$$

Equazione dell'epicicloide allungata se $a > r$; accorciata se $a < r$

Se nell'equazione poniamo: $a = rm$ si ha:

$$x = r\left[(n+1)\cos\varphi - m\cos((n+1)\varphi)\right]$$

$$y = r\left[(n+1)\operatorname{sen}\varphi - m\operatorname{sen}((n+1)\varphi)\right]$$

In queste equazioni "r" = raggio della circonferenza mobile, rappresenta il modulo della scala grafica di rappresentazione; mentre i parametri $n = R/r$ ed $m = a/r$ rappresentano rispettivamente il n° di curve intorno alla circonferenza fissa ed il coefficiente di allungamento o accorciamento dell'epicicloide.

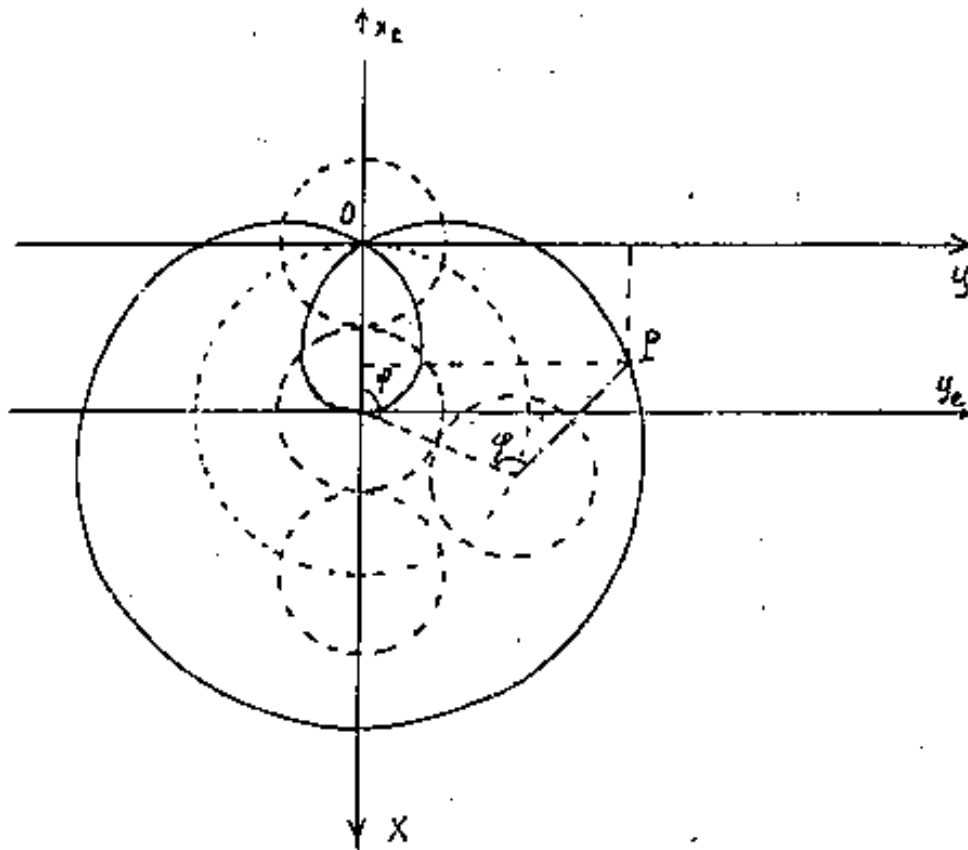
per $n = 1$ cioè: $R = r$ si ha la famiglia delle lumache di Pascal; ove, per $m = 1$, si ha il caso particolare della Cardioide.

Se poniamo $n = 1$ si ha:

$$x = r\left(2\cos\varphi - m\cos(2\varphi)\right)$$

$$y = r\,(2\,\mathrm{sen}\,\varphi - m\,\mathrm{sen}\,2\varphi)$$

Equazioni parametriche delle Lumache di Pascal.

Per ritrovare le equazioni ordinarie facciamo un cambio di assi di riferimento, (come abbiamo già fatto per la cardioide) Avremo:, indicando con x_e; y_e, le coordinate riferite agli assi delle epicicloidi, e con: x; y i nuovi assi;

$$\begin{cases} X = -x_e + mr \\ y = y_e \end{cases}$$

Sostituendo abbiamo:

$$\begin{cases} X = r\left[m\cos(2\varphi) - 2\cos\varphi + m\right] \\ y = r\left[2\operatorname{sen}\varphi - m\operatorname{sen}(2\varphi)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} X/r = 2m\cos^2\varphi - m - 2\cos\varphi + m \\ y/r = 2\operatorname{sen}\varphi - 2m\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} X/2r = \cos\varphi\,(m\cos\varphi - 1) \\ Y/2r = -\operatorname{sen}\varphi\,(m\cos\varphi - 1) \end{cases}$$

Equazioni parametriche delle lumache di Pascal nelle nuove coordinate.

$$y/x = \tan(\theta) = -\tan(\varphi) \quad \text{per cui} \quad \boxed{\theta = -\varphi}$$

elevando a quadrato e sommando le equazioni parametriche si ha:

$$\boxed{\left(\frac{\rho}{2r}\right)^2 = \left(\frac{x}{2r}\right)^2 + \left(\frac{y}{2r}\right)^2 = (m\cos\varphi - 1)^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{m}\left(\sqrt{\left(\frac{x}{2r}\right)^2 + \left(\frac{y}{2r}\right)^2} + 1\right)$$

$$\frac{x}{2r} = \frac{1}{m}\left(\sqrt{\left(\frac{x}{2r}\right)^2 + \left(\frac{y}{2r}\right)^2} \pm 1\right)\left(\sqrt{\left(\frac{x}{2r}\right)^2 + \left(\frac{y}{2r}\right)^2}\right)$$

$$\frac{m}{2r}x = \left(\frac{x}{2r}\right)^2 + \left(\frac{y}{2r}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{x}{2r}\right)^2 + \left(\frac{y}{2r}\right)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2rmx = 2r\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left(x^2 + y^2 - (2rm)x\right)^2 = (4r^2)(x^2 + y^2)$$

posto: $a = (2rm)$

$b = (2r)$ si ha:

$$(x^2+y^2-ax)^2 = b^2(x^2+y^2)$$

L'equazione cartesiana delle lumache di Pascal.

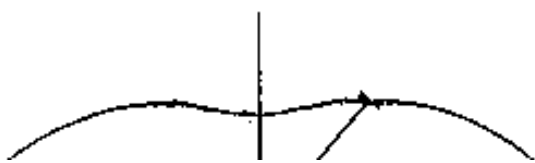
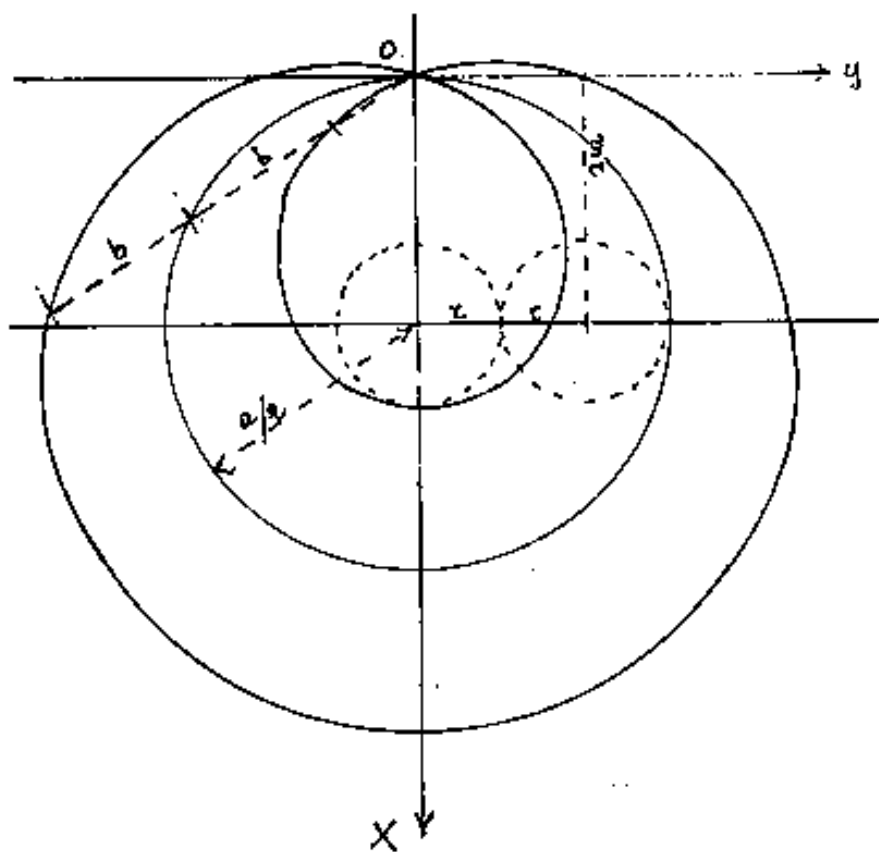
e poiché:

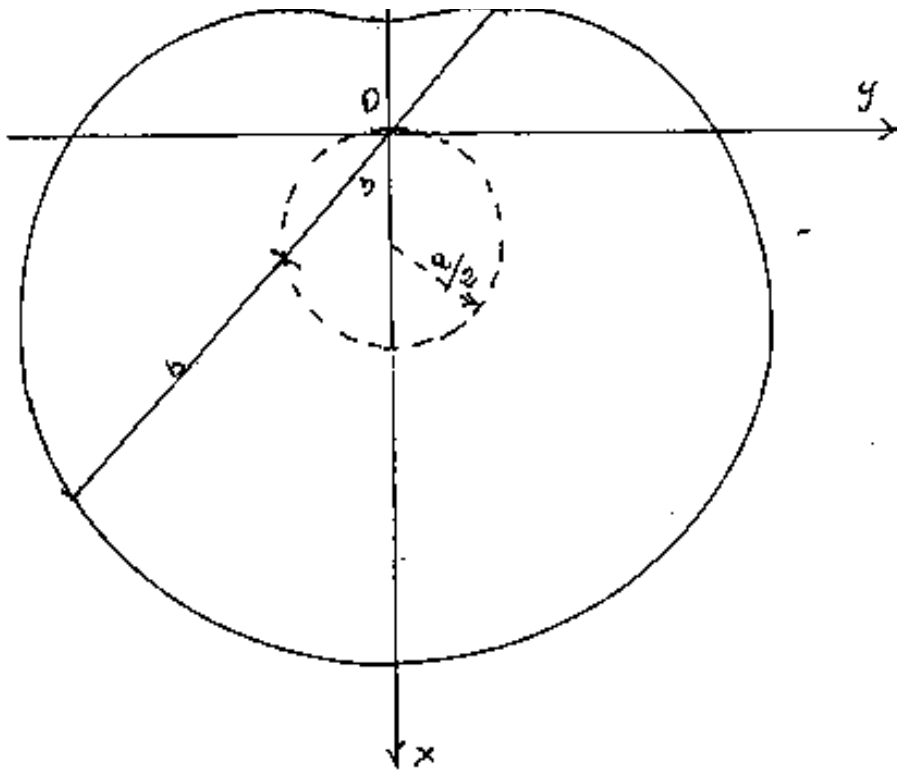
$$\rho = \pm(2rm\cos\varphi - 2r)$$

essendo: $\theta = -\varphi$ si ha:

$$\rho = b + a\cos\theta$$

l'equazione delle lumache di Pascal in coordinate polari.

Con ciò resta dimostrato che le lumache di Pascal sono delle epicicloidi con $R/r = n = 1$, allungate se $m > 1$; accorciate se $m < 1$, per $m = 1$ si ha la cardioide, con $m = 2$ si ha la curva trisettrice, che abbiamo già trattato, nella figura a fianco abbiamo tracciato una epicicloide con $n = 1$ ed $m = 3$, cioè una Lumaca di Pascal con $a/b = m = 3$

$a = 2mr$; $b = 2r$

Con $m < 1$, come si può vedere nella figura seguente, ove abbiamo posto $m = 1/2$ la curva

$m = 1/3$, la curva non presenta più il cappio e, come epicicloide è accorciata. Spesso è conveniente disegnarla come Concoide.

La nefroide

Se nelle equazioni parametriche generali delle epicicloidi poniamo $n=2$ ed $m=1$ otteniamo una curva detta **nefroide** che è una epicicloide normale ($m=1$) a due arcate (essendo $n=2$).

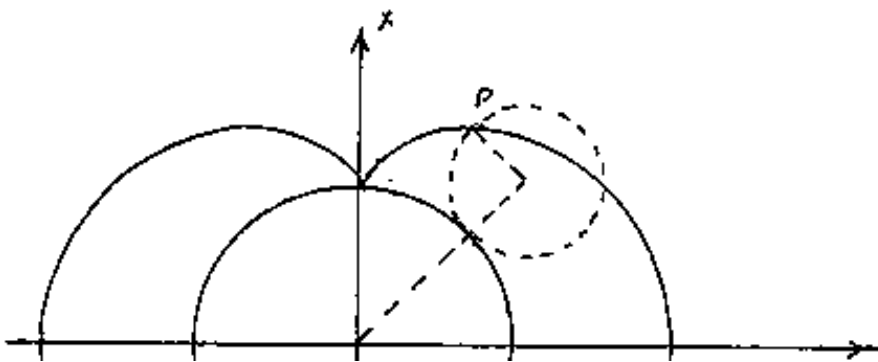
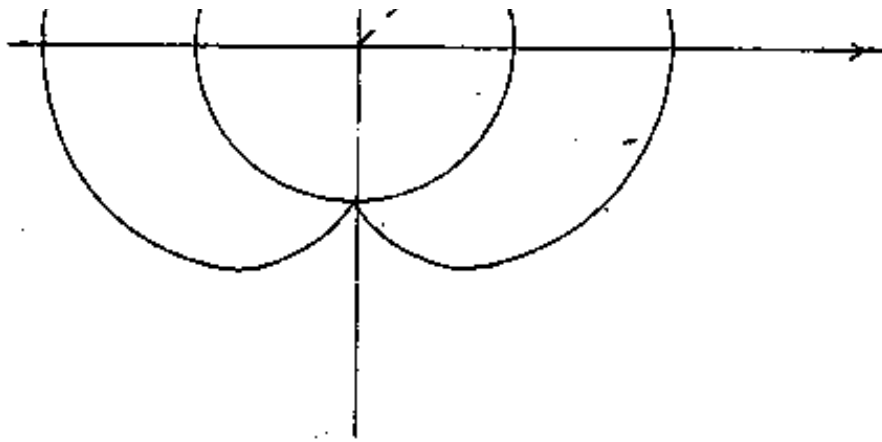
Le equazioni generali:

$$x = r\left[(n+1)\cos\varphi - m\cos((n+1)\varphi)\right]$$
$$y = r\left[(n+1)\operatorname{sen}\varphi - m\operatorname{sen}((n+1)\varphi)\right]$$

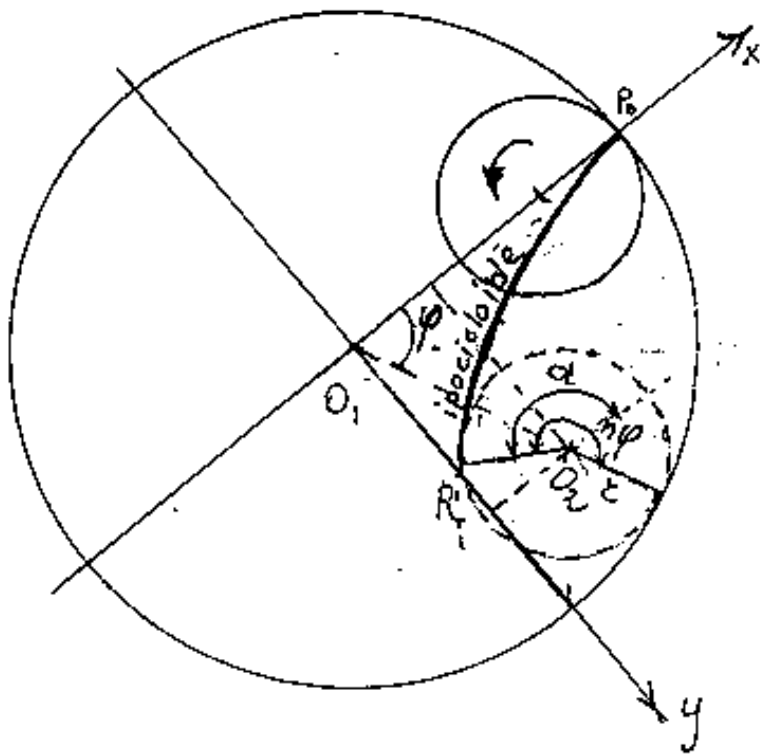
diventano:

$$x = r\left[3\cos\varphi - \cos(3\varphi)\right]$$
$$y = r\left[3\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}(3\varphi)\right]$$

equazioni parametriche della nefroide.

x
P

Il disegno a fianco rappresenta una nefroide ge=

una nefroide generato come epicicloide ordinaria con $R = 2r$.

Ipocicloidi

Si dicono ipocicloidi le linee tracciate da un punto connesso ad una circonferenza mobile che rotola senza slittare internamente ad una circonferenza fissa.

Indicheremo con $n = R/r$ il rapporto fra il raggio R della circonferenza fissa (esterna), ed il raggio r della circonferenza mobile interna. Quindi necessariamente $R > r$, $n > 1$.

Con $n = 1$ non è possibile alcun movimento; per $n > 1$ si hanno i seguenti casi: $\underline{1 < n < 2}$; $n = 2$; $2 < n < 3$; $n = 3$; ....

in generale: n = intero , n = non intero >1.

Usando gli stessi simboli si ha:

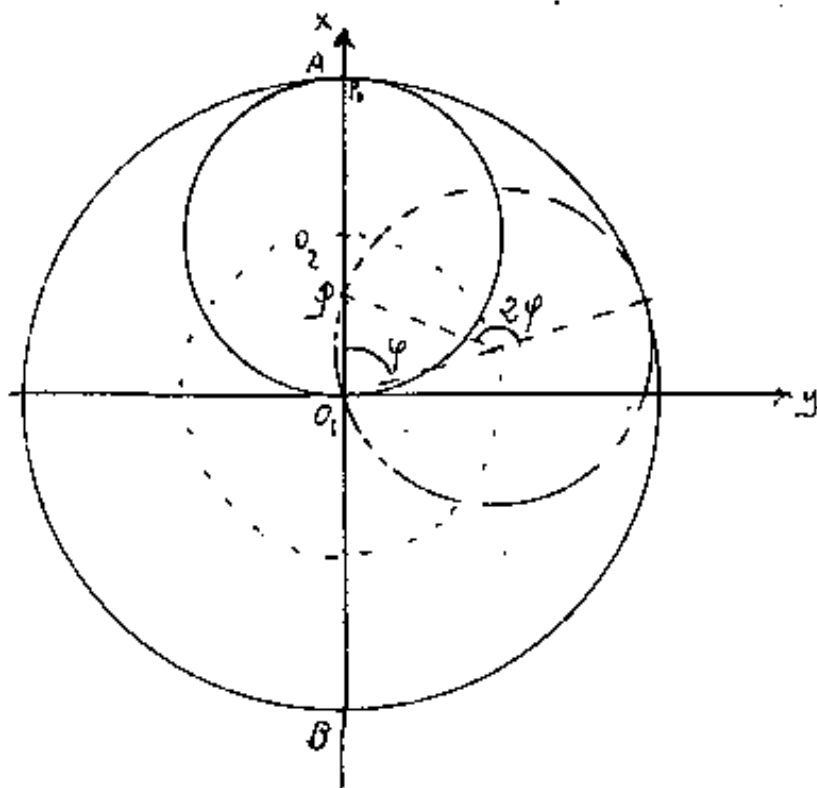
$$\begin{aligned} x_{O_2} &= (R-r)\cos\varphi = r(n-1)\cos\varphi \\ y_{O_2} &= (R-r)\operatorname{sen}\varphi = r(n-1)\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}$$

posto: $\alpha = n\varphi - \varphi = (n-1)\varphi$ abbiamo:

$$\begin{cases} x = (x_0 + (\cos\alpha)\,r) = r\left[(n-1)\cos\varphi + \cos((n-1)\varphi)\right] \\ y = (y_0 - (\operatorname{sen}\alpha)\,r) = r\left[(n-1)\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}((n-1)\varphi)\right] \end{cases}$$

$$x = r[(n-1)\cos(\varphi) + \cos((n-1)\varphi)]$$
$$y = r[(n-1)\,sen(\varphi) - sen((n+1)\varphi)]$$

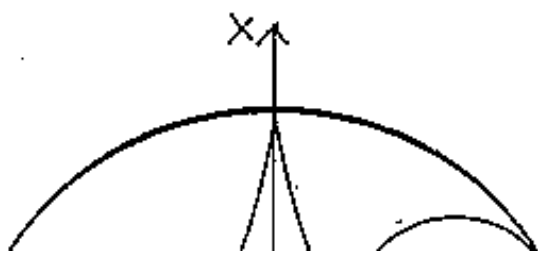
equazioni parametriche dell'ipocicloide

Consideriamo le ipocicloidi con n = intero > 1

Per $n=2$ le equazioni diventano:

$$\begin{cases} x = r[\cos\varphi + \cos\varphi] \\ y = r[sen\varphi - sen\varphi] \end{cases}$$

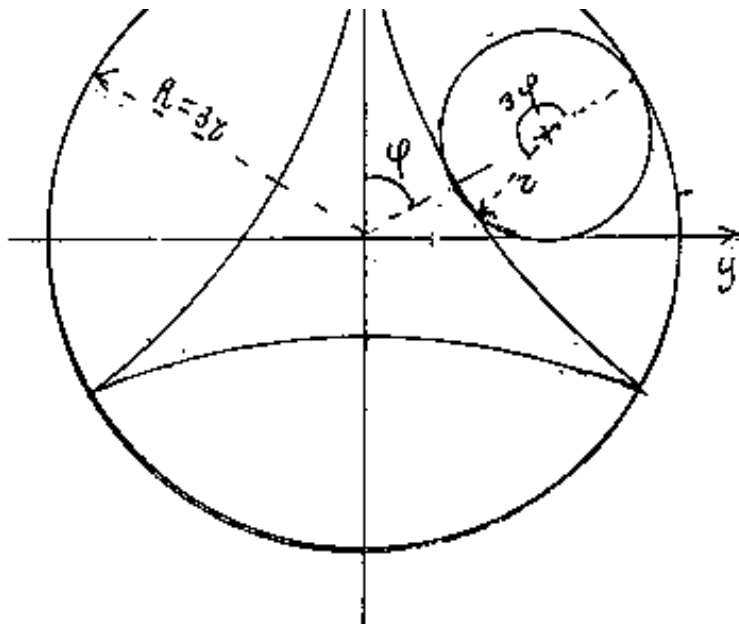
cioè $x = 2r\cos\varphi$

$y = 0$

la curva tracciata è il diametro $\overline{AB}$

Il Deltoide

con $n=3$ la curva ipocicloide è detta deltoide, le equazioni diventano:

$$\{ x = r(2\cos\varphi + \cos(2\varphi))$$

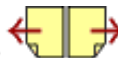
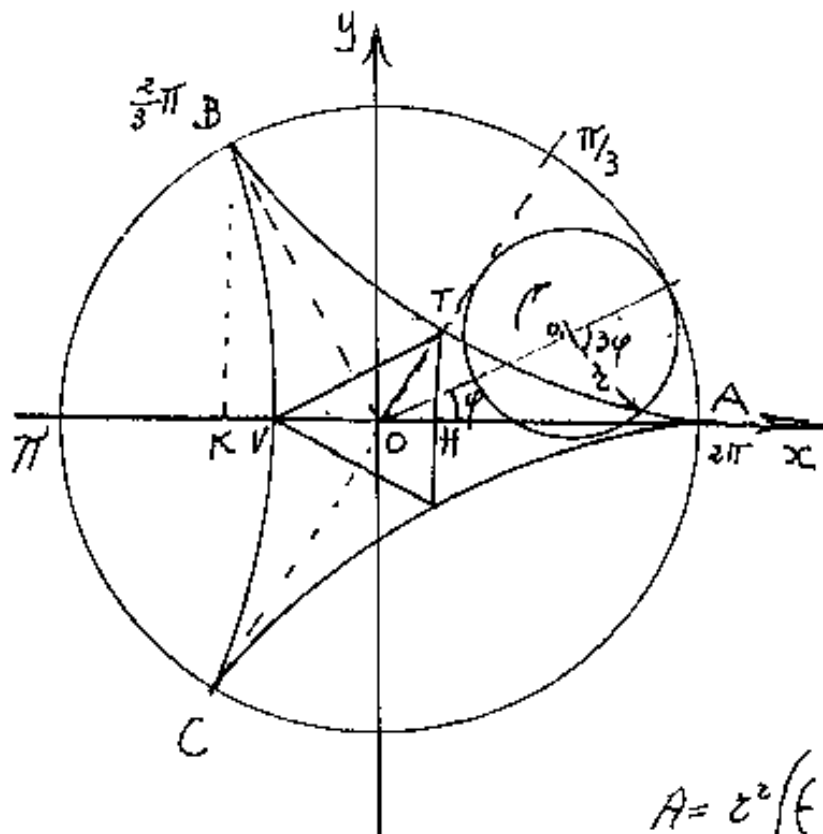
$$\begin{cases} x = r(2\cos\varphi + \cos(2\varphi)) \\ y = r(2\,\text{sen}\,\varphi - \text{sen}(2\varphi)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r[2\cos\varphi(1 + \cos\varphi) - 1] \\ y = r(2\,\text{sen}\,\varphi(1 - \cos\varphi)) \end{cases}$$

La curva deltoide è detta anche ipocicloide tricuspidata. (Area $= 2r^2\pi$).

Area del Deltoide

$$x = r(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)$$

$$y = r(2\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi)$$

$$dx = r(-2\operatorname{sen}\varphi - 2\operatorname{sen}2\varphi)d\varphi.$$

$$A = \int y \cdot dx$$

$$A = r^2\int(-4\operatorname{sen}^2\varphi - 4\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi + 2\operatorname{sen}^2 2\varphi)\,d\varphi$$

Nel calcolare quest'area occorre notare che nel tratto: $0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$ al crescere di $\varphi > 0$ anche $y > 0$ ma la x viene percorsa in senso negativo per cui l'area sarà negativa e non rappresenta $A/3$ perché dovremmo togliere (dal valore assoluto) l'area del triangolo BKO, mentre per $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ al valore assoluto dell'area del triangolo curvilineo AHT dobbiamo aggiungere l'area del triangolo OHT per avere $A/3$

aggiungere l'area del triangolo OHI per avere A/3

Questi problemi non nascono estendendo: φ da zero a π per avere $\frac{A}{2}$ perché l'arco BV è tracciato ad x crescenti e quindi sottrae BKV all'area AKB.

$$A = \left[-2(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+\varphi)-\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3\varphi+\frac{1}{2}(-\operatorname{sen}2\varphi\cos2\varphi+2\varphi)\right]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{A = 2r^2\pi} \qquad \boxed{= A = \frac{2}{9}R^2\pi}$$

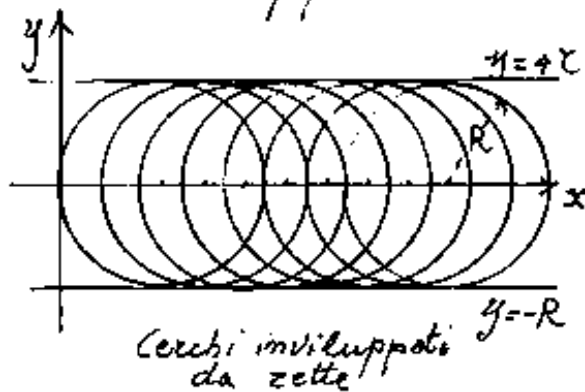
Le curve inviluppo

Il concetto di curva inviluppo è già stato introdotto a proposito degli "integrali singolari" delle equazioni differenziali (c.f.r. III vol.)

Consideriamo un curva $y = f(x, c)$ ove "c" è un parametro. Per esempio: $y = \sqrt{R^2 - (x-c)^2}$ è una famiglia di cerchi ove "c" rappresenta l'ascissa del centro. Ad ogni valore di "c" corrisponde una circonferenza di raggio R. L'insieme di tutte le circonferenze di raggio R e con centro sulle ascisse sono inviluppate da due rette: $y = +R$; $y = -R$.

$y = +R$

$y = -R$

Cerchi inviluppati da rette

Si noti che se consideriamo "c" fisso ed R un parametro, si ha la famiglia di cerchi concentrici a raggio variabile, ma non ammettono linee che l'inviluppano. Quindi un parametro in una funzione

zione: $y = f(x)$ non sempre determina una curva inviluppo.

Consideriamo una famiglia di curve: $f(x, y, a) = 0$ ottenute al variare del parametro "a". - Se esiste una curva Γ che ha <u>un punto di contatto</u>[1] con ciascuna curva "C" della

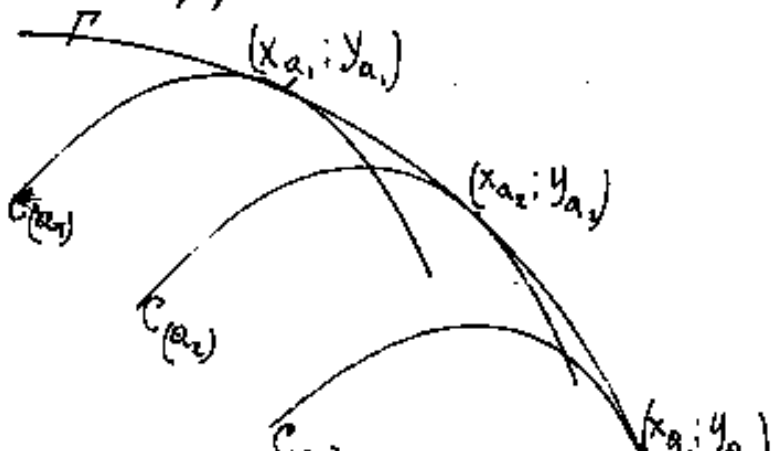
(1) Dicesi: "<u>punto di contatto</u>" fra due curve, quando toccandosi, hanno la stessa tangente. (vedi ordine dei punti di contatto)

famiglia: $f(x,y,a)=0$; diremo che Γ è l'inviluppo delle curve "C", e che le curve "C" sono inviluppate da Γ.

Sorge così il problema: data una espressione $f(x,y,a)=0$, dire se esiste o meno la curva (o le curve) inviluppo e che tipo di inviluppo.

Supponiamo, in un primo momento, che la curva Γ esista e che possa esprimersi parametricamente con lo stesso parametro "a".

Ciò è possibile perché ad ogni valore di "a" corrisponde una curva "C" della famiglia e quindi un punto (il punto di contatto) della curva inviluppo Γ.

Γ $(x_{a_1};y_{a_1})$ $(x_{a_2};y_{a_2})$ $C_{(a_1)}$ $C_{(a_2)}$ $(x_{a};y_{a})$

Siano quindi:

$$\begin{cases} X = X_{(a)} \\ Y = Y_{(a)} \end{cases}$$

Le equazioni para=

$C_{(a_3)}$ $(x_{a_3}; y_{a_3})$ Γ

Le equazioni parametriche della curva Γ, che dovranno soddisfare la nostra espressione:

$$f(x_{(a)}, y_{(a)}, a) = 0$$

Per definizione, nei punti di contatto le "C" e Γ hanno la stessa retta tangente la cui equazione sarà: per le curve "C":

$$[x - x_{(a)}]\frac{\partial f}{\partial x} + [y - y_{(a)}]\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

e per la curva Γ l'equazione della tangente è:

$$\frac{x - x_{(a)}}{x'_{(a)}} - \frac{y - y_{(a)}}{y'_{(a)}} = 0$$

le due equazioni possono essere scritte:

$$\begin{cases} (x - x_{(a)})\dfrac{\partial f}{\partial x} = -(y - y_{(a)})\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ (x - x_a)\dfrac{1}{x'_{(a)}} = (y - y_{(a)}) \cdots \end{cases}$$

dividendo membro a membro:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'_{(a)} = - \frac{\partial f}{\partial y}(y'_{(a)})$$

cioè:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} x'_{(a)} + \frac{\partial f}{\partial y} y'_{(a)} = 0}$$

<u>è la condizione per cui le due rette tangenti coincidono</u>

derivando la:

$$f(x_a, y_a, a) = 0$$

otteniamo:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} x'_{(a)} + \frac{\partial f}{\partial y} y'_{(a)} + \frac{\partial f}{\partial a} = 0}$$

che coincide con la condizione di cui sopra

se :

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0$$

Quindi affinché esista una curva inviluppo Γ le coordinate parametriche di Γ $(x = x_{(a)} ; y = y_{(a)})$ debbono soddisfare le due espressioni:

$$\begin{cases} f(x_{(a)}, y_{(a)}, a) = 0 \\ f'_{(a)}(x_{(a)}, y_{(a)}, a) = 0 \end{cases} \quad *$$

(la derivata in a)

Inversamente da queste due equazioni si possono ricavare le coordinate parametriche di Γ

Nel caso che $x_{(a)}, y_{(a)}$ fosse un punto singolare, cioè che contemporaneamente $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, e quindi lo Jacobiano: $J = \frac{d(f, f'_{(a)})}{d(x,y)} = 0$, la condizione non sarebbe sufficiente; occorre che:

$\boxed{J \neq 0}$ cioè il punto $(x_{(a)}; y_{(a)})$ sia un punto regolare e quindi non avvenga che si abbia contemporaneamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \;;\; \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Qualora le curve $C_{(a)}$ abbiano una continuità di punti singolari variabili ed il luogo di

questi punti sia $x = x_{(a)}$; $y = y_{(a)}$ queste coordinate soddisfano: $f(x,y,a)$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ e differenziandole si trova che soddisfano anche a: $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, Cioè si trova che le equazioni (*) in generale definiscono l'insieme delle curve inviluppo ed il luogo dei punti singolari di queste curve.

Facciamo alcuni esempi

Abbiamo già trattato la parabola come traettoria di un corpo lanciato, con velocità iniziale V_0, in direzione α, in campo gravitazionale g (cfr. Vol II)

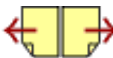
Riprendiamo il problema considerando α variabile, abbiamo scomposto la velocità iniziale $\vec{V_0}$ (vettore in direzione α) nei vettori componenti: $\vec{U_0} = \vec{V_0} \operatorname{sen}\alpha$; $\vec{H_0} = \vec{V_0} \cos\alpha$ ed, in assenza di attriti, per la legge d'inerzia $\vec{H_0}$ si mantiene costante, mentre $\vec{U_0}$ diretto in verso opposto (almeno inizialmente) alla direzione dell'accelerazione di gravità: $\vec{g}$, diminuisce gradatamente di intensità fino ad annullarsi quando: $\vec{g}t = \vec{U_0}$. cioè al tempo $t = \vec{U_0}/g$ il proietto ha raggiunto la massima altezza ed $\vec{U} = \vec{U_0} - gt$ inverte il suo moto. Poichè sappiamo: $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\frac{U_0^2}{g^2} = \frac{U_0^2}{2g}$

$$\boxed{h = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}}$$

se $\alpha = \pi/2$, cioè se il mobile viene sparato verticalmente in alto con velocità iniziale v l'altezza massima sarà: $h_m = \frac{V_0^2}{\ldots}$

ziale V_0 l'altezza massima sarà: $h_m = \frac{V_0}{2g}$

Consideriamo il nostro apparecchio lanciatore al centro degli assi e vogliamo trovare il luogo geometrico dei massimi delle parabole traettorie.

$$\boxed{y = \frac{V_0^2}{2g}\operatorname{sen}^2\alpha}\,; \quad x = V_0 t \cos\alpha \; = \; x = V_0\left(\frac{V_0}{g}\right)\cos\alpha\,; \quad \boxed{x = \frac{V_0^2}{g}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

Le coordinate parametriche dei massimi sono:

$$\begin{cases} y = \left(\frac{V_0^2}{2g}\right) \sin^2(\alpha) \\ x = \left(\frac{V_0^2}{2g}\right) \sin(2\alpha) \end{cases}$$

eliminando α si ottiene l'equazione del luogo dei massimi.

elevando a quadrato la seconda equazione e sostituendovi $\sin^2\alpha = y\left(\frac{2g}{V_0^2}\right)$ si ha:

$$x^2 = \left(\frac{V_0^2}{g}\right)^2 (\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha) = \left(\frac{V_0^2}{g}\right)^2 \left[y\left(\frac{2g}{V_0^2}\right)\left(1 - y\left(\frac{2g}{V_0^2}\right)\right)\right] = \left(\frac{2V_0^2}{g} y - 4y^2\right)$$

$$\boxed{x^2 = 2\frac{V_0^2}{g} y - 4y^2} \quad ; \left(y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{V_0^2 y}{2g} = 0\right)$$

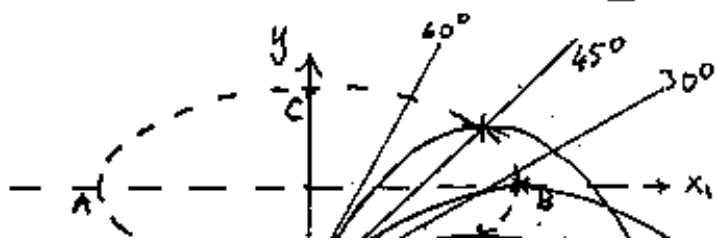
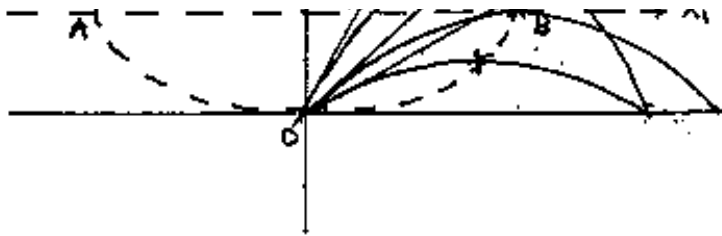
facciamo una sostituzione di variabile ponendo:

$$y = \left(y_1 + \frac{V_0^2}{4g}\right) \qquad \text{avremo:}$$

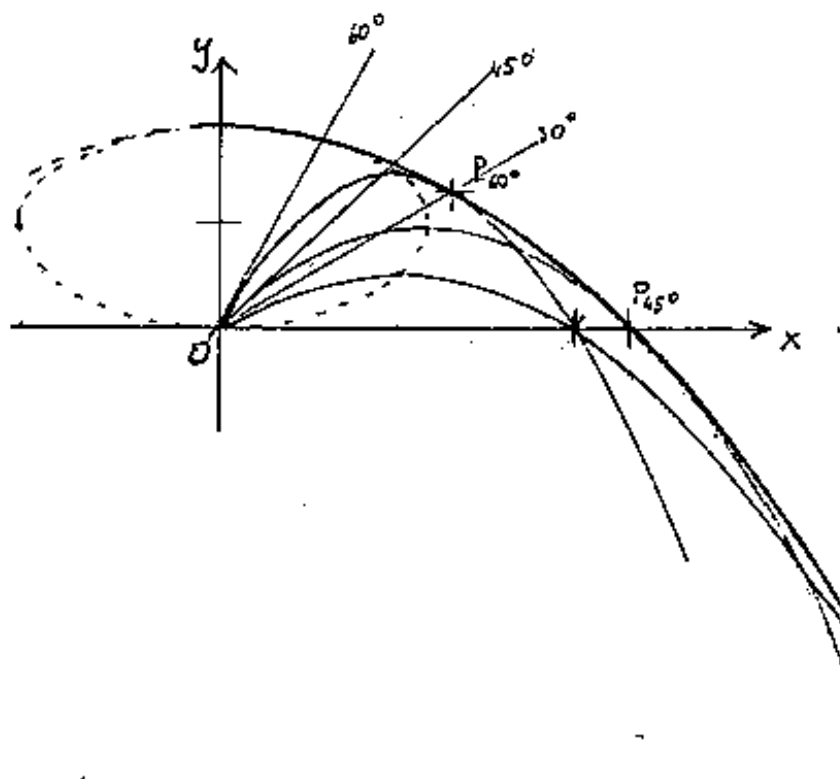
$$y^2 = y_1^2 + \frac{V_0^2}{2g} y_1 + \left(\frac{V_0^2}{4g}\right)^2 \quad ; \quad -\frac{V_0^2}{2g}\left(y_1 + \frac{V_0^2}{4g}\right) = -\frac{V_0^2}{2g} y_1 - \frac{V_0^4}{8g^2}$$

$$\frac{x^2}{4} + y_1^2 + \left(\frac{V_0^2}{g}\right)\left(\frac{1}{16} - \frac{2}{16}\right) = 0 \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y_1^2}{1} = \left(\frac{V_0^2}{4g}\right)^2$$

ed anche:

$$\boxed{\frac{x^2}{\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{V_0^2}{4g}\right)^2} = 1}$$

classica equazione di un ellisse ad assi spostati

che certamente non è una curva inviluppo

infatti per $\alpha = 0$ la parabola traettoria degenera nel segmento $\overline{OC} \div \overline{C(-\infty)}$; per $\alpha = 60°$; $y = \frac{3}{4}\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)$; $x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)$; per $\alpha = 45°$ $y = \frac{V_0^2}{4g}$; $x = \frac{V_0^2}{2g}$ (si ha la massima gittata); per $\alpha = 30°$ $y = \frac{V_0^2}{8g}$; $x = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{V_0^2}{g}$; si ha la stessa gittata di 60°.

L'INVILUPPO di TORRICELLI

Riprendiamo il problema precedente, e vediamo, se la famiglia di parabole traettorie con velocità iniziale $\vec{V_0}$ e con partenza nell'origine degli assi, aventi come parametro l'angolo α, ammette curve inviluppo.

Le coordinate del proietto al tempo t dopo la partenza sono: $y = tV_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}gt^2$; $x = V_0 t \cos\alpha$

eliminiamo $t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$ ed avremo:

$$y = x\,tg(\alpha) - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\alpha}$$ cioè:

l'equazione $f(x,y,\alpha)=0 \equiv$ $\boxed{y - x\,tg(\alpha) + \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\alpha} = 0}$

facciamo la derivata rispetto ad α ed uguagliamo a zero.

$$f'_\alpha(x,y,\alpha)=0 \equiv \frac{-x}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2}\left(-2\cos\alpha^{-3}(-\operatorname{sen}\alpha)\right) = 0$$

$$f'_\alpha(x,y,\alpha)=0 \equiv \boxed{\frac{x}{\cos^2\alpha}\left[1-\frac{gx}{V_0^2}\operatorname{tg}\alpha\right]=0}$$

questa equazione risulta verificata per $x=0$ e per

$\left[1-\left(\frac{gx}{V_0^2}\right)\operatorname{tg}\alpha\right]=0$ cioè per $\boxed{\operatorname{tang}(\alpha)=\frac{V_0^2}{gx}}$

essendo $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \left(tg^2\alpha + 1\right) = \left[\left(\frac{V_0^2}{gx}\right)^2 + 1\right]$

sostituendo nella $f(x,y,\alpha)=0$ si ha:

$$y = x \cdot \frac{V_0^2}{gx} - \frac{gx^2}{2V_0^2}\left(\left(\frac{V_0^2}{gx}\right)^2 + 1\right)$$

$$y = \frac{V_0^2}{g} - \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{V_0^2}x^2$$

$$\boxed{y = \left(\frac{-g}{2V_0^2}\right)x^2 + \frac{V_0^2}{2g}}$$ curva inviluppo

Equazione di una parabola che volge la concavità verso le $y < 0$, con vertice spostato in $\frac{V_0^2}{2g}$ (indipendente da α) questo inviluppo è detto di Torricelli.

Le rette tangenti a Γ avranno per coefficiente angolare: $\boxed{y' = \frac{-g}{V_0^2}x}$

Le curve C (parabole traettorie) avranno per equazione come visto:

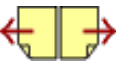
$$\boxed{y = -\left(\frac{g}{2V_0^2}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)x^2 + x\,tg(\alpha)}$$

e le rette tangenti alle C avranno per coefficiente

angolare : $y' = -\frac{g}{V^2}\frac{X}{\cos^2\alpha} + tg(\alpha)$

per ogni α determinato, cioè per ogni curva C uguagliamo la y' con y' di Γ $-\frac{g}{V_0^2}X = -\frac{g}{V_0^2}\frac{X}{\cos^2\alpha} + tg\alpha$

$$\left(\frac{g}{V_0^2}\right)\left(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)X = tg\alpha \qquad \boxed{X = \frac{V_0^2}{g\, tg\alpha}}$$

ove X rappresenta l'ascissa ove si verifica che le C e Γ hanno la stessa inclinazione della retta tangente

Sostituiamo questa x nelle due equazioni:

$$y_p = \left(\frac{-g}{2V_0^2}\right)\left(\frac{V_0^2}{g\,tg(\alpha)}\right)^2 + \frac{V_0^2}{2g}$$

$$y_p = \frac{-V_0^2}{2g\,tg^2\alpha} + \frac{V_0^2}{2g} = \frac{V_0^2}{2g}\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = \boxed{\frac{V_0^2}{2g}\left(\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)}$$

$$y_c = -\frac{g}{2V_0^2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(\frac{V_0^2}{g\,tg\alpha}\right)^2 + \frac{V_0^2}{g} = \frac{-V_0^2}{2g\,\sin^2\alpha} + \frac{2V_0^2}{2g} = \frac{V_0^2}{2g}\left(\frac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha}\right)$$

$$y_c = \frac{V_0^2}{2g}\,\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha} = \boxed{\frac{V_0^2}{2g}\left(\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)}$$

$$\boxed{y_p = y_c = \frac{V_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{tg^2\alpha}\right)}$$

Avendo la stessa ordinata con la stessa ascissa si ha un punto di contatto nel quale le due curve hanno la stessa tangente (con la stessa pendenza)

in particolare i punti di contatto sono

per $\alpha = 0$ $\quad P \equiv (\infty, -\infty)$

$\alpha = 60°$ $\quad P \equiv (0{,}5774\,;\ 0{,}3333)\,\frac{V_0^2}{g}$

$\alpha = 45°$ $\quad P \equiv (1\ ;\ 0)\,\frac{V_0^2}{g}$

$\alpha = 45° \quad P \equiv (1 \; ; \; 0) \dfrac{V_0^2}{g}$

$\alpha \; 30° \quad P \equiv (1{,}7321 \; ; \; -1) \dfrac{V_0^2}{g}$

Curva asteroide

Se nelle formule dell'ipocicloide poniamo $n=4$ si ha una curva a quattro cuspidi detta Asteroide; abbiamo già parlato di curva Asteroide, a proposito dell'evoluta dell'ellisse (vol II).

Le formule diventano:

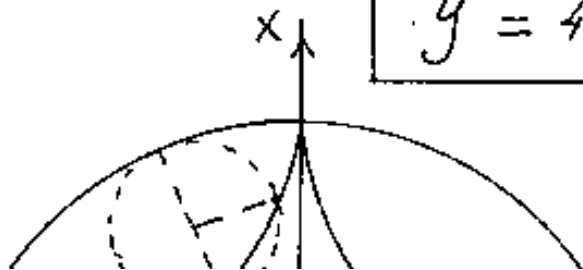
$$\begin{cases} x = r\left(3\cos(\varphi) + \cos(3\varphi)\right) \\ y = r\left(3\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}(3\varphi)\right) \end{cases}$$

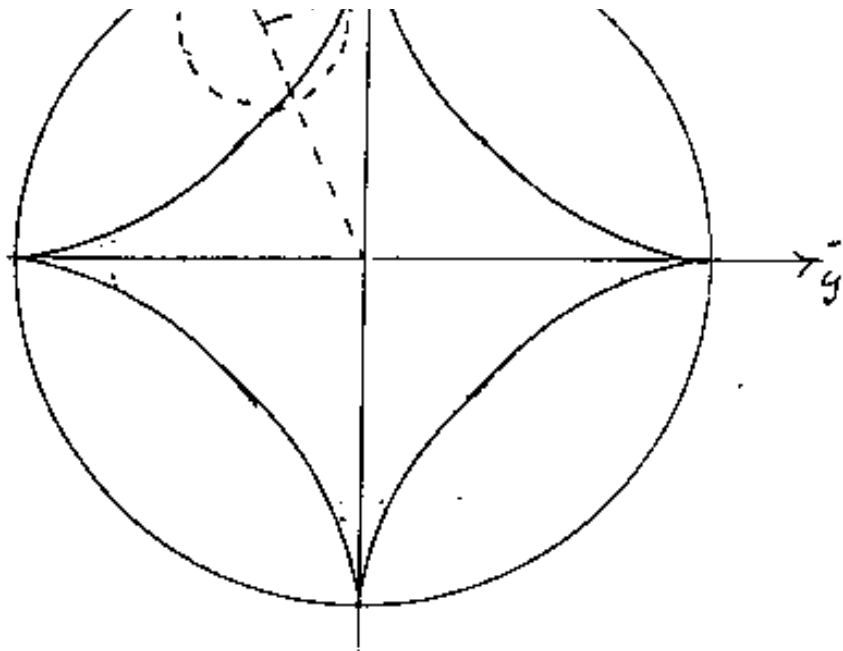
sviluppando si ha:

$$x = r\left[3\cos(\varphi) + 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\right]$$

$$y = r\left[3\operatorname{sen}\varphi - 3\operatorname{sen}\varphi + 4\operatorname{sen}^3\varphi\right]$$

$$\begin{cases} x = 4r\cos^3\varphi \\ y = 4r\operatorname{sen}^3\varphi \end{cases}$$

Equazioni parametriche dell'Asteroide

x

possiamo anche scrivere:

$\cos^2\varphi = (x/4r)^{2/3}$)

$$\cos^2\varphi = (x/4r)^{2/3}$$
$$\operatorname{sen}^2\varphi = (y/4r)^{2/3}$$

sommando; e ponendo $a = 4r$ si ha:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

formula classica dell'Asteroide.

$$Area = 6r^2\pi = \frac{3}{8}R^2\pi$$

Area dell'Asteroide

$$A = \int y \cdot dx \qquad dx = (-4r)(3\cos^2\varphi \, \text{sen}\,\varphi)\, d\varphi$$

$$A = -\int (4r\,\text{sen}^3\varphi)(12r\cos^2\varphi\,\text{sen}\,\varphi)\, d\varphi$$

$$A = -48r^2 \int \text{sen}^4\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi = -12 \int \text{sen}^2 2\varphi\, \text{sen}^2\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{A}{4} = \frac{12}{3} r^2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 2\varphi \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) \frac{d2\varphi}{2}$$

$$\frac{A}{4} = 3r^2 \left\{ \left[\left(\frac{-\text{sen}\,2\varphi\cos 2\varphi + 2\varphi}{2} - \frac{\text{sen}^3 2\varphi}{3} \right) \right]_0^{\pi/2} \right\}$$

$$\frac{A}{4} = \frac{3r^2\pi}{2} \qquad \boxed{A = 6r^2\pi}$$

$$\boxed{A = \frac{3}{8} R^2 \pi}$$

Raggio di curvatura nell'asteroide

$$\boxed{y = \sqrt{\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^3}}$$; forma esplicita dell'eq. dell'asteroide.

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = \qquad \boxed{y' = -\sqrt{\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3} - 1\right)}}$$

$$y'' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\quad}\right)\left(-\frac{2}{3}\,\frac{a^{2/3}}{\quad}\right) = \qquad y'' = \frac{a^{2/3}}{\quad}$$

$$y'' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}-1}}\right)\left(-\frac{2}{3}\,\frac{a^{2/3}}{x^{5/3}}\right) = \quad \boxed{y'' = \frac{a^{2/3}}{3\cdot x^{5/3}\sqrt{\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}-1\right)}}}$$

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1+a^{2/3}-1\right)^{3/2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{a^{2/3}}{x^{5/3}\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}-1}}} = \frac{3a\,x^{5/3}\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}-1}}{x\,a^{2/3}} =$$

$$R = \frac{3a^{1/3}\cdot x^{2/3}\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}-1}}{1} \qquad \boxed{R = 3a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a^{2/3}\cdot x^{2/3}-x^{4/3}}}$$

se poniamo: $x = \left(\frac{a}{m}\right)$; $R = 3a^{\frac{1}{3}}\sqrt{a^{2/3}\,\frac{a^{2/3}}{m^{2/3}} - \frac{a^{4/3}}{m^{4/3}}}$

raggio = $\boxed{R = \frac{3a}{m^{2/3}}\sqrt{m^{2/3}-1}}$

Equazione in coordinate polari dell'Asteroide

Se eleviamo a quadrato le equazioni parametriche e sommiamo si ha: $(4r=a)$

$$x^2+y^2 = a^2\left(\cos^6(\varphi)+\text{sen}^6(\varphi)\right) = \rho^2$$

per ricavare l'equazione dell'asteroide in coordinate polari poniamo: $\varphi = \theta =$ argomento:

$$\rho^2 = a^2\left(\cos^6\theta + \text{sen}^6\theta\right)$$

$$\rho^2 = a^2\left[\cos^2\theta\cos^4\theta + \text{sen}^2\theta\,\text{sen}^4\theta\right]$$

$$\rho^2 = a^2\left(\cos^4\theta - \cos^4\theta\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}^4\theta - \text{sen}^4\theta\cos^2\theta\right)$$

$$\rho^2 = a^2\left[\cos^2\theta\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\theta - \left(\cos^2\theta\,\underline{\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta} + \text{sen}^2\theta\,\underline{\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta}\right)\right]$$

$$\rho^2 = a^2\left[\underline{\cos^4\theta} - \cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta + \underline{\text{sen}^4\theta} - \cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta - \left((\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)(\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta)\right)\right]$$

$$\rho^2 = a^2\left[1 - 2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta - (\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta)\right] =$$

$$\rho^2 = a^2\left[1 - 3\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta\right] \quad \text{aggingo e tolgo } \cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta$$

$$\rho^2 = a^2\left[1 - 4\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta\right]$$

$$\rho^2 = a^2\left[1 - \text{sen}^2 2\theta + \tfrac{1}{4}\text{sen}^2 2\theta\right]$$

$$\rho^2 = \frac{a^2}{4}\left[4\cos^2 2\theta + 1 - \cos^2 2\theta\right]$$

$$\boxed{\rho = \frac{a}{2}\sqrt{3\cos^2 2\theta + 1}}$$

equazione dell' Asteroide in polari.

$$\begin{cases} X = \frac{a}{2}\cos\theta\sqrt{3\cos^2 2\theta + 1} \\ y = \frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta\sqrt{3\cos^2 2\theta + 1} \end{cases}$$

altra forma di equazioni parametriche

$$\begin{cases} X = a\cos^3\theta \\ y = a\operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

L'Evoluta dell'Asteroide

Le equazioni parametriche dell'evoluta per una funzione generica $y=f_{(x)}$ sono: (vol II)

$$\begin{cases} x_c = x - f'_{(x)}\left(\dfrac{1+f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}}\right) \\ y_c = f_{(x)} + \left(\dfrac{1+f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}}\right) \end{cases}$$

Le derivate dell'asteroide le abbiamo già calcolate:

$$f'_{(x)} = -\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}-1\right)^{1/2} \quad ;$$

$$f''_{(x)} = \frac{(a/x)^{2/3}}{3x\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}-1\right)^{1/2}} \quad ;$$

Sostituendo:

$$x_c = x + \left(\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+(a/x)^{2/3}-1}{\frac{(a/x)^{2/3}}{3x\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}-1\right)^{1/2}}}\right) =$$

$$x_c = x + 3x\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}-1\right) = x + 3a^{2/3}x^{1/3} - 3x$$

$$x_c = 3a^{2/3}x^{1/3} - 2x$$

$$y_c = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)\sqrt{\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)} + 3x\sqrt{\frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}}}$$

$$y_c = \left[\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right) + \left(3x^{2/3}\right)\right]\sqrt{\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)}$$

$$y_c = \left(a^{2/3} + 2x^{2/3}\right)\sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}$$

Le cordinate dell'asteroide abbiamo visto che possono esprimersi:

$$x = a\cos^3\varphi \quad ; \quad y = a\,\text{sen}^3\varphi \; ;$$

od anche: $x = a\cos^3\theta$; $y = a\,\text{sen}^3\theta$;

sostituendo nelle parametriche dell'evoluta dell'Asteroide:

$$\begin{cases} x_e = 3a^{2/3}x^{\frac{1}{3}} - 2x \\ y_e = (a^{2/3} + 2x^{2/3})\sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}} \end{cases} \quad (f(x))$$

si ha:

$$x_c = 3a^{2/3}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cos\varphi - 2a\cos^3\varphi = a(3\cos\varphi - 2\cos^3\varphi)$$

$$y_c = (a^{2/3} + 2a^{2/3}\cos^2\varphi)\sqrt{a^{2/3} - a^{2/3}\cos^2\varphi} = a(1+2\cos^2\varphi)\,\text{sen}\,\varphi$$

(nuova forma delle equazioni parametriche dell'evoluta:)

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= a\cos\varphi\,(1 + 2\,\text{sen}^2\varphi) \\ y_c &= a\,\text{sen}\,\varphi\,(1 + 2\cos^2\varphi) \end{aligned}} \quad f(\varphi)$$

elevando a quadrato e sommando (e ponendo $\varphi = \theta$) si ha l'equazione dell'evoluta dell'asteroide in coordinate polari:

$$(x_c^2 + y_c^2) = \rho_c^2 = a^2\left(1 + 8(\text{sen}^2\theta\cos^2\theta) + 4\cos^2\theta\,\text{sen}^4\theta + 4\,\text{sen}^2\theta\cos^4\theta\right)$$

$$\rho_c^2 = a^2\left(1 + 8(\text{sen}^2\theta\cos^2\theta) + 4\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\right)$$

$$\rho_c^2 = a^2(1 + 12\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta) = \rho^2 = a^2\left(1 + 3(2\,\text{sen}\theta\cos\theta)^2\right)$$

$$\rho^2 = a^2\left(1 + 3\,\text{sen}^2 2\theta\right)$$

$$\boxed{\rho = a\sqrt{1 + 3\,\text{sen}^2(2\theta)}}$$

<u>equazione dell'evoluta dell'asteroide in polari</u>, ove si nota che l'equazione è uguale a quella polare dell'asteroide stesso, salvo il parametro "a" che è doppio. Per completare la dimostrazione, consideriamo

l'evoluta dell'asteroide:

$$\begin{cases} x_c = a\cos\varphi\,(1+2\,\mathrm{sen}^2\varphi) \\ y_c = a\,\mathrm{sen}\varphi\,(1+2\cos^2\varphi \end{cases}$$

e sostituiamo: $\varphi = (\alpha - \pi/4)$ ove:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\mathrm{sen}\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{2}}}\ ; \quad \boxed{\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{\mathrm{sen}\alpha - \cos\alpha}{\sqrt{2}}}\ ;$$

$$2\cos^2\varphi = \left(\frac{\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha}{2}\right)2 \ ; \quad \boxed{2\cos^2\varphi = 1 + 2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha}$$

$$2\,\mathrm{sen}^2\varphi = \left(\frac{\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha}{2}\right)2 \ ; \quad \boxed{2\,\mathrm{sen}^2\varphi = 1 - 2\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} x_c = \frac{a}{\sqrt{2}}(\mathrm{sen}\alpha + \cos\alpha)(1 - \mathrm{sen}\alpha\cos\alpha)2 \\ y_c = \frac{a}{\sqrt{2}}(\mathrm{sen}\alpha - \cos\alpha)(1 + \mathrm{sen}\alpha\cos\alpha)2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_c = a\sqrt{2}(\mathrm{sen}\alpha + \cos\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha - \mathrm{sen}\alpha\cos^2\alpha) \\ y_c = a\sqrt{2}(\mathrm{sen}\alpha - \cos\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha - \mathrm{sen}\alpha\cos^2\alpha) \end{cases}$$

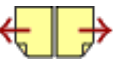
$$\begin{cases} x_c = a\sqrt{2}\left(\mathrm{sen}\alpha(\mathrm{sen}^2\alpha) + \cos\alpha(\cos^2\alpha)\right) \\ y_c = a\sqrt{2}\left(\mathrm{sen}\alpha(\mathrm{sen}^2\alpha) - \cos\alpha(\cos^2\alpha)\right) \end{cases} = \begin{cases} a\sqrt{2}\ (\mathrm{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha) \\ a\sqrt{2}\ (\mathrm{sen}^3\alpha - \cos^3\alpha \end{cases}$$

Se ruotiamo gli assi di 45° per i nuovi assi avremo

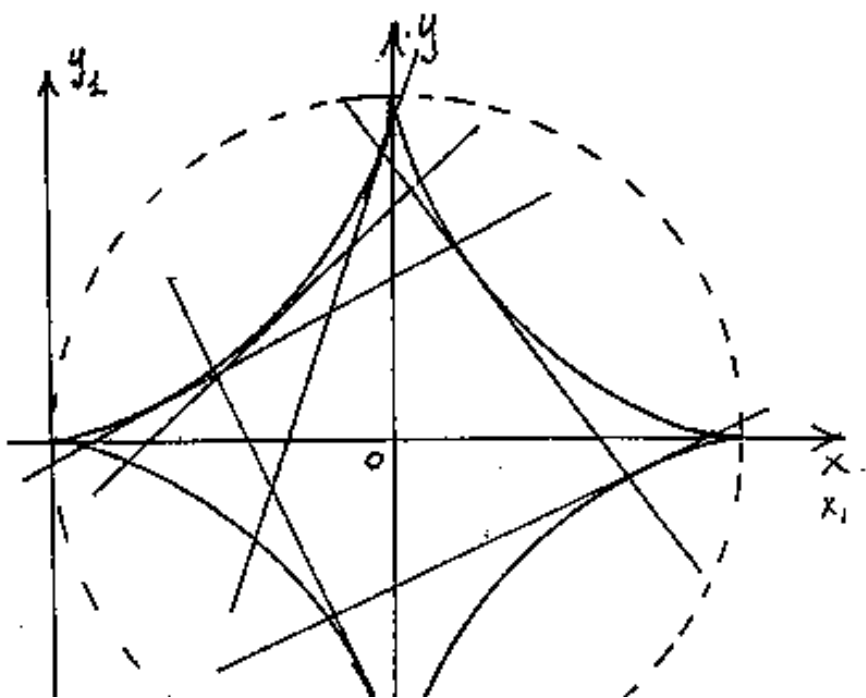
sommando e sottraendo: $x_c + y_c = \frac{y_1}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}\,\text{sen}^3\alpha$

$x_c - y_c = \frac{x_1}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}\cos^3\alpha$

cioè: $\begin{cases} x_1 = 2a\cos^3\alpha \\ y_1 = 2a\,\text{sen}^3\alpha \end{cases}$

L'evoluta di un'asteroide è ancora un asteroide riferita ad assi ruotati di 45° ($\pi/4$) e di modulo doppio, l'evolvente è un'asteroide riferito ad assi ruotati di (−45°) o ($-\frac{\pi}{4}$) e di modulo metà.

Inviluppo di Rette

Ogni curva può considerarsi l'inviluppo delle sue rette tangenti. Abbiamo visto la costruzione della parabola per tangenti; quindi, l'opportuna formulazione delle rette tangenti porta all'equazione della rispettiva curva inviluppata.

Per esempio consideriamo la famiglia di rette che abbia la caratteristica di intercettare fra gli assi un segmento costante lungo "a".

se α e' l'angolo che la retta forma con le ascisse avremo:

$$q = a \operatorname{sen} \alpha \; ; \; p = -a \cos \alpha$$

$$-\frac{x}{a \cos \alpha} + \frac{y}{a \operatorname{sen} \alpha} = 1$$

$$y = x \operatorname{tg}(\alpha) + a \operatorname{sen}(\alpha)$$

e la funzione uguaglia-
ta a zero:

$$f(x,y,\alpha) \equiv \left(-y + x\,tg(\alpha) + a\,sen(\alpha) = 0\right)$$

facciamo la derivata rispetto ad α ed uguagliamo a zero:

$$f'_{\alpha} \equiv \frac{x}{\cos^2\alpha} + a\cos\alpha = 0$$

da cui: $\boxed{\cos\alpha = -\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3}}$ sostituiamo:

nella equazione: $y = \left(\frac{x}{\cos\alpha} + a\right) \operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}} = \frac{1}{a^{1/3}}\sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}$;

$$y = \left(-\frac{x}{\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3}} + a\right)\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}$$

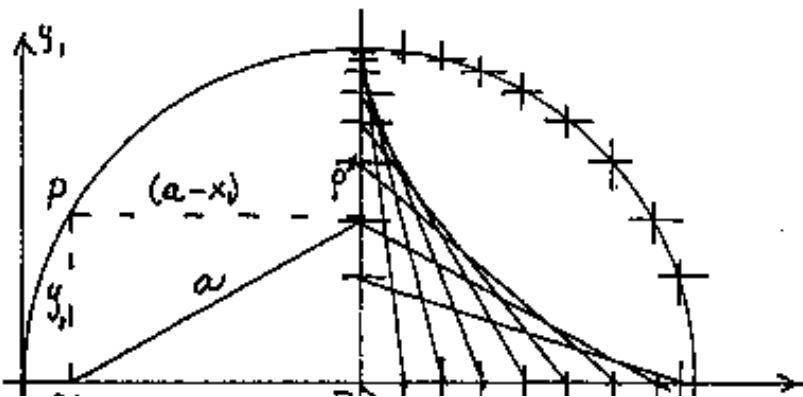
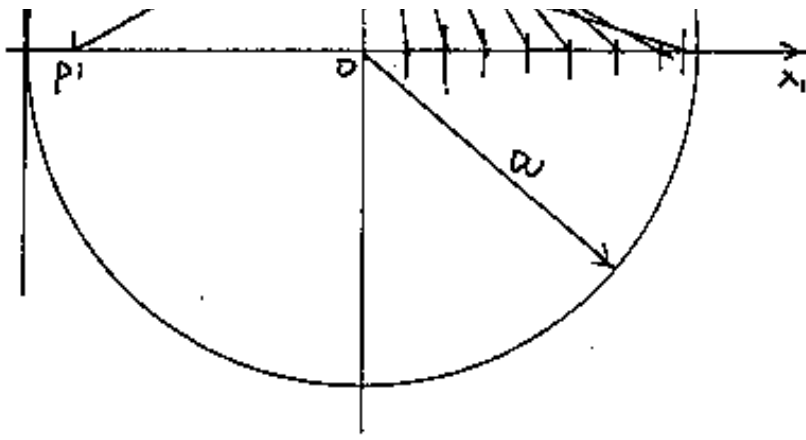
$$\frac{y}{\sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}} = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)$$

$$y = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}$$

$$\boxed{x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}}$$

che è l'equazione dell'asteroide.

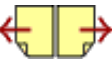
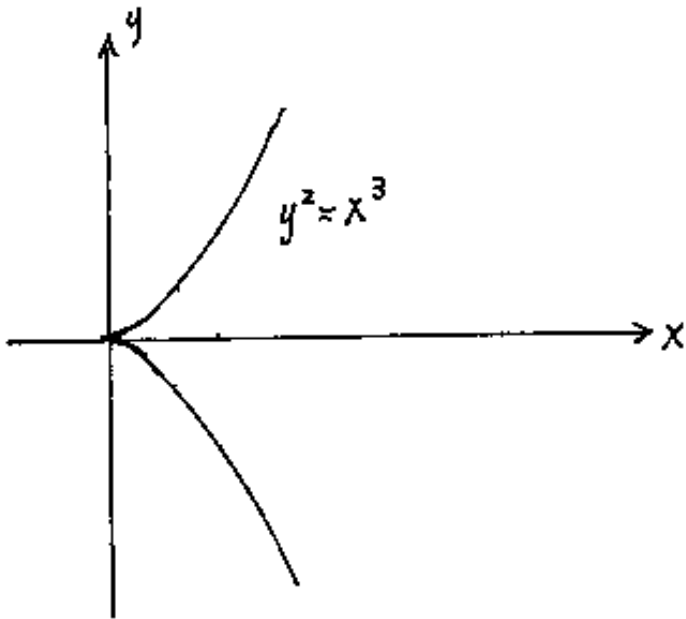
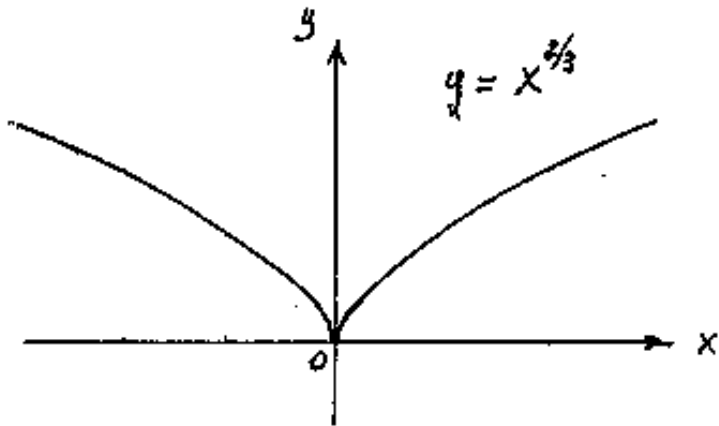
Costruzione dell'asteroide per tangenti

y_1, P, $(a - x_1)$, P, y_1, a

Tracciato un cerchio di raggio a e di equazione: $(x_1 - a)^2 + y_1^2 = a^2$ cioè: $y_1^2 = 2ax_1 - x_1^2$

cioè: $y_1^2 = 2ax_1 - x_1^2$

Si noti che qualsiasi punto P di questa circonferenza proiettato sui diametri segna gli estremi di un segmento lungo a per cui la congiungente $\overline{P'P''}$ è una tangente dell'asteroide.

Parabola semicubica

$y = x^{2/3}$

$y^2 = x^3$

Consideriamo l'espressione: $y = ax^{2/3}$ equazione di una parabola semicubica che equivale a $y^3 = ax^2$ oppure una espressione: $y = a x^{3/2}$; $y^2 = a x^3$ Ove il quadrato di una variabile rende la curva inesistente per i valori negativi dell'altro semiasse.

la: $y^2 = a x^3$ in coordinate polari diventa:

$$\rho = \frac{1}{a} \tan^2\theta / \cos\theta$$

$$(\rho^2 \sin^2\theta = a \rho^3 \cos^3\theta) \qquad \rho = \frac{1}{a} \left(\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^3\theta} \right)$$

(ove a è l'inverso di una lunghezza)

(ove a è l'inverso di una lunghezza)

Curva trattrice

Vogliamo trovare la curva le cui "tangenti" definite in coordinate polari sono costanti ed = a

(vedi prec. tangenti..)

cioè:

$$-y\,\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} = a$$

$$y^2(1+y'^2) = a^2y'^2 \;;\; (y'^2)(a^2-y^2) = y^2 \;;\; y'^2 = \frac{y^2}{(a^2-y^2)} \;;$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \pm\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}}$$

$$dx = \pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y^2}\,dy \qquad (-a \le y \le a)$$

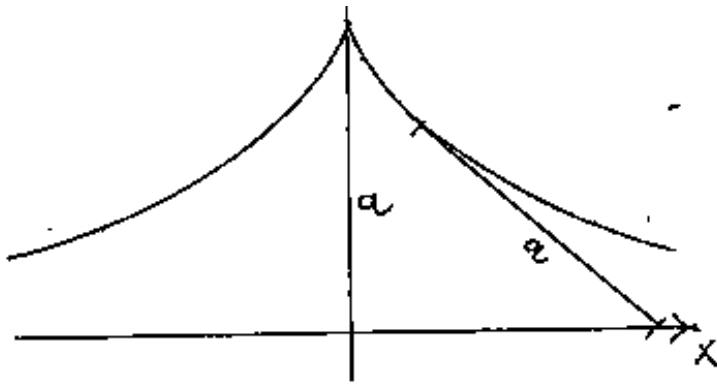
$$x = \int_a^y \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y^2}\,dy + c \qquad \text{per } c=0$$

$$x = a\ln\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}} + \sqrt{a^2-y^2}$$

posto: $y = a\,\mathrm{sen}\,t$:

$$x = a\ln\frac{\mathrm{sen}\,t}{1+\cos t} + a\cos t$$

ed essendo: $\frac{\mathrm{sen}\,t}{1+\cos t} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,t/2\,\cos t/2}{2\cos^2 t/2} = \mathrm{tg}\,\frac{t}{2}$

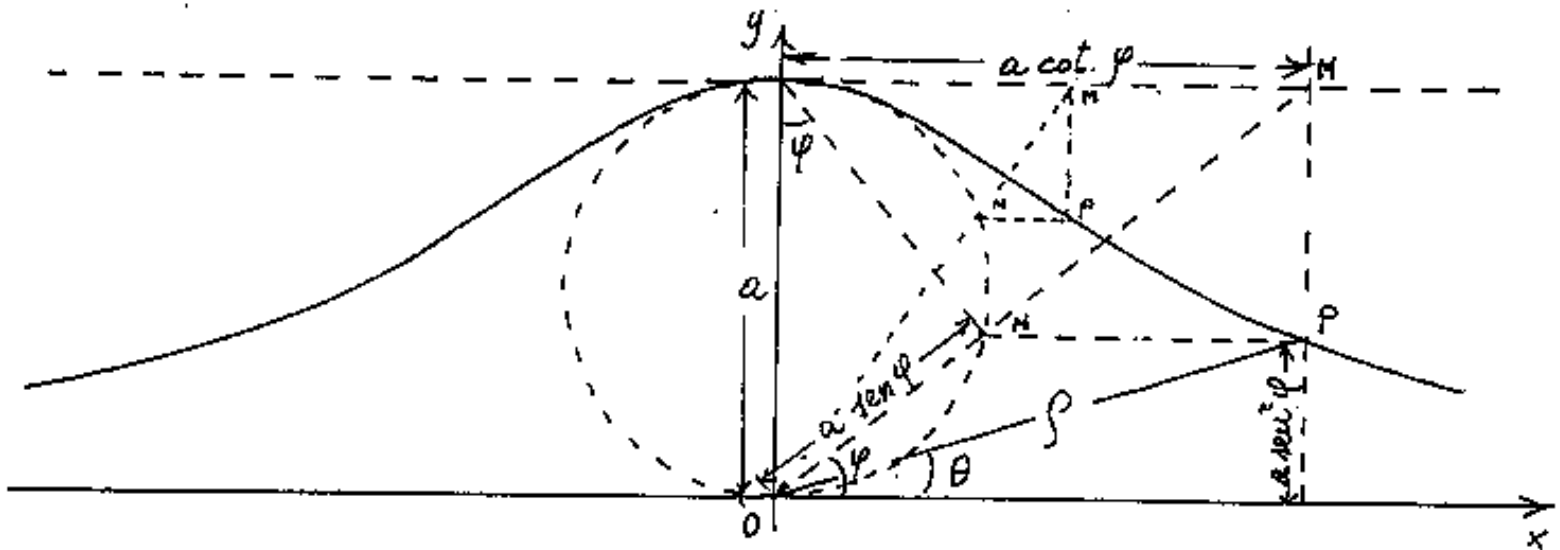
y

$$\frac{\ldots}{1+\cos t} = \frac{\ldots}{2\cos^2 t/2} = tg\frac{t}{2}$$

si hanno le equazioni parametriche della curva trattrice

$$\begin{cases} x = a\left[\ln\left[tg\left(\frac{t}{2}\right)\right] + \cos t\right] \\ y = a[\operatorname{sen} t] \end{cases}$$

L'asse x è un asintoto della curva trattrice.

per $t<0$, $tg\frac{t}{2}<0$, non esistono ln di numeri <0.

La versiera di Agnesi

La parola "versiera" (in inglese Witch = strega), in effetti significa una specie di diavolessa o come dice il Tommaseo: "spirito infernale immaginato dal popolo per atterrire i fanciulli". Maria Gaetana Agnesi, bolognese 1718 - 1799, studiò questa curva, che era già stata scoperta da G. Grandi.

L'equazione cartesiana:

$$y = a^3 / (x^2 + a^2)$$

può verificarsi con l'equazione parametrica

$$x = a \cot g(\varphi)$$
$$y = a \operatorname{sen}^2(\varphi)$$

$$y = a \operatorname{sen}^2(\varphi)$$

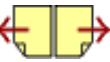
infatti: $\cot g\,\varphi = \left(\frac{x}{a}\right) = \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}^2\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}} = \sqrt{\frac{1-y/a}{y/a}}$ cioè: $\frac{y}{a}\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y}{a}$

da cui: $y = a^3/(x^2+a^2)$

Se cerchiamo l'equazione in polari trasformando l'equazione cartesiana: $\rho \operatorname{sen}\theta = a^3/\rho^2\cos^2\theta + a^2$

si ha

$$\rho^3 (\operatorname{sen}\theta \cos^2\theta) + \rho(a^2 \operatorname{sen}\theta) - a^3 = 0$$

equazione di 3° in ρ

possiamo scrivere:

$$\rho^3 \operatorname{sen}\theta - \rho^3 \operatorname{sen}^3\theta + a^2\rho \operatorname{sen}\theta - a^3 = 0$$

cioè:

$$\boxed{\operatorname{sen}^3\theta - \left(\frac{\rho^2+a^2}{\rho^2}\right)\operatorname{sen}\theta - \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 = 0}$$

equazione di 3° in $\operatorname{sen}\theta$.

se cerchiamo di ricavare le equazioni polari dalle parametriche abbiamo:

$$(x^2+y^2) = \rho^2 = \frac{\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} + \operatorname{sen}^4\varphi$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}^2(\varphi)}{\cot g(\varphi)} = \frac{\operatorname{sen}^3(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \operatorname{tang}\theta = \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{tg}\varphi$$

In ogni caso la correlazione: $\rho = f(\theta)$ non è esplicitabile.

derivando l'equazione cartesiana si ha:

$$y' = -\left(a^3/(x^2+a^2)^2\right)2x = -\frac{2a^3x}{(x^2+a^2)} = \frac{-2a}{\frac{x}{a^2}+\frac{1}{x}}$$

$$y'' = -2a^3\left[\frac{(x^2+a^2) - x(2x)}{(x^2+a^2)^2}\right] = +2a^3\,\frac{x^2-a^2}{(a^2+x^2)^2}$$

$y'' = 0$ per $x = \pm a$ punto di flesso

L'area della versiera $A = \int y\,dx = a^3\int \frac{dx}{a^2+x^2} =$

$A = a^2\int^{x} \frac{dx/a}{\ldots} = \left[a^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right] \ldots A = \frac{a^2\pi}{\ldots}$

$$A = a^2 \int_0 \frac{dx/a}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left| a^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) \right|$$

per $x = a$; $A = \frac{a^2 \pi}{4}$

per $x = \infty$ $A = \frac{a^2 \pi}{2}$

fra x $$a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x/a)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \boxed{A = a^2 \pi}$$ l'area compresa fra la versiera e l'asse delle ascisse è pari all'area del cerchio di raggio a

Per la costruzione grafica, tracciati gli assi oxy, il cerchio di diametro "a" tangente l'asse x in o, e la retta parallela ad x tangente il cerchio, ogni retta uscente da o determina N ed M e quindi P.

Curva serpentina

L'equazione cartesiana è:

$$y = abx/(a^2+x^2)$$

richiama la versiera di Agnesi, solo la x al numeratore porta ad estendere la curva al campo delle $y<0$

l'equazioni parametriche sono:

$$x = a\cot(\varphi)$$
$$y = b\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\varphi)$$

$$x^2+y^2=\rho^2 = a^2\cot^2(\varphi)+b^2\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\varphi \; ; \quad \frac{y}{x} = \tan\theta = \frac{b}{a}\,\frac{\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi/\mathrm{sen}\varphi}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}\mathrm{sen}^2\varphi$$

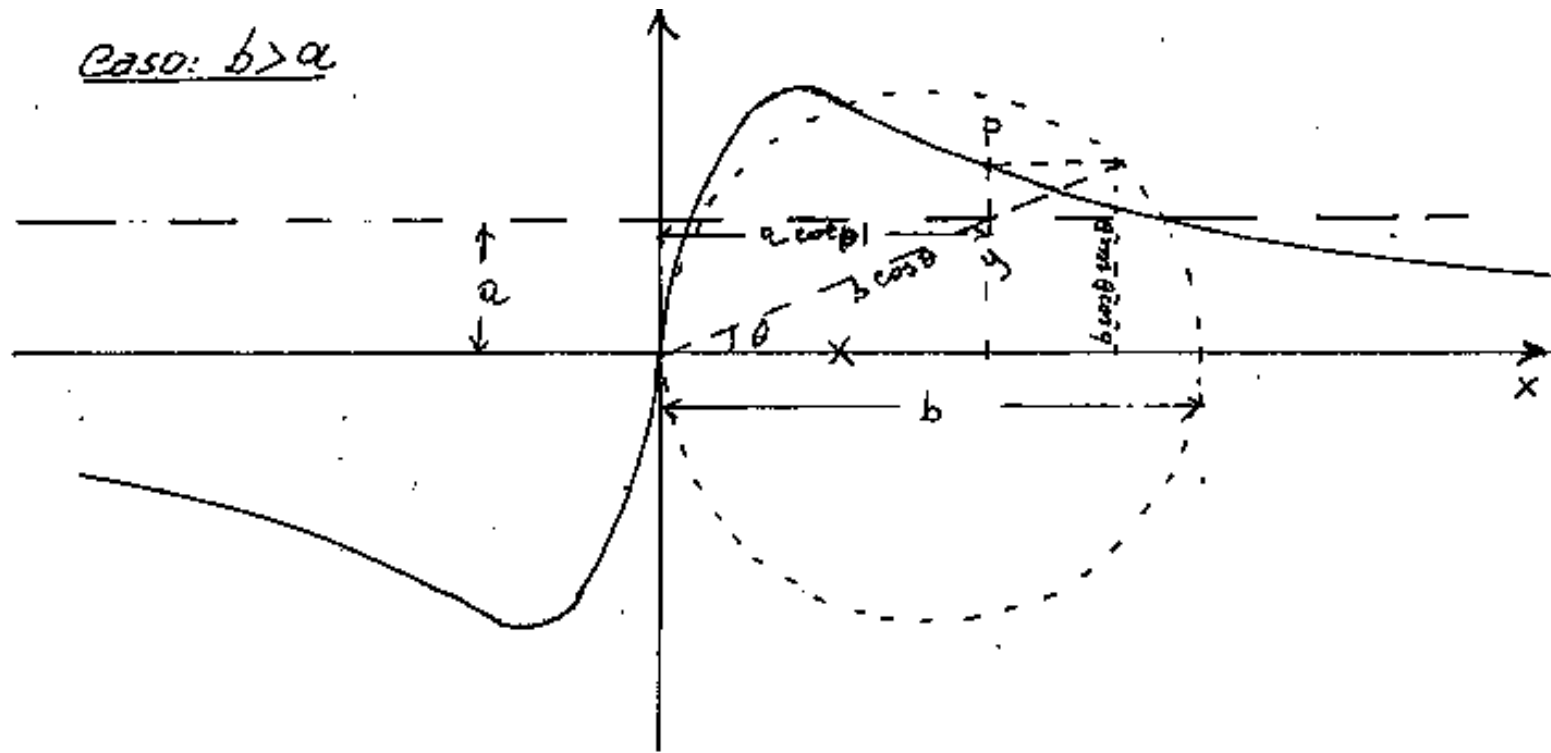
Se trasformiamo in polari le cartesiane: $\rho\,\mathrm{sen}\theta = \dfrac{ab\rho\cos\theta}{(a^2+\rho^2\cos^2\theta)}$

$$\mathrm{sen}(\theta)a^2 + \rho^2\mathrm{sen}(\theta)\cos^2\theta = ab\cos\theta$$

si ottiene l'equazione in polari

$$\rho^2 = \frac{a(b\cos(\theta)-a\,\mathrm{sen}(\theta))}{\cos\theta(\mathrm{sen}\theta\cos\theta)}$$

Caso: $b>a$.

Caso: $b > a$

Curva Cruciforme

E' una curva di equazione cartesiana

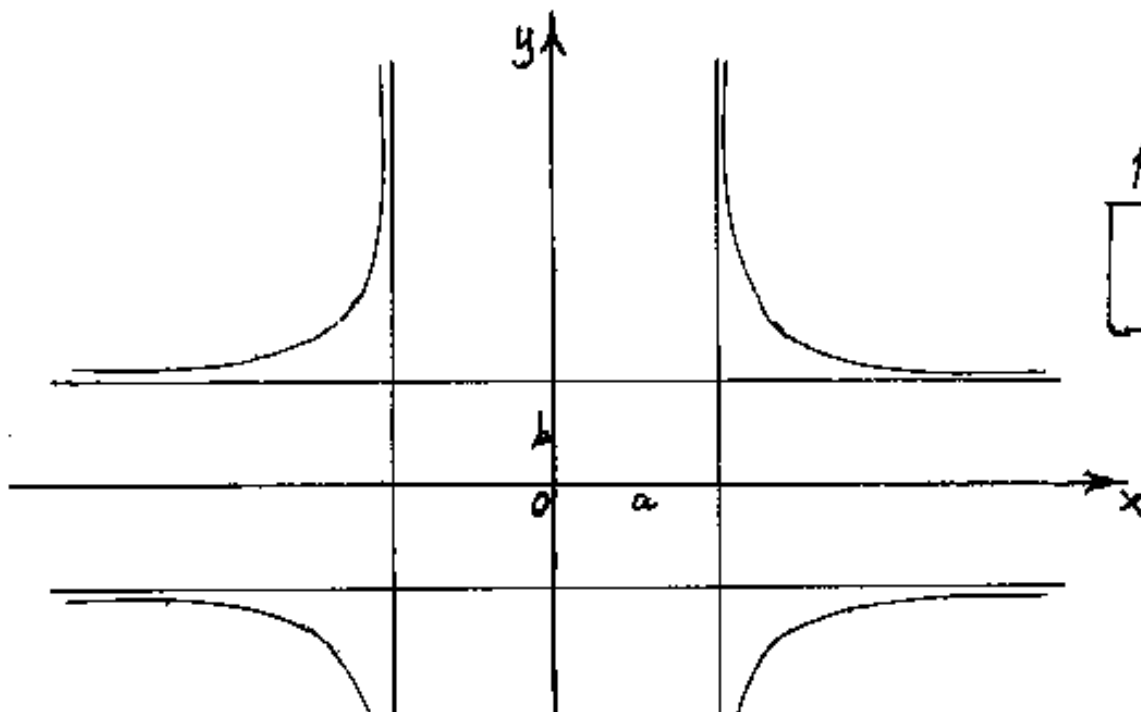
$$a^2y^2 + b^2x^2 = x^2y^2$$

se dividiamo per x^2y^2 otteniamo:

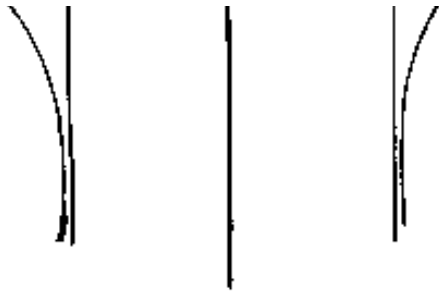
$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$$

equazione a termini inversi di quelli dell'ellisse.

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2x^2}{x^2-a^2}}$$

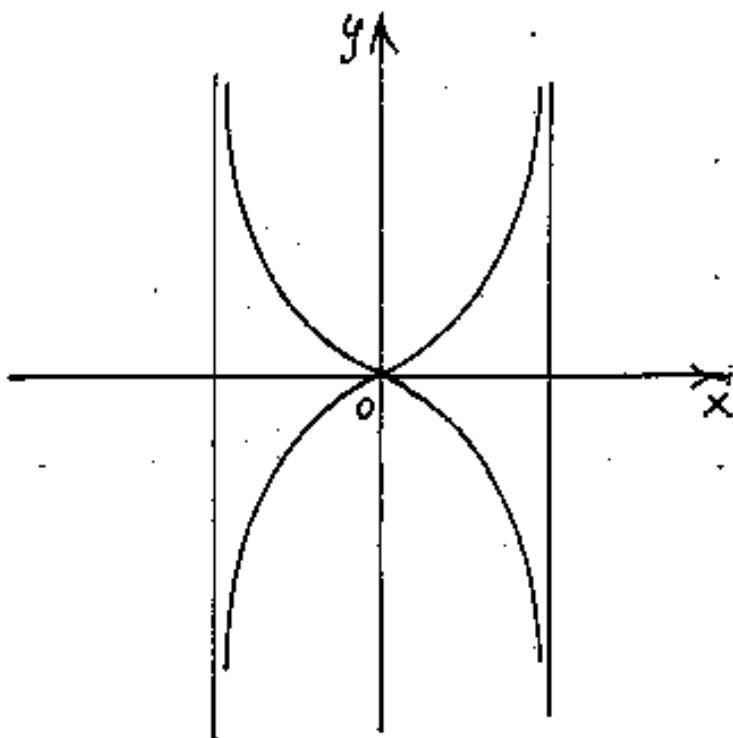
per $x = \pm a$ si ha: $b^2/y^2 = 0$ analogamente per $y = \pm b$ $a^2/x^2 = 0$, cioè le rette $x = \pm a$; $y = \pm b$ sono asintoti.

$$y = bx/\sqrt{x^2-a^2}$$

per $x = Ka$

$$y = b\frac{K}{\sqrt{K^2-1}}$$

Nell'origine si ha un punto isolato in quanto per $x=0$ e $y=0$ è rispettata l'equazione $a^2y^2+b^2x^2=x^2y^2$; $(0+0=0)$, ma non è corretto infatti non è rispettata la forma $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$ $(\infty+\infty=1?)$

in forma parametrica: $x = a/\cos\alpha$; $y = b/\operatorname{sen}\alpha$

se $a=b$ la curva è detta cruciforme circolare.

cambiando segno alla formula della curva cruciforme si ottengono gli inversi dei simboli rappresentanti l'iperbole e cioè:

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$$

equazione che può esplicitarsi in

$$y = \frac{bx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

in forma parametrica si ha:

$$x = a/\cosh(t) \quad ; \quad y = b/\sinh(t)$$

per cui $\cosh^2(t) = \left(\frac{a^2}{x^2}\right)$; $\sinh^2(t) = \left(\frac{b^2}{y^2}\right)$ e torna:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

ed: $\frac{y}{x} = \frac{b}{\sinh(t)} \frac{\cosh(t)}{a}$; $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \coth(t)$;

$\frac{\ }{x} = \frac{\ }{\sinh(t)}\,\frac{\ }{a} \ldots \quad , \quad \frac{y}{x} = \frac{\ }{a} \ldots \quad ,$

cioè quando $a=b$ allora: $\frac{y}{x} = \coth(t)$

ed anche il parametro: $t = \text{argcoth}\left[\frac{y}{x}\right]$.

$y/x = \tan\alpha \quad ; \quad \boxed{t = \text{argcoth}(\tan\alpha)}$.

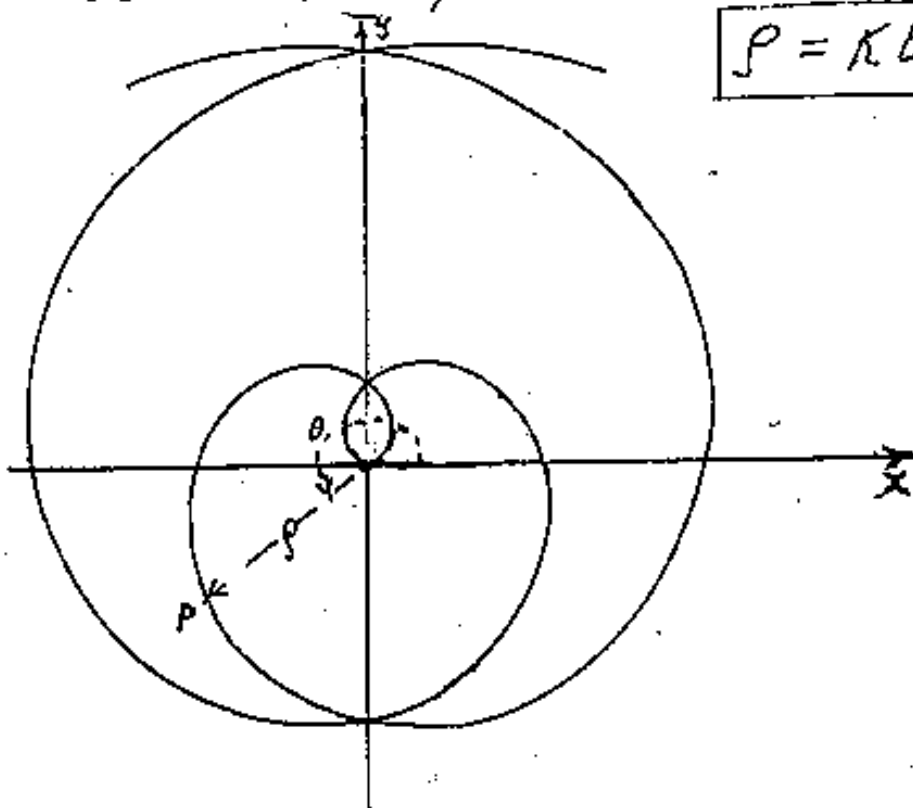
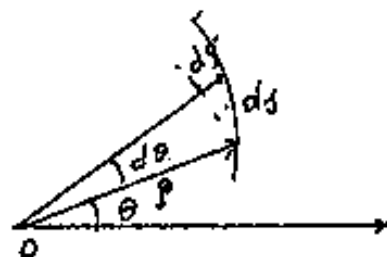
se poniamo: $\theta = 2\alpha$; $\coth(t) = \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ avremo:

$$\tanh\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

cioè θ è la gudermanniana di λ.

SPIRALE di ARCHIMEDE

L'equazione della spirale di Archimede in coordinate polari è:

$$\rho = K\theta$$

Ricordiamo che la lunghezza di un arco di curva in coordinate polari:

(tenendo conto di $d\rho$) è $ds^2 = d\rho^2 + (\rho d\theta)^2 = (\rho'^2 + \rho^2) d\theta^2$

$ds^2 = (K^2 + K^2\theta^2) d\theta^2$ quindi: $ds = (K\sqrt{1+\theta^2})\, d\theta$

per l'arco che varia da 0 a θ

$$s = K\int_0^\theta \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = K\int_0^\theta \frac{1+\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\, d\theta$$

$$= K\left[\int_0 \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} + \int_0 \frac{\theta^2\, d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\right] = \text{(Vedi Vol. I integrali)}$$

$$K\left[\ln\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right]_0^\theta + \frac{1}{2}\int_0^\theta \frac{\theta\, d(\theta^2+1)}{\sqrt{1+\theta^2}} \; ; \left[\left[\ln\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right]_0^\theta + \frac{2}{2}\int \theta\, d\left(\sqrt{\theta^2+1}\right)\right] =$$

$$K\left[\ln\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right) + \theta\sqrt{\theta^2+1}\right]_0^\theta - \int_0^\theta \sqrt{\theta^2+1}\; d\theta$$ da cui portando nel I° membro:

$$\boxed{J = \frac{K}{2}\left[\ln\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right) + \theta\sqrt{1+\theta^2}\right]_0^\theta}$$

L'area fra la curva e il raggio vettore a partire dall'origine è data da:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\theta \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\theta K^2\theta^2 d\theta = \left[\frac{K^2\theta^3}{6}\right]_0^\theta$$

$$A = \left[\frac{\rho^3}{6K}\right]_{\rho_1}^{\rho_2} \quad ; \quad A = \frac{(K\theta)^2\theta}{6} \quad ; \quad \boxed{A = \frac{\rho^2\theta}{6}}$$

Cioè vale $\frac{1}{3}$ dell'area del settore circolare di raggio ρ ampio θ.

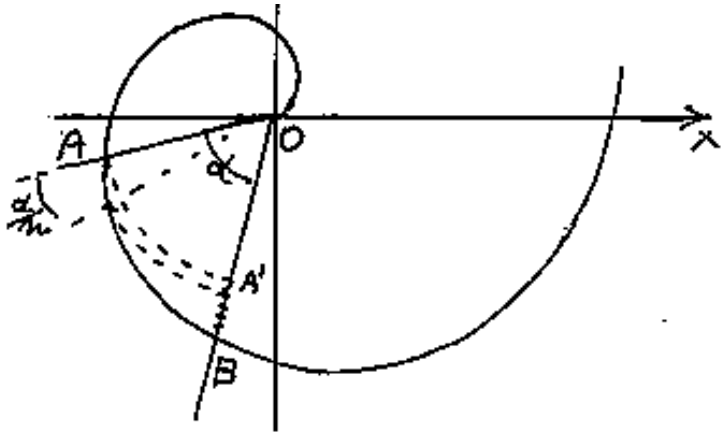
(vedasi calcolo delle aree in coordinate polari)

L'area della prima spira: $\boxed{A_1 = 4\frac{\pi^3K^2}{3}}$

L'equazione in cartesiane può scriversi: $\boxed{x^2+y^2 = K^2 \operatorname{arctg}^2\left(\frac{y}{x}\right)}$

<u>La spirale di Archimede è la traettoria di un punto che si muove con velocità costante, su una retta che ruota pure con velocità angolare costante</u>.

y

La spirale di Archimede è

La spirale di Archimede è la linea che permette di dividere un angolo in n parti uguali. Riportato l'angolo $A\hat{O}B$ fra due raggi ρ_1 e ρ_2, qualsiasi, riportato A su $\overline{OB}$ in A' ove $A'B = \rho_2 - \rho_1$, si divide $\overline{A'B}$ in n parti uguali e si riportano sull'arco $\widehat{AB}$ segneranno i punti di divisione dei raggi che dividono l'angolo.

La spirale di Archimede è anche una curva quadratrice, infatti: quando θ ha fatto il primo mezzo giro ($\theta = \pi$) abbiamo: $\boxed{\pi = \rho / K}$

La costante K è esprimibile per esempio in cm/rad., quindi se conserviamo il K unitario per esempio 2 cm/rad basterà uno scalimetro 1:50 per leggere la lunghezza dei raggi ρ in radianti di θ.

Inversamente per sapere in quale scalimetro occorre leggere i ρ basta misurare in ascisse il primo mezzo giro che deve risultare pari a π. (la figura iniziale è per scalimetri 1:200 m.)

Archimede chiamò: <u>hélix</u> la sua spirale.

Il Grandi sviluppandola su una sfera studiò curve che chiamò: <u>Clelie</u>.

$$\begin{cases} X = \rho\cos(\theta) \\ Y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} ; \quad \begin{cases} X = K\theta\cdot\cos(\theta) \\ Y = K\theta\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} ; \quad \begin{cases} X = K\rho\cos\theta \\ Y = K\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

sono le equazioni cartesiane parametriche

sono le equazioni cartesiane parametriche,

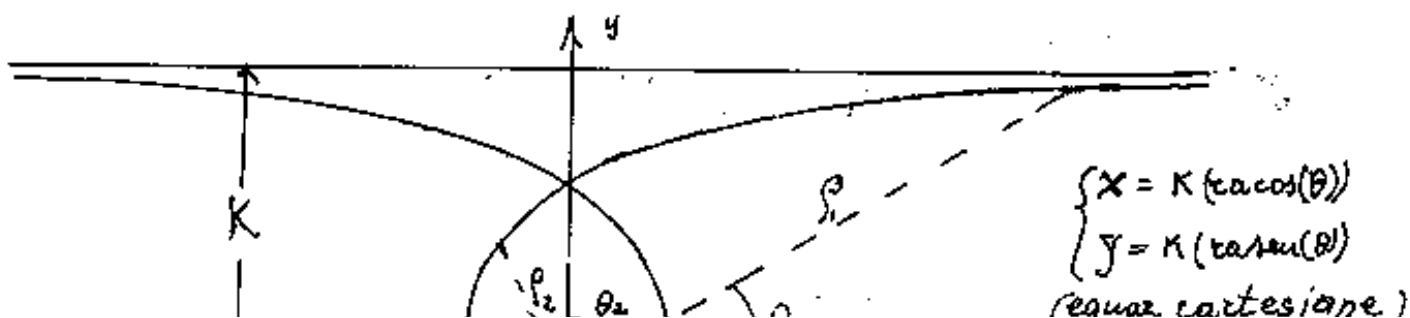
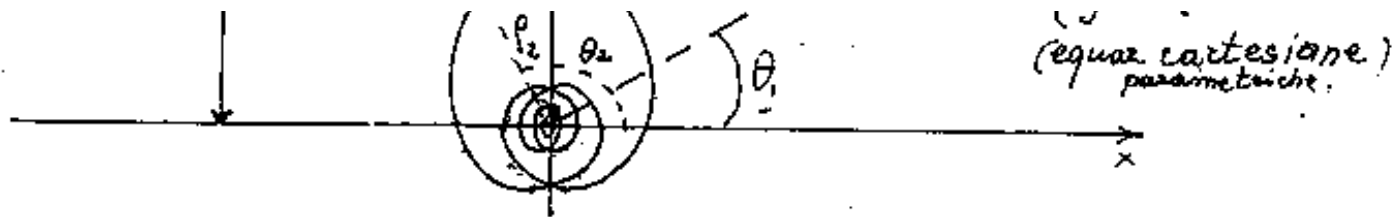
$\rho\cos(\theta) = \frac{X}{K}$; $\theta = \arg\rho\cos\left[\frac{X}{K}\right]$ quindi $y = K\rho\,\text{sen}\left[\arg\rho\cos\left[\frac{X}{K}\right]\right]$

è l'equazione cartesiana in forma esplicita.

Spirale iperbolica

L'equazione in coordinate polari è: $\rho = \frac{K}{\theta}$ (con $K>0$). Appare subito il confronto con la spirale di Archimede: "La spirale iperbolica è la spirale degli inversi di θ della spirale di Archimede"

Poiché nella spirale di Archimede, quando θ varia da 0 ad 1 si hanno tutti i valori della spirale iperbolica per θ variabile da ∞ ad 1, cioè il valore $\frac{\pi}{n}$ di θ nella spirale di Archimede corrisponde a n/π nella spirale iperbolica (ciò a parità di K) Però, nella spirale di Archimede il punto parte dall'origine degli assi e va verso ∞. Nella spirale iperbolica il punto parte da $\rho = \infty$ e va verso il centro assi.

Abbiamo già visto che la retta $\rho \operatorname{sen} \theta = K$ parallela all'asse polare è un asintoto che dista K da essa; e che l'origine O o polo, è un punto asintotico.

(equaz. cartesiane parametriche.)

ρ_2 θ_2 θ_1 x

$$ds^2 = (\rho^2 + \rho'^2)\,ds^2 = \left(\frac{K^2}{\theta^2} + \frac{K^2}{\theta^4}\right)d\theta^2 = \frac{K^2}{\theta^4}(\theta^2+1)\,ds^2$$

cioè

$$ds = K\,\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2}\,d\theta$$

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2}\,d\theta \quad = \quad s = K\left[-\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta} + \log_e\left(\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right)\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Area della spirale iperbolica compresa fra la curva ed i raggi vettori ρ_1 e ρ_2 di argomento θ_1 e θ_2

$$A = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\theta =$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{K^2}{\theta^2}\right) d\theta = \frac{K^2}{2}\left[-\frac{1}{\theta}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\boxed{A = \frac{K^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2}\right)}$$

$$\boxed{A = \frac{K}{2}\left(\rho_1 - \rho_2\right)}$$

Quando: $\theta_2 \rightarrow \infty$, cioè quando la spirale tende al punto asintotico costituito dal centro assi (Polo in polari)

$$\boxed{A = \frac{K^2}{2\theta_1}}$$

Se Poniamo: $\theta_1 = \pi$; $\theta_2 = 3\pi$; $A = \frac{K^2}{3\pi}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) = \frac{K^2}{3\pi}$

$\theta_1 = 3\pi$; θ_2 5π ; $A = \frac{K^2}{3\pi}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{K^2}{15\pi}$

$\theta_1 = 5\pi$; θ_2 7π ; $A = \frac{K^2}{3\pi}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{K^2}{35\pi}$

. . . .

$\theta_1 = (2n-1)\pi$; $\theta_2 = (2n+1)\pi$; $A = \frac{K^2}{2\pi}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{K^2}{(4n^2-1)\pi}$

abbiamo costruito una serie convergente: $\left\{ \frac{1}{4n^2-1} \right\}$ ove:

il valore della serie è $\frac{1}{2}$ per $n \to \infty$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{35} + \cdots \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

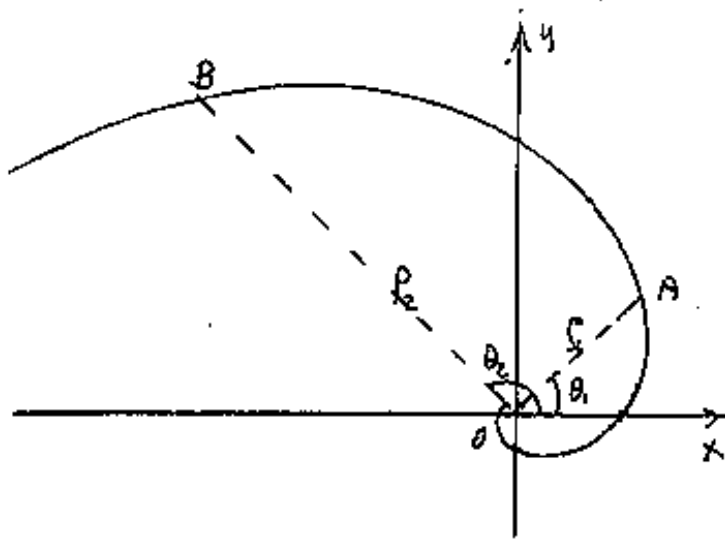
Serie della spirale iperbolica.

– La sottotangente polare è costante e vale K.

Spirale logaritmica (o equiangolare)

Nel I vol, alle costruzioni grafiche, abbiamo già accennato ad una curva che generalizza la spirale logaritmica.

L'equazione in coordinate polari, della spirale logaritmica è:

$$\rho = e^{K\theta}$$

Abbiamo già osservato che, se poniamo $K = 2/\pi$ si ha: per $\theta = 0$; $\rho = 1$; per $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\rho = e$; per $\theta = \pi$; $\rho = e^2$ e così via, (vedi vol I).

$$ds^2 = (\rho^2 + \rho'^2)\, d\theta^2 = \left(e^{2K\theta} + K^2 e^{2K\theta}\right) d\theta^2 \quad \text{cioè: } ds = e^{K\theta}\sqrt{1+K^2}\, d\theta$$

Cioè la lunghezza dell'arco $\widehat{AB} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{K\theta}\left(\sqrt{1+K^2}\right) d\theta$

$$\widehat{AB} = \frac{\sqrt{1+K^2}}{K}\left(e^{K\theta_2} - e^{K\theta_1}\right)$$

$$\widehat{AB} = (\rho - \rho)\sqrt{1+K^2}$$

$$\overset{\frown}{AB} = (\rho_2 - \rho_1)\frac{\sqrt{1+K^2}}{K}$$

Si ha così un'altra particolarità nella spirale logaritmica, e cioè che la lunghezza degli archi è proporzionale alla differenza dei raggi vettori.

– Abbiamo già visto che il polo O è un punto asintotico.

L'area della spirale logaritmica, compresa fra la curva ed i raggi ρ_1 e ρ_2 sarà:

$$A = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{2K\theta} d\theta = \frac{1}{4K}\left[e^{2K\theta_2} - e^{2K\theta_1}\right]$$

$$\boxed{A = \frac{1}{4K}\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)}$$

Si noti: $\rho = e^{K\theta}$; per $\theta = 0$; $\rho = 1$ per $\theta < 0$ al limite

$\lim_{\theta \to -\infty} (\rho) = 0$ perciò $\boxed{\lim_{\theta \to -\infty} (A) = \frac{\rho^2}{4K}}$ rappresenta

la somma delle aree delle spire da zero a ρ

ove la prima spira a partire da ρ è calcolata una volta la successiva due volte, poi tre volte fino alla spira nulla nel polo calcolata infinite volte.

La spirale logaritmica incontra il raggio vettore ρ sotto un angolo costante $\omega = \text{arccotg}(K)$.

Infatti: $\text{cotg}\, \omega = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{K e^{K\theta}}{e^{K\theta}} = K$. (vedasi tangente in polari)

La lunghezza L dell'arco dal polo a ρ, essendo nel polo $\rho_1 = 0$

$$L = \sqrt{1+K^2}\,\rho \qquad \text{ma: } K = \text{cotg}\, \omega$$

$$L = \frac{\sqrt{1+K^2}}{K}\rho \qquad \text{ma: } K = \cot g\,\omega$$

$$L = \frac{\sqrt{1 + \frac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega}}}{\cos\omega/\sin\omega} \qquad \boxed{L = \frac{\rho}{\cos\omega}}$$

Mediante la spirale logaritmica si può risolvere graficamente le radici ennesime : $b = \sqrt[n]{a}$. Basta dividere in n parti uguali l'angolo compreso fra $\rho = 1$ e $\rho = a$ il raggio $\rho_{\frac{1}{n}}$ che unisce O col punto $\frac{1}{n}$ cioè $\rho_{\frac{1}{n}} = b$. (Per dividere l'angolo ci si può avvalere della spirale di Archimede)

Spirale parabolica

La spirale parabolica ha la caratteristica di avere il raggio ρ^2 al quadrato nella proporzionalità K con l'argomento θ. Cioè:

$$\rho^2 = K\theta$$

che possiamo anche scrivere:

$$\rho = \sqrt{K\theta}$$

in coordinate cartesiane (parametriche in θ) l'equazione diventa:

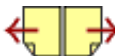
$$\begin{cases} X = \sqrt{K\theta}\cos(\theta) \\ Y = \sqrt{K\theta}\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

Questa spirale che è una prima generalizzazione della spirale di Archimede, e che, nel caso più ampio, può scriversi

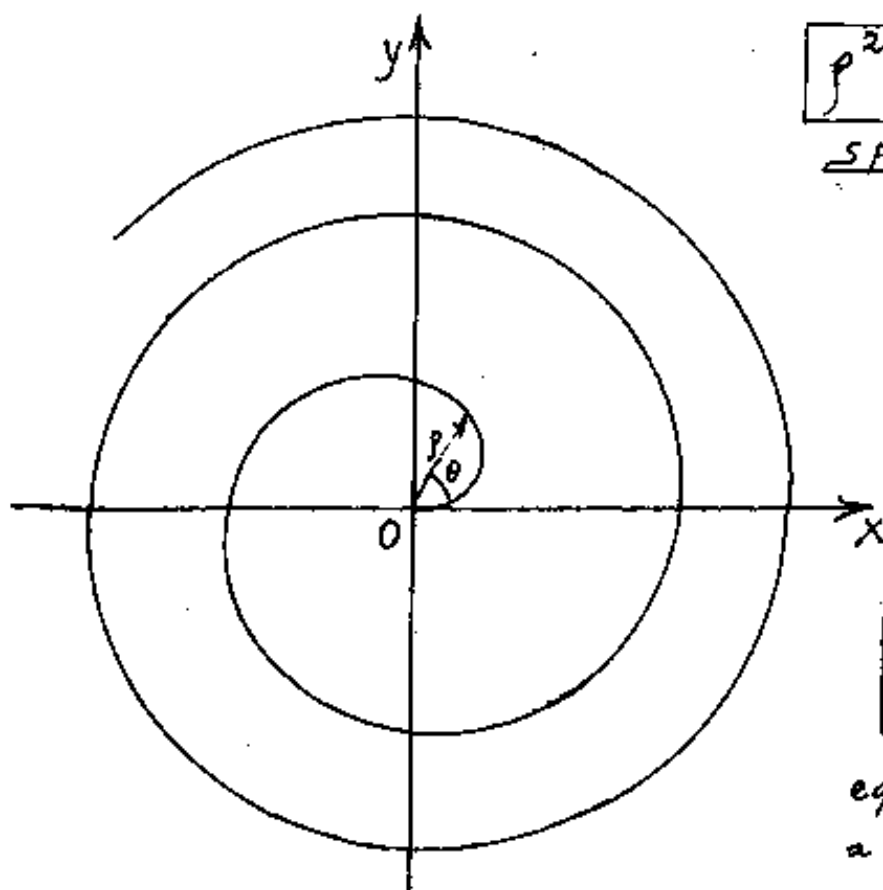
$$\rho^m = K\,\rho^n$$

$$\rho^m = K\,\theta^n$$

con $m=+1$ ed $n=+1$, si ha la spirale di Archimede. Con $m=+1$ ed $n=-1$ si ha l'iperbolica (attenzione: $m=-1$ e $n=+1$ è ancora l'iperbolica ove la costante K è $\frac{1}{K}$.

Così la spirale parabolica ove $m=2$ ed $n=1$ se poniamo $K=a^2$ diventa la spirale di Fermat.

Se: $m=2$; $n=-1$; $K=a^2$; si ha il <u>litus</u>

In generale la spirale parabolica è disegnata con un solo ramo positivo, mentre la spirale di Fermat considera anche il valore negativo di ρ, cioè prende il doppio segno delle radici.

A maggior chiarimento, presentiamo nel seguito, sia la <u>spirale di Fermat</u>, sia il <u>litus</u>.

$$\boxed{\rho^2 = K\theta}$$

<u>spirale parabolica</u>

$$\begin{cases} x^2 = K\theta \cos^2\theta \\ y^2 = K\theta \,\text{sen}^2\theta \end{cases}$$

da cui:

$$\boxed{x^2 + y^2 = K\theta}$$

equazione di un cerchio a raggio variabile: $R=\sqrt{K\theta}$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{K}{2\sqrt{K\theta}}\cos(\theta) - \sqrt{K\theta}\,\text{sen}(\theta)$$

$$\frac{dy}{d\ldots} = \frac{\frac{K}{2}\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta}{\ldots}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{K}{2\sqrt{K\theta}}\,\text{sen}\,\theta + \sqrt{K\theta}\cos(\theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ldots}{\frac{K}{2}\cos\theta - \text{sen}\,\theta}$$

Si noti che se ponessimo: $x^2+y^2=K^2\theta^2$, avremmo che $x^2+y^2=\rho^2=K^2\theta^2$ ed estraendo la radice torna: $\rho=K\theta$ (Spirale di Archimede)

Il calcolo dell'area è estremamente semplice.

$$A = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \rho^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} K\theta \, d\theta = \left[\frac{1}{4} K \theta^2\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$A_{0\pi/2} = K(0,616850275)$

$A_{0\pi} = K(2,4674011)$ } $A_{\pi/2\,\pi} = (1,850550825)K$

$A_{0\frac{3\pi}{2}} = K(5,551652476)$ } $A_{\pi-\frac{3}{2}\pi} = (3,084251375)K$

$A_{0-2\pi} = K(9,86960440)$ } $A_{\frac{3}{2}\pi-2\pi} = (4,31795)K$

volendo l'area coperta senza sovrapposizioni l'integrale va esteso con intervallo 2π

$$A = \frac{K}{2}\int_{\theta_i}^{\theta+2\pi} \theta \, d\theta \quad \text{oppure: } A = \frac{K}{2}\int_{\theta_f-2\pi}^{\theta_f} \theta \, d\theta$$

(quando $\theta_2 > 2\pi$.)

La lunghezza della

$$\ell = \int_{\Gamma} \rho \, d\theta$$

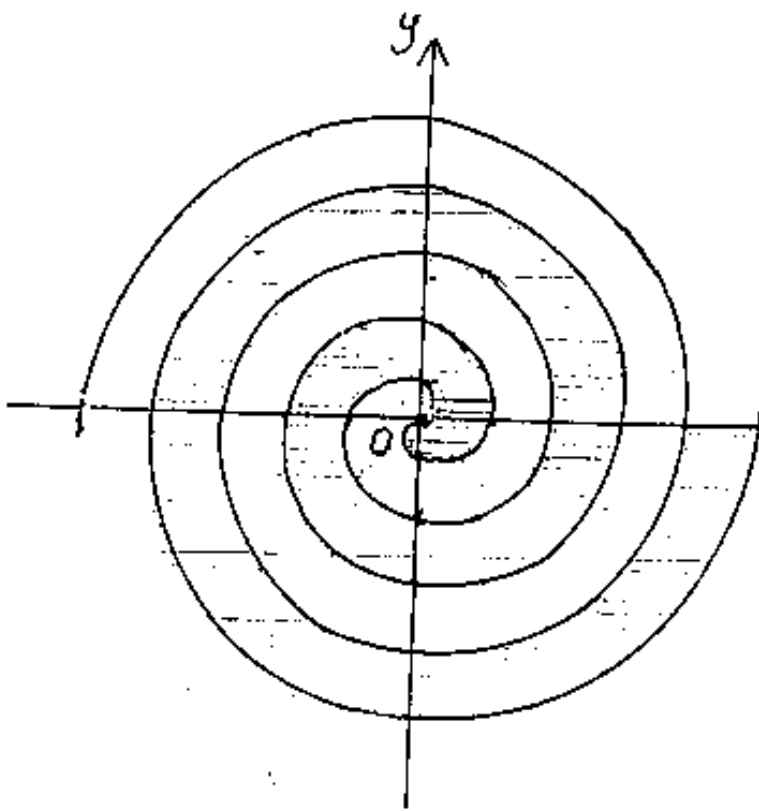
$$\ell = \sqrt{K} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\theta} \, d\theta = \frac{\sqrt{K}}{3} \left[\theta^{3/2} \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\ell_{0-\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{K}}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} = \sqrt{K} \, (0,65623747)$$

$$\ell_{0-2\pi} = \frac{\sqrt{K}}{3} (2\pi)^{3/2} = \sqrt{K} \, (5,249869982) = 8 \left(\ell_{0-\frac{\pi}{2}} \right).$$

spirale di Fermat

L'equazione della spirale di Fermat è $\rho^2 = a^2\theta$

cioè : $\boxed{\rho = \pm a\sqrt{\theta}}$

Si noti che le due linee tracciate da $+\rho$ e $-\rho$ i cui punti sono diametralmente opposti; finiscono per essere due linee equidistanti. cioè due spirali di Archimede equiverse sfasate di π; ove sullo stesso raggio la loro distanza è "$a\cdot\pi$". Cioè la spirale di Fermat, rappresenta due striscie di uguale spessore che si avvolgono a spirale l'una sull'altra.

LITUS

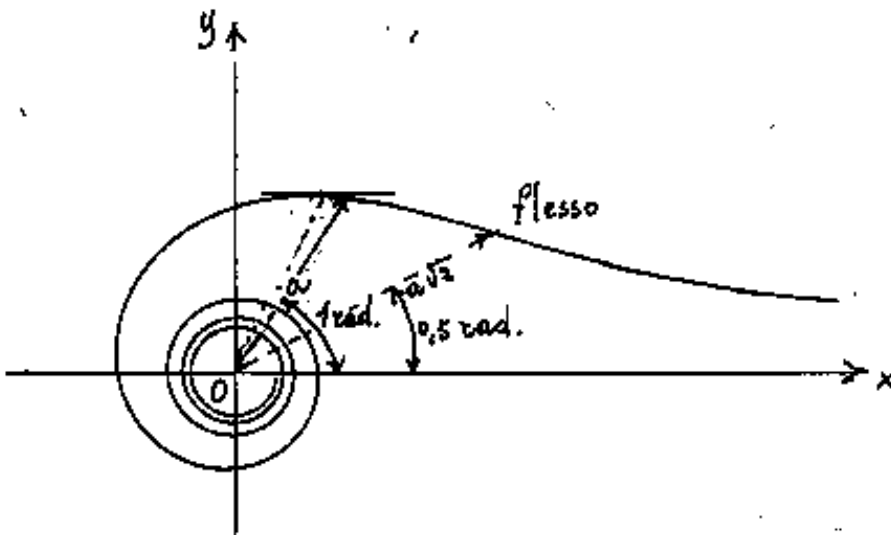
Anche la linea curva LITUS è una spirale ed ha per equazione:

$$\rho^2\theta = a^2$$

in coordinate polari

$$x = a\cos(\theta)/\sqrt{\theta}$$
$$y = a\,\text{sen}(\theta)/\sqrt{\theta}$$

(in cartesiane parametriche)

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$$

per $\theta = 0$; $\rho = \infty$

l'asse polare è un asintoto:

per $\theta \to \infty$; $\rho = 0$

il polo O è un punto asintotico ; $\rho = a$; per $\theta = 1$ rad. ($\theta° = 57° 17' 44'',81$). $\rho = a\,\theta^{-\frac{1}{2}}$; $\rho' = a\left(-\frac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}}\right)$;

$\rho'' = \frac{3}{4}a\,\theta^{-\frac{5}{2}}$

La tangente orizzontale si ha quando $\frac{dy}{dx} = 0$

cioè quando: $\rho'\,\text{sen}\,\theta + \rho\cos\theta = 0$

$$\tan g\,\theta = -\frac{\rho}{\rho'} = \frac{-a/\sqrt{\theta}}{-\frac{1}{2}\theta^{-3/2}} = +2\theta$$

$$\frac{\tan g\,\theta}{\theta} = \mathrm{ratg}(\theta) = 2$$

Vi sono infiniti valori di $\arg \mathrm{ratg}[2] = \theta_1 = 1{,}16556\,1186$ rad.

$\theta_1 = 66°\,46'\,54'',25$; $\theta_2 = 4{,}60421677$ rad $= \theta_2° = 263°\,48'\,7'',88$; ecc,

che al limite tendono a: $\theta_{\infty_1} = \frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$; $\theta_{\infty_2} = \frac{3}{2}\pi = 270°$

I punti di flesso in coordinate polari

Per calcolare la posizione del flesso nel Litus, occorre risolvere il problema dei flessi in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

da cui:

$$\left.\begin{array}{l} dy = d\rho\,\text{sen}\,\theta + \rho\cos(\theta)\,d\theta \\ dx = d\rho\cos\theta - \rho\,\text{sen}\,\theta\,d\theta \end{array}\right\} \frac{dy}{dx} = \boxed{\tan g\alpha = \frac{d\rho\,\text{sen}\,\theta + \rho\cos(\theta)\,d\theta}{d\rho\cos\theta - \rho\,\text{sen}(\theta)\,d\theta}}$$

tang α è la "pendenza" della linea in quel punto,

cioè: $tg(\alpha)$ = coefficiente angolare della retta tangente alla linea (in quel punto).

Essendo $d(\tan g(\alpha))$ la variazione di pendenza se $d(\tan g(\alpha)) \gtreqless 0$ si ha rispettivamente:

$$\left.\begin{array}{ll} d(tg\alpha) > 0 \Rightarrow \text{curvatura verso l'alto} & (\text{min}) \\ d(tg\alpha) = 0 \Rightarrow \text{punto di flesso} & (\text{orizzontale}) \\ d(tg\alpha) < 0 \Rightarrow \text{curvatura verso il basso} & (\text{max}) \end{array}\right\} \tan g(\alpha) = 0$$

Poiché la curva è definita da:

Poichè la curva è definita da:

$$\rho = f(\theta) \qquad \text{i (inversamente)} \quad \theta = \varphi(\rho)$$

sostituendo nell'espressione di tang α possiamo calcolare d(tang α) in funzione di ρ oppure in funzione di θ.

E' bene ricordare che $\rho = f(\theta)$ spesso dà un solo valore per ogni θ mentre $\theta = \varphi(\rho)$ può dare più valori $(\theta + 2K\pi)$.

Esprimiamo: $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin\theta + \rho\cos\theta \frac{d\theta}{d\rho}}{\cos\theta - \rho\sin\theta\frac{d\theta}{d\rho}}$

Poiché nella curva Litus: $\theta = \left(\dfrac{a^2}{\rho^2}\right)$ e $\rho\dfrac{d\theta}{d\rho} = \rho\dfrac{-2a^2}{\rho^3}$

avremo:

$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\theta) - \frac{2a^2}{\rho^2}}{1 + \frac{2a^2}{\rho^2}\tan(\theta)}$$

cioè:

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\tan\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) - 2\frac{a^2}{\rho^2}}{1 + \frac{2a^2}{\rho^2}\operatorname{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}}$$

derivando rispetto a ρ

$$\frac{d(\tan(\alpha))}{d\rho} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}\left(\frac{-2a^2}{\rho^3}\right) + \frac{4a^2}{\rho^3}\right)\left(1+\frac{2a^2}{\rho^2}\operatorname{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right) - \left[\left(\operatorname{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) - 2\frac{a^2}{\rho^2}\right)\left(-\frac{4a^2}{\rho^3}\operatorname{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) + \frac{2a^2}{\rho^2}\frac{\left(\frac{-2a^2}{\rho^3}\right)}{\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}\right)\right]}{\left[1 + \frac{2a^2}{\rho^2}\operatorname{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right]^2}$$

$$\frac{d(\tan(\alpha))}{d\rho} = \frac{\left[\frac{-2a^2}{\rho^3\cos^2(a^2/\rho^2)} + \frac{-4a^4\operatorname{tg}(a^2/\rho^2)}{\rho^5\cos^2(a^2/\rho^2)} + \frac{4a^2}{\rho^3} + \frac{8a^4}{\rho^5}\operatorname{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right] - \left[-\frac{4a^2}{\rho^3}\operatorname{tg}^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) + \frac{8a^4}{\rho^5}\operatorname{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) - \frac{4a^4}{\rho^5}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)} + \frac{8a^6}{\rho^7\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}\right]}{\left[1 + \frac{2a^2}{\rho^2}\operatorname{tg}\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right]^2}$$

$$\frac{d(\operatorname{tg}(\alpha))}{d\rho} = \frac{\frac{1}{\rho^3}\left(\frac{-2a^2}{\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)} + 4a^2 + 4a^2\operatorname{tg}^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right) - \frac{8a^6}{\rho^4\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)}\right)}{\ldots} =$$

$$\frac{d(tg(\alpha))}{d\rho} = \frac{\ldots}{\left(1+\frac{2a^2}{\rho^2}tg\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right)^2} =$$

ponendo il numeratore $= 0 \rightarrow \frac{d(tg\,\alpha)}{d\rho} = 0$ (flesso)
e moltiplicando per $\left(\rho^3\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right)$ si ha:

$$-2a^2 + 4a^2\left(\cos^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)+\sin^2\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)\right) = \frac{8a^4}{\rho^4}$$

$$\rho^4 = 4a^4 \quad \text{da cui: } \boxed{\rho = a\sqrt{2}}$$

$\left(\theta = \frac{1}{2}\,\text{rad} = 28°\ 38'\ 52'',4\right)$ il raggio del punto di flesso è la diagonale del quadrato di lato a ed è bisettore dell'angolo fra o ed il raggio $= a$.

Raggio di Curvatura:

$$R = \frac{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}{(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')} \quad \text{(in funzione di } \rho)$$

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\theta}} \;;\; \rho^2 = \frac{a^2}{\theta} \;;\; \rho' = \frac{-2a}{\theta\sqrt{\theta}} \;;\; \rho'^2 = \frac{4a}{\theta^3} \;;\; \rho'' = \frac{6a}{\theta^2\sqrt{\theta}} \;;\; \rho\rho'' = \frac{6a^2}{\theta^3}$$

$$R = \frac{\left(\frac{4a^2}{\theta^3} + \frac{a^2}{\theta}\right)^{3/2}}{\left(\frac{a^2}{\theta} + \frac{8a^2}{\theta^3} - \frac{6a^2}{\theta^3}\right)}$$

$$R = a\,\frac{(4/\theta + \theta)^{3/2}\ (1/\theta^3)}{(\theta^2 + 2)\ 1/\theta^3} = \frac{\frac{4+\theta^2}{\theta}\sqrt{\frac{4+\theta^2}{\theta}}}{(2+\theta^2)}$$

$$\boxed{R = a\,\frac{(4/\theta + \theta)^{3/2}}{(2+\theta^2)}} \quad \text{(in funzione di } \theta)$$

per $\theta = \frac{1}{2}$ rad. $\quad R = a\,\frac{(8 + \frac{1}{2})^{3/2}}{(2 + \frac{1}{4})} = (11{,}0140)\,a$

$\theta = 1$ rad $\quad R = a\,\frac{(5)^{3/2}}{3} = (3{,}72678)\,a$

$\theta = \pi \quad R = a\,\frac{(4/\pi + \pi)^{3/2}}{(2 + \pi^2)} = (0{,}7815109)\,a$

Area:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\, d\theta} = \frac{a^2}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\theta}\, d\theta$$

$$\Big/_{\theta_1} \qquad \Big/_{\theta_1}$$

$$\boxed{A = \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)}$$

per: $\theta_1 = \frac{1}{2}$ rad ; $\theta_2 = \left(2\pi + \frac{1}{2}\right)$ rad ; (1 giro senza sovrapposizioni)

$$A = \frac{a^2}{2} \ln(4\pi + 1) = a^2 (1{,}303797)$$

per $\theta_1 = \pi$; $\theta_2 = 3\pi \rightarrow A = \frac{a^2}{2} \ln(3) = a^2 (0{,}549306)$

Per $\theta_1 \doteq (0{,}524868442)\pi$; $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi \rightarrow A = \frac{a^2 \pi}{4}$ (cerchio di diametro a)

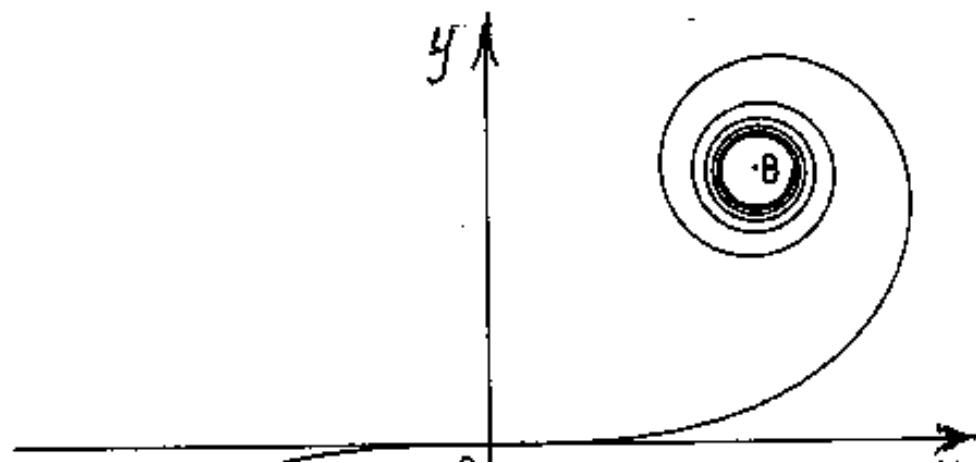
La Clotoide - Spirale di Cornu

Curva trascendente, detta anche spirale di Cornu, definita come: "Luogo geometrico dei punti per i quali è costante il prodotto fra il raggio di curvatura e la lunghezza dell'arco misurata da una origine fissa".

Si suole anche dire: "Linea il cui raggio di curvatura R è inversamente proporzionale all'arco s".

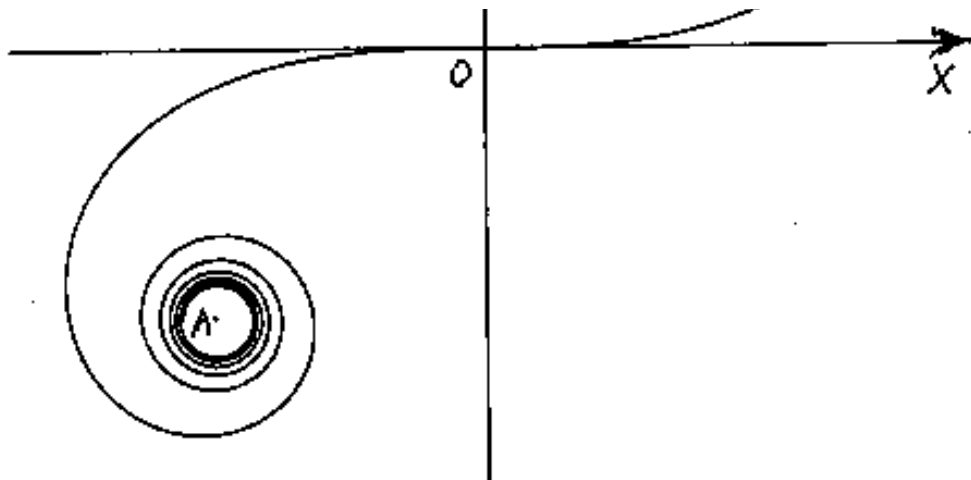
O meglio: "Linea la cui curvatura è proporzionale alla lunghezza della linea misurata dall'origine degli assi". (L'origine degli assi è nel punto di flesso ove la curvatura inverte il segno).

y

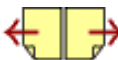
B

$$R \cdot s = \frac{a^2}{\pi}$$

Le equazioni car=tesiane parame=

O X

A

tesiane parame-
triche sono:

$$\begin{cases} x = a\int_0^s \operatorname{sen}\frac{\pi s^2}{2}\,ds \\ y = a\int_0^s \cos\frac{\pi s^2}{2}\,ds \end{cases}$$

(Sono integrali di Fresnel)

Via via che si discosta dall'origine la lunghezza aumenta e con essa la curvatura, le spire sono sempre più piccole fino al limite infinito ove A e B sono punti asintotici. (di coordinate: $\pm a/2$)

Il nome Clotoide (dal greco: κλώθω = filare) è dovuto al matematico italiano Ernesto Cesàro.

Il problema di trovare curve aventi le proprietà della Clotoide risale a Giacomo Bernoulli.

La linea è stata utilmente usata per raccordi ferroviari (l'alta curvatura a bassa velocità che diminuisce all'aumentare della velocità, e viceversa).

La curva interessa la teoria matematica della luce (A. Cornu) e può considerarsi un caso particolare delle curve di Lissajous rappresentate dalle equazioni:

$$x = a \operatorname{sen}(mt + \alpha) \; ; \quad y = b \operatorname{sen}(nt + \beta) \; ;$$

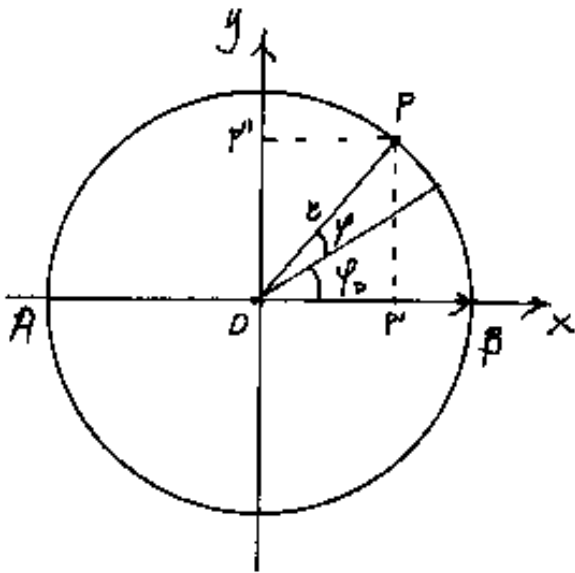
t è un parametro, a, b, m, n, α, β sono costanti

... parametro, $a, b, m, n, \alpha, \beta$ sono costanti

ricordando le equazioni dei moti armonici, ovvero delle grandezze sinusoidali, ed in generale grandezze periodiche di ampiezza media: $A_m = \frac{1}{T}\int_0^T a\,dt = 0$; ove:

$a = A_m \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$; essendo $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ = velocità angolare, si nota che α e β sono "fasi"; se il rapporto m/n è irrazionale si ha la clotoide. (Trattiamo le curve di Lissajous).

Le curve di Lissajous

Il moto armonico

Consideriamo la proiezione sul diametro AB di un punto che si muove con velocità uniforme sulla circonferenza. Sia ω la velocità angolare costante del raggio $\overline{OP}$. La ruotazione sia antioraria e sia iniziata dall'angolo φ_0 (fase) ove si ha $t_0 = 0$ inizio della misura del tempo. Avremo:

$$\begin{cases} x_P = r\cos(\omega t + \varphi_0) \\ y_P = r\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

Il moto di P' (o di P'') è detto moto armonico

Poiché: 2π rappresenta l'angolo giro, T è detto periodo e rappresenta il tempo necessario a compie=

periodo e rappresenta il tempo necessario a compiere un giro completo perciò $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, ove f = frequenza in cicli/sec $= \frac{1}{T}$; quindi la frequenza rappresenta quante volte al secondo il punto mobile occupa la stessa posizione.

Quello esposto è un moto periodico semplice detto anche moto pendolare l'ampiezza $\overline{AB}$ e detta: elongazione.

la velocitá istantanea di P' sará:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\frac{2\pi}{T}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) ; \qquad \left(\frac{2\pi}{T} = \omega\right)$$

ed anche l'accelerazione:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{4\pi^2}{T^2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T^2}x = \underline{-\omega^2 x}$$

risulta quindi che l'accelerazione ha verso opposto allo spostamento x di P'.

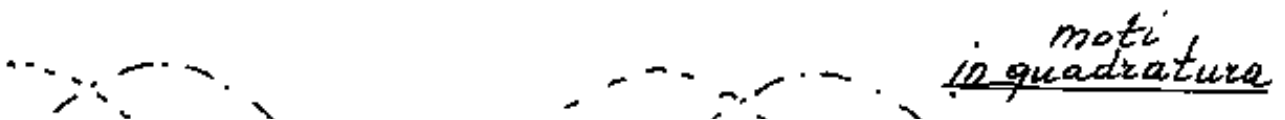
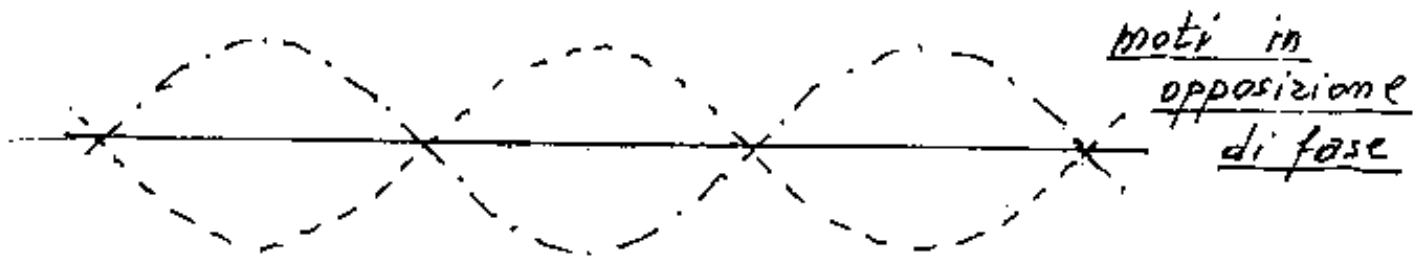
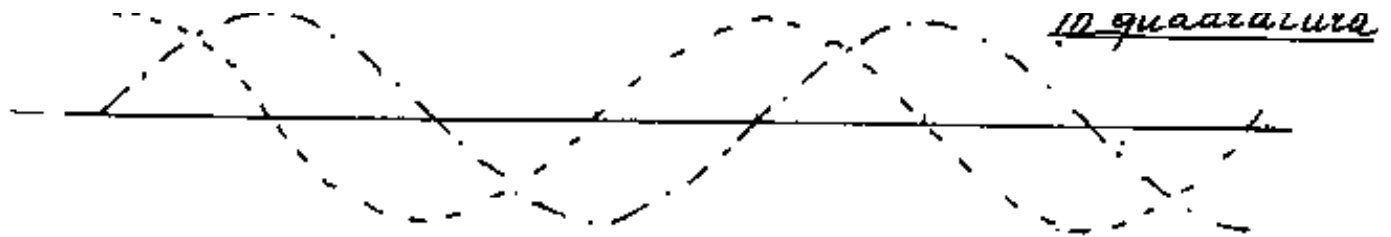
Consideriamo due moti armonici di uguale periodo T, se anche $\varphi_{0_1} = \varphi_{0_2}$ si dicono in fase.
se: $\varphi_{0_2} - \varphi_{0_1} = \Delta\varphi \neq 0$ si dicono sfasati di $\Delta\varphi$
se: $\Delta\varphi = \pi/2$, i due moti si dicono in quadratura
se $\Delta\varphi = \pi$, i due moti si dicono in opposizione

Vedasi vol II (il problema del pendolo), vol IV (lo spazio angolare solido)

Se rappresentiamo le sinusoidi dei moti armonici avremo:

moti in quadratura

in quadratura

moti in opposizione di fase

Consideriamo ora la composizione di due moti armonici

1) moti di ugual periodo intorno allo stesso centro e sullo stesso asse: $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_{01})$; $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$;

l'elongazione risultante ; $x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$ può essere scritta: $A \cos(\omega t + \varphi_0) = x$.

qualora $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})}$ e $\tan \varphi_0 = \dfrac{a_1 \sin \varphi_{01} + a_2 \sin \varphi_{02}}{a_1 \cos \varphi_{01} + a_2 \cos \varphi_{02}}$.

2) moti di ugual periodo su assi ortogonali

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t + \varphi_{0x}) \\ y = b \cos(\omega t + \varphi_{0y}) \end{cases}$$

queste sono le equazioni parametriche del moto.

se eliminiamo il tempo si ottiene l'equazione della traettoria:

$$\arccos\left[\frac{x}{a}\right] - \varphi_{0x} = \arccos\left[\frac{y}{b}\right] - \varphi_{0y}$$

$$\cos\left\{\arccos\left[\frac{x}{a}\right] - \arccos\left[\frac{y}{b}\right]\right\} = \cos(\varphi_{ox} - \varphi_{oy})$$

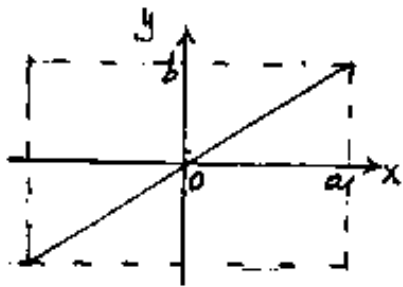
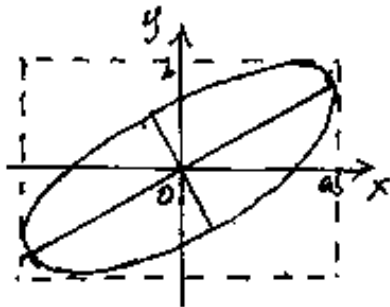
$$\frac{x}{a}\frac{y}{b} + \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)} = \cos(\varphi_{ox} - \varphi_{oy})$$

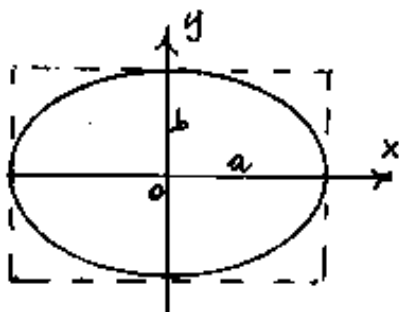
$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2y^2}{a^2b^2} = \cos^2(\varphi_{ox} - \varphi_{oy}) - 2\frac{xy}{ab}\cos(\varphi_{ox} - \varphi_{oy}) + \frac{x^2y^2}{a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\left(\frac{xy}{ab}\right)\cos(\varphi_{ox} - \varphi_{oy}) = \operatorname{sen}^2(\varphi_{ox} - \varphi_{oy})}$$

Questa è l'equazione di uno ellisse (v. vol II)

Ricordiamo (V. II vol. Coniche) che mancando i coefficienti: a_{13} ed a_{23} l'ellisse è solo ruotato. La ruotazione è determinata dal coefficiente a_{12} che è: $(-2\cos(\varphi_{ox}-\varphi_{oy})/ab)$ perciò quando $(\varphi_{ox}-\varphi_{oy}) = 90° = \pi$ l'ellisse non è ruotato: $\cos(90°) = 0$.

Diamo alcune figure al variare di $(\varphi_{ox}-\varphi_{oy}) = \Delta$ mantenendo costante il rapporto: $a/b = 3/2$.

Per $\Delta = 0$, $\text{sen}^2(\varphi_{ox}-\varphi_{oy}) = 0$, per cui l'equazione, (essendo: $\cos(\varphi_{ox}-\varphi_{oy}) = 1$) diventa $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2 = 0$; $\boxed{y = \frac{b}{a}x;}$.

Per $\Delta = \pi/4$; $\text{sen}^2\Delta = \frac{1}{2}$; $\cos\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\sqrt{2}\frac{(xy)}{ab} = \frac{1}{2}; \quad (\text{semi})^2 = \frac{+1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{2}{a^2b^2}}}$$

Per $\Delta = \pi/2$; $\text{sen}^2\Delta = 1$; $\cos\Delta = 0$

l'equazione diventa:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le figure al variare di Δ si ripetono simme=

Le figure al variare di Δ si ripetono simme= tricamente cioè continua la rotazione fino a che per $\Delta = \pi$ si ha la retta che copre l'altra diagonale. Per $\Delta < 0$ i valori si ripetono con verso di rotazione opposto

3) Composizione sopra uno stesso asse di moti armonici di periodo diverso

Le equazioni:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) \\ x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) \end{cases} \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\right)$$

Il moto risultante è ancora periodico se ω_1 ed ω_2 hanno un multiplo comune Ω (T_1 e T_2 un multiplo comune θ) il periodo risultante è $\theta = \frac{2\pi}{\Omega}$.
(si hanno i cosiddetti battimenti)

4) Composizione di moti armonici di diverso periodo sopra assi ortogonali

Le equazioni:

$$\begin{cases} x = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) \\ y = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_0) \end{cases}$$

Varia la differenza di fase e quindi varia la traettoria del moto risultante, le loro forme sono dette figure di Lissajous

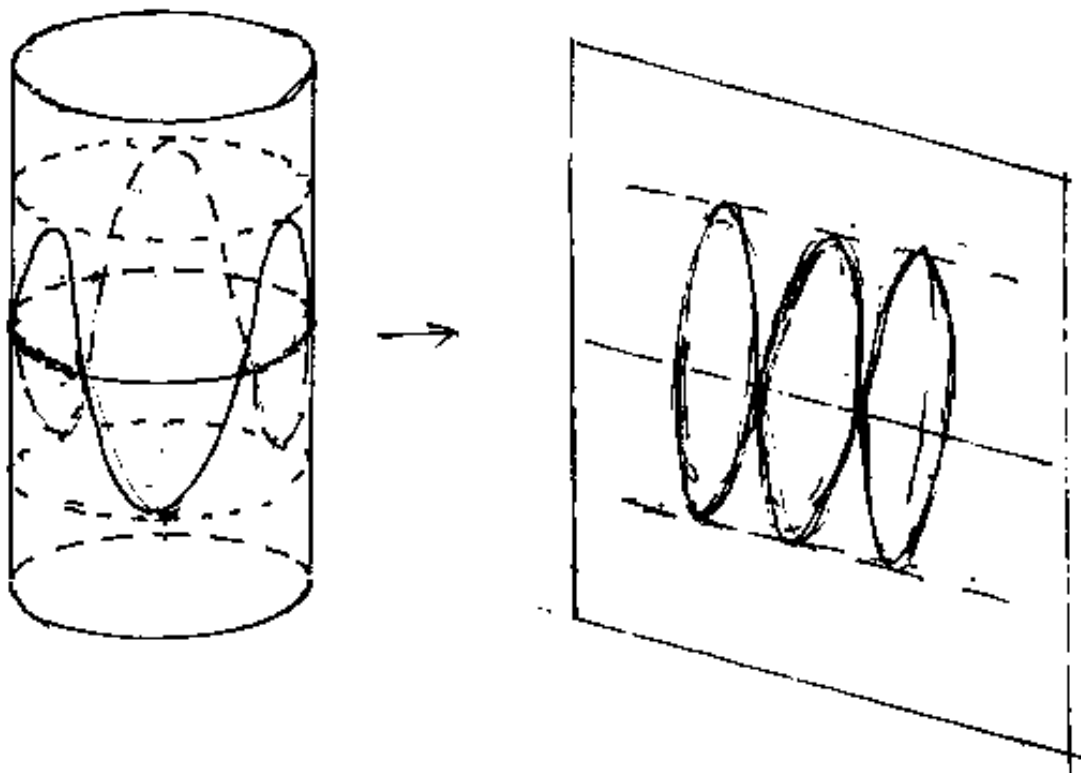
Affinché le figure di Lissajous siano chiuse è

Affinché le figure di Lissajous siano chiuse è necessario che il rapporto fra i periodi T_1 e T_2 (ω_1, ω_2) sia razionale.

Nel trattare la clotoide abbiamo detto che essa è un caso particolare di curve di Lissajous quando il rapporto fra i periodi è irrazionale.

indicammo simboli diversi: $x = a\,\mathrm{sen}(mt + \alpha)$; $y = b\,\mathrm{sen}(nt + \beta)$;

(le curve non cambiano)

Possiamo visualizzare le immagini delle curve di Lissajous, avvolgendo intorno ad un cilindro trasparente, delle sinusoidi. Se la circonferenza del cilindro e la lunghezza d'onda della sinusoide ammettono un minimo comune multiplo, la figura risultante torna su stessa e si ha una figura di Lissajous.

Abbiamo visto che con una impostazione le figure si ripetono simmetriche da $\frac{\pi}{2}$ a π

le figure si ripetono simmetriche da $\frac{\pi}{2}$ a π
rispetto quelle da 0 a π. Però non è
esatto pensare che una volta definito
il rapporto razionale fra i due periodi,
e la differenza di fase Δ si abbiano gli
stessi risultati. A giustificazione di ciò,

presentiamo due gruppi di figure di Lissajous ove la: $x = \cos(\omega_1 t)$ con $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 1$ e fase $\varphi_{x_0} = 0$ mentre la $y = \cos(a\omega_1 t + \varphi_{y_0})$, cioè abbiamo fatto ricadere in y il rapporto $T_2/T_1 = 0$ e $\Delta = (\varphi_{y_0} - 0) = \varphi_{y_0}$

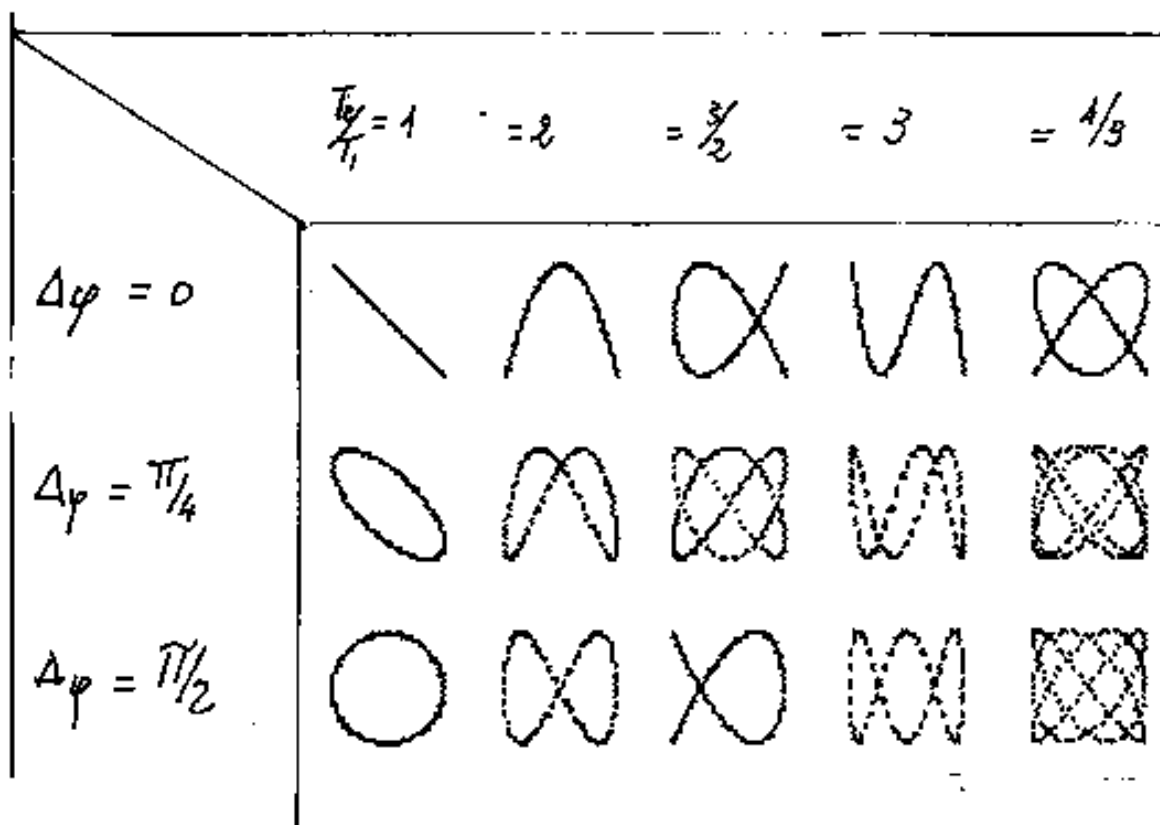
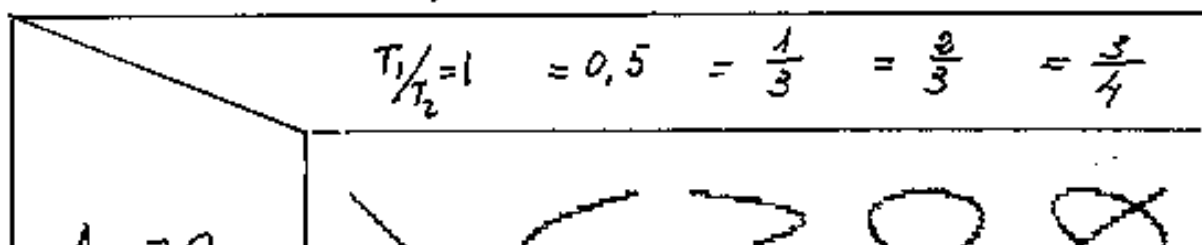
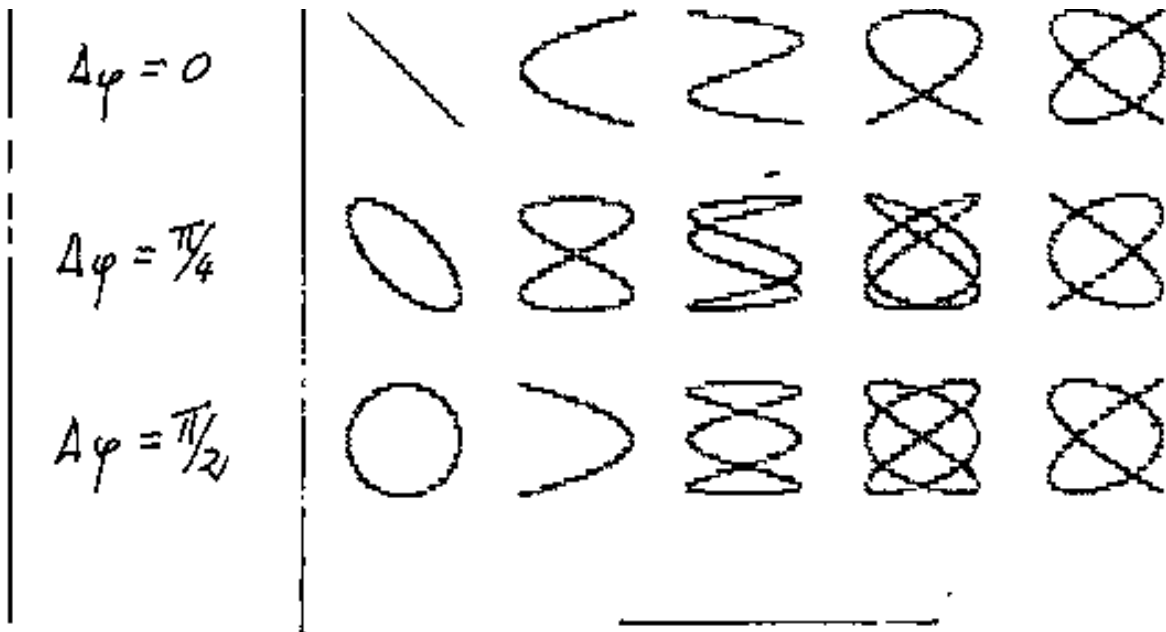
	$T_2/T_1 = 1$	$= 2$	$= 3/2$	$= 3$	$= 4/3$
$\Delta\varphi = 0$					
$\Delta\varphi = \pi/4$					
$\Delta\varphi = \pi/2$					

e invertendo: T_2/T_1

	$T_1/T_2 = 1$	$= 0,5$	$= \frac{1}{3}$	$= \frac{2}{3}$	$= \frac{3}{4}$
$\Delta = 0$					

$\Delta\varphi = 0$

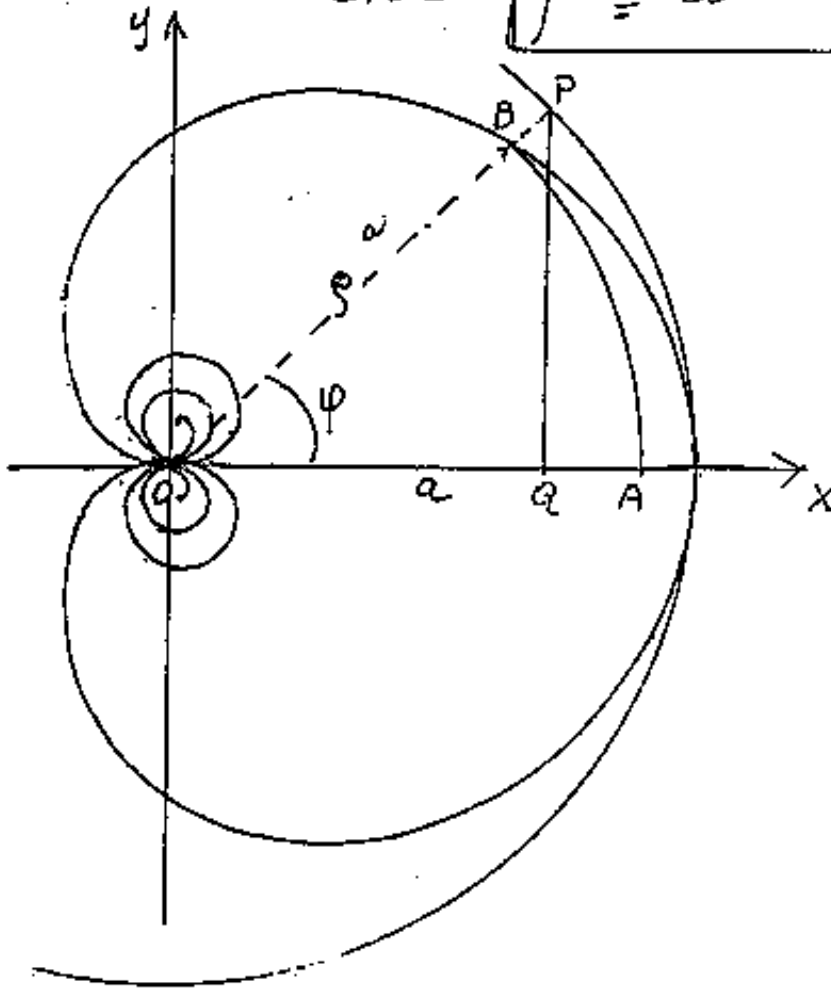
$\Delta\varphi = \pi/4$

$\Delta\varphi = \pi/2$

Torneremo su questo argomento fondamentale in problemi fisici.

cocleòide

È una curva piana di equazione in coordinate polari:

$$\rho = a \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\varphi}$$

cioè $\rho = a \cdot \operatorname{za}\operatorname{sen}\varphi$

È una curva connessa con la quadratura del cerchio.

Infatti se scriviamo: $\rho\varphi = a \operatorname{sen}(\varphi)$ (vedi figura) vuol dire che l'arco $\widehat{AB} = \rho\varphi$ equivale il segmento: $\overline{PQ} = a \operatorname{sen}\varphi$.

Si noti che:

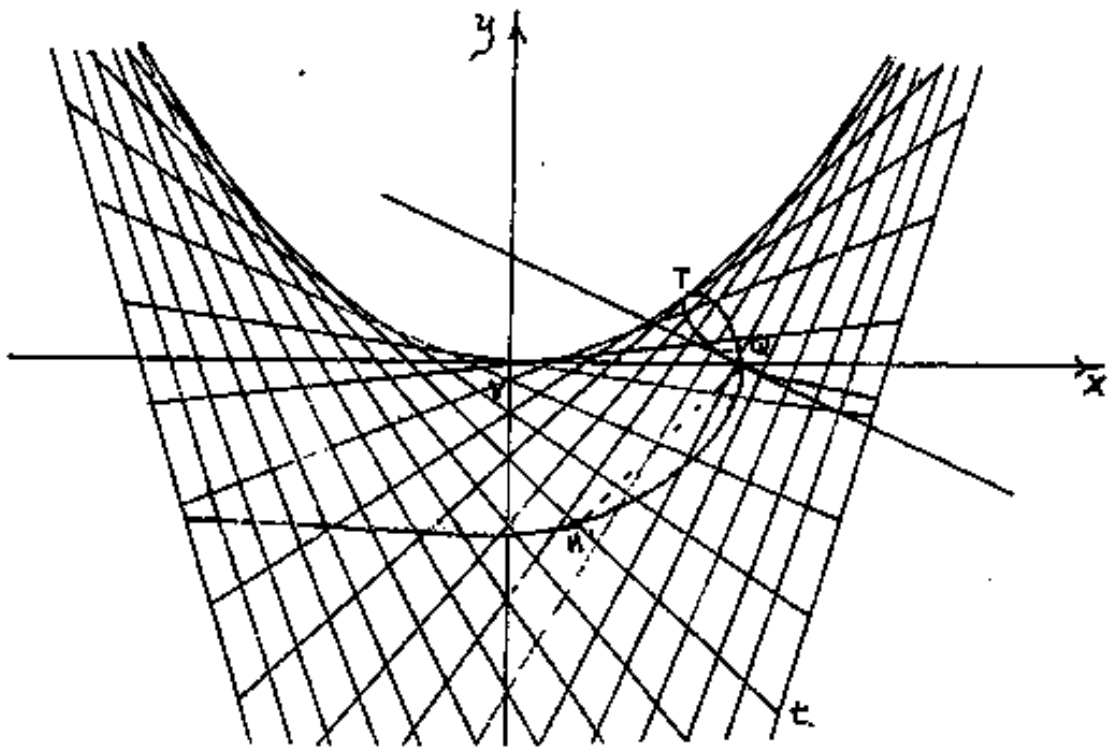
$$X = a\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\varphi} = a\frac{2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{2\varphi} = \quad \boxed{X = (a)(\operatorname{za}\operatorname{sen}(2\varphi))}$$

$$y = \frac{a \operatorname{sen}^2 \varphi}{\varphi} = a \frac{1-\cos(2\varphi)}{(2\varphi)} = \boxed{y = (a)\operatorname{ravers}(2\varphi)}$$

Coclèoide - dal latino coclĕa = chiocciola, e dal greco: εἶδος = aspetto, è una particolare quadrotrice di Ippia.

Ofiüride

Si definisce ofiüride una curva di 3° grado podaria della parabola relativamente ad un punto sulla retta tangente nel vertice la parabola.

Se la parabola è al centro, la tangente nel vertice V è l'asse delle x, se la parabola è costruita per tangenti, preso un punto Q sulla tangente in V (ax) da Q si tracciano le normali alle tangenti, i piedi

delle normali (curva pedale o podaria) cioè i vertici retti sulle tangenti (come M per la tangente t) costituiscono la curva ofiùride.
Il nome deriva dal greco: ὄφις = serpente ed οὐρά = coda; cioè: ofiùride = coda di serpente.
La costruzione che noi abbiamo presentato ha

al centro assi la parabola, mentre l'ofiuride ha il punto Q (è un nodo) spostato.

Se avessimo preso Q coincidente con V avremmo trovato la Cissoide di Diocle (podaria di una parabola) curva che abbiamo già trattato.

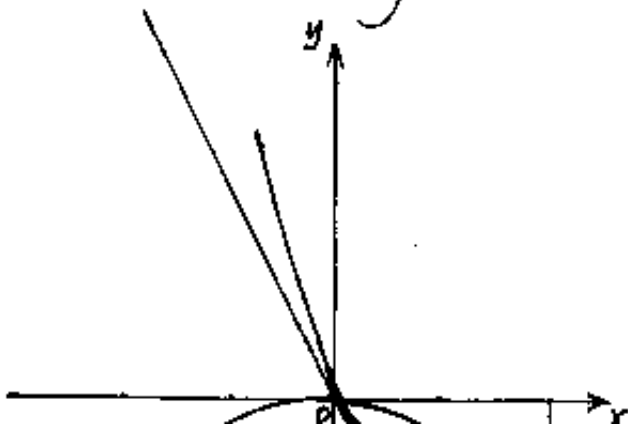
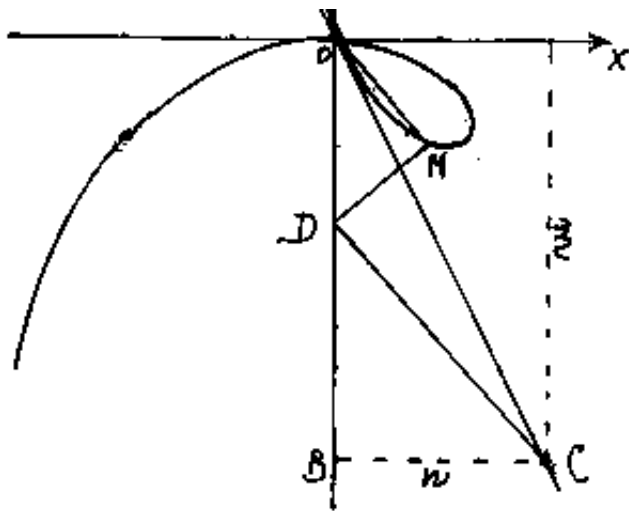
Ordinariamente l'equazione dell'ofiuride è presentata:

$$x\,(x^2+y^2) = y\,(mx - ny)$$

è però esplicitabile in y

$$y = x\left[\frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4x(n+x)}}{2(n+x)}\right]$$

L'enciclopedia delle matematiche elementari (ed Hoepli) al XXXVII capitolo riporta la costruzione dell'ofiuride di D. Uhlhorn - (Oldemburg 1802).

Tracciati gli assi x ed y, preso il segmento $\overline{OB} = m$, il segmento $\overline{BC} = n$, la retta $\overline{CO}$ sarà la tangente alla curva nell'origine O. Da C tracciamo una retta qualsiasi $\overline{OD}$, da

una retta qualsiasi OD, da O la parallela ad $\overline{OD}$ e da D la normale fino ad M (punto dell'ofiuride). I segmenti: -m ed n (coordinate di C), sono gli elementi noti dell'equazione

Le curve di Lamé

Sono considerate la generalizzazione di una conica al centro, in particolare l'ellisse.
La formula delle curve di Lamé è:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$$

Si noti: con a e b diversi da zero ed $m = 0$ si ha un assurdo.

con $m = 1$ si ha una retta

con $m = 2$ ed $a = b > 0$ si ha un cerchio

" " ed $a \neq b > 0$ si ha un ellisse

" " ed $a \neq b$ di segno opposto un iperbole

con $m = 2/3$ ed $a = b > 0$ si ha un asteroide

curve già da noi trattate

con $m = 2$ le curve di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$$

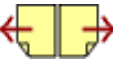
$a + \lambda \qquad b + \lambda$

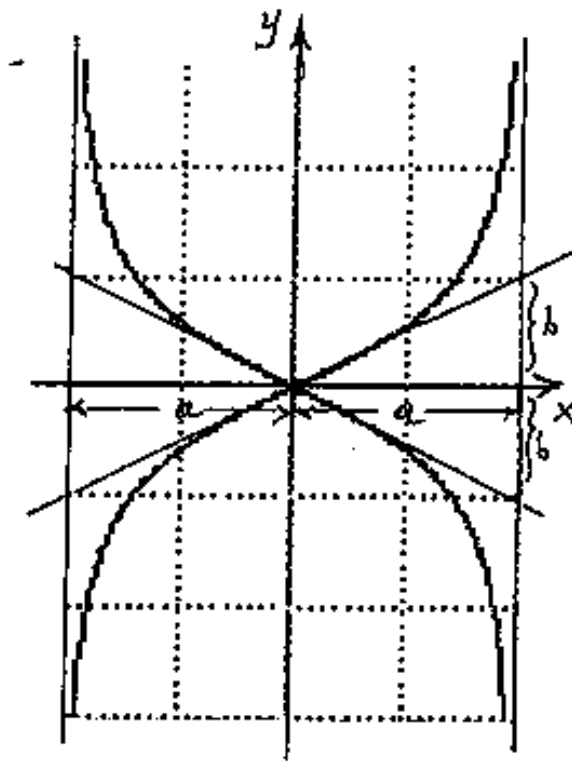
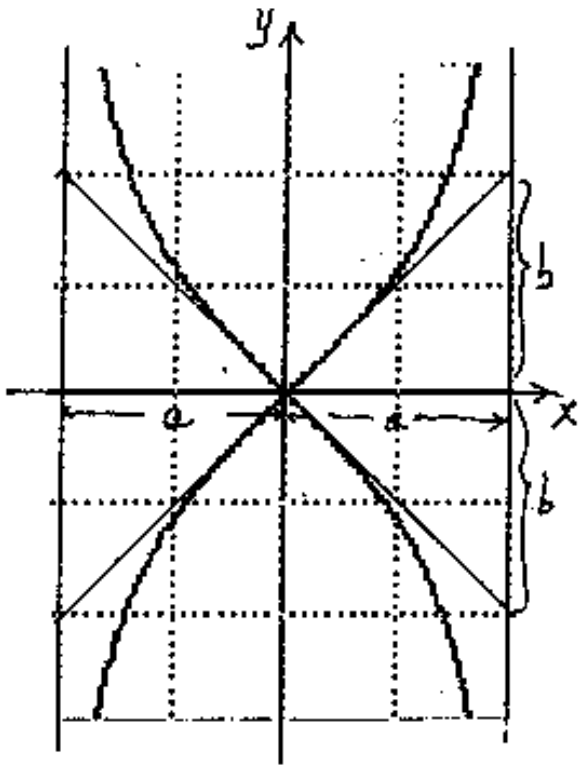
furono dette dal Lamé: "Coniche omofocali"

con $m = -2$ l'equazione diventa:

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$$

che è la curva cruciforme già da noi trattata chiamata Kreuzkurve da P.H. Schoute, ma fu studiata la prima volta da F. Siacci. (1860)

(Cfr. Enciclopedia delle matematiche elementari ed. Hoepli, vol. 2° parte 2ª pag. 422)

P.H. Schoute chiamò: "Kohlenspiz Kurve"
la curva risultante dall'equazione:

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$$

anche questa equazione può essere in forma esplicita:

$$y = \frac{x}{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Le curve di Lamé si distribuirebbero in nove

distinte categorie (cfr. G Loria Atti Acc; Ponton., 39 (1909))
fra di esse si trovano oltre le curve citate compreso
la Kohlenspiz Kurve e la Kreuz Kurve . ed inoltre le lemni-
scate che ora tratteremo.

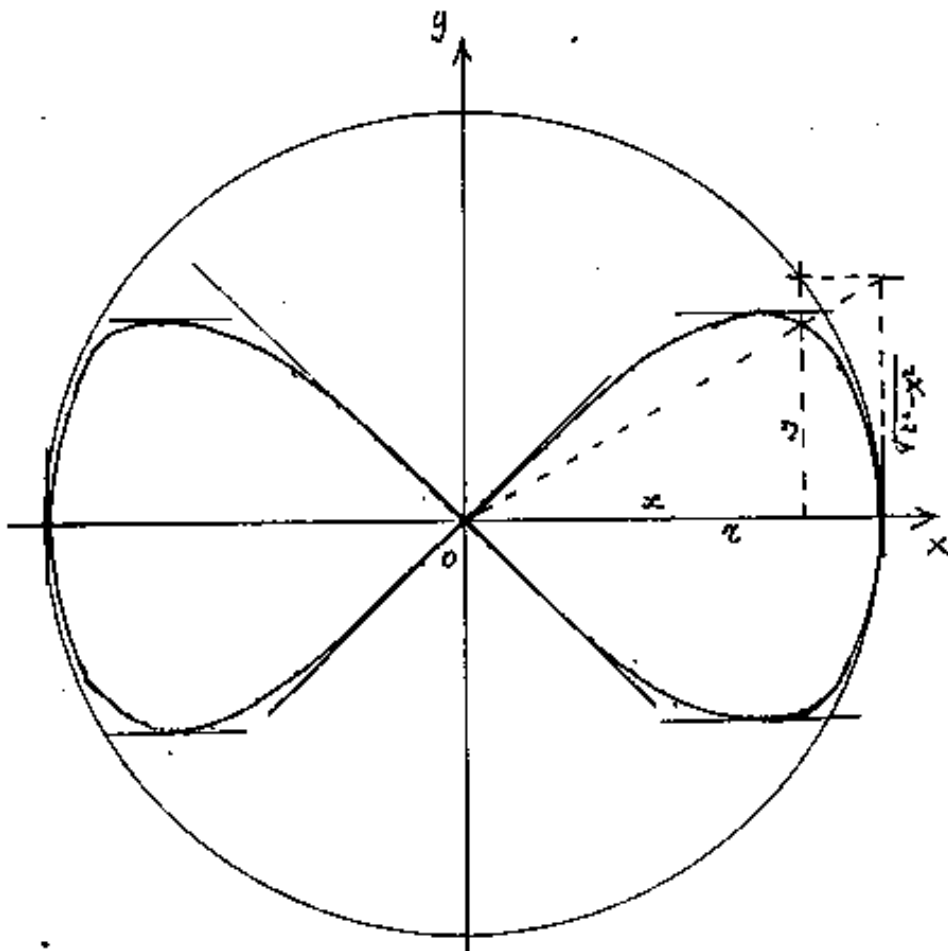
Nello spazio vi sono le superfici di Lamé che
tratteremo con le linee e le superfici nello spazio.

La curva bisàccia

La curva è detta anche lemniscata di Gerono la sua equazione cartesiana è: $r^2y^2 = x^2(r^2 - x^2)$

si può esplicitare: $y = \frac{x}{r}\sqrt{r^2 - x^2}$ poiché $-r \leq x \leq +r$

la curva è contenuta in una circonferenza. Si può scrivere:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}$$

cioè: "l'ordinata del cerchio sta al suo raggio come l'ordinata della bisaccia sta all'ascissa comune." Questa osservazione consente una costruzione per punti della curva. $y' = \frac{1}{r}\left(\frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) = \frac{1}{r}\left(\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)$

per punti della curva. $y' = \frac{1}{r}\left(\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) = \frac{1}{r}\left(\sqrt{r^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)$.

cioè per $x = \pm r$ si ha una tangente verticale, per $x = \pm r/\sqrt{2}$ si ha una tangente doppia, per $x = 0$ si ha un punto doppio con tangenti $y = \pm x$ cioè a $\pm 45°$. L'equazione in coordinate polari:

$$\rho = r \cdot \frac{\sqrt{\cos(2\theta)}}{\cos^2(\theta)} \qquad \rho = r\,\frac{\sqrt{2\cos^2\theta - 1}}{\cos^2\theta}$$

L'area del cappio $= 2\int_0^r y\,dx = 2\int_0^r \frac{x}{r}(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\int_0^r \frac{(r^2-x^2)^{1/2}}{r}\,d(r^2-x^2)$

$$A_{(1\ cappio)} = -\frac{2(r^2-x^2)^{3/2}}{3\ r}\Bigg]_0^r \qquad A = \frac{2}{3}r^2$$

Area dei due cappi $= \frac{4}{3}r^2$.

Lemniscata di Bernoulli.

Dati due punti sull'asse delle ascisse, $F_1; F_2$ simmetrici rispetto all'asse y, distanti dall'origine rispettivamente $\pm a$; $F_1 \equiv (+a;0)$. $F_2 \equiv (-a;0)$

Definiamo la Lemniscata il luogo dei punti per i quali è costante il prodotto delle distanze da F_1 ed F_2. cioè: $(\overline{PF_1})(\overline{PF_2}) = a^2$ (costante).

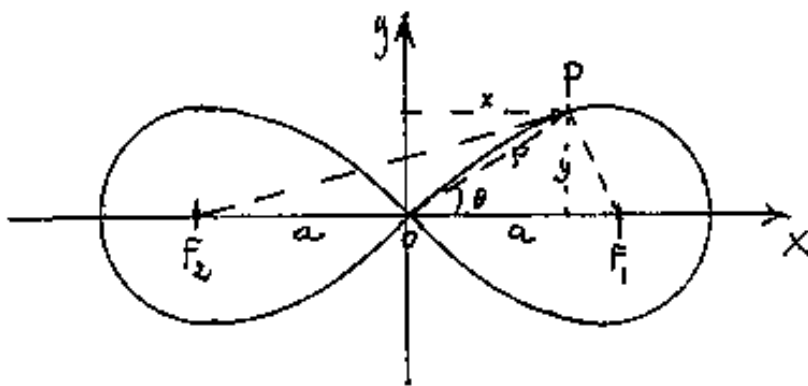
$$\overline{PF_1}^2 = (a-x)^2 + y^2$$

$$\overline{PF_2}^2 = (a+x)^2 + y^2$$

$$((a-x)^2 + y^2)((a+x)^2 + y^2) = a^4$$

sviluppiamo interamente i prodotti: abbiamo:

$$(a^2 - 2ax + x^2 + y^2)(a^2 + 2ax + x^2 + y^2) = a^4$$

$$a^4 - 2a^3x + a^2x^2 + a^2y^2$$
$$+2a^3x - 4a^2x^2 \qquad +2ax^3 + 2axy^2$$

$$+2a^3x - 4a^2x^2 + 2ax^3 + 2axy^2$$
$$+ a^2x^2 - 2ax^3 + x^4 + x^2y^2$$
$$+a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 + y^4 = a^4$$

$$-2a^2x^2 + 2a^2y^2 + 2x^2y^2 + x^4 + y^4 = 0$$

$$\boxed{(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)}$$

Equazione in cartesiane della lemniscata

ponendo $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\rho^4 = 2a^2\rho^2\cos 2\theta$$

$$\boxed{\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta}$$

Equazione in polari della lemniscata

Si noti che per: $\theta > \pi/4$ (45°) si ha $\cos(2\theta) < 0$

quindi: $\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta}$ è immaginario finché $\theta > \frac{3}{2}\pi$

perciò facciamo variare θ: $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ per

il cappio sulle x positive e $\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$ per

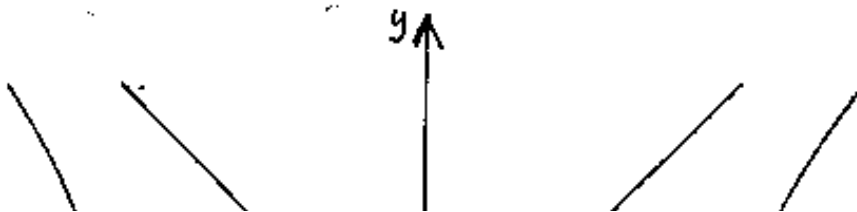
il cappio sulle x negative (simmetrico).

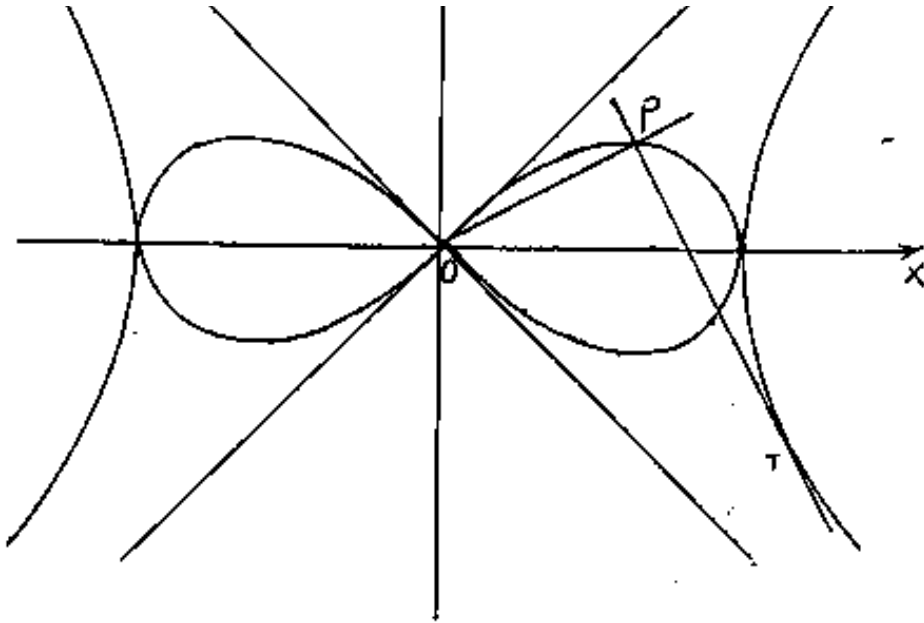
L'area del cappio: $A = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\theta = a^2\int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta$

$$A = \frac{a^2}{2}\left[\operatorname{sen} 2\theta\right]_{-\pi/4}^{+\pi/4} = \frac{a^2}{2}(1+1)$$

$$\boxed{A = a^2}$$

<u>L'area di un cappio di lemniscata, equivale il quadrato di lato $\overline{OF} = a$.</u>

La lemniscata di Bernoulli si può definire anche come la podaria all'iperbole equilatera. di equazione $f = (x^2 - y^2 - 2a^2) = 0$. rispetto al centro assi.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = x \; ; \; \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = y.$$

l'equazione della tangente:

l'equazione della tangente:

$$(x-x_T)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-y_T)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

l'equazione della normale

$$(x-0)\frac{\partial f}{\partial y} + (y-0)\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

dalle quali sostituendo e risolvendo otteniamo:

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2),$$

la lemniscata.

Raggio di curvatura della lemniscata

Il raggio di curvatura in coordinate polari è:

$$R = \frac{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

l'equazione della lemniscata in coordinate polari è

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta} \; ; \quad \rho' = a\sqrt{2}\,\frac{-\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \; ;$$

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta \qquad \rho'^2 = 2a^2\,\frac{1-\cos^2 2\theta}{\cos 2\theta} = \left(\frac{2a^2}{\cos 2\theta} - 2a^2\cos 2\theta\right)$$

$$(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2} = \left(\frac{2a^2}{\cos 2\theta}\right)^{3/2} = \left[a^3\,\frac{2\sqrt{2}}{(\cos 2\theta)^{3/2}}\right]$$

$$\rho'' = -a\sqrt{2}\left[\frac{+2\cos(2\theta)\sqrt{\cos(2\theta)} + \frac{+\operatorname{sen}^2 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}}{\cos(2\theta)}\right] = \frac{-a\sqrt{2}\,(2\cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta)}{(\cos(2\theta))^{3/2}}$$

$$\rho'' = -a\sqrt{2}\,\frac{(\cos^2 2\theta + 1)}{(\cos(2\theta))^{3/2}} \qquad \rho\rho'' = -2a^2\,\frac{\cos^2 2\theta + 1}{\cos(2\theta)} = \left(2a^2\cos(2\theta) + \frac{2a^2}{\cos(2\theta)}\right)$$

$$(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'') = 2a^2\cancel{\cos 2\theta} + \frac{4a^2}{\cos 2\theta} - 4a^2\cancel{\cos 2\theta} + 2a^2\cancel{\cos 2\theta} + \frac{2a^2}{\cos 2\theta}$$

$$R = \frac{2a^3\sqrt{2}\,/\cos(2\theta)\sqrt{\cos 2\theta}}{6a^2/\cos 2\theta} = \frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{2a^2}{3a\sqrt{2\cos 2\theta}}$$

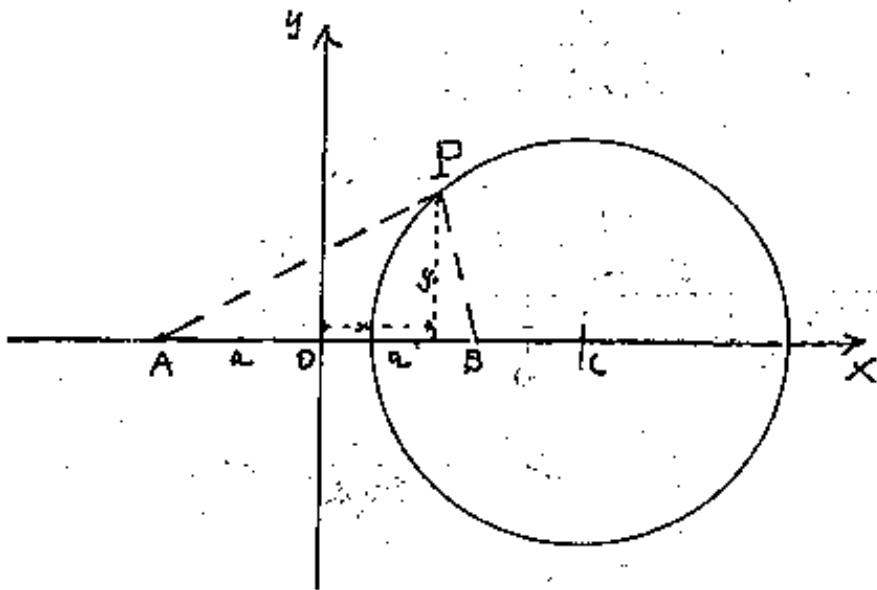
$$2a^2$$

$$R = \frac{2a^2}{3\rho}$$

nei vertici del cappio $\theta = 0$; $\theta = 180°$; $\rho = a\sqrt{2}$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Cerchio di Apollonio (relativo a due punti)

(Apollonio Pergeo, III sec a C fondò la teoria delle coniche sono di Apollonio i teoremi sui diametri coniugati). (V. cerchi relativi a triangoli)

Il cerchio di Apollonio è definito come:
"luogo geometrico dei punti le cui distanze da due punti dati hanno rapporto costante"

Poniamo i due punti A e B sulle ascisse e simmetrici rispetto all'asse y.
Sia P un qualsiasi punto del piano, per esso dovrà passare almeno un cerchio di Apollonio.
che per definizione dovrà essere: $\overline{PA}/\overline{PB} = K = cost.$
Le coordinate di P siano $x; y$ avremo: $\overline{PA}^2 = (x+a)^2 + y^2$;
$\overline{PB}^2 = (a-x)^2 + y^2$ perciò: $[(a+x)^2 + y^2] = K^2[(a-x)^2 + y^2]$ cioè:

... cioè:

$$\boxed{x^2+y^2-2a\left(\frac{K^2+1}{K^2-1}\right)x+a^2=0}$$

equazione di un cerchio di centro: $\boxed{C\equiv\left(a\frac{(K^2+1)}{(K^2-1)};\ 0\right)}$ e di raggio $R=\sqrt{x_c^2-a^2}=$ $\boxed{R=a\frac{2K}{K^2-1}}$

Per $K=2$ (come in figura) la $\overline{AP}=2\cdot\overline{BP}$ per ogni punto della circonferenza, (con l'avvertenza che $\overline{BP}$ non può essere inferiore a: $\frac{1}{3}a$) Ove ADBE = gruppo armonico: $K=\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EB}$; D, E = punti armonici

Cassinòide (ovale di Cassini)

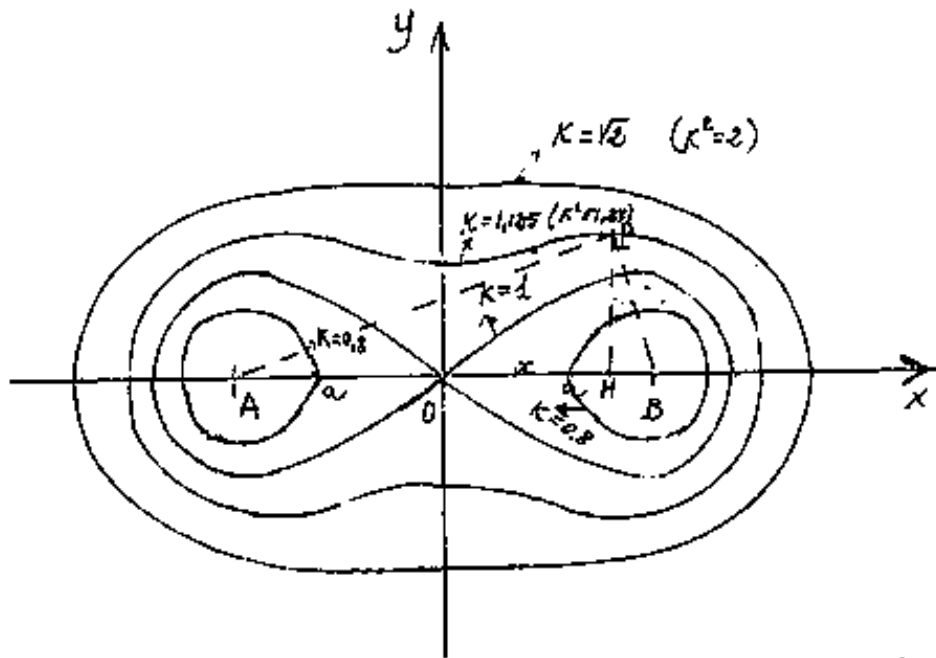
La linea cassinòide è definita come: "il luogo geometrico dei punti le cui distanze da due punti fissi, hanno prodotto costante"

Si noti che, mentre nel cerchio di Apollonio, il rapporto delle distanze da due punti fissi è un numero puro; nell'ellisse e nell'iperbole, rispettivamente la somma e la differenza delle distanze da due punti fissi è un segmento; nella cassinòide il prodotto delle distanze da due punti fissi è il quadrato di una lunghezza, cioè un'area. Per cui, una volta fissato il quadrato, le distanze saranno i lati di tutti i rettangoli equivalenti a tale quadrato. Si verificano tre

casi: La semidistanza "a" dei due punti fissi può essere $a \gtreqless l$ ove "l" è il lato del quadrato. (Ricordiamo il secondo teorema di Euclide per costruire i rettangoli equivalenti al quadrato dell'altezza.)

Noi porremo "l" = Ka, in tal modo K è un numero puro ed "a" il modulo grafico cioè i tre casi diventano: $K \gtreqless 1$

Poniamo i due punti fissi sull'asse x, simmetrici rispetto ad y cioè: $A \equiv (-a, 0)$; $B \equiv (+a, 0)$.
Se P è un punto della cassinòide di parametro K, per definizione si ha:

$$(AP)(BP) = K^2 a^2$$

essendo: $\overline{OA} = a$; $\overline{OB} = a$

$\overline{OH} = x$; $\overline{HB} = (a - x)$

$\overline{AH} = (a + x)$ avremo:

$$\overline{AP}^2 = (a+x)^2 + y^2$$

$$\overline{BP}^2 = (a-x)^2 + y^2$$

$$\left(\overline{AP}^2\right)\left(\overline{BP}^2\right) = K^4 a^4$$

$$\left((a+x)^2 + y^2\right)\left((a-x)^2 + y^2\right) = K^4 a^4$$

sviluppando: $\left[(a+x)^2 + (a-x)^2\right] y^2 + (a+x)^2 (a-x)^2 + y^4 - K^4 a^4 = 0$

$$y^4 + 2(a^2 + x^2) y^2 + (a^2 - x^2)^2 - K^4 a^4$$

$$y^2 = -(a^2+x^2) \pm \sqrt{(a^2+x^2)^2 - (a^2-x^2)^2 + K^4 a^4} = -(a^2+x^2) + \sqrt{4a^2x^2 + K^4 a^4}$$

$$y = a \sqrt{\sqrt{4\left(\frac{x}{a}\right)^2 + K^4} - \left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}$$

ove a = modulo grafico

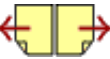
$4\left(\frac{x}{a}\right)^2 + K^4 \geq 1 + 2\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^4 \quad : \quad K^4 \geq \left(\frac{x}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1 \quad : \quad K^2 \geq \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1$

L'equazione può anche scriversi: $\boxed{(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + (1-K^4)a^4 = 0}$

che è la forma ordinaria dell'equazione in coordinate cartesiane dell'ovale di Cassini (cassinoide). se in essa poniamo:

$a = a/\sqrt{2}$; $K^2 = 1$, otteniamo la lemniscata di Bernoulli.

Per $K^2 > 1$ gli ovali inizialmente schiacciati, tendono al cerchio per $K^2 \to \infty$

per $K^2 < 1$ l'ovale si scinde in due curve chiuse.

Ovale di Cartesio

L'ovale di Cartesio è definita come il luogo geometrico dei punti le cui distanze da due punti fissi, moltiplicate per due costanti arbitrarie λ e μ, hanno somma costante K.

Se P è il punto generico, F_1 ed F_2 i punti fissi, (detti fuochi), avremo:

$$\boxed{\lambda \overline{F_1P} + \mu \overline{F_2P} = K} = (\text{cost.})$$

per $\lambda = \mu$ si ha un ellisse $(2a = K/\lambda)$

per $\lambda = -\mu$ si ha un iperbole.

$$\boxed{\overline{F_2P} = \frac{K}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}\overline{F_1P}}$$

Facciamo un esempio: Poniamo: $\overline{F_1F_2} = 4$; $K = 12$

$\mu = 3$; $\lambda = 2$. $\overline{F_2P} = \frac{12}{3} - \frac{2}{3}\overline{F_1P}$

	$\overline{F_1P}$	$\overline{F_2P}$
immagin. per $\overline{F_1F_2}=4$	6	0
	5,4	0,4
	5	0,66

F_1 F_2

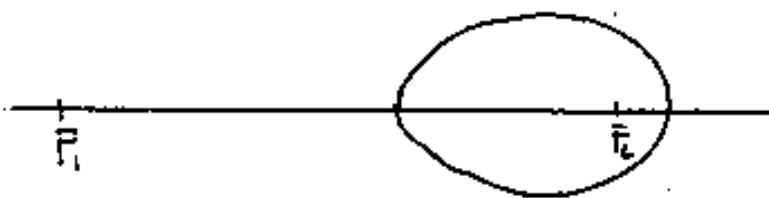
Per $\overline{F_1F_2}=4$

5,4	0,4
5	0,66
4,8	0,8
4	1,33
3	2
2,4	2,4
2	2,67
1	3,33
0	4

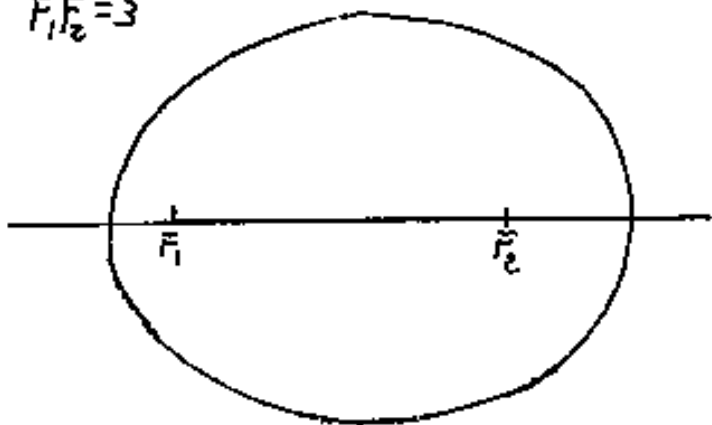
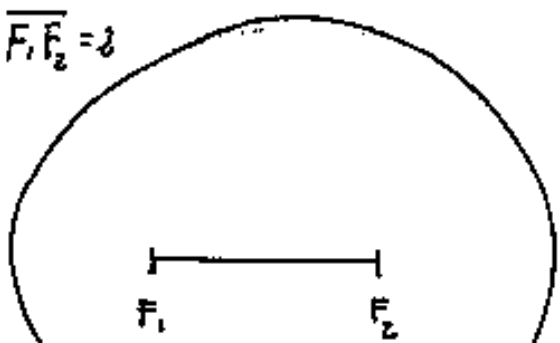
Vediamo ora di porre qualche limitazione all'arbitrarietà di: λ; μ; K, $\overline{F_1F_2}$.

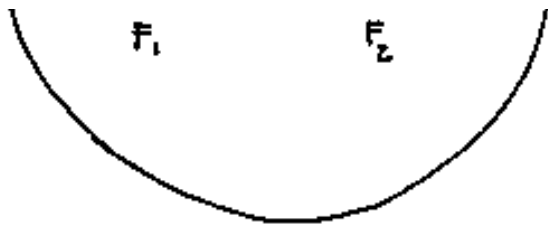
Nell'esempio precedente abbiamo posto $\overline{F_1F_2} = \overline{F_2P}$ quando $\overline{F_1P} = 0$

Se conveniamo che valgono solo distanze ≥ 0; nell'esempio precedente per $\overline{F_1F} = 6$ la curva diventa il punto isolato F_2.

$\overline{F_1F_2} = 5$

F_1 F_2

Per $\overline{F_1F_2} = 5$ la curva a forma di uovo ha F_2 interno ed F_1 esterno.

Abbiamo visto per $\overline{F_1F_2} = 4$, per $\overline{F_1F_2} = 3$, abbiamo entrambi i punti fissi interni alla curva ovoidale. Al decrescere di $\overline{F_1F_2}$ la curva si approssima sempre più ad una circonferenza, che raggiunge per $F_1 = F_2$

$\overline{F_1F_2} = 3$

F_1 F_2

$\overline{F_1F_2} = 2$

F_1 F_2

F_1 F_2

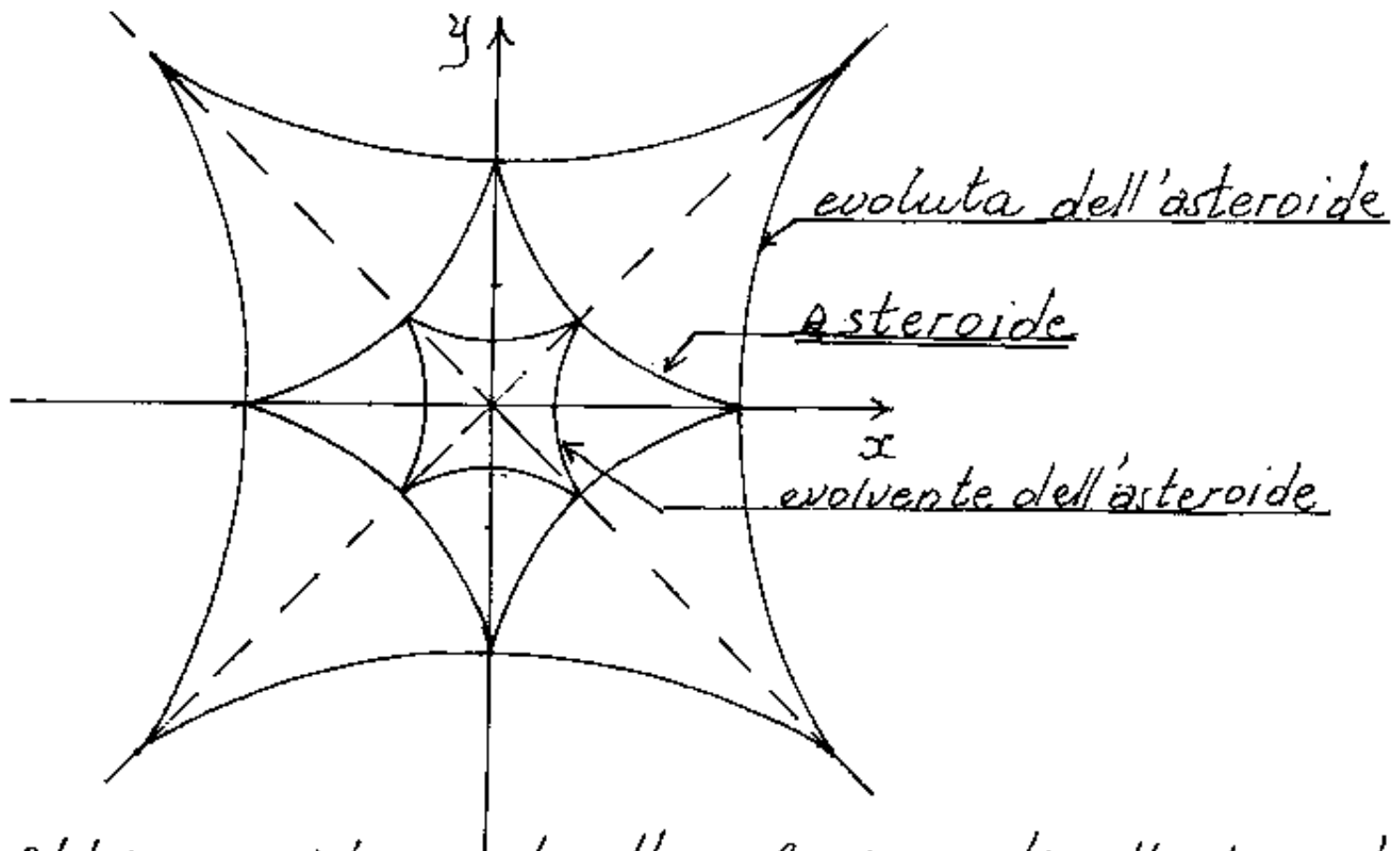
con raggio 2,4 nel caso numerico trattato.

Analiticamente: $\overline{F_2P} = \overline{F_1P} = \frac{K}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}\overline{F_1P}$ $\boxed{\overline{FP} = \frac{K}{\lambda+\mu} = R}$

L'ordinata nel punto medio fra F_1 e F_2 sarà $\boxed{y_M = \sqrt{R^2 - f^2}}$

ove: $f = \frac{\overline{F_1F_2}}{2}$. — L'equazione in coordinate bipolari sarà: $\boxed{\lambda\rho_1 + \mu\rho_2 = \text{cost.}}$

Le podarie (o pedali) dell'asteroide

Abbiamo già dimostrato che l'evoluta e l'evolvente dell'Asteroide sono ancora asteroidi ad assi ruotati di $\pm \pi/4 = (\pm 45°)$ con modulo "a" rispettivamente doppio oppure metà.

Abbiamo visto anche l'involuzione di rette tangenti per costruire l'Asteroide. Se da un punto definito F tracciamo le perpendicolari alle

definito F tracciamo le perpendicolari alle rette tangenti l'asteroide, i punti d'intersezione (piedi delle normali) costituiscono <u>le podarie</u> o pedali dell'Asteroide. Una classe di queste sono denominate "Scarabeo" che tratteremo dopo aver trattato il <u>bifolium e le rodonee.</u>

Bifolium

L'equazione cartesiana : $(x^2+y^2)^2 = ax^2y$

è una equazione biquadratica in x:

$$x^4 - (ay - 2y^2)x^2 + y^4 = 0$$

$$x^2 = \frac{(ay-2y^2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{ay-2y^2}{2}\right)^2 - y^4} \quad ; \quad x = \sqrt{\frac{y}{2}\left[(a-2y) \pm \sqrt{a^2-4ay}\right]}$$

da cui si rileva che la curva non può avere punti sulle $y<0$ e che $y \leq \frac{a}{4}$; (con $a>0$).

L'equazione in coordinate polari: $\rho = a \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta$

può scriversi : $\rho = a(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta)$ cioè $\operatorname{sen}^3\theta - \operatorname{sen}\theta + \rho/a = 0$

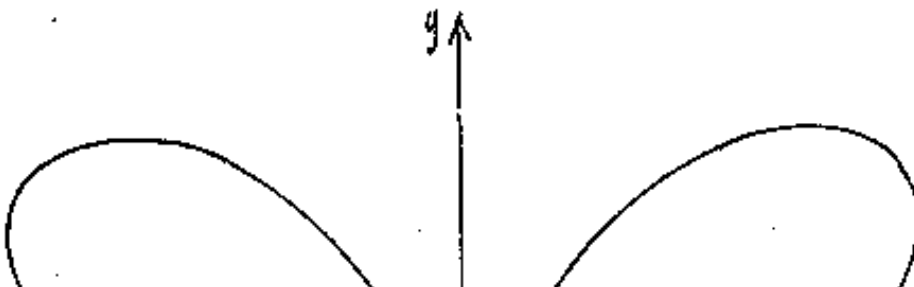
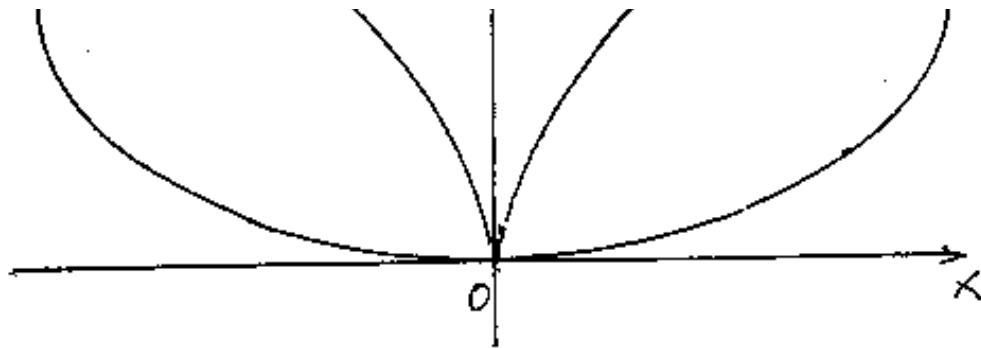
$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = a(\cos\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta) = 0$ per $\cos\theta = 0$ da cui $\theta = 90°$

e per $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ove $\theta = 35° 15' 52'' = 0,615480$ rad.

$$\rho_{max} = a\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = a\frac{2}{\sqrt{3}}$$

y

O

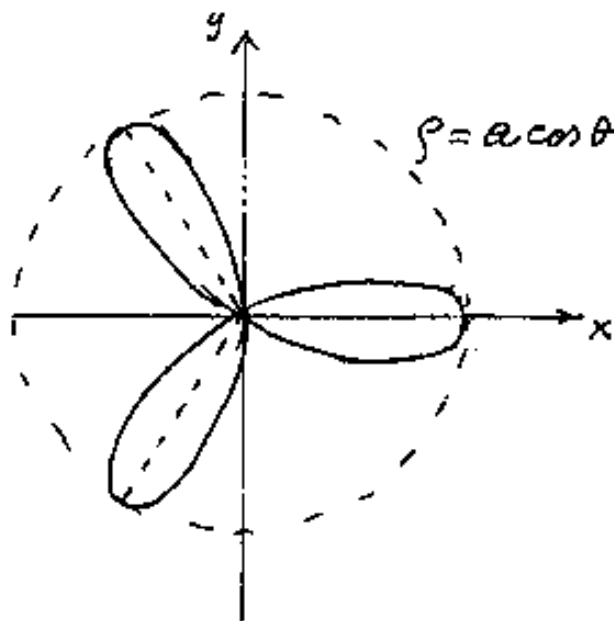
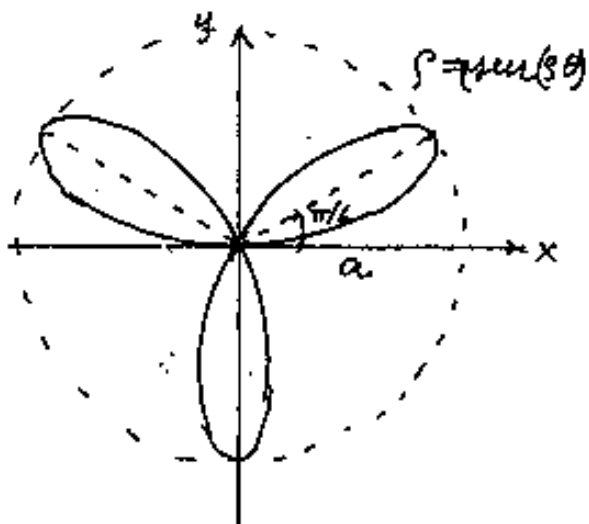
X

Le Rodonee

Rosa a tre foglie

L'equazione in coordinate polari può essere:

$\rho = a\cos(3\theta)$ oppure: $\rho = a\,\text{sen}(3\theta)$ se vogliamo che uno dei petali sia sopra un asse.

$\rho = a\,\text{sen}(3\theta)$

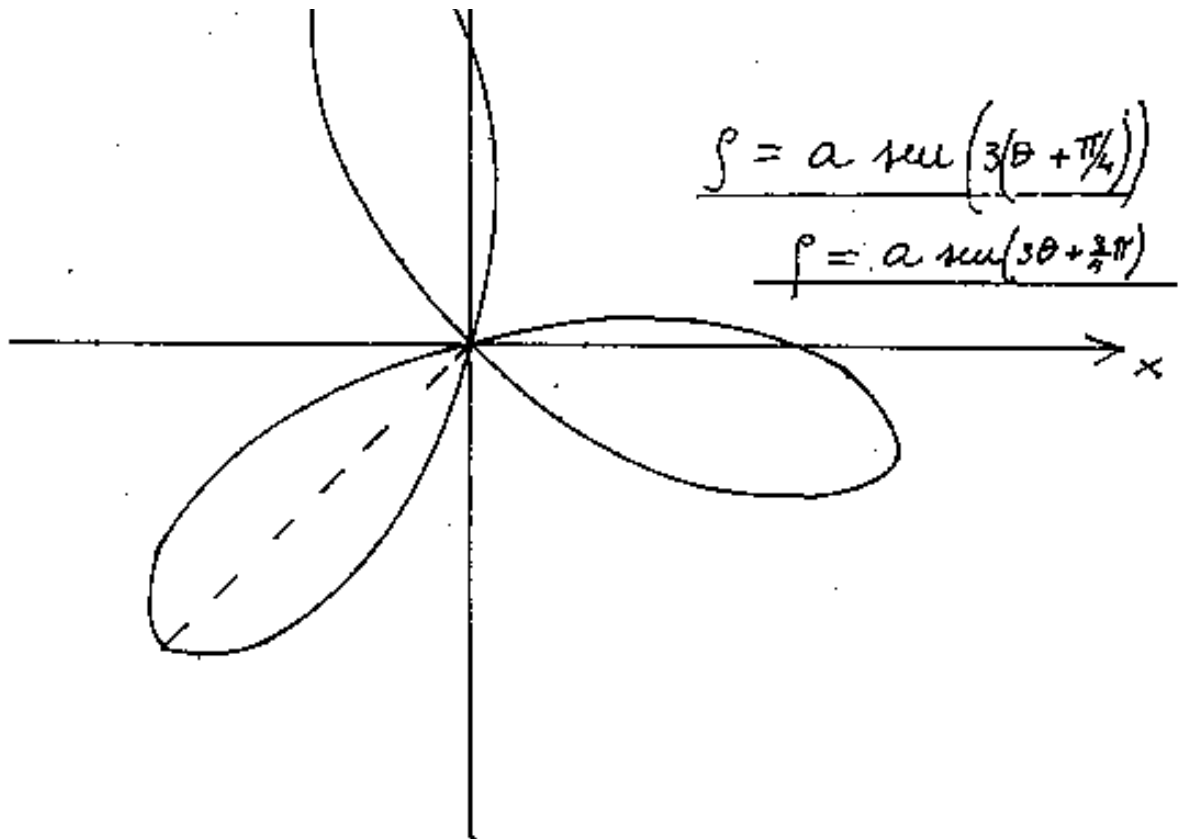
$\rho = a\cos\theta$

La formula si può generalizzare:

$$\rho = a\,\text{sen}(3(\theta) + \varphi)$$

ove: φ è una costante per far ruotare la rosa

$$\rho = a \operatorname{sen}\left(3\left(\theta + \pi/4\right)\right)$$

$$\rho = a \operatorname{sen}\left(3\theta + \tfrac{3}{4}\pi\right)$$

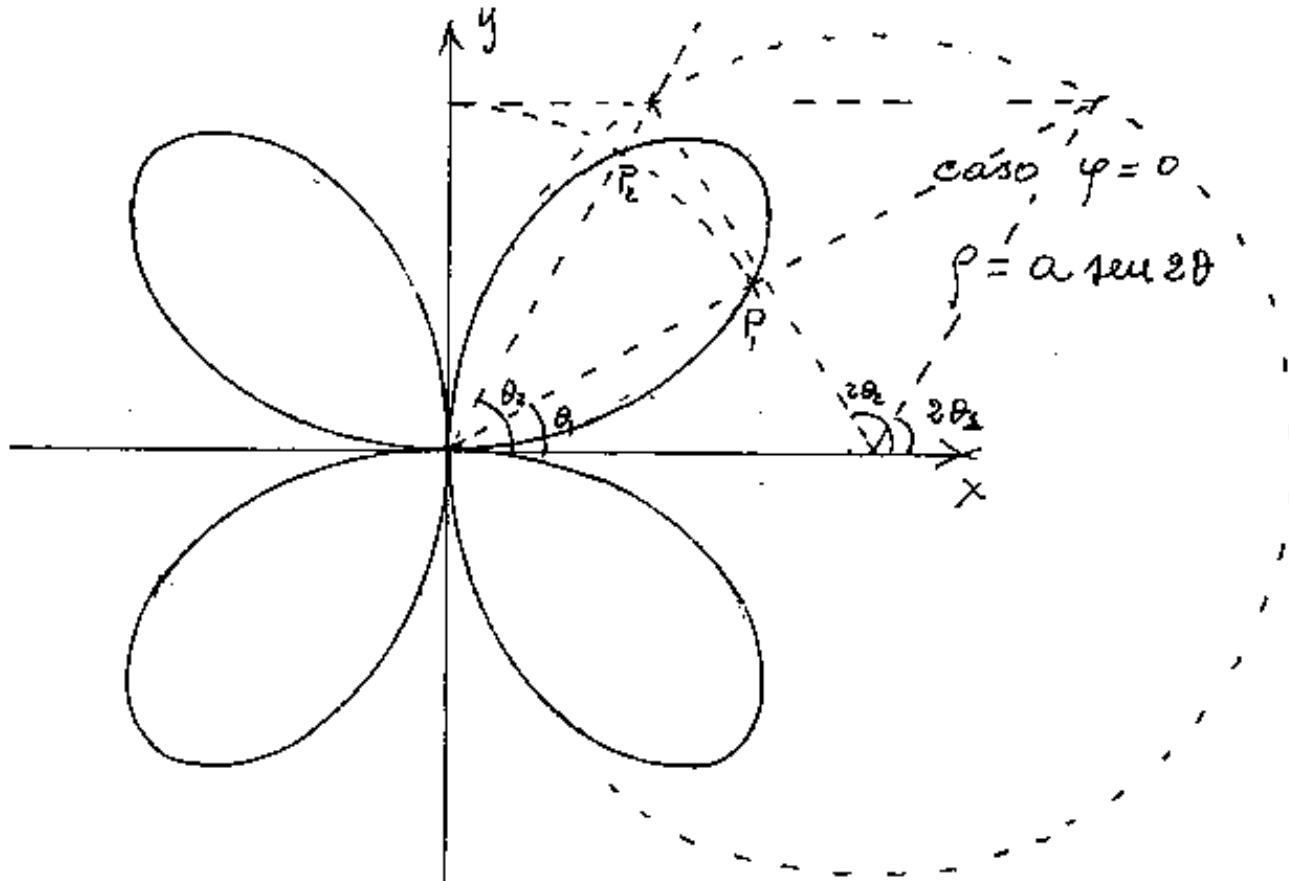
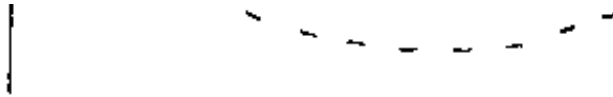
x

Rosa a quattro foglie

L'equazione può essere generalizzata

$$\rho = a \operatorname{sen}(2\theta + \varphi)$$

ove φ è una costante per far ruotare la rosa.

per: $\varphi = 0$ si hanno le foglie a 45° rispetto agli assi

per $\varphi = \pi/2$ la formula diventa $\rho = a \cos(2\theta)$ e le foglie sono sugli assi.

a tratteggio è indicata la costruzione grafica.

Vedremo che la rosa a quattro foglie è un caso particolare delle podarie dell'asteroide nell'insieme di curve chiamate scarabeo.

La rosa ad n foglie

Che chiameremo margherita; avrà per equazione in coordinate polari:

$$\rho = a \operatorname{sen}(n\theta)$$

per $\theta = 0$; $\rho = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2n}$; $\rho = a$

$\theta = \frac{\pi}{n}$; $\rho = 0$

$\theta = \frac{3}{2}\frac{\pi}{n}$; $\rho = -a$

$\theta = \frac{\pi}{n}$; $\rho = 0$

si noti dalla tabella a fianco che i valori negativi di ρ debbono essere presi diametralmente opposti cioè sulla retta: $(\theta + \pi)$; e che per ottenere l'intera margherita basta $0 \leq \theta \leq \pi$

y

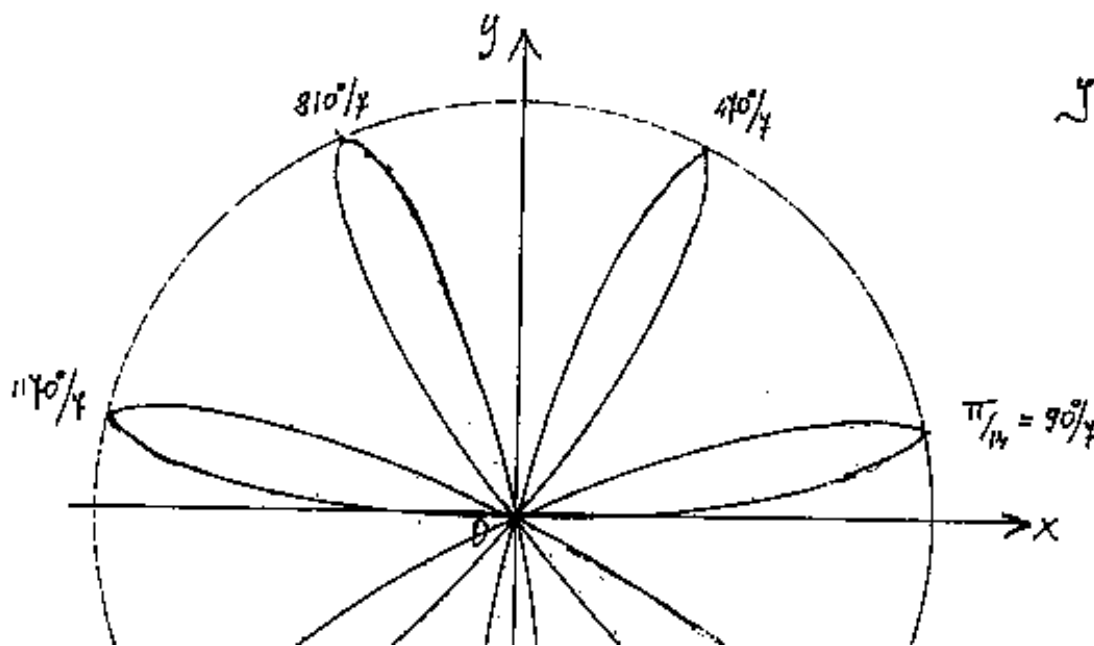
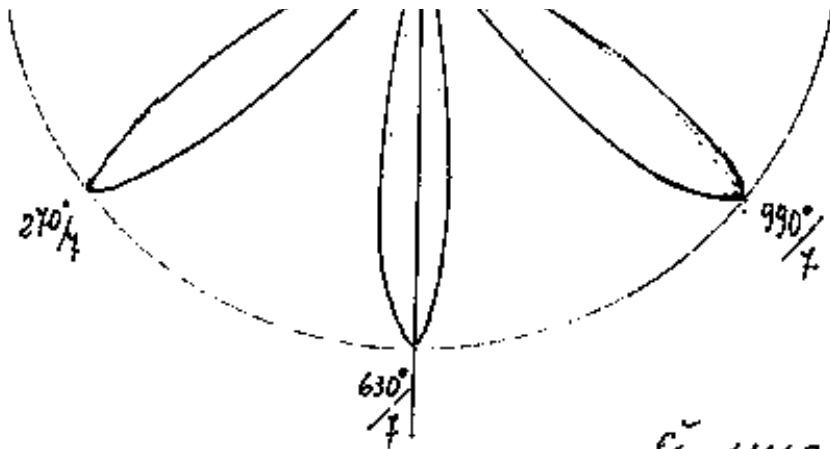
810°/7 450°/7

1170°/7 $\pi/_{14}$ = 90°/7

O x

In figura:

$$\rho = a \operatorname{sen}(7\theta)$$

$270°/7$ $990°/7$ $630°/7$

è una linea continua da "0" a $90°/7$ da $90°/7$ a $270°/7$ a $450°/7$ ....

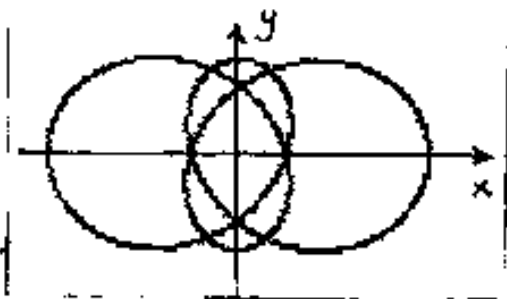
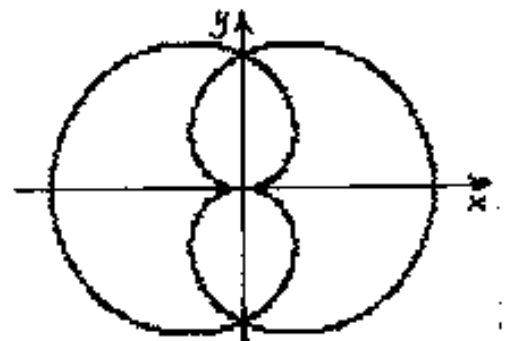
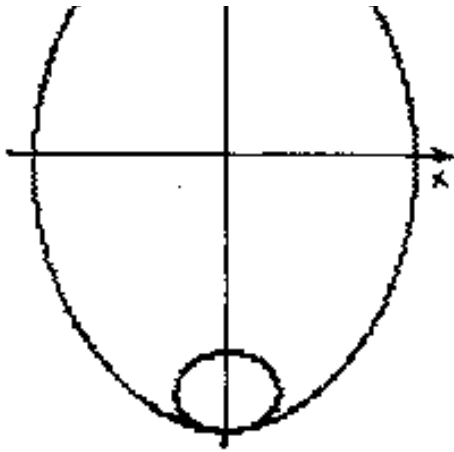
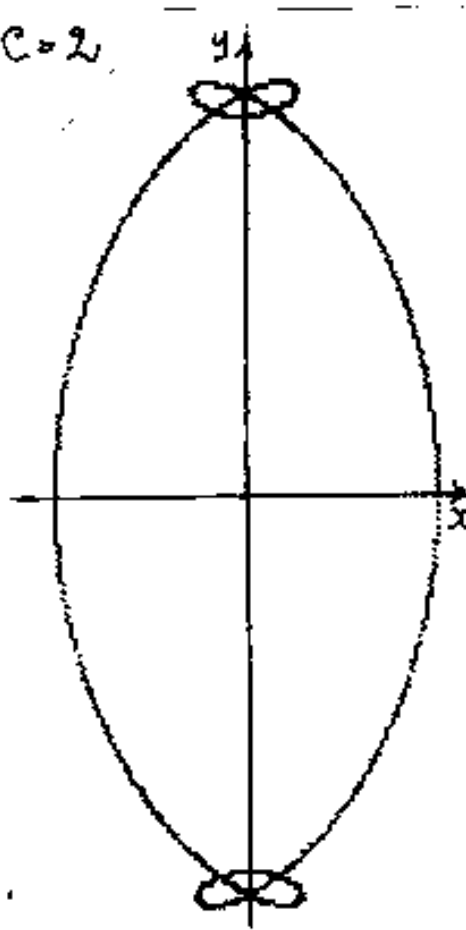
Se prendessimo: $\rho = \pm|a \operatorname{sen}(n\theta)|$ avremmo una margherita a: $2n$ petali.

La Coccinella

Diamo ora una curva, abbastanza divertente che chiameremo Coccinella; l'equazione parametrica è;

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\cos2\varphi \\ y = a\,\text{sen}\,\varphi(c + \cos2\varphi) \end{cases}$$

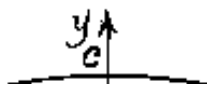
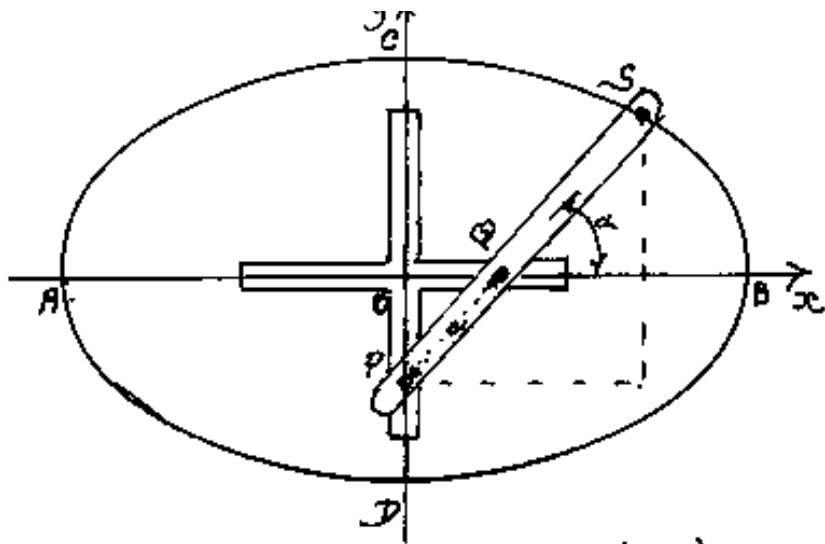
attenzione "a" è un modulo di scala lineare, "c" è un numero puro, (un rapporto). Il lettore può divertirsi studiando questa curva.

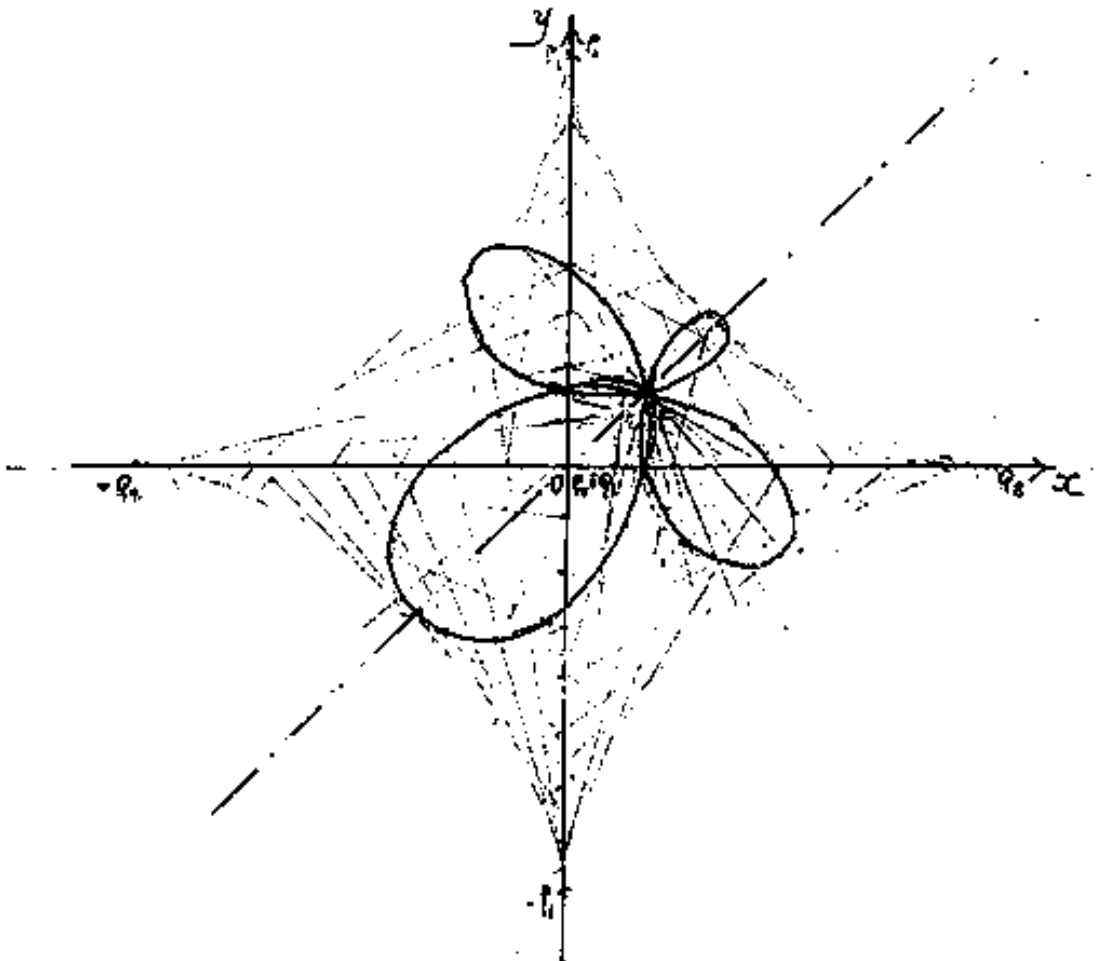
$a = 5$; $c = 0{,}5$ scala 1:150

$a = 5$; $c = 1$

$a = 5$; $c = 2$

$a = 5$; $c = 3$

Lo Scarabeo

La curva scarabeo fu pubblicata nel 1858 dal matematico belga Eugène-Charles Catalan.
La parola scarabeo in italiano deriva dal latino scarabeus -i ; e dal greco: κάρᾰβος ; si riferisce ad una particolare classe di coleotteri la cui forma tozza può, in qualche caso, ricordare la curva.
La <u>curva scarabeo è una particolare curva pedale (o podaria) dell'asteroide, costituita "dai piedi" delle normali alle tangenti l'asteroide provenienti da un punto "F" giacente sulla bisettrice degli assi.</u>

Sappiamo: (v. asteroide) che gli assi ortogonali intercettano, sulle tangenti l'asteroide, <u>segmenti costanti</u> (abbiamo indicato con "a" la lungezza di tali segmenti: $a = \overline{PQ}$ con P e Q mobili sugli assi).

y
c

Un segmento di lunghezza "a"

Un segmento di lunghezza "a" = $\overline{PQ}$ = costante, che si muove mantenendo i suoi estremi: P, e Q sugli assi, ci ricorda l'ellissografo, (che abbiamo già trattato.) ove, nel moto, la punta scrivente "S" traccia un ellisse.

Dati quindi due assi ortogonali x ed y, ed un segmento $\overline{PQ}$ di lunghezza costante, mobile con P e Q scorrevoli sugli assi. Su una bisettrice dell'angolo retto (per esempio la retta y=x) si scelga un punto F da cui tracciare le normali al segmento mobile $\overline{PQ}$; i piedi su $\overline{PQ}$ di tali normali è l'insieme dei punti che costituisce la curva Scarabeo.

In figura si sono lasciate, sullo sfondo, le tangenti alla curva asteroide, necessarie per disegnare per punti la curva podaria dell'asteroide. (Lo scarabeo) che si ottiene proiettando sulle tangenti il punto F arbitrario sulla retta: $x=y$.

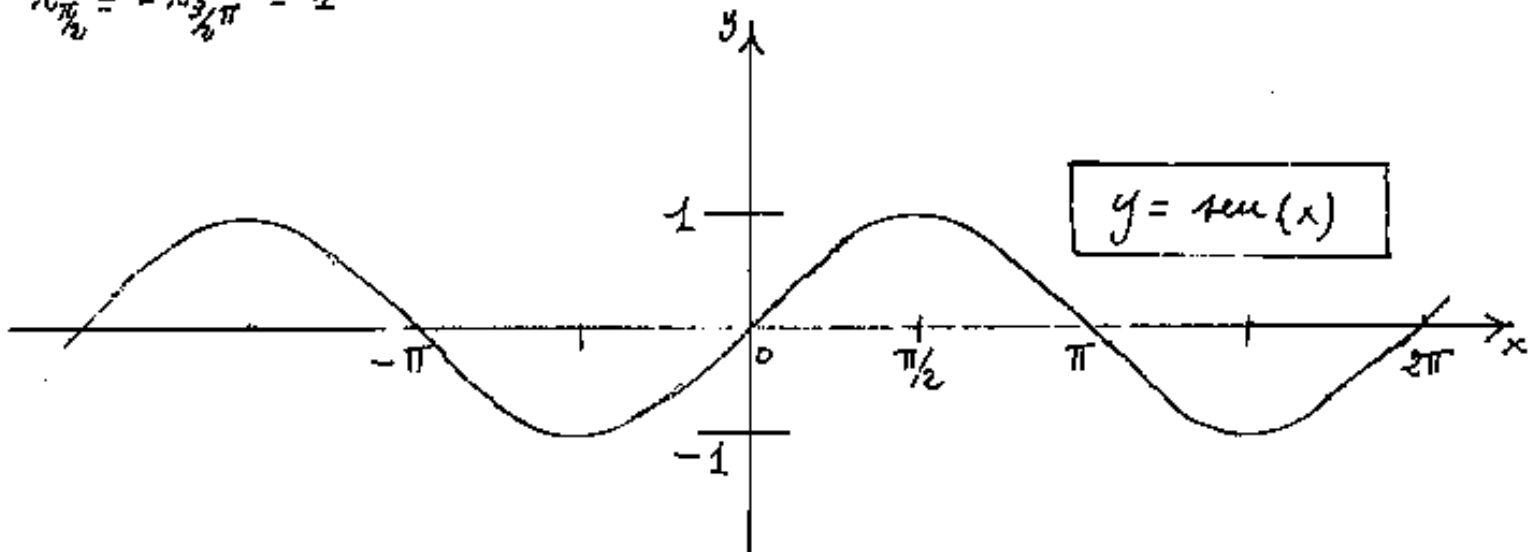
Grafici delle funzioni trigonometriche circolari

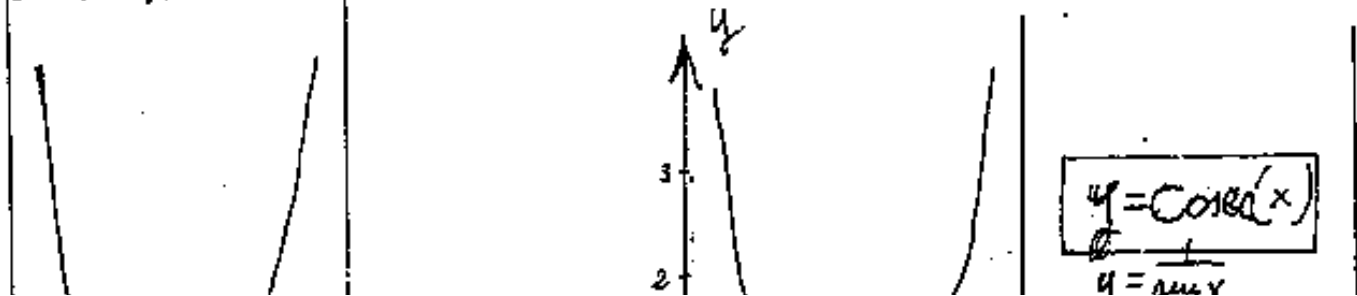
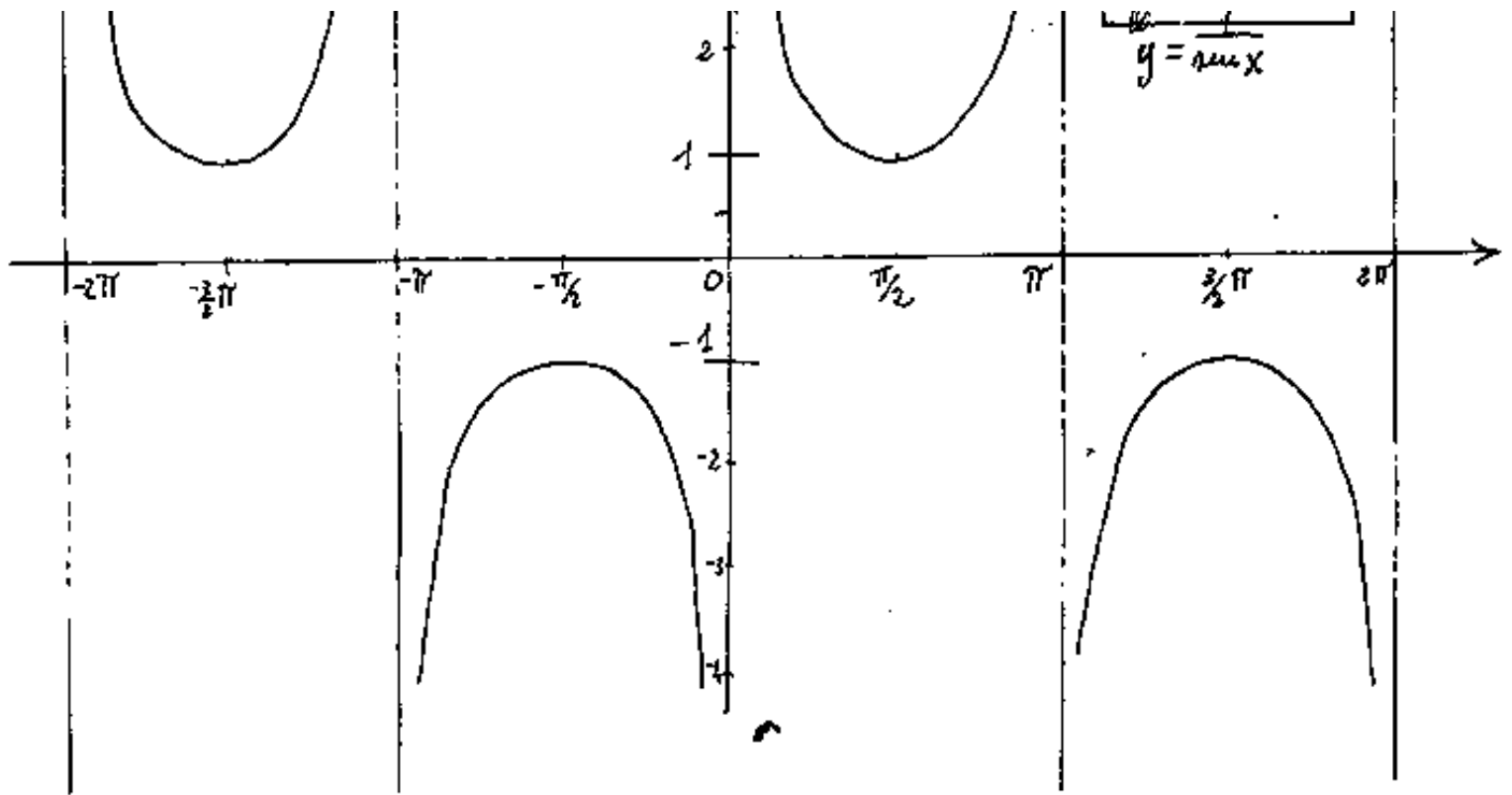
I grafici delle funzioni trigonometriche: sen(x); cos(x); tang(x); sono già stati esposti nel I° volume; tuttavia li ripetiamo per completezza.

$y = \operatorname{sen}(x)$; $y' = \cos(x)$; $y'' = -\operatorname{sen}(x)$; $y'_0 = -y'_\pi = y'_\pi = 1$;

$R_{\pi/2} = -R_{3/2\pi} = 1$

$y = \operatorname{sen}(x)$

$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec}(x)$; $y' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sec x}$; $y'' = \frac{-2 \pm \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

$y = \operatorname{cosec}(x)$

$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

La formula dello scarabeo, viene riportata nell'enciclopedia delle Matematiche Elementari (ediz Hoepli); e nel Dizionario dei Termini Matematici del Piccato (ed Bur Rizzoli) nella forma:

$$\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+cx\right) = a^2\left(x^2-y^2\right)$$

ove c corrisponderebbe al nostro $C \cdot \sqrt{2}$ ed "a" una costante "particolare".

Però se nelle nostre formule poniamo a = 4,25 ed C = 1 otteniamo le figure riprodotte nelle due opere citate. Mentre se nella formula da loro riportata poniamo x = zero anziché trovare le quattro radici di cui due uguali all'ordinata di F. una maggiore positiva ed una negativa otteniamo:

$$y^2\left(y^2\right) = a^2\left(-y^2\right)$$

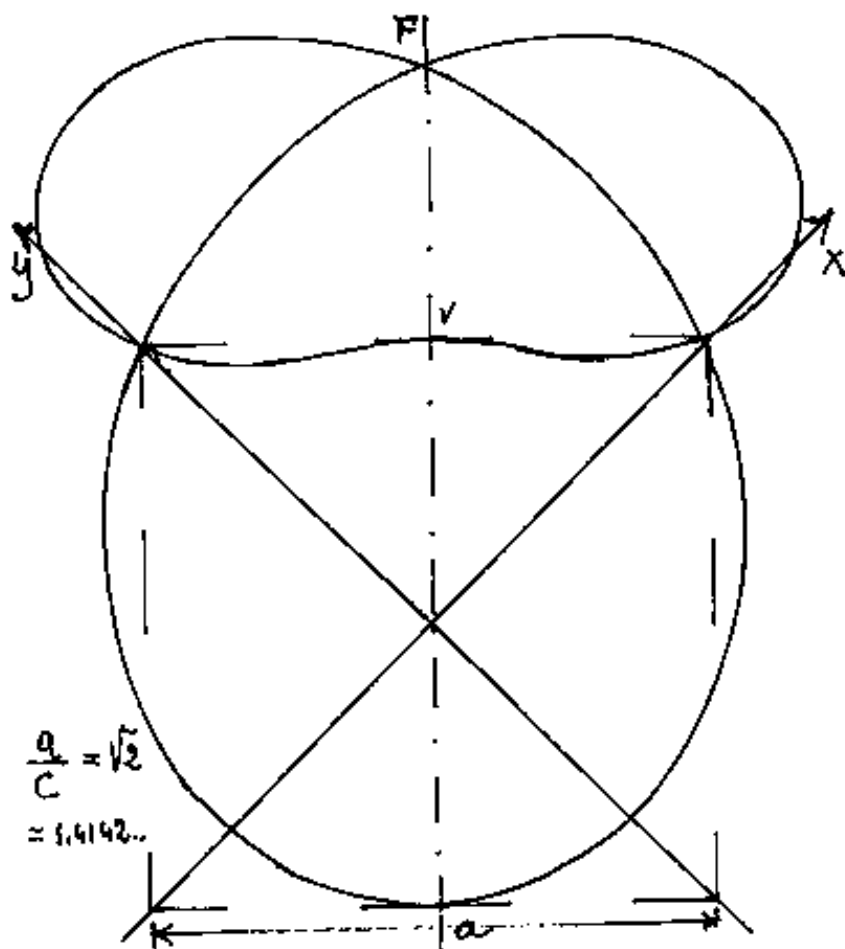
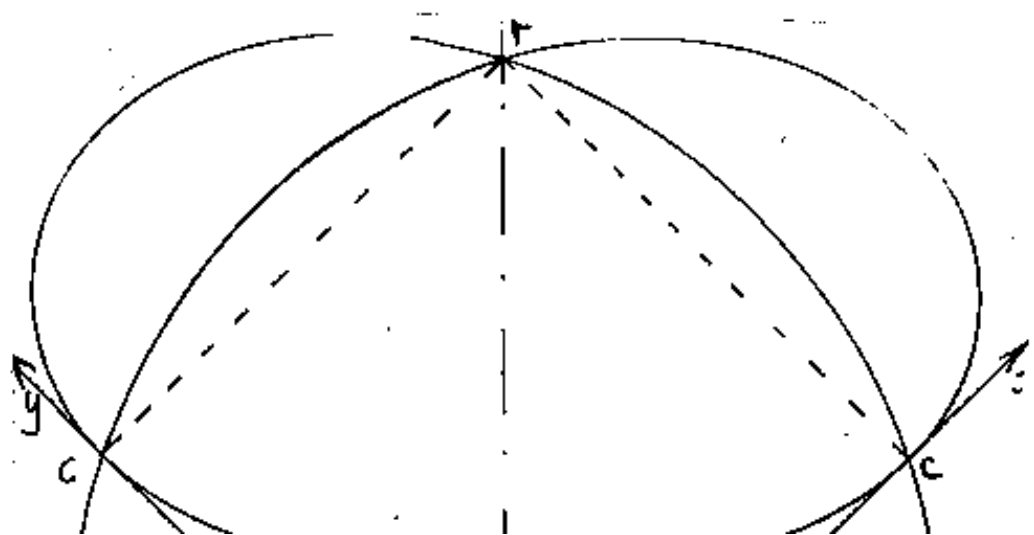
ove ordinariamente avremmo: $y^2 = \pm 0$

ed a^2 deve essere immaginario $y = \sqrt{-a^2}$

A noi interessa semplificare i problemi e

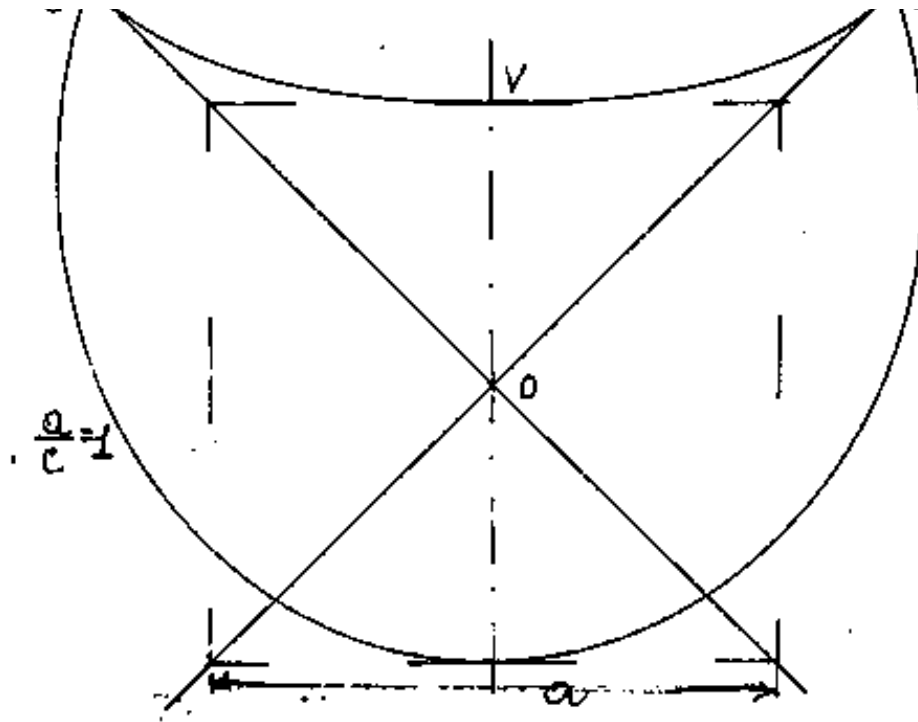
lasciamo ad altri complicarli ...

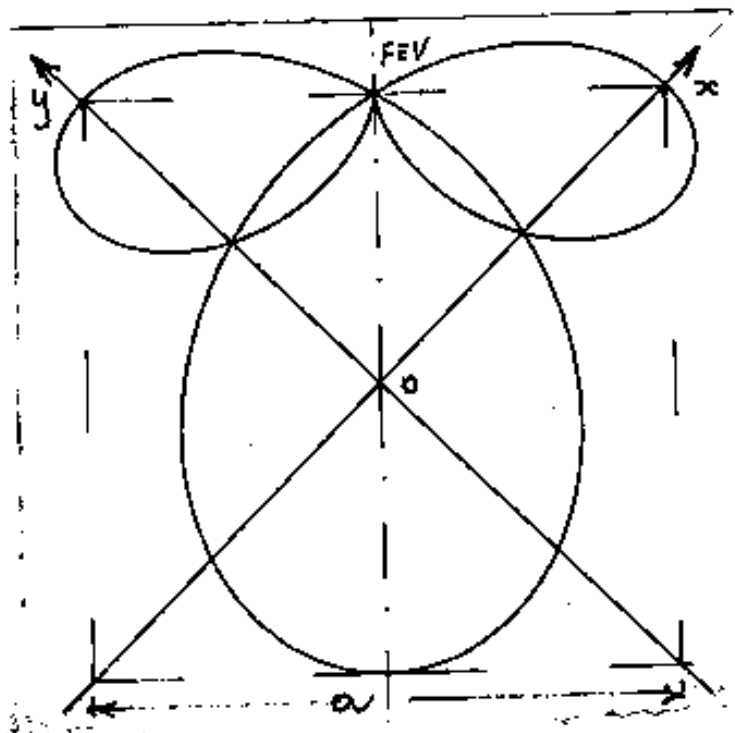
Comunque gli assi sarebbero traslati in F per avere $y = 0$ (ma in figura sono indicati altri assi)
Quindi v'è qualche errore ed abbiamo sprecato troppo tempo per cercarlo

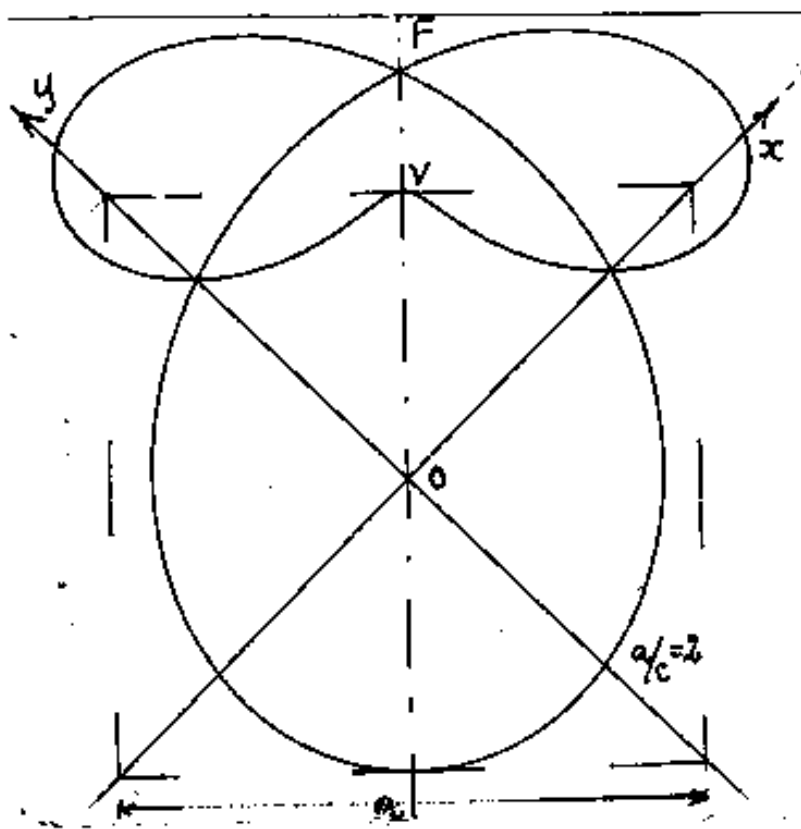
ottenute allontanando ulteriormente F da O e dove si può notare il cambio di curvatura in "V" da verso il basso a verso l'alto, da tangente interno a tangente esterno all'asteroide.

Si noti come "a" sia la stessa per le due curve. Cioè il quadrato di lato "a" che delimita l'asteroide rimane lo stesso anche se le figure si ampliano notevolmente con l'allontanamento di F esternamente all'asteroide.

F V y x a

$\frac{a}{c} = \sqrt{2}$

$\simeq 1,4142..$

F y c c

Con F in campo finito la configurazione è circa la stessa; con $F \to \infty$ si hanno due rette in campo reale.

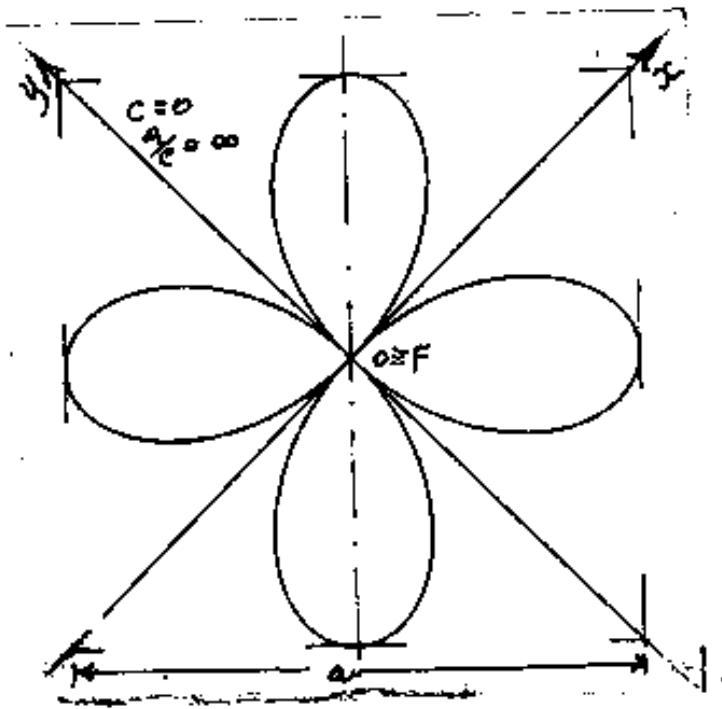
Fin qui F è stato interno alla curva Asteroide; consideriamo F sulla tangente l'Asteroide: $\frac{a}{2} = c\sqrt{2}$; $\left(\frac{a}{c} = 2\sqrt{2}\right)$.

Si noti che il cappio superiore è sparito, è ridotto ad un punto coincidente con F.

$$\left(\overline{OF} = a/2\right)$$

Se iniziamo a porre F esterno alla curva asteroide, il punto F, già quadruplo, si riduce ad un punto doppio, ed il vertice V resta tangente l'asteroide, però dalla parte interna.

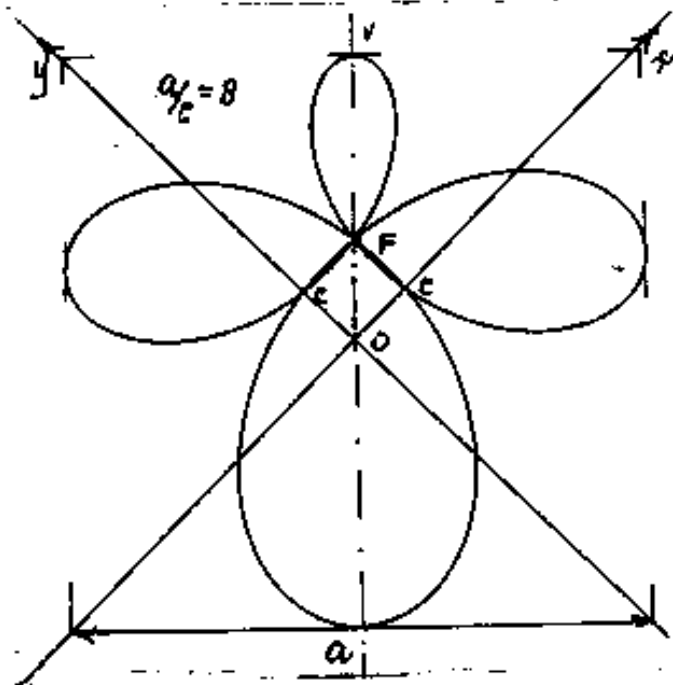
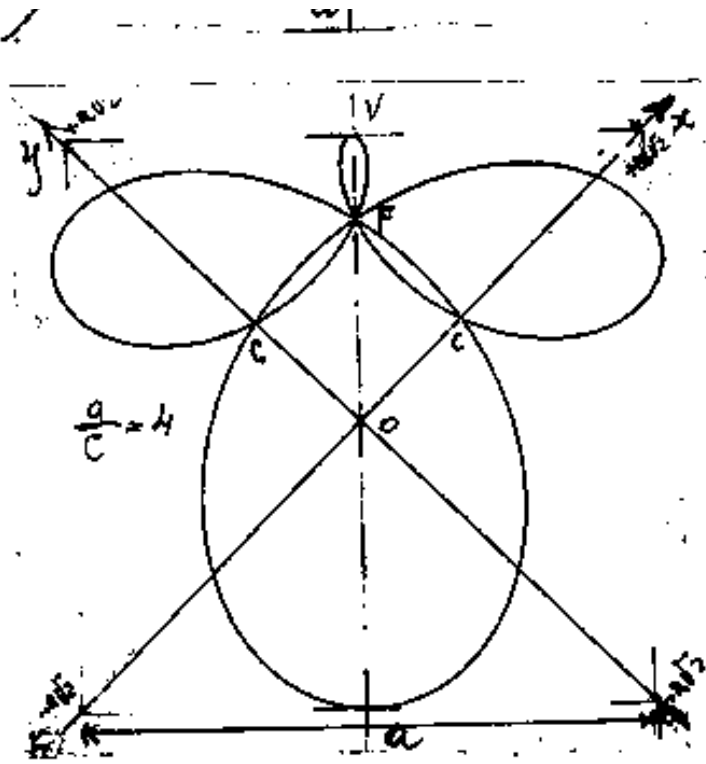
Il cappio non si riforma sull'asse $\overline{FV}$.

Continuando ad allontanare F dal centro o, ma rispettando l'appartenenza alla retta bisettrice: $y = x$, abbiamo ancora un limite in cui la tangenza in "V" all'asteroide passa da interna ad esterna, cioè nel punto "V" vi sarà una inversione di curvatura. Presentiamo ancora due figure

Nei disegni si è mantenuto costante il modulo "a", si è variata solo la posizione di F. Cioè tutti i disegni sono podarie della stessa asteroide.

$c=0$
$a/c=\infty$
$O \equiv F$
a

Con F coincidente col centro assi ($c=0$), si entra nella famiglia delle rodonee e precisamente si ha la rosa a quattro foglie. (vedi rodonee).

$$\begin{cases} x = a\cos(\alpha)\cdot sen^2(\alpha) \\ y = a\,sen(\alpha)\cdot\cos^2(\alpha) \end{cases}$$

$a/c=8$
F
c
c
O
a

Con $a/c=8$ la curva ha già l'aspetto della curva detta scarabeo di cui abbiamo data la formula generale come podaria (o pedale) della curva asteroide.

Con $a/c = 4$ il cappio superiore è abbastanza impiccolito, mentre è cresciuto il cappio inferiore. (E' in questo campo che i testi presentano la configurazione dello scarabeo).

$$\left(\frac{\sqrt{a^2 - a^2\cos^2\alpha}}{a\cos\alpha} + \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{a^2 - a^2\cos^2\alpha}}\right)x = \frac{\sqrt{a^2 - a^2\cos^2\alpha}}{a\cos\alpha}\,c - c + a\cos\alpha$$

$$\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right)x = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\,c - c + a\cos\alpha$$

moltiplicando per $(\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha)$

$$x = (\text{sen}^2\alpha)\,c - (\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)\,c + a(\text{sen}\,\alpha\cos^2\alpha)$$

$$\boxed{x = \text{sen}\,\alpha\left[a\cos^2\alpha + c(\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha)\right]}$$

sostituendo nella:

$$y = \frac{-q}{p}x + q \quad ; \quad y = \frac{-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}x + a\cos\alpha$$

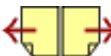
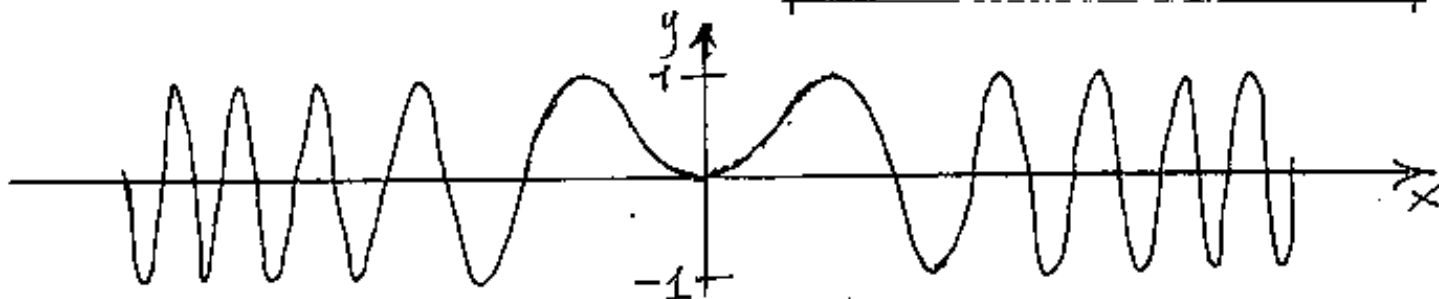
$$\boxed{y = \cos\alpha\left[a\,\text{sen}^2\alpha + c(\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)\right]}$$

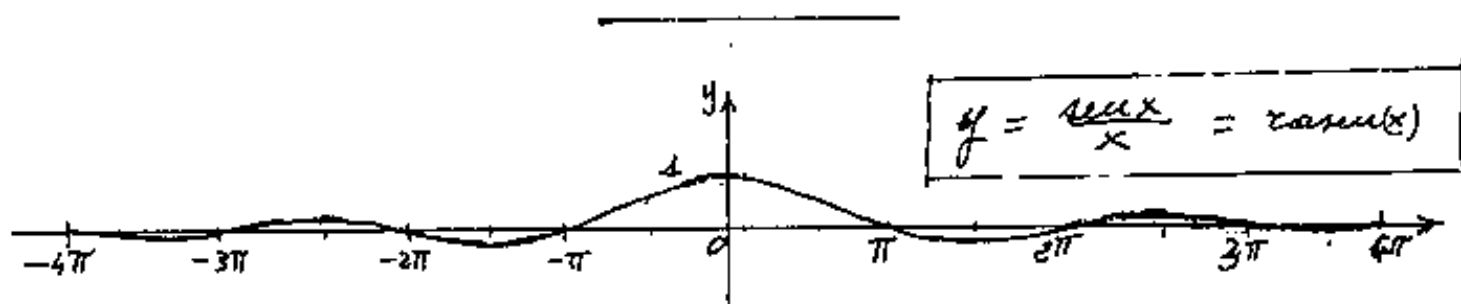
Sono queste le equazioni parametriche dello scarabeo. Se poniamo $\frac{c}{a} = K$

$$\boxed{x = a\,\text{sen}\,\alpha\left[\cos^2\alpha + K(\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha)\right]}$$

$$y = a\cos\alpha\left[\sin^2\alpha + K(\cos\alpha - \sin\alpha)\right]$$

La configurazione della curva scarabeo varia molto al variare di K.
In particolare se F è interno all'asteroide si ha: $c\sqrt{2} < a/2$

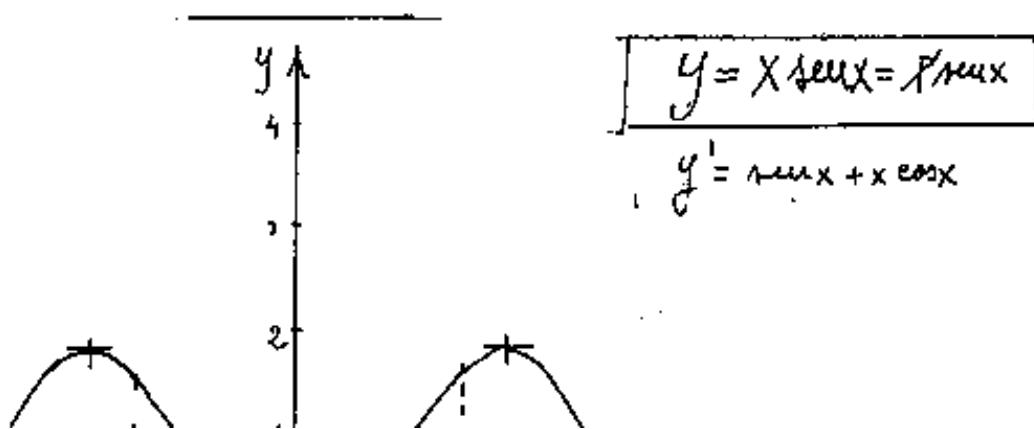
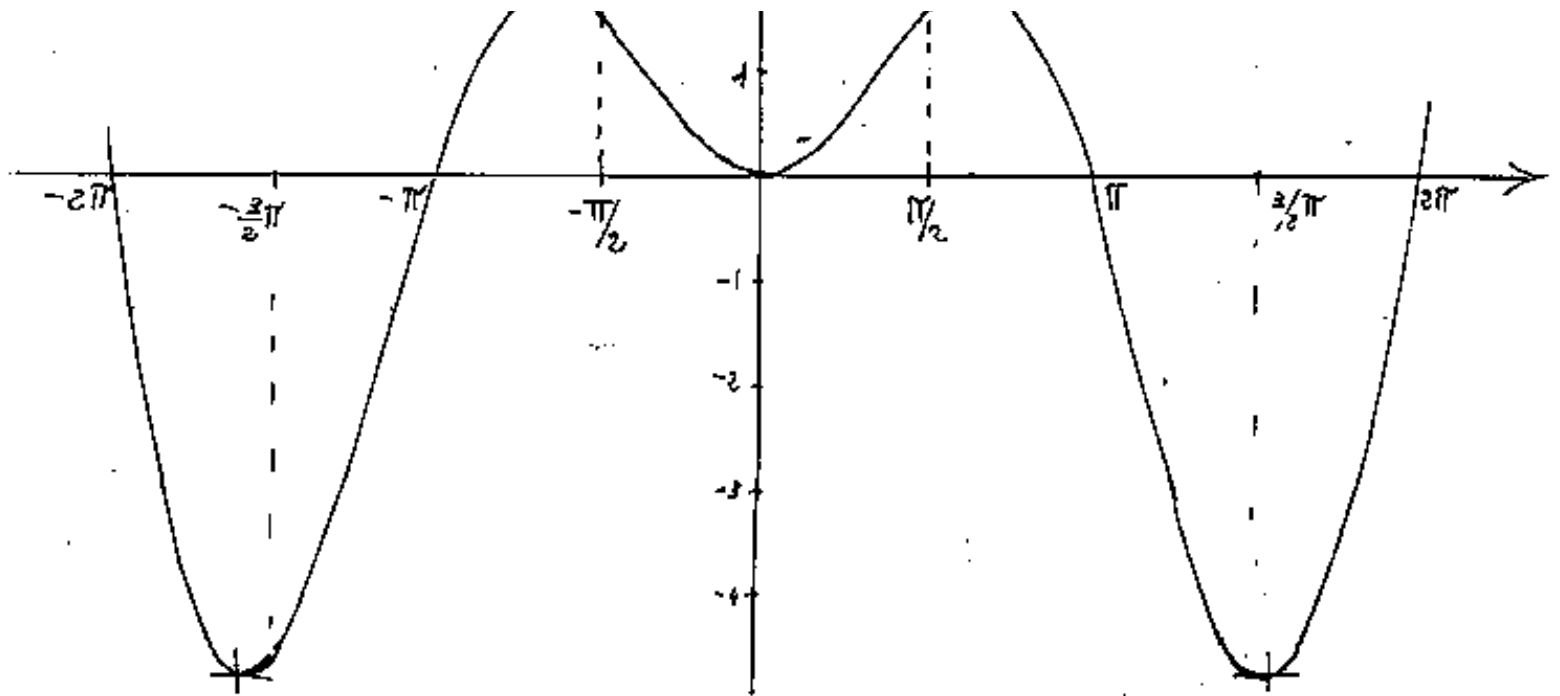
Presentiamo alcune curve al variare di: $\frac{1}{k} = a/c$.

$y = \operatorname{sen}(x^2)$ (integrale di Fresnel)

funzione che mantiene l'ampiezza, ma diminuisce la lunghezza d'onda (aumenta la frequenza

$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \operatorname{rasen}(x)$

funzione che va velocemente smorzandosi in ampiezza mantenendo costante la lunghezza d'onda

$y = x \operatorname{sen} x = x \operatorname{sen} x$

$y' = \operatorname{sen} x + x \cos x$

-2π $-\frac{3}{2}\pi$ $-\pi$ $-\pi/2$ $\pi/2$ π $3/2\pi$ 2π

1 -1 -2 -3 -4

si noti che i max e min sono spostati cioè si hanno per $2 \cdot tg(x) = \pm 1$ e che a frequenza costante aumenta l'ampiezza.

-2

-3

-4

$y = \cos(x)$

$y = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$

$y = \cos(x^2)$ (integrale di Fresnel)

-1
-2
-3
-4
min
min

$y = \cos(x) - x = \delta \cos x$

$y' = -\text{sen}\, x - 1$

$y = \cos(x) + x = \delta \cos(x)$

$y = \tan(x)$

$y = \cot(x) = \left(\frac{1}{\tan x}\right)$

-2π -3/2π -π -π/2 0 π/2 π 3/2π 2π x
1 -1 -2 -3 -4

$y = (\tan x - x) = \delta \tan(x)$

$y = (\tan(x) + x) = \sigma \tan(x)$

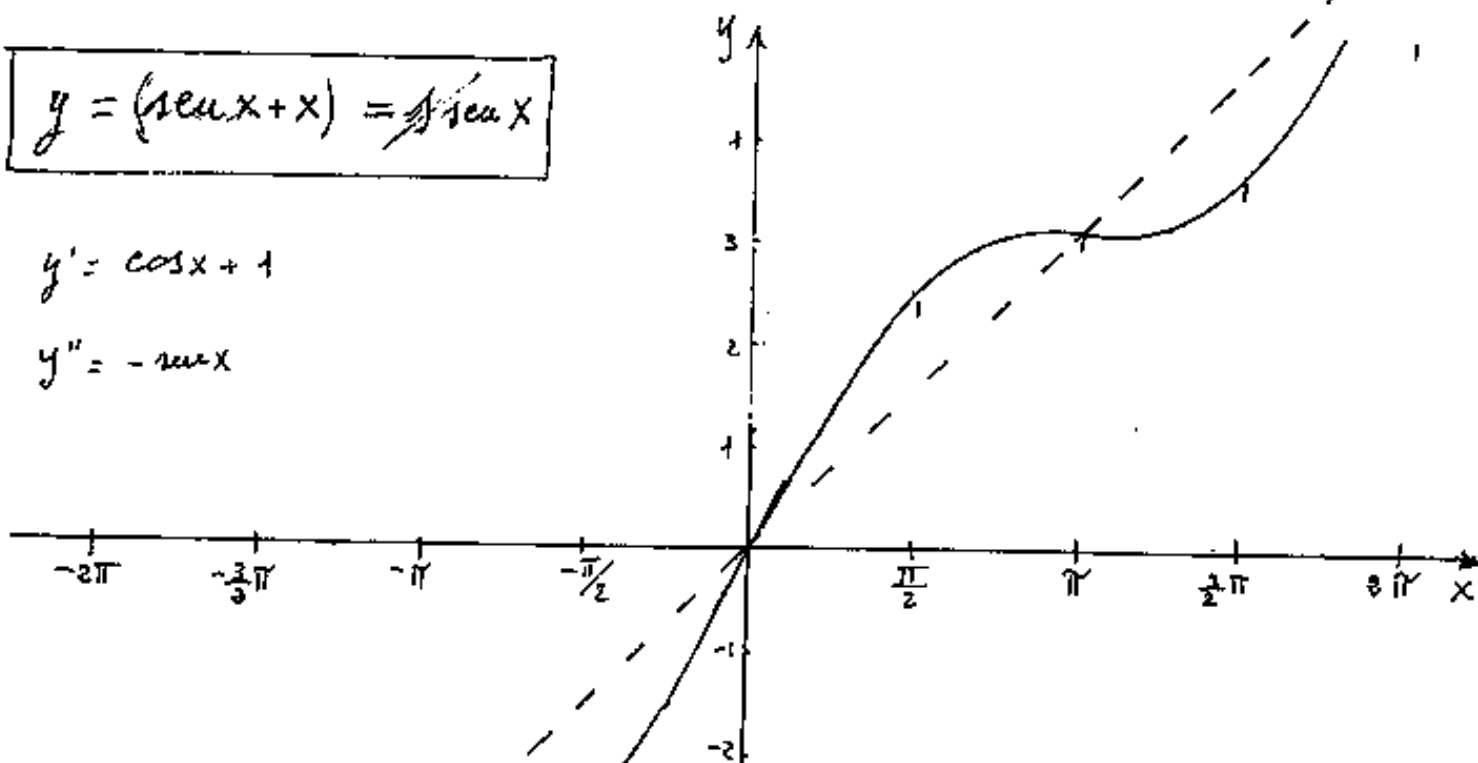
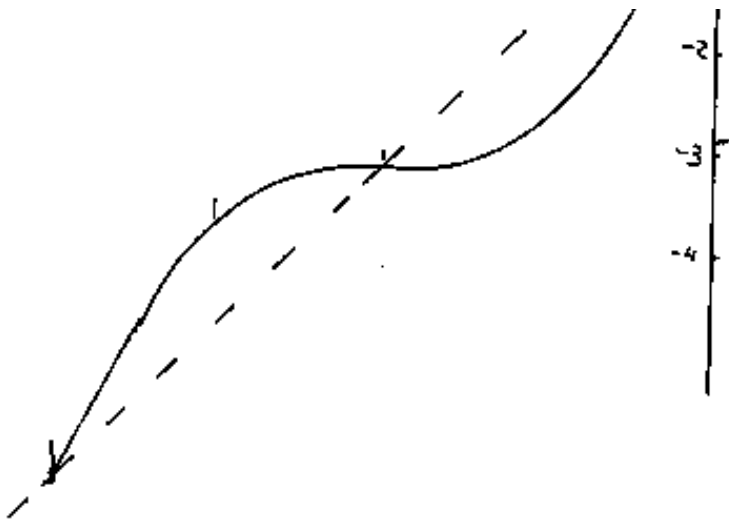
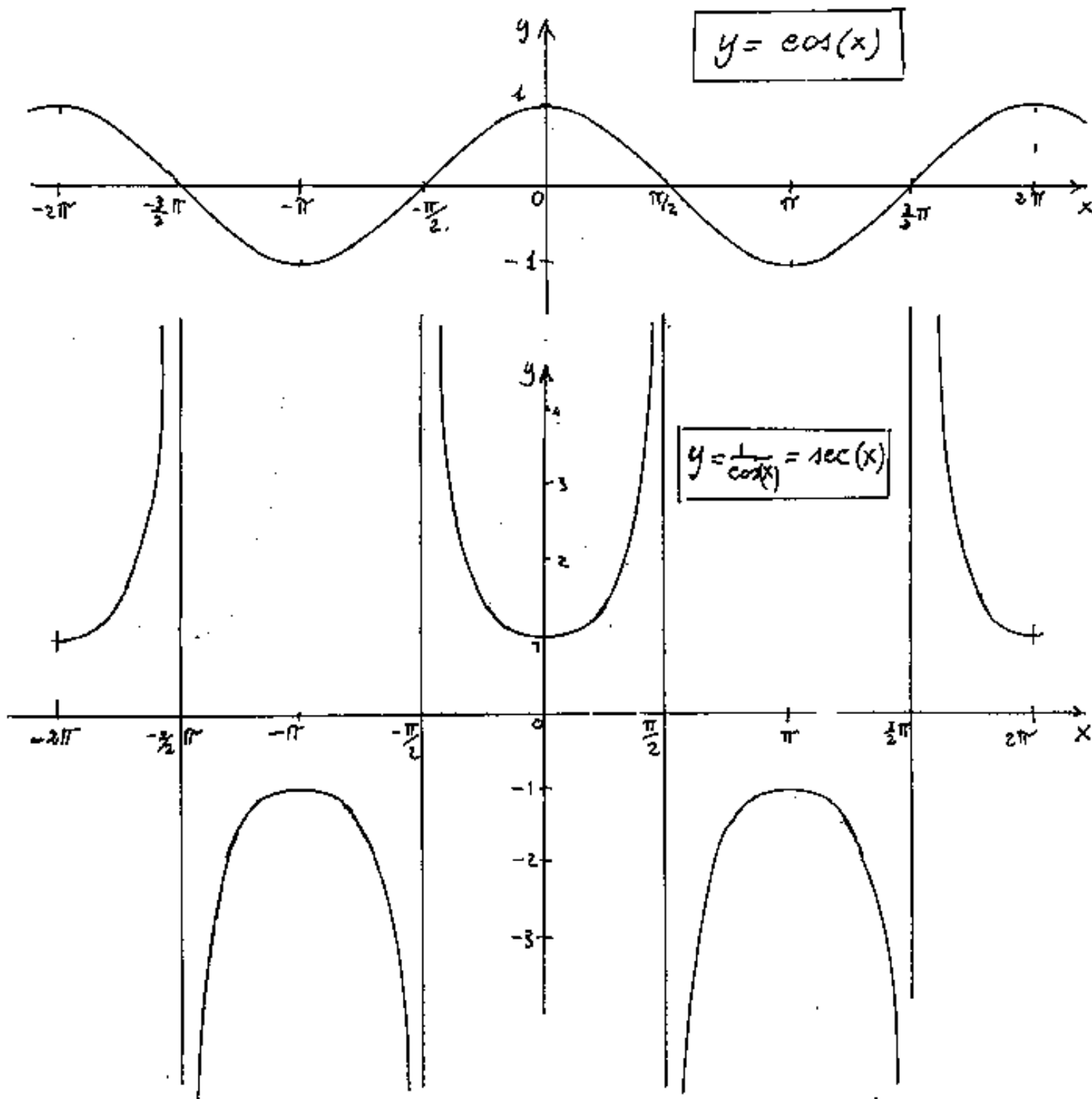
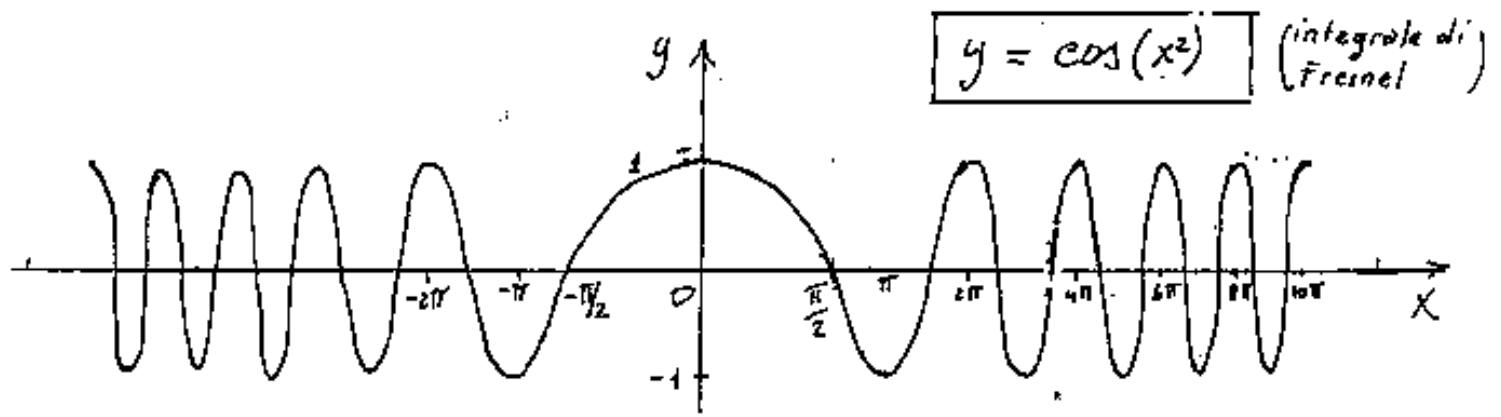
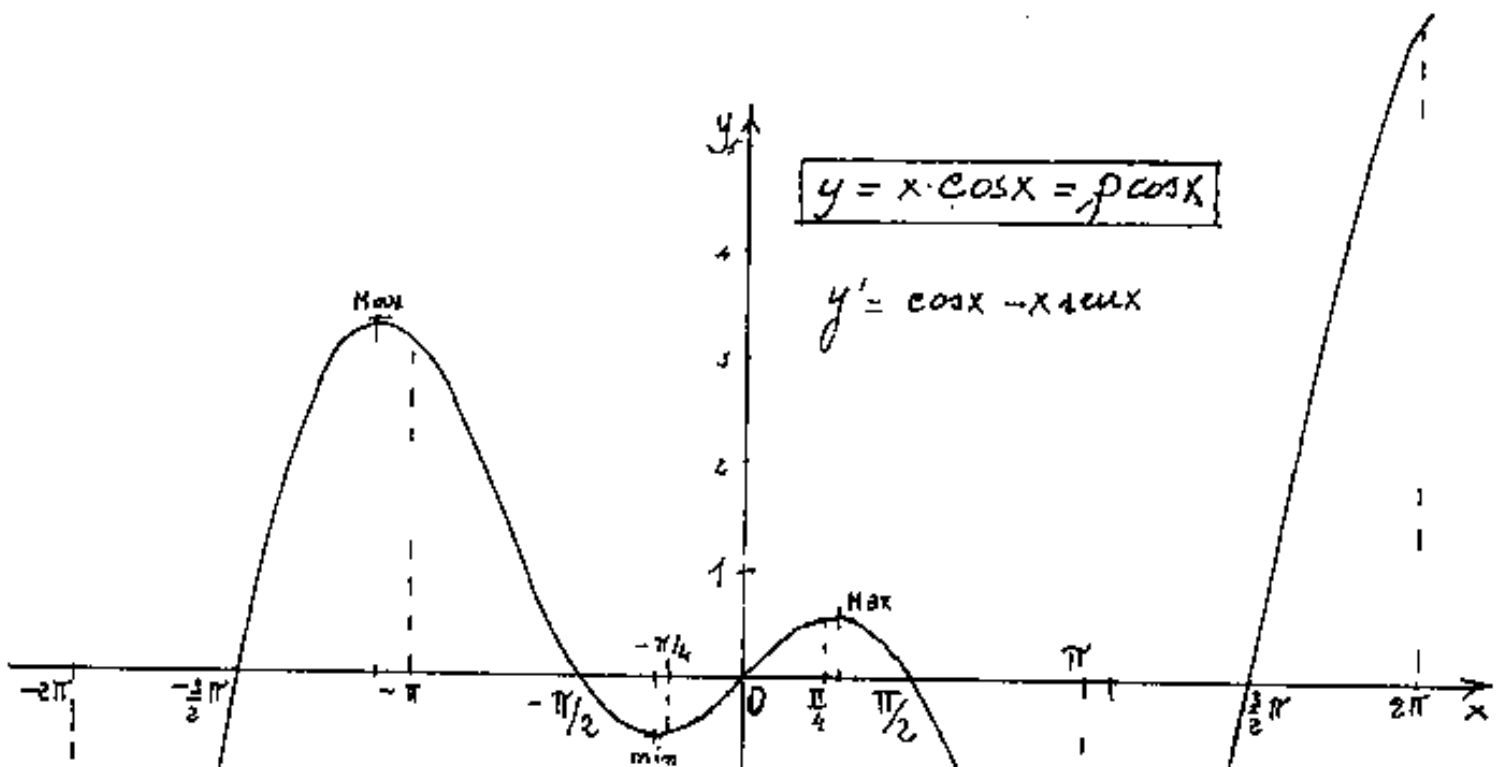
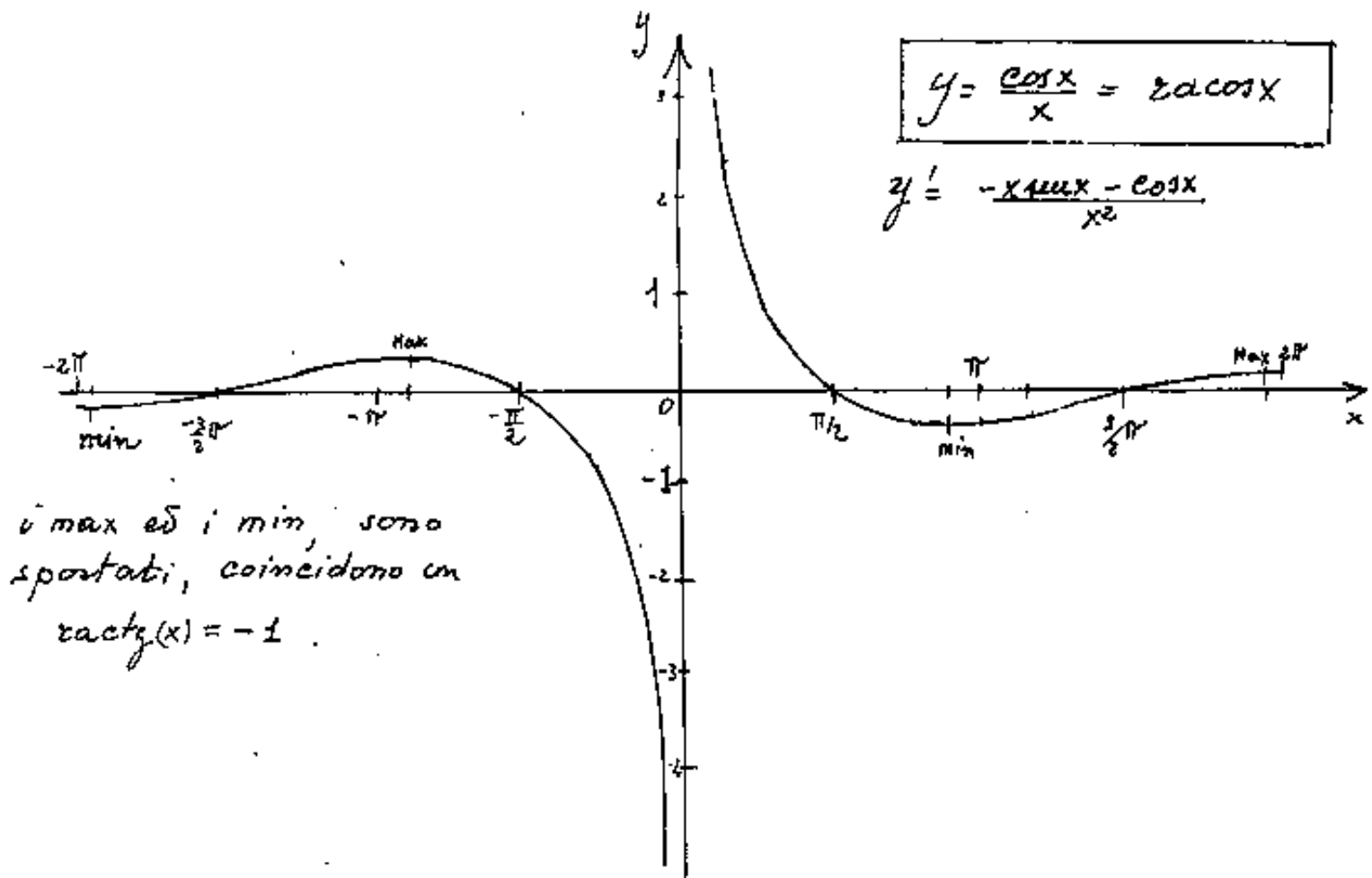
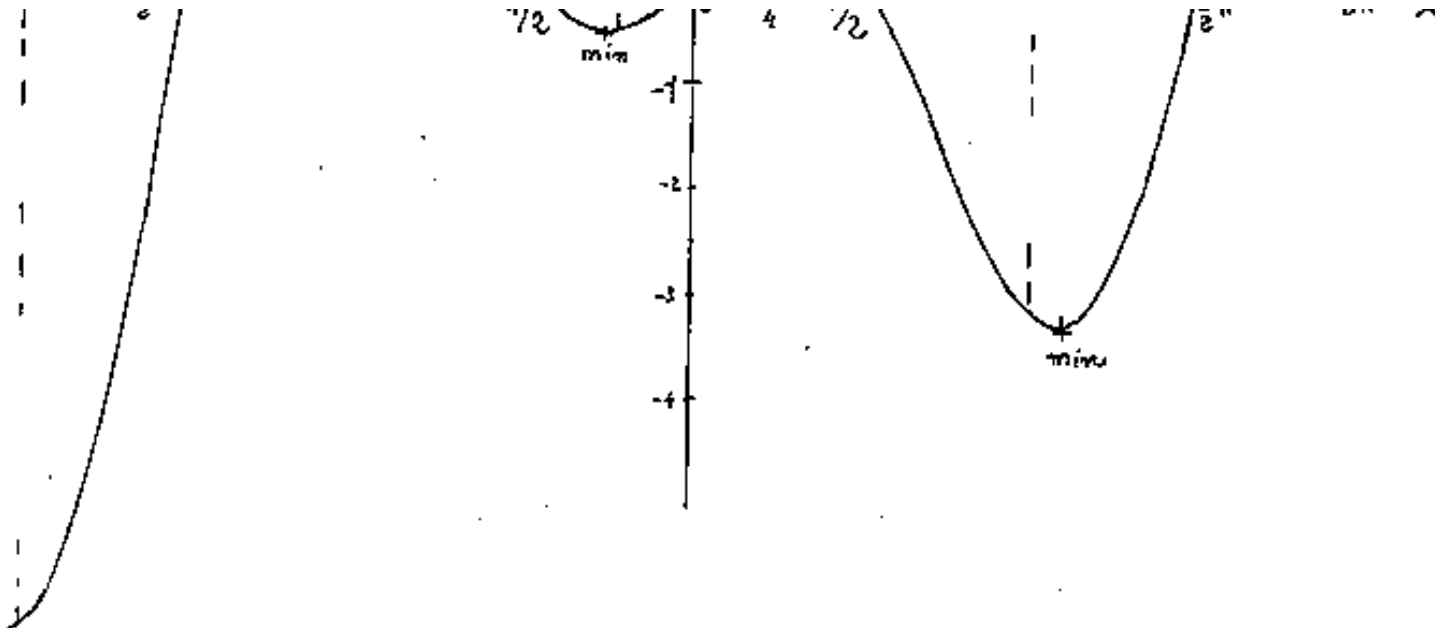
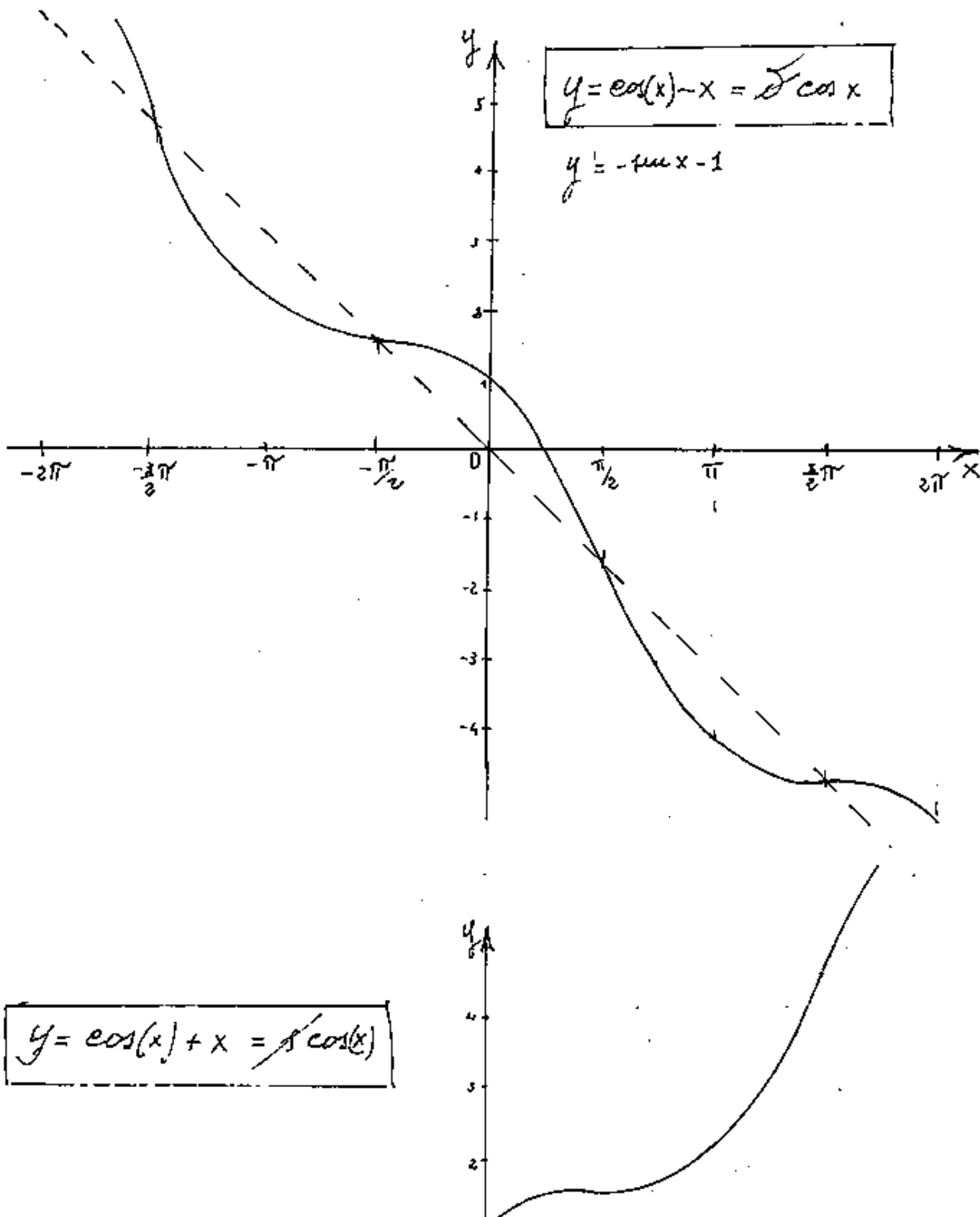
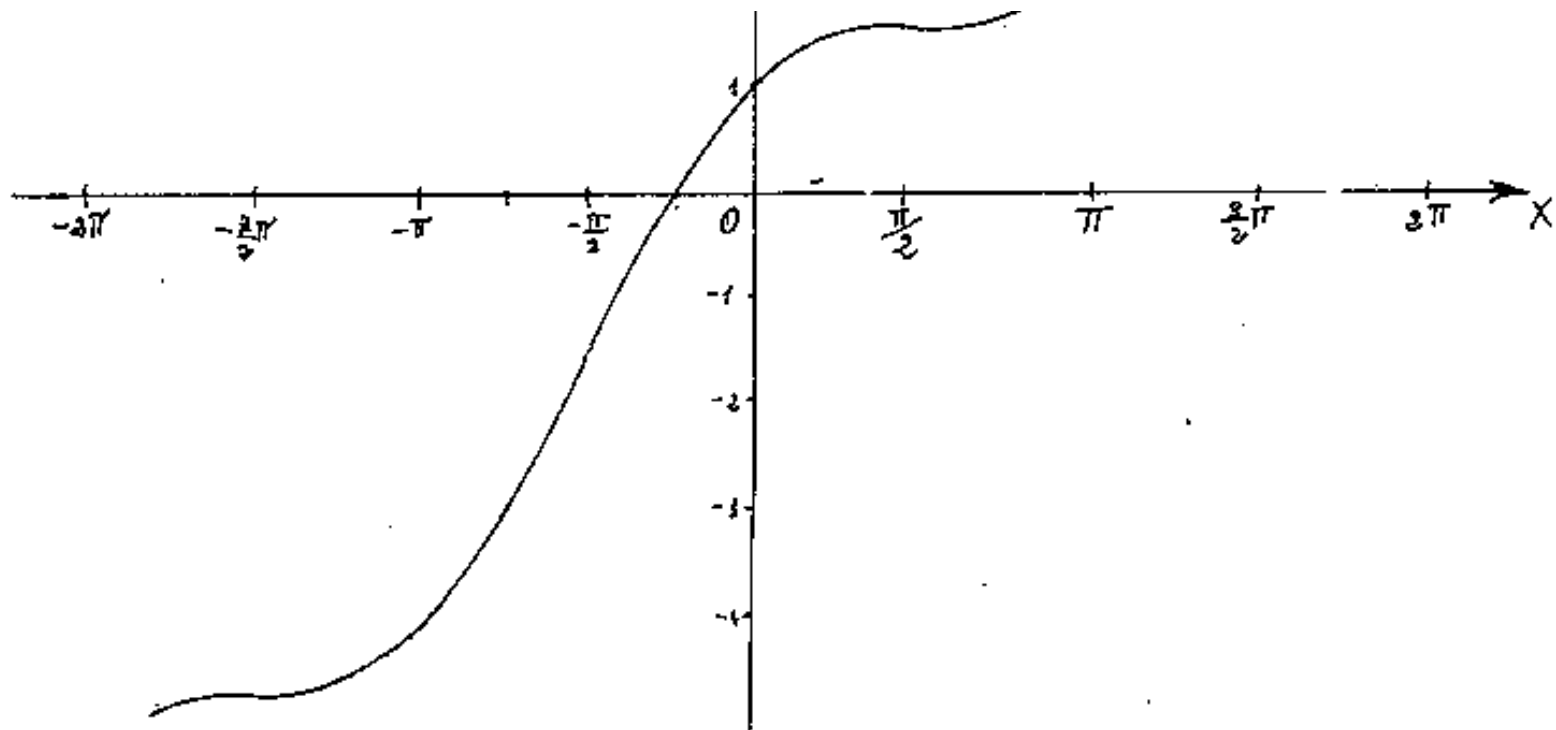
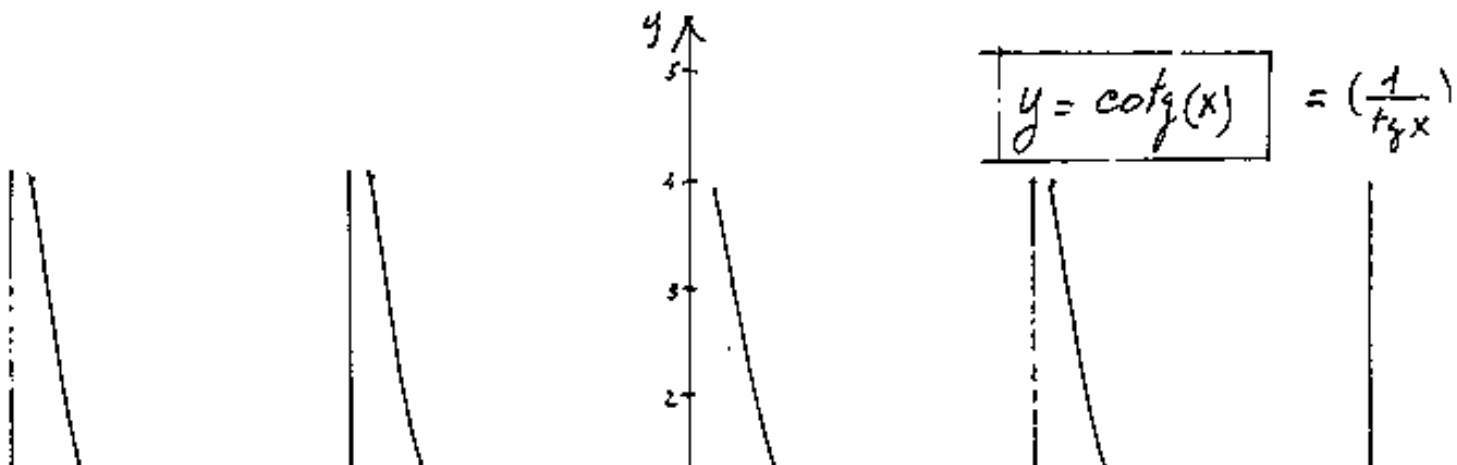
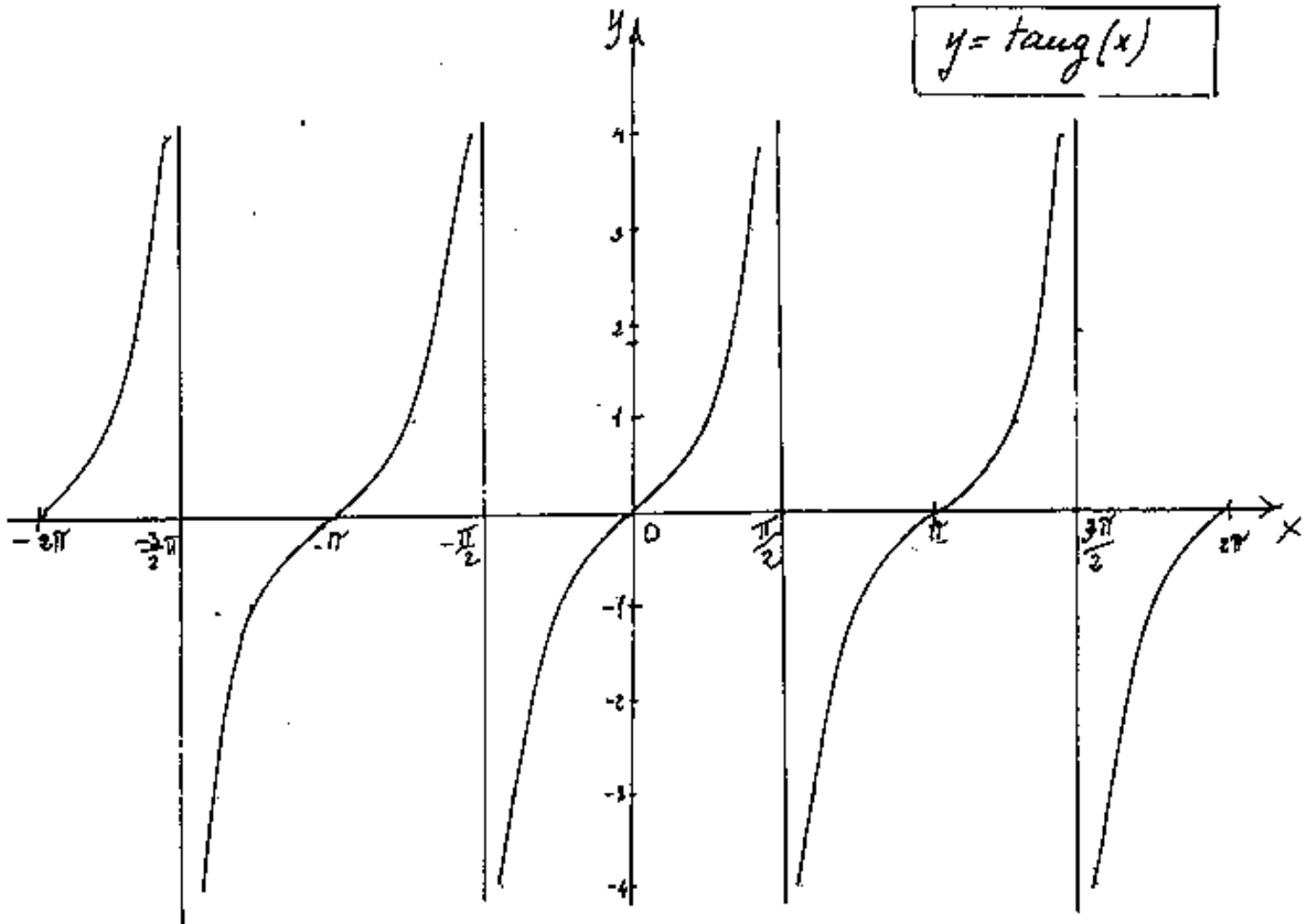
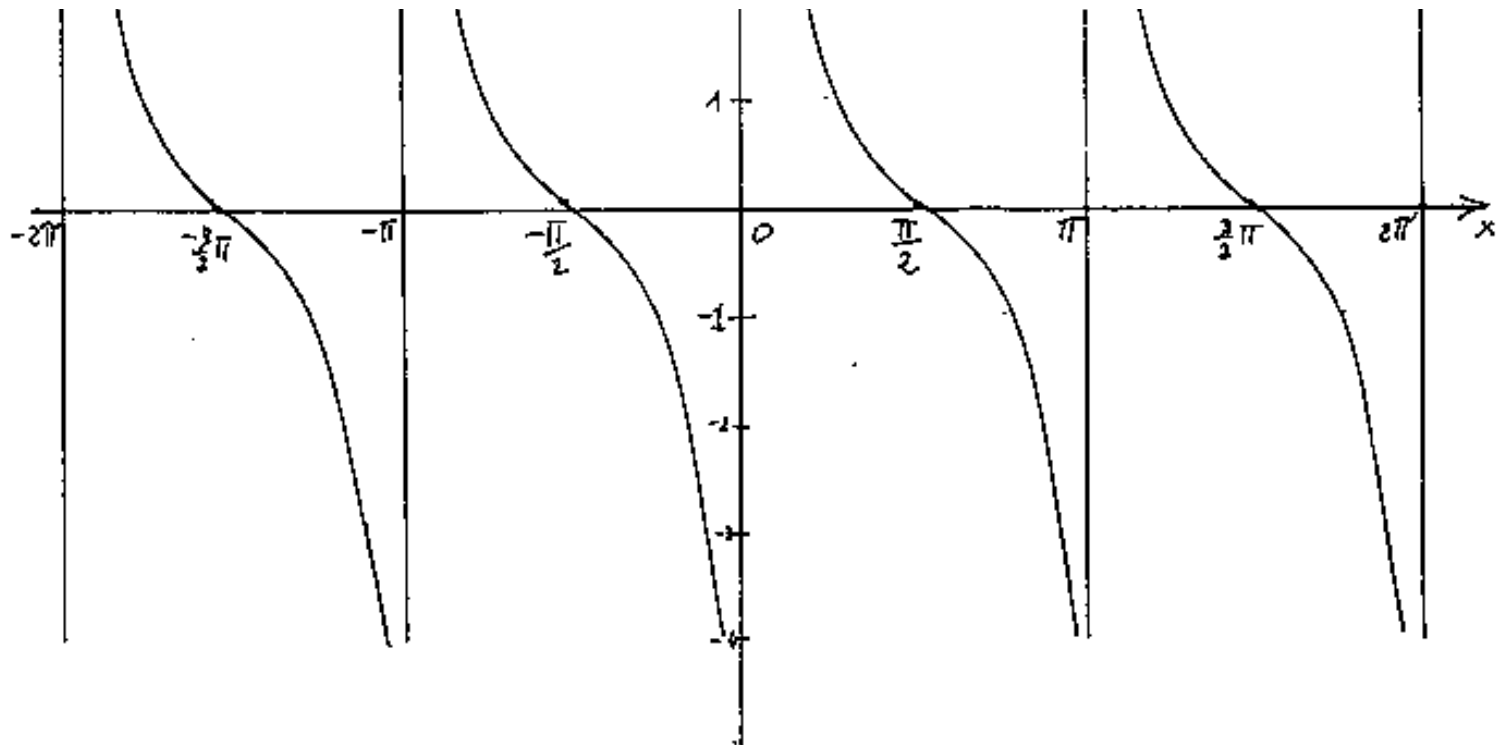
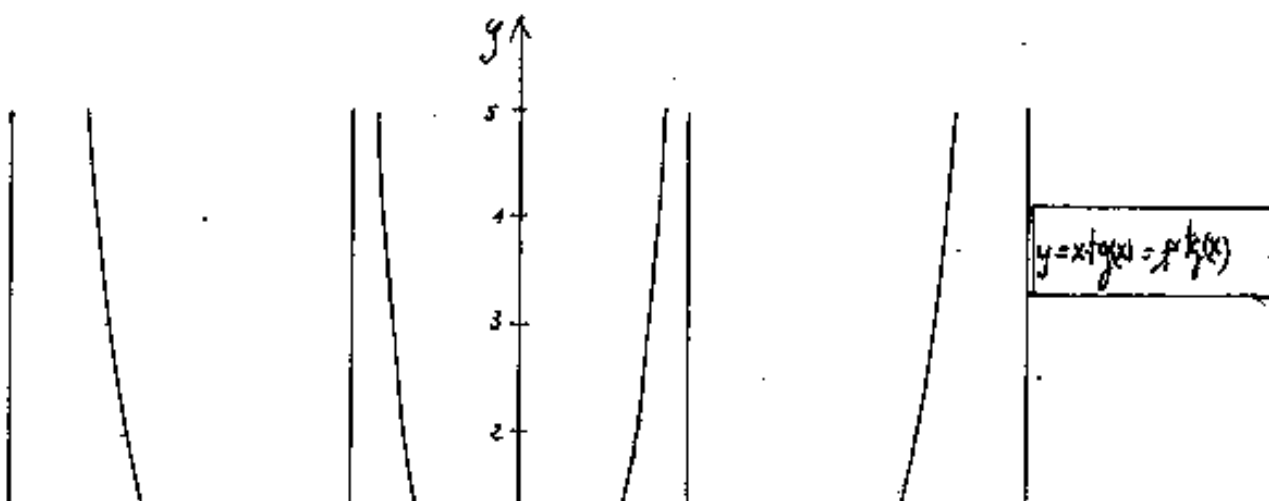
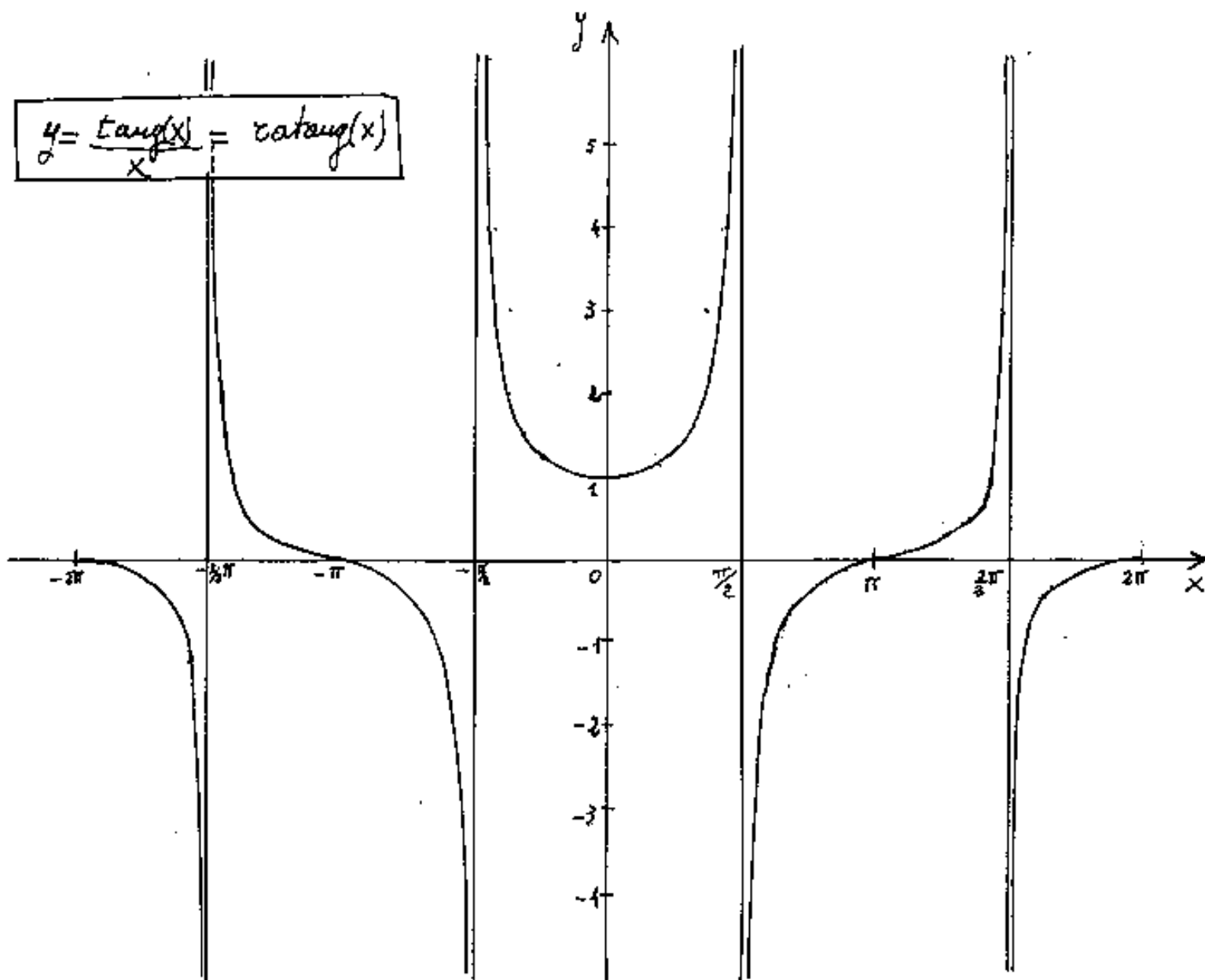
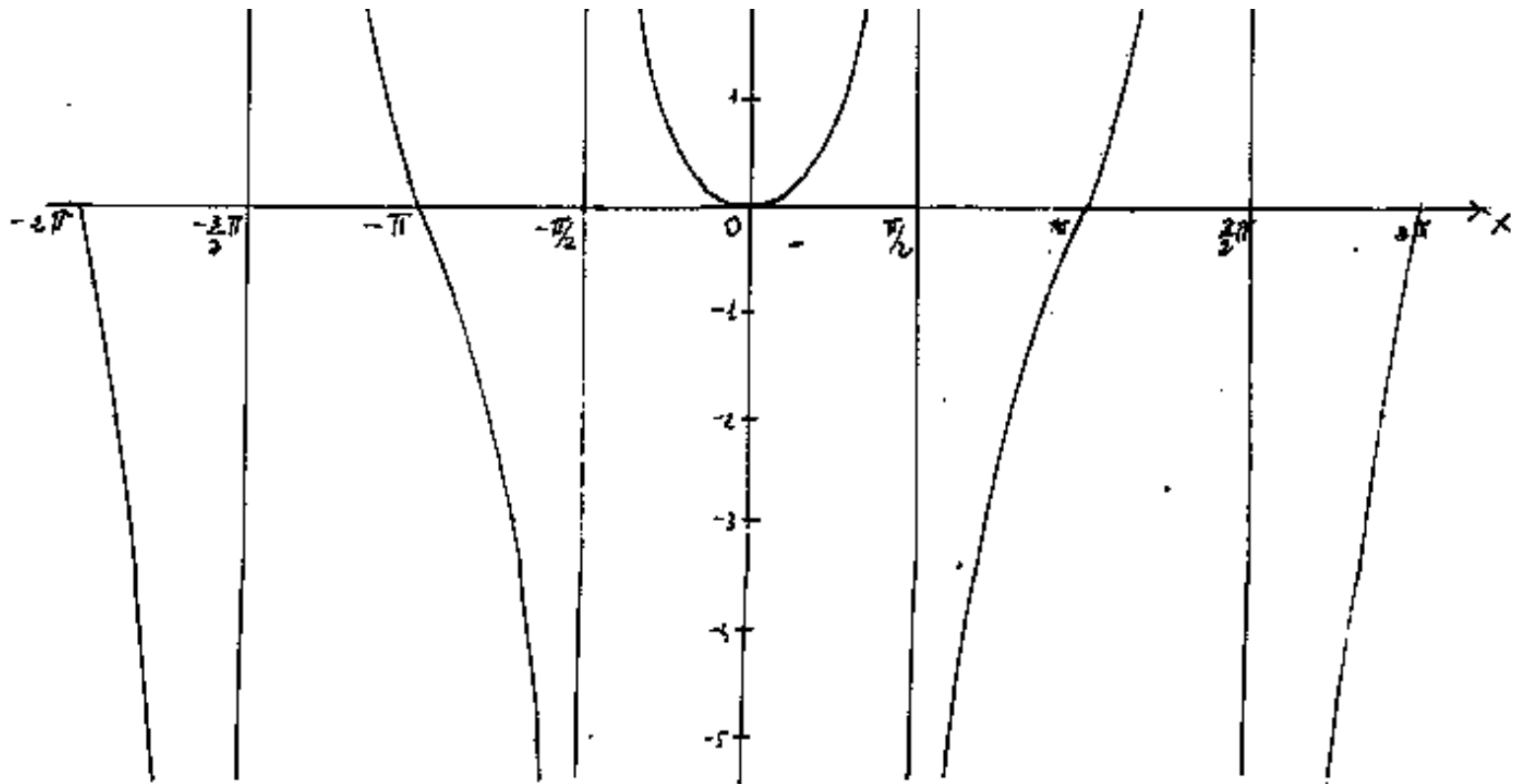
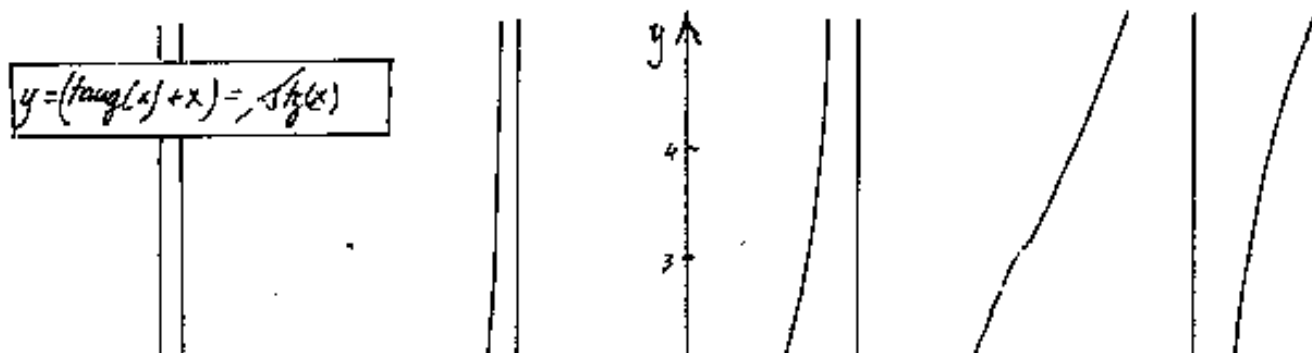
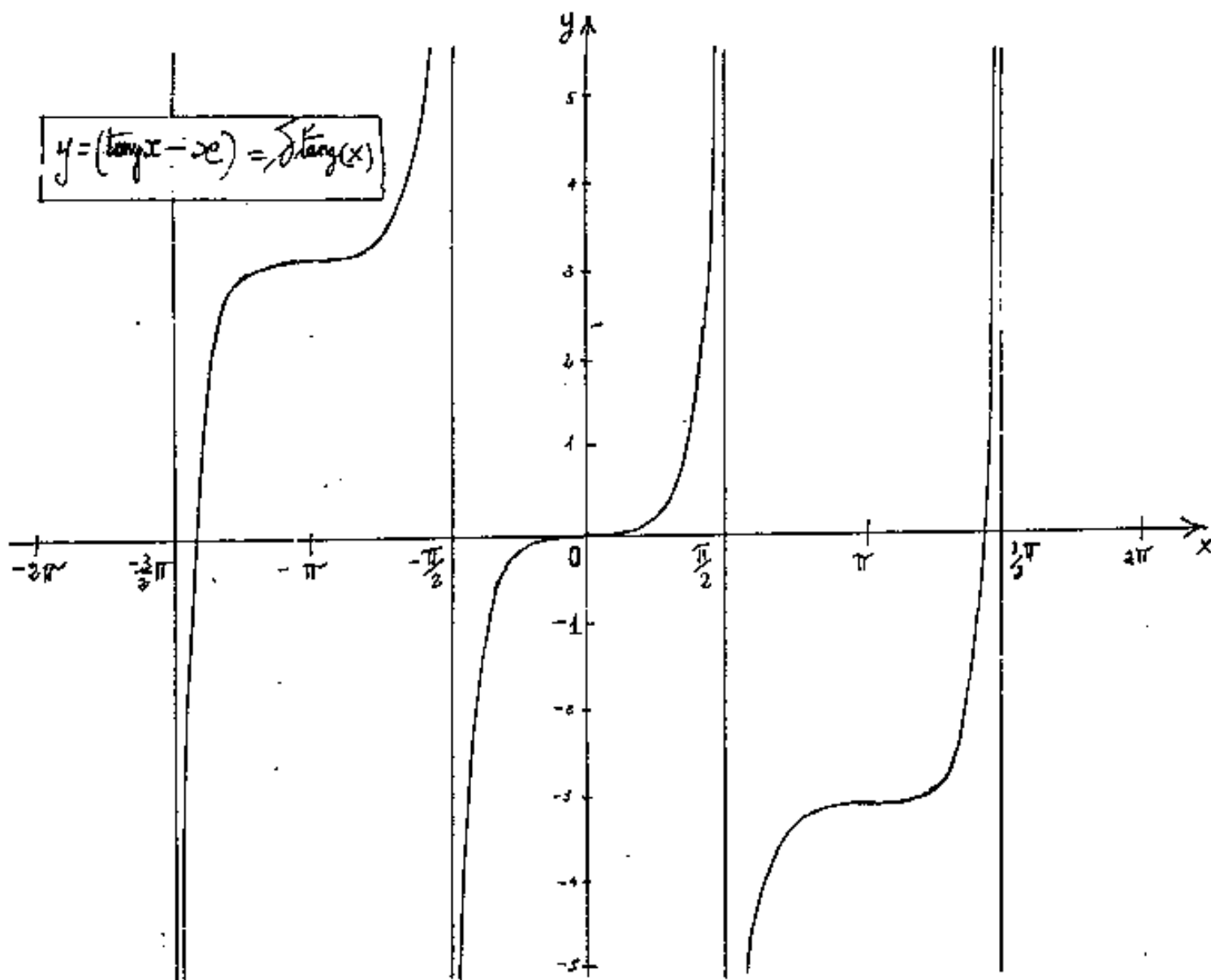
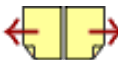
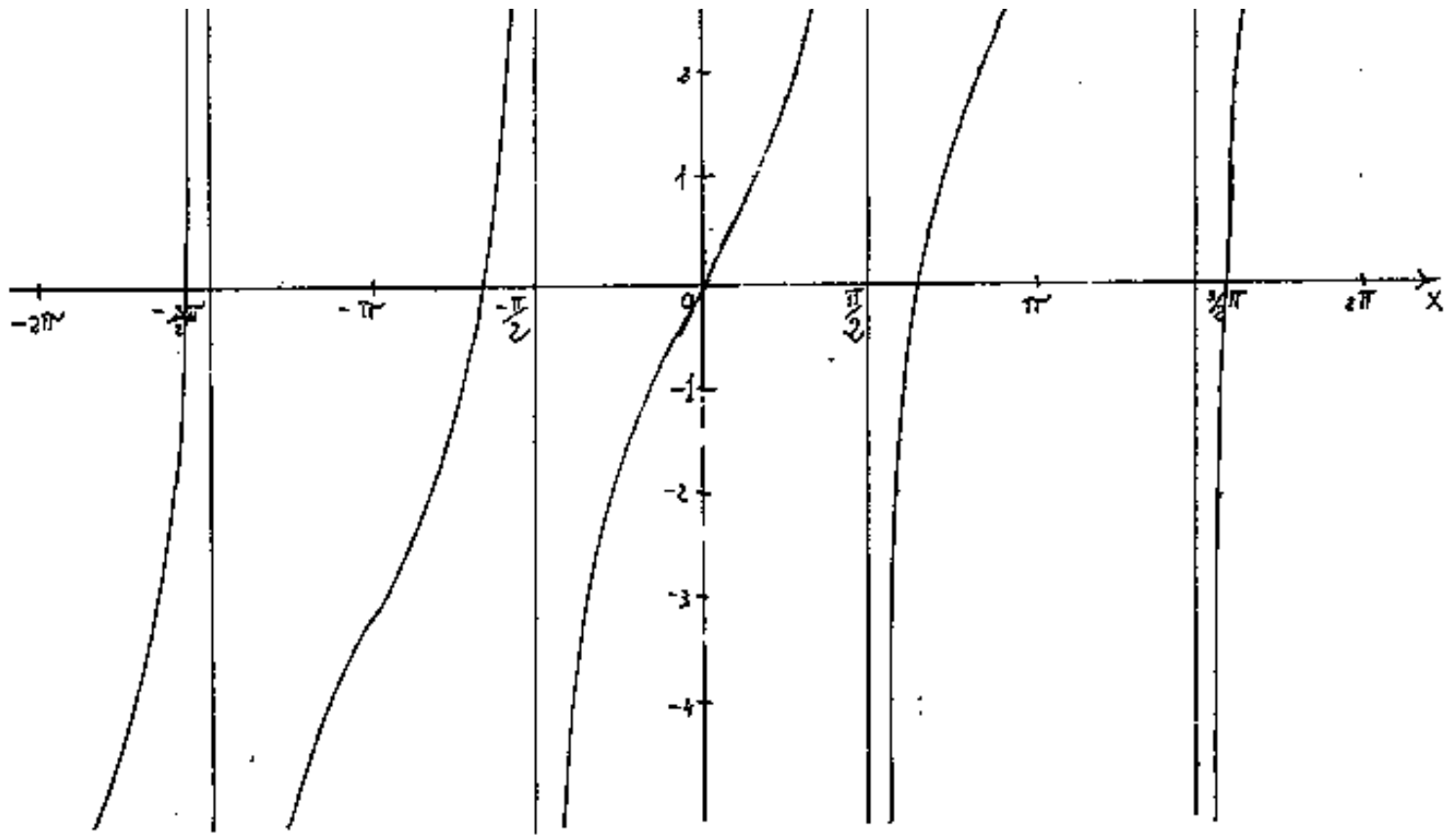
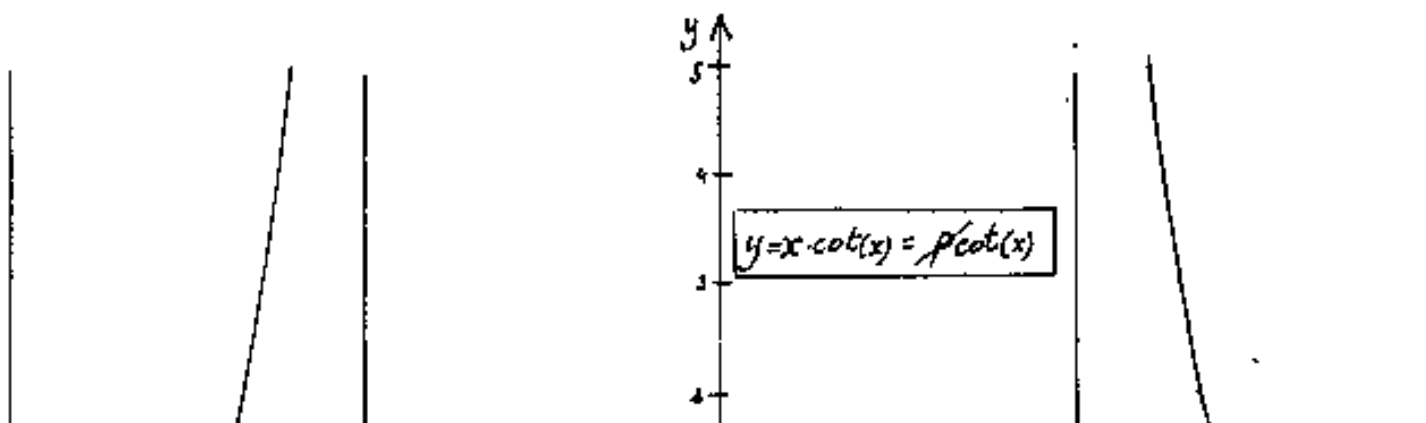
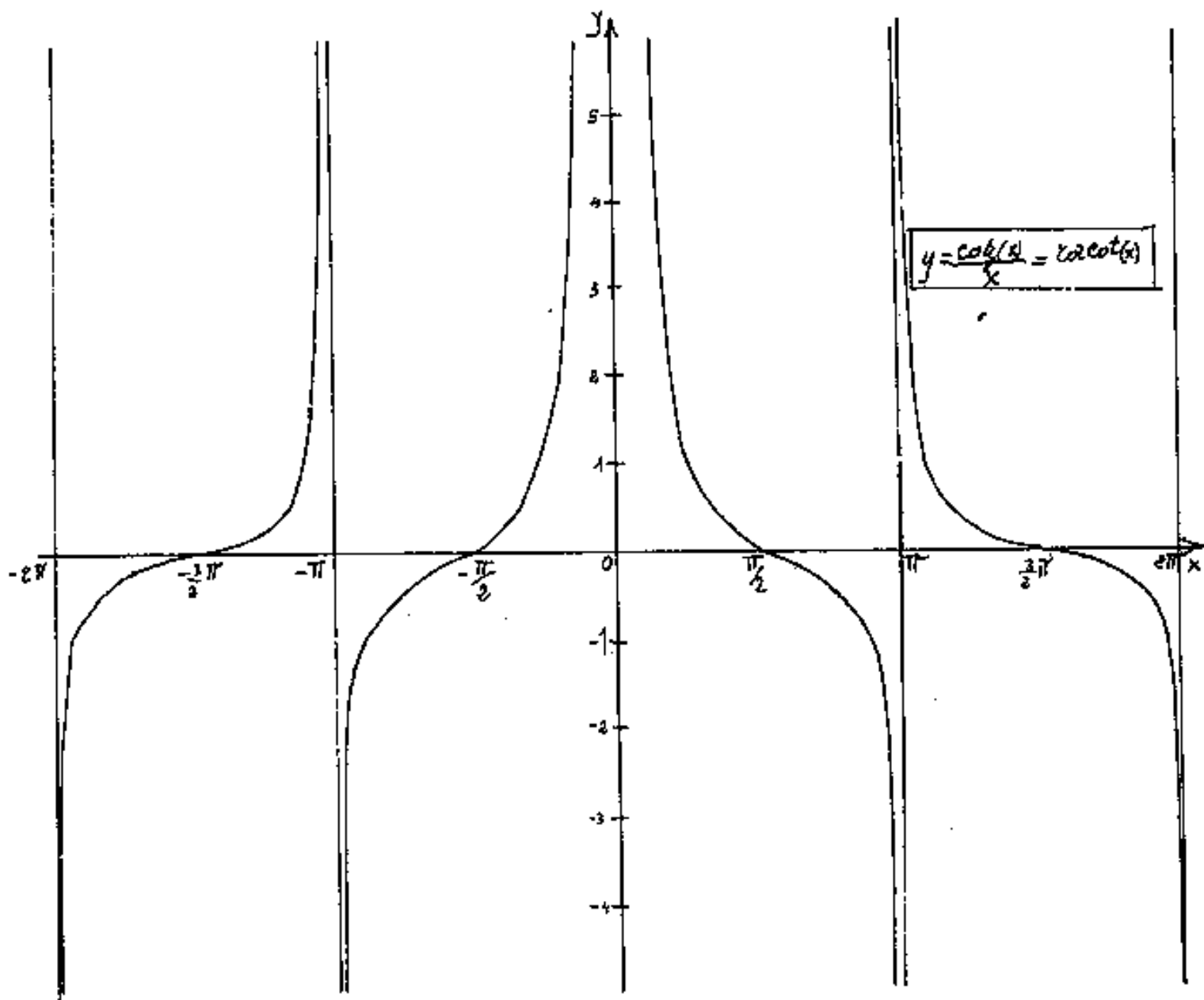
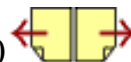
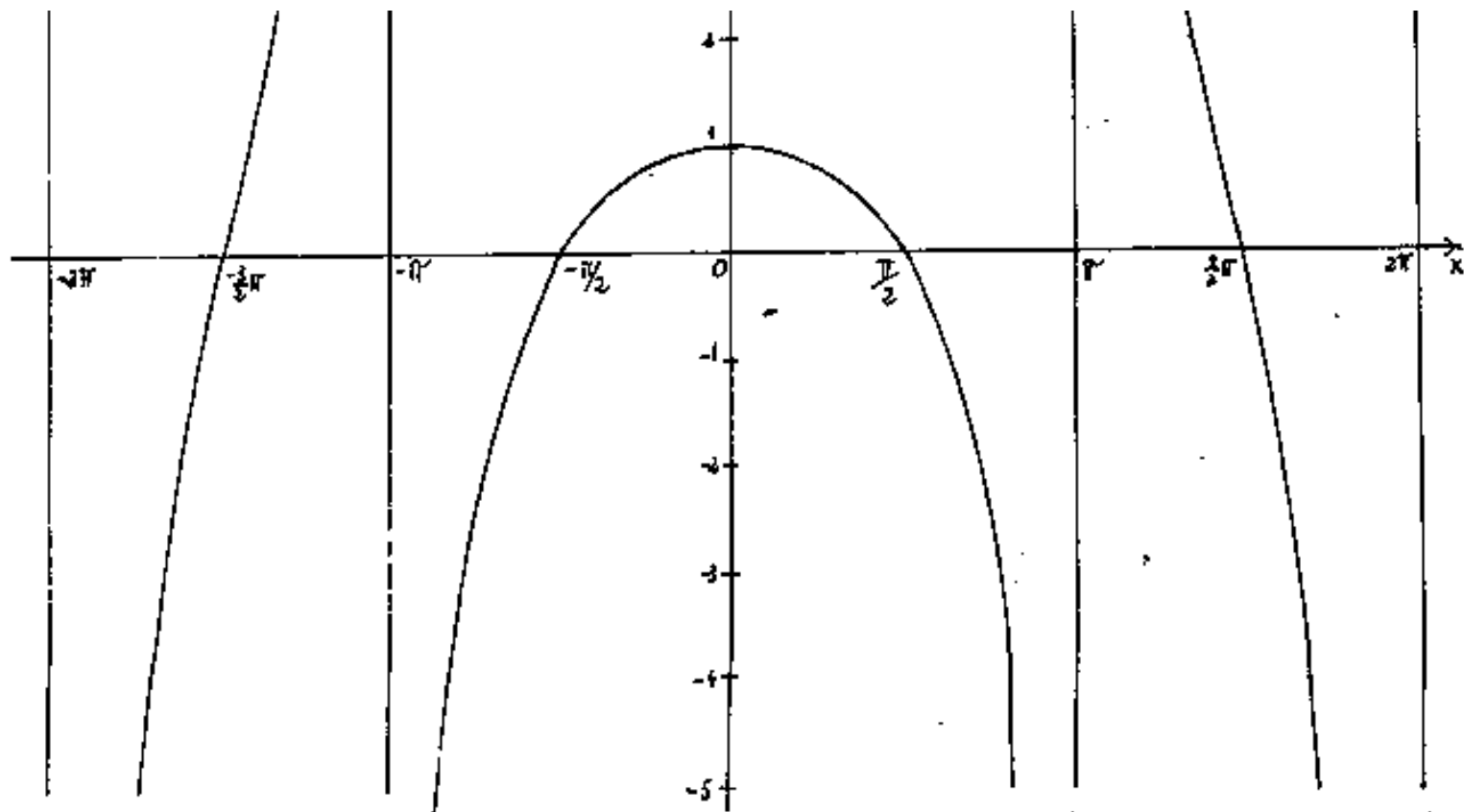
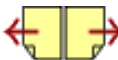
$y = \frac{\cot(x)}{x}$

$y = x \cdot \cot(x)$

$y = cot(x) - x = \int cot\, x$

$y = cotg(x) + x = \int cot(x)$

-2π -3/2 π -π - π/2 0 π/2 π 3/2 π 2π x

-1 -2 -3 -4 -5

Grafici delle Funzioni Iperboliche

Abbiamo già introdotto la trigonometria iperbolica, nel II Vol., ed abbiamo dato l'origine partendo dall'iperbole equilatera, nonché le relazioni fra le funzioni iperboliche fra loro, e le correlazioni con le funzioni trigonometriche circolari.

Avremo occasione di mostrare che il coseno iperbolico che simboleggiamo con "cosh(x)" in opportune unità grafiche è detto "Catenaria" ed è la curva di equilibrio di una catenella, o fune, perfettamente flessibile, di peso uniforme, sospesa ai suoi estremi, in campo gravitazionale.

Avremo anche occasione di dimostrare che la catenaria, (nel calcolo delle variazioni) è, fra tutte le curve continue e derivabili, passanti per due punti A e B quella che minimizza (massimizza) l'integrale curvilineo: $\int_{x_A}^{x_B} F(x,y,y')\,dx$.

Rimandiamo al Volume di Statica la trattazione

Rimandiamo al Volume di Statica la trattazione della catenaria.

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}; \quad \cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}; \quad \tanh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}};$$

$$\coth(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}; \quad \operatorname{argsenh}[x] = \ln\left[x+\sqrt{x^{2}+1}\right]; \quad \operatorname{argcosh}[x] = \ln\left[x \pm \sqrt{x^{2}-1}\right]$$

$$\operatorname{versh}(x) = \cosh(x) - 1;$$

$y = \mathrm{senh}(x)$

$y' = \cosh(x)$

$\left(y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

$y = \cosh(x)$

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y' = \text{senh}(x)$

-2

-3

1,50887556153 7
1,199678640 257135
X

$$y = \frac{\cosh(x) - 1}{x}$$

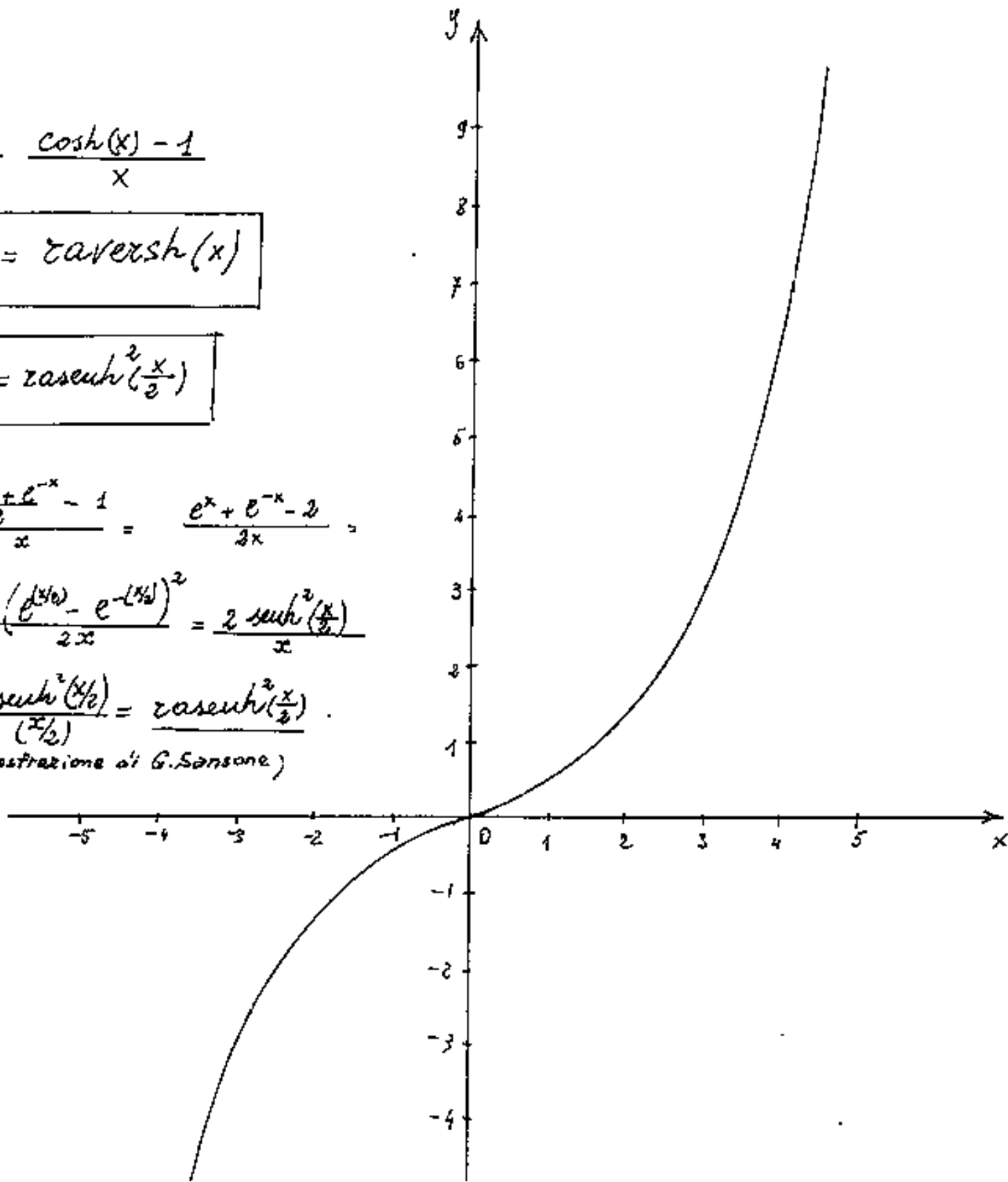
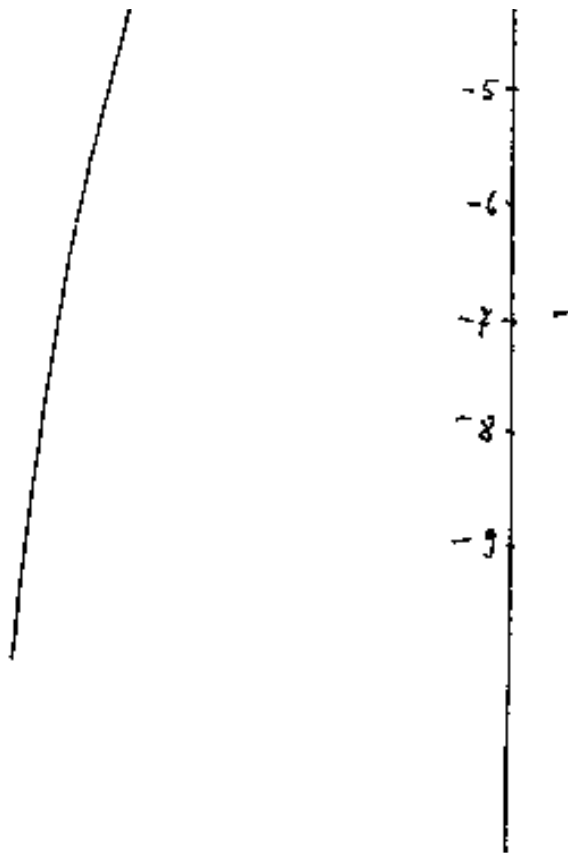
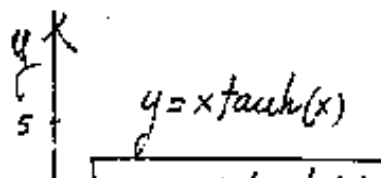
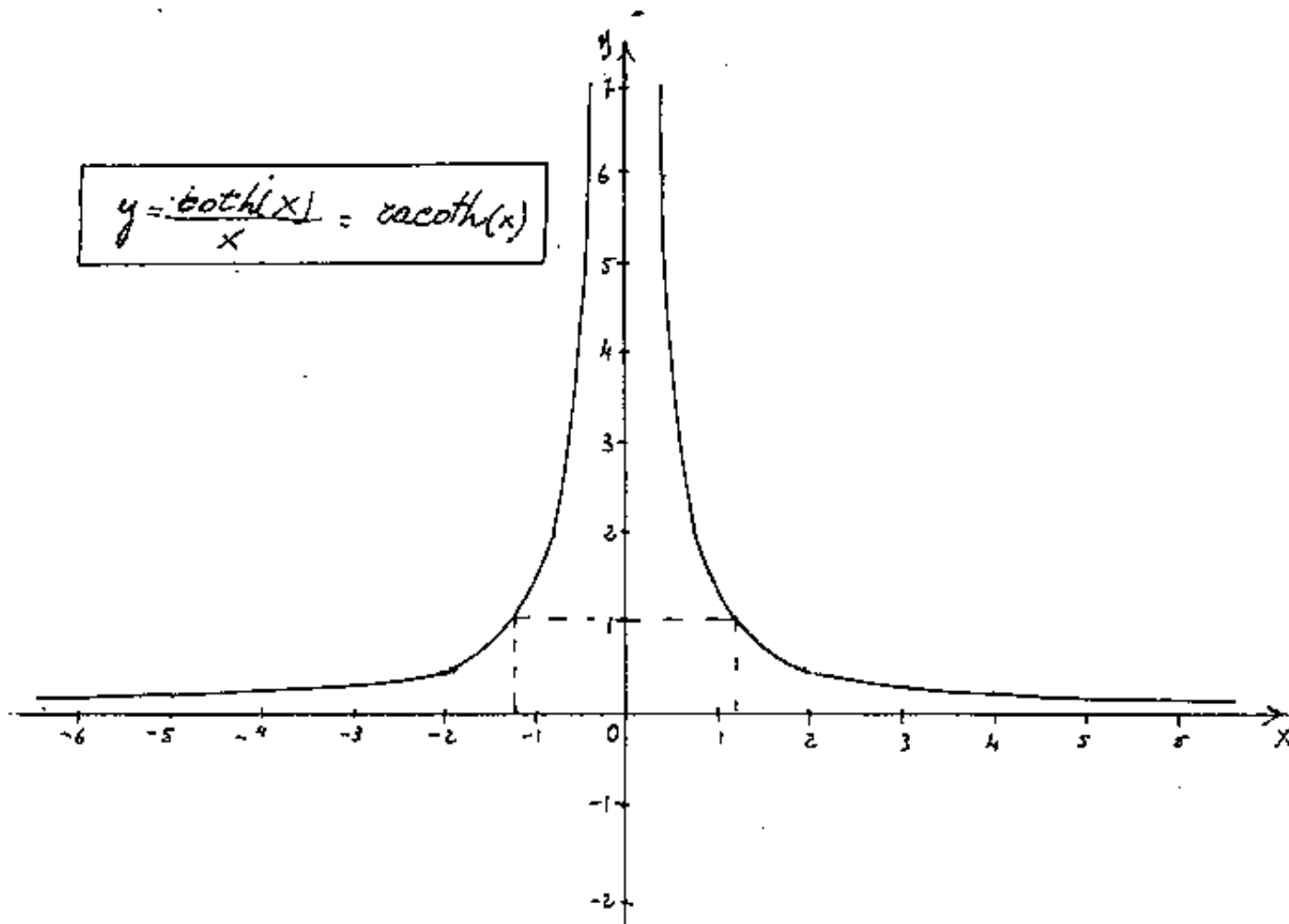
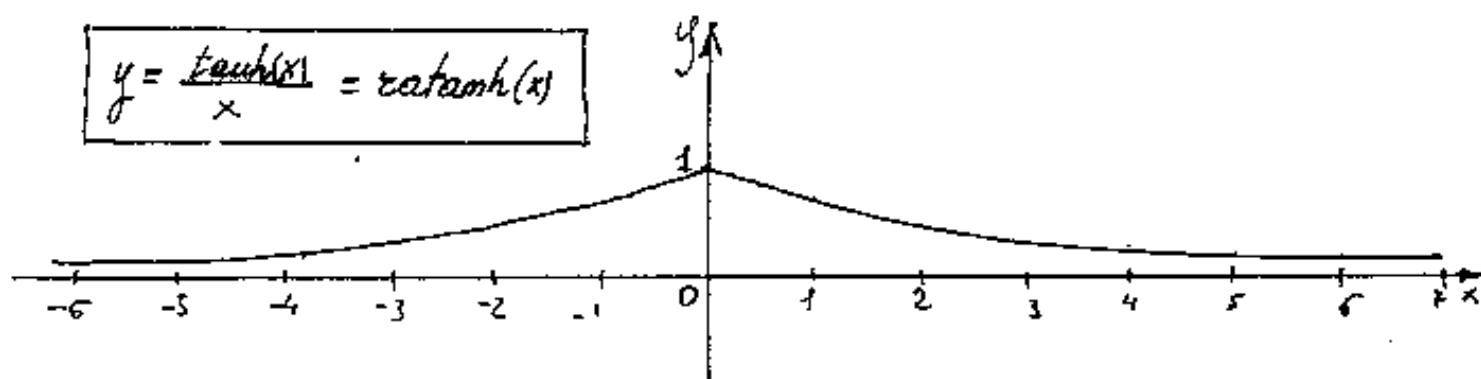
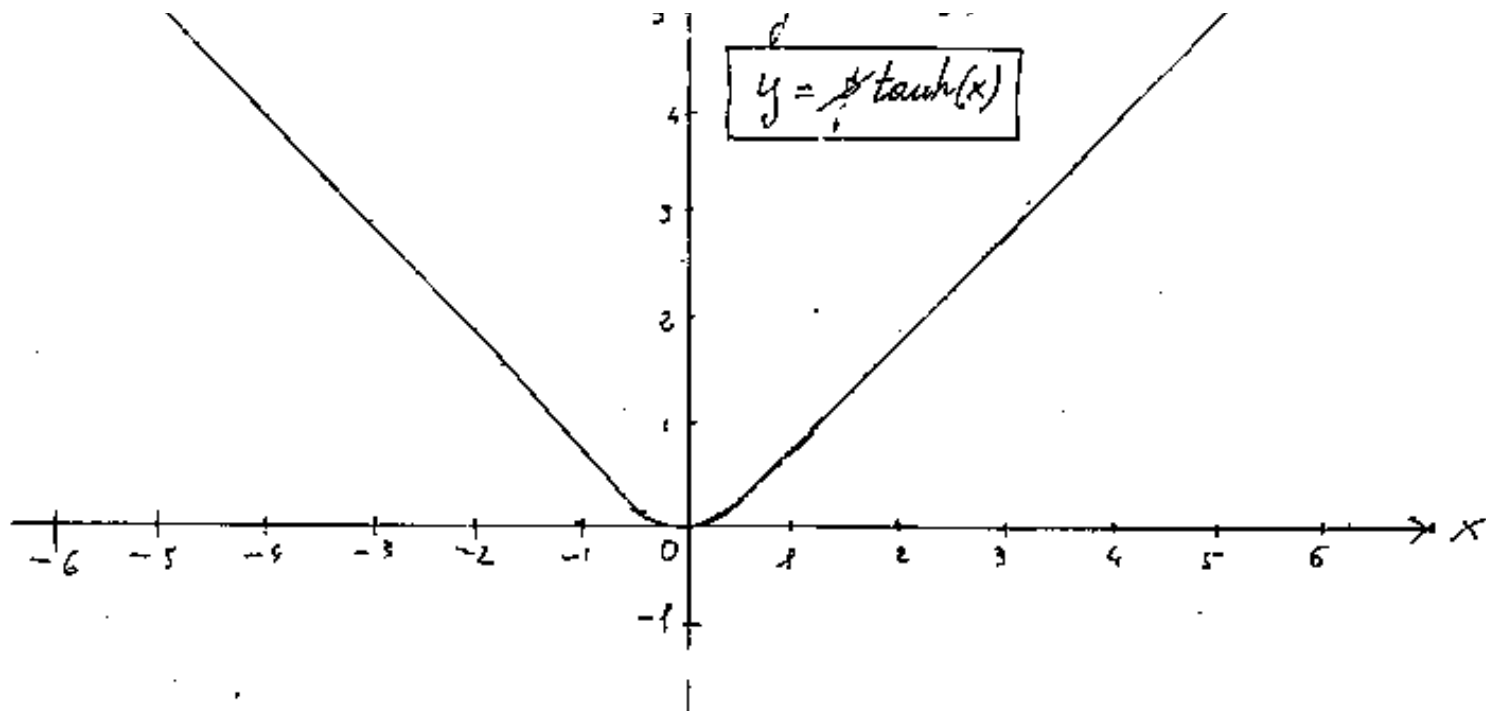
$$y = \text{zaversh}(x)$$

$$y = \text{zasenh}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1}{x} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x} =$$

$$= \frac{\left(e^{(x/2)} - e^{-(x/2)}\right)^2}{2x} = \frac{2\,\text{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$= \frac{\text{senh}^2(x/2)}{(x/2)} = \text{zasenh}^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

(dimostrazione di G. Sansone)

-5

-6

-7

-8

-9

$y = \frac{tanh(x)}{x} = ratanh(x)$

$y = \frac{coth(x)}{x} = racoth(x)$

$y = x\,tanh(x)$

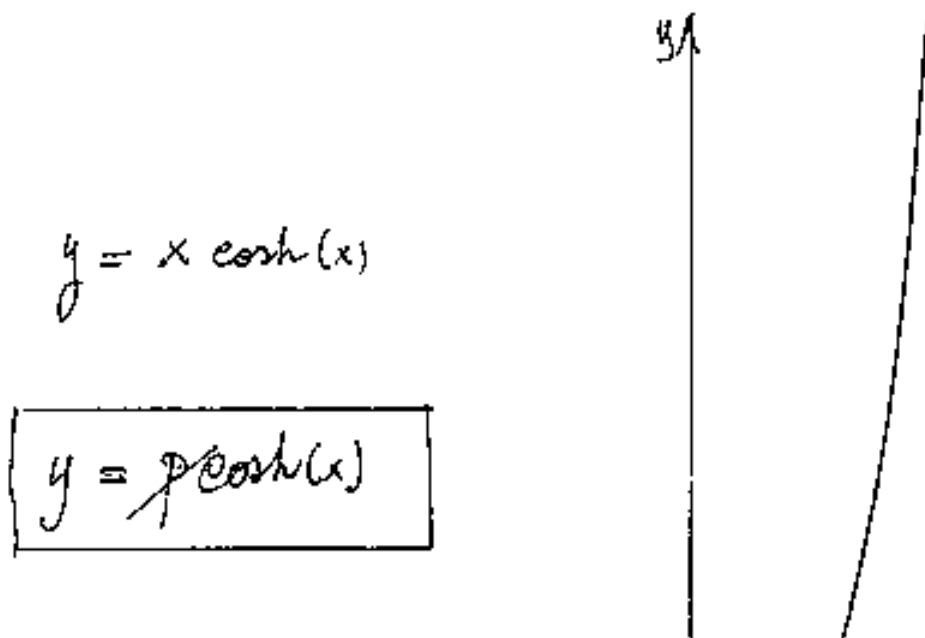
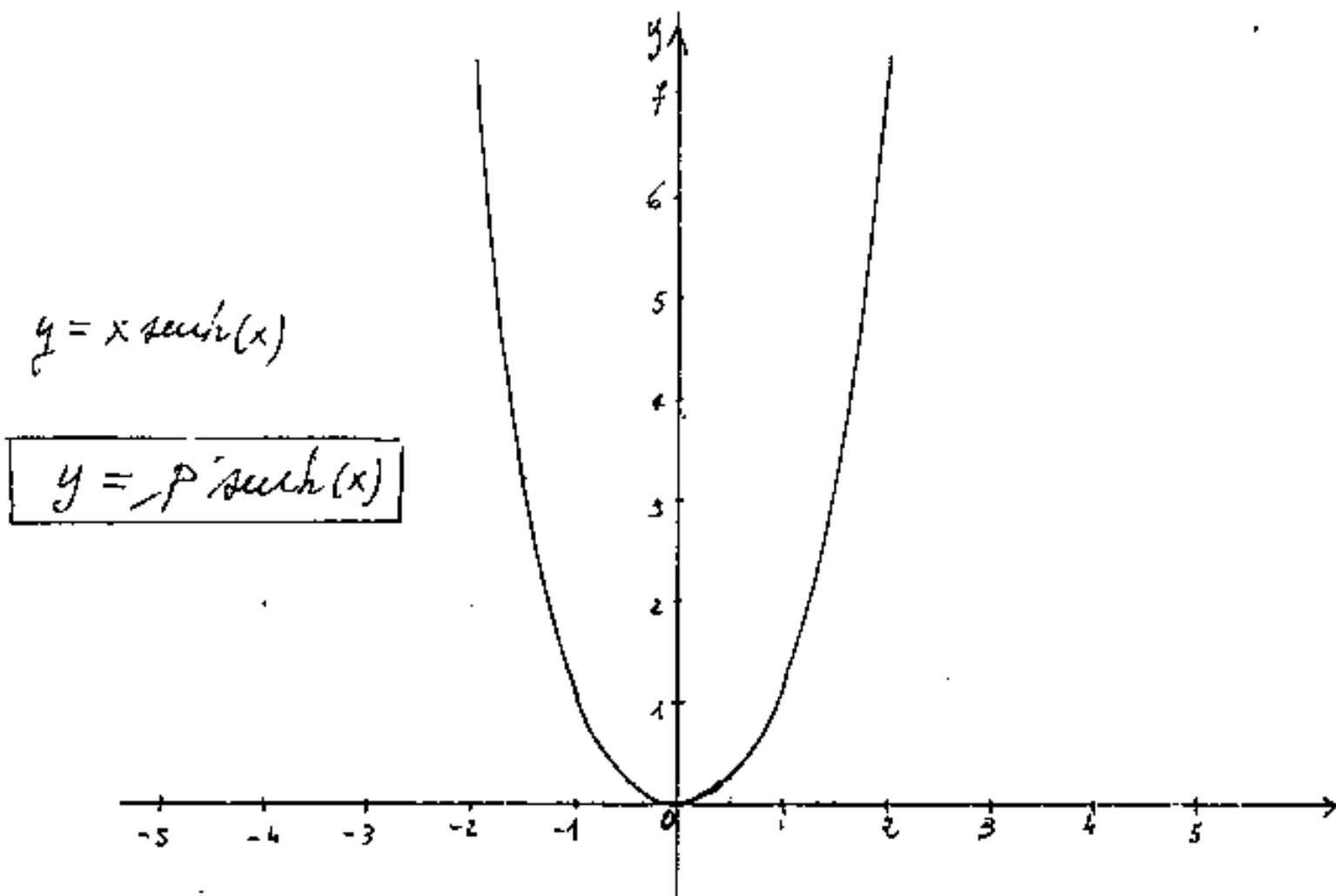
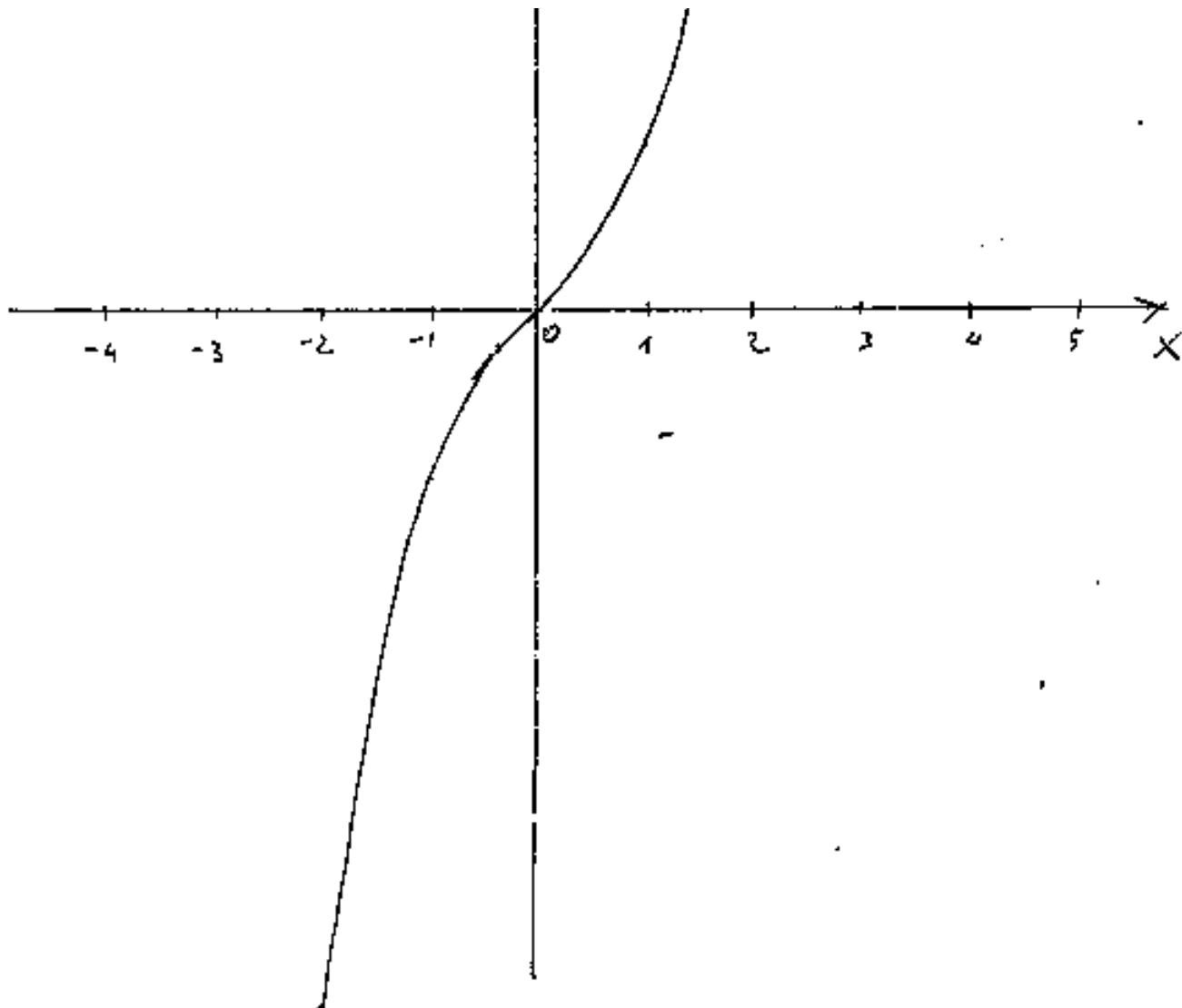
$y = x \tanh(x)$

$y = x \sinh(x)$

$y = p \sinh(x)$

$y = x \cosh(x)$

$y = p \cosh(x)$

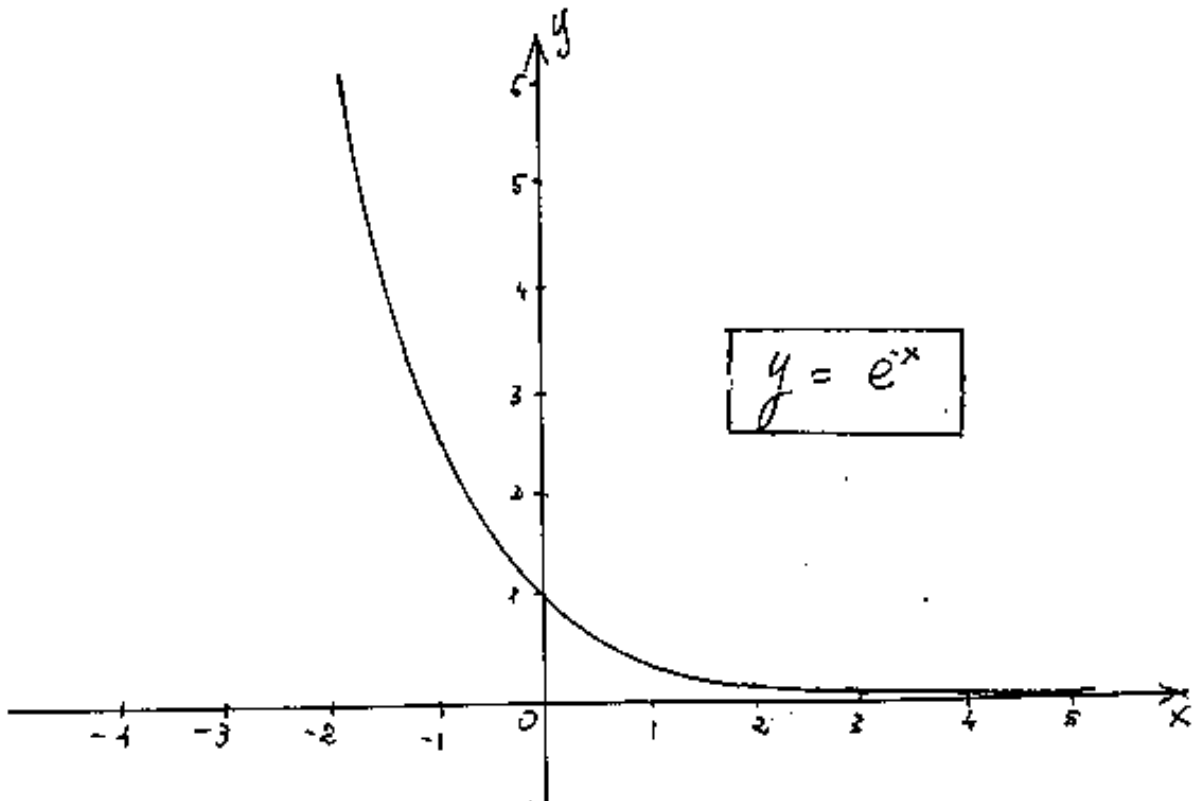
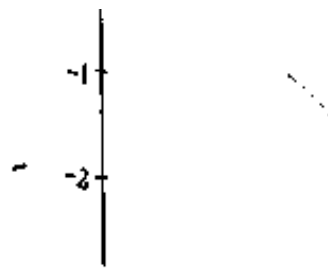
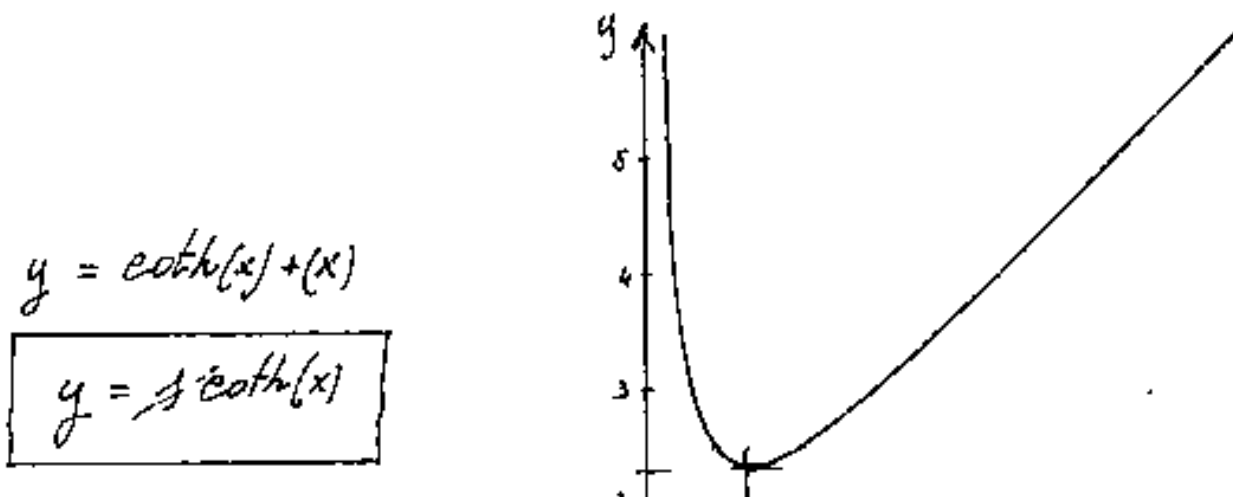
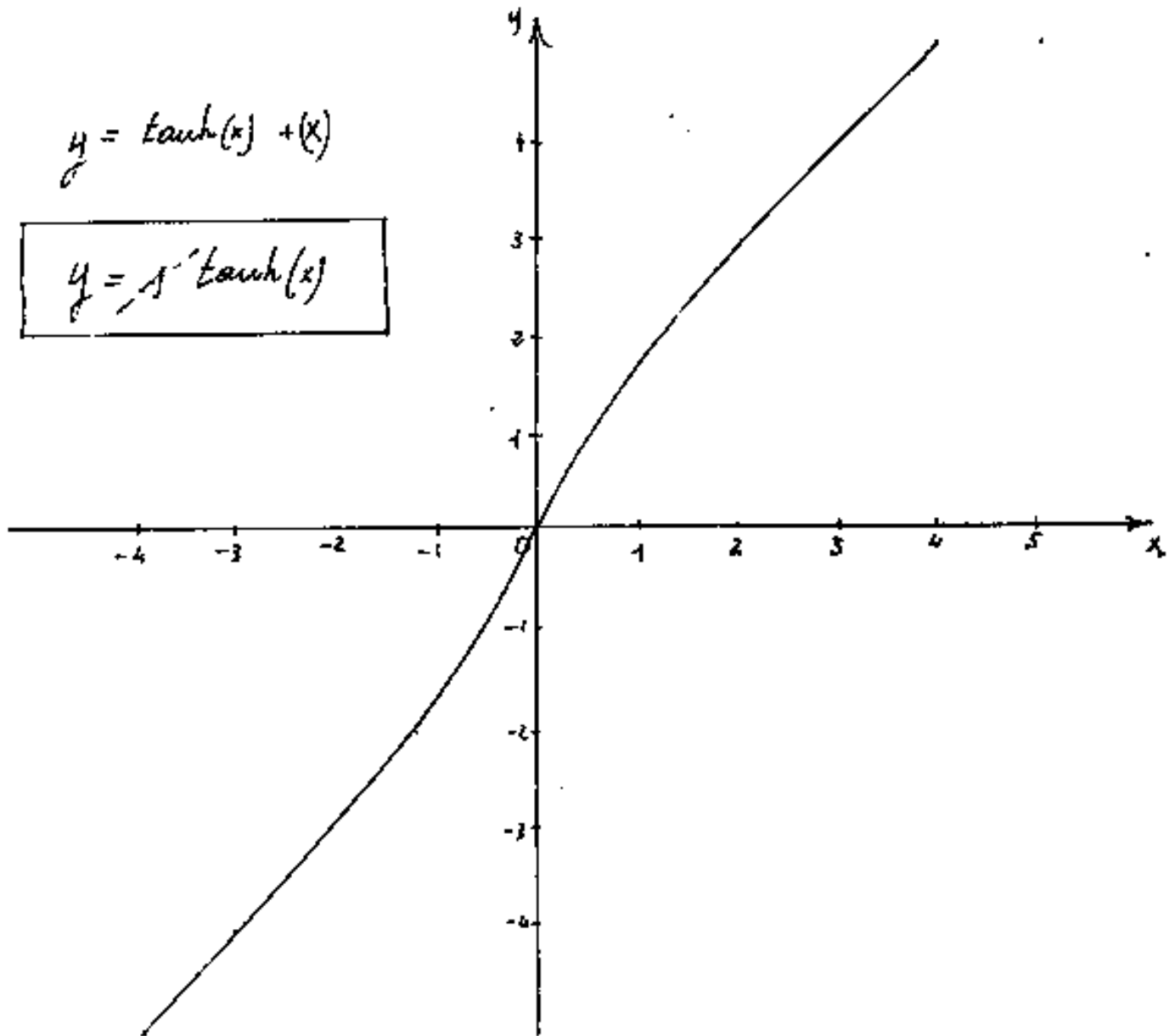
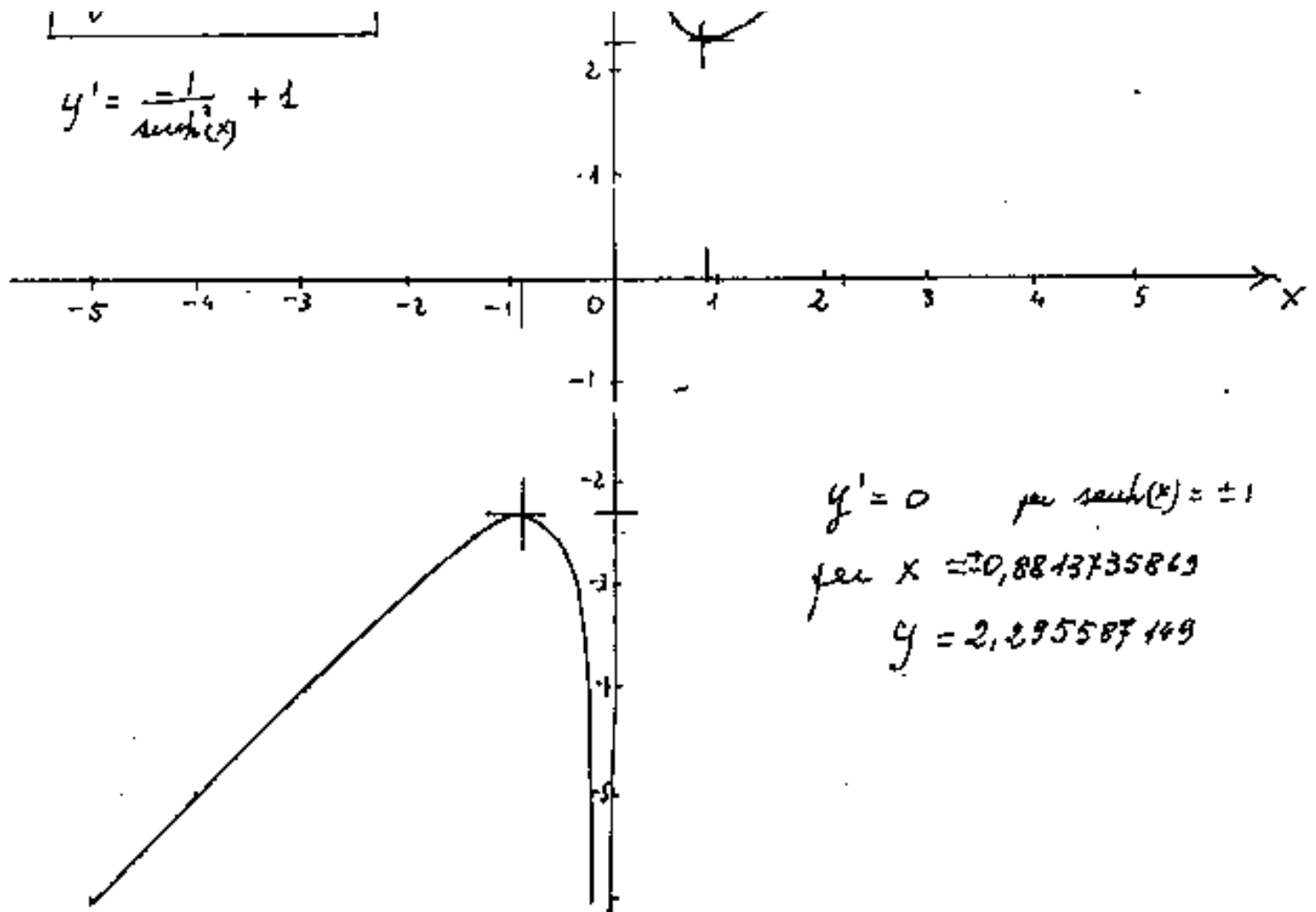
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 X

Operatori esponenziali

Questi operatori sono la base anche degli operatori iperbolici. Per ragioni di spazio e pratiche abbiamo diviso gli operatori su: $e^{(+x)}$; $e^{(-x)}$; $\ln(x)$. che in effetti dovrebbero stare sulla stessa riga per ogni arg..—

Abbiamo già esposto la linea $y = e^x$ ai $y = \ln(x)$, vediamo ora: $y = e^{-x}$

$y = e^{-x}$

-1

-2

Che è la stessa linea di e^x ruotata intorno y.

$y = \tanh(x) + (x)$

$y = 1 \cdot \tanh(x)$

$y = \coth(x) + (x)$

$y = 1 \cdot \coth(x)$

$$y' = \frac{-1}{\operatorname{senh}^2(x)} + 1$$

$y' = 0$ per $\operatorname{senh}(x) = \pm 1$

per $x \simeq \pm 0{,}8813735869$

$y = 2{,}295587149$

$y = e^x/x$

$y = \text{raexp}(x)$

y
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3 -2 -1 1 2 3 4 5

y
5
4

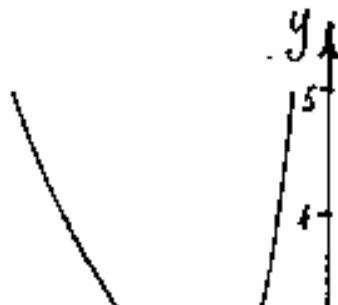
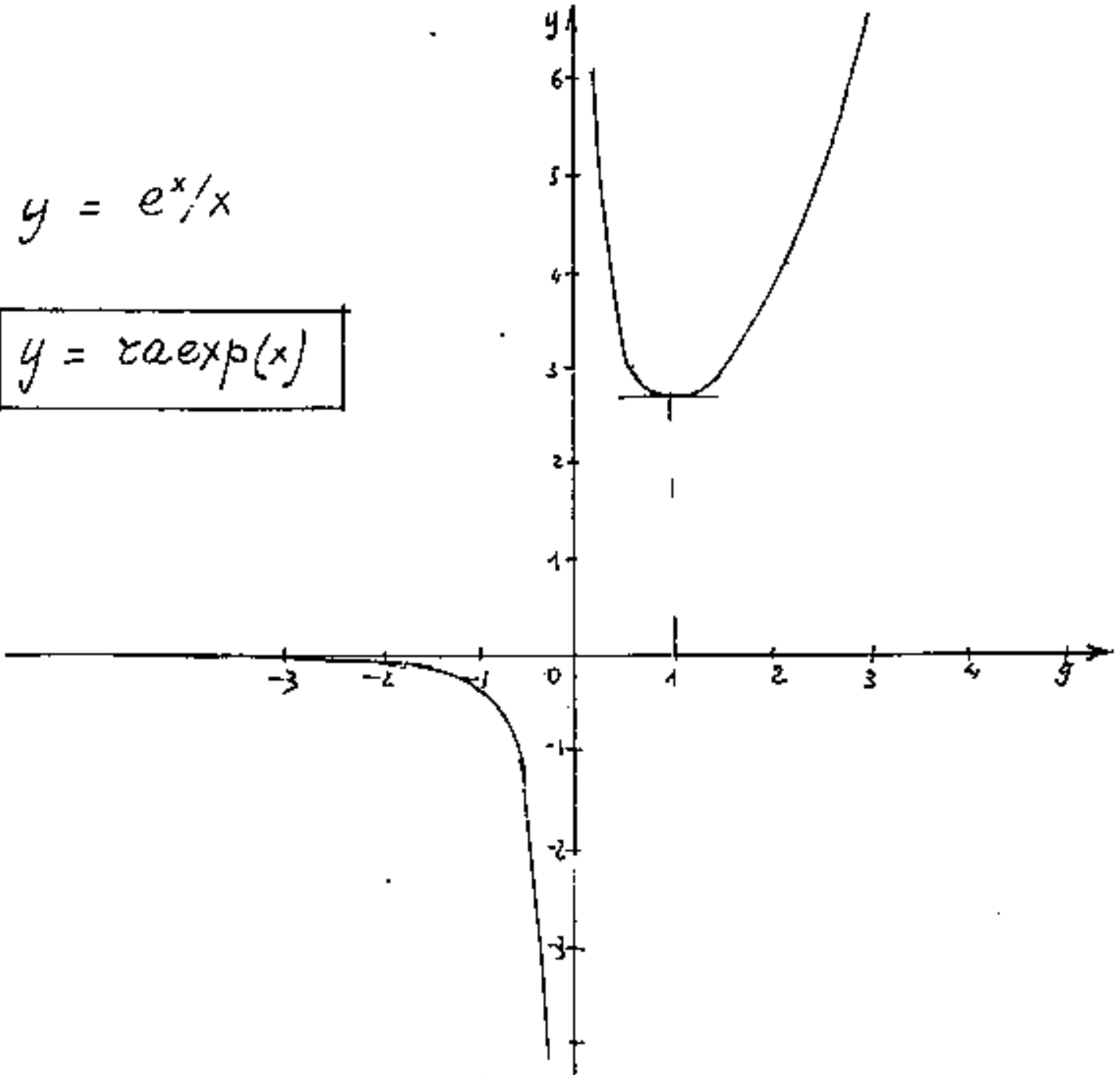
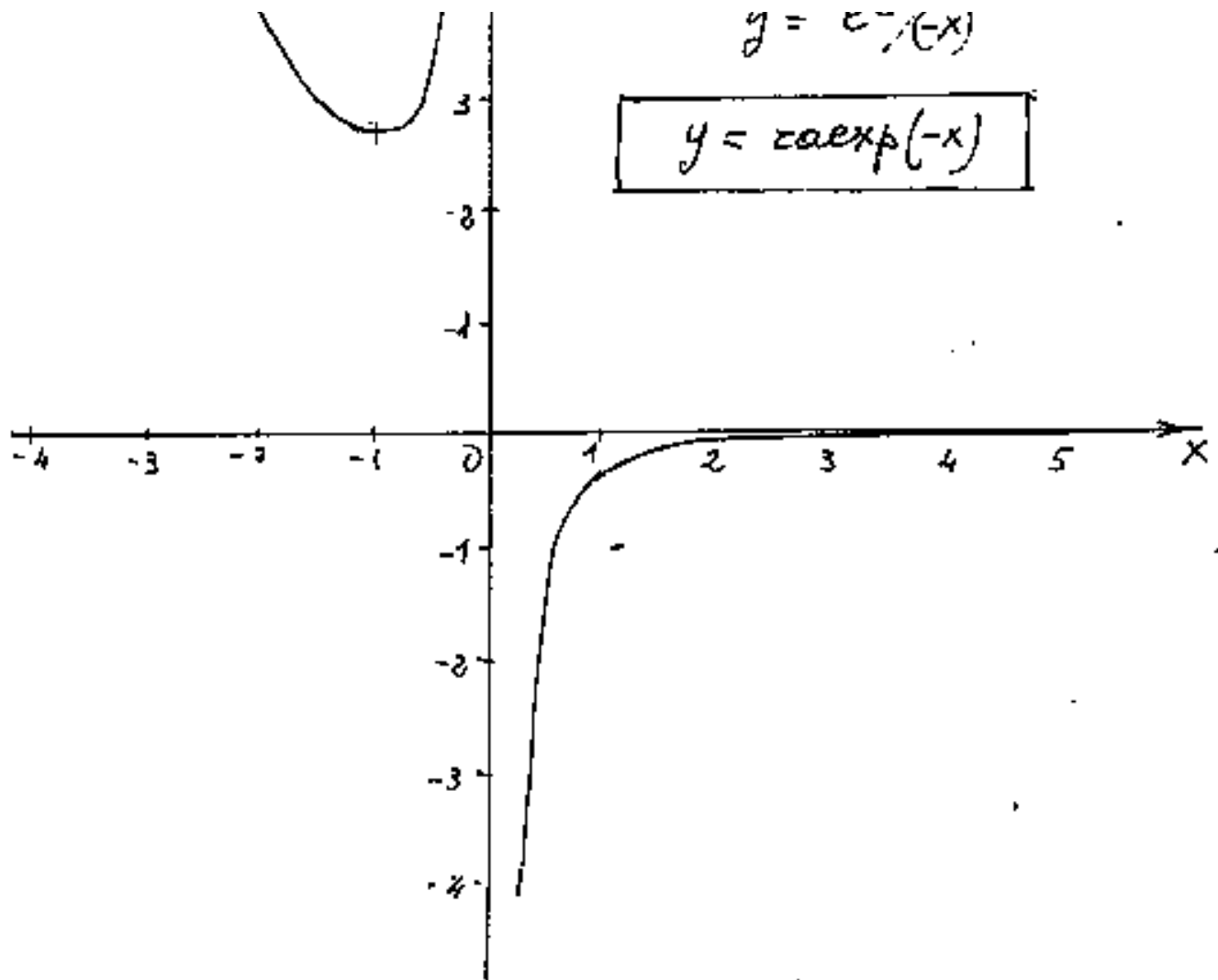
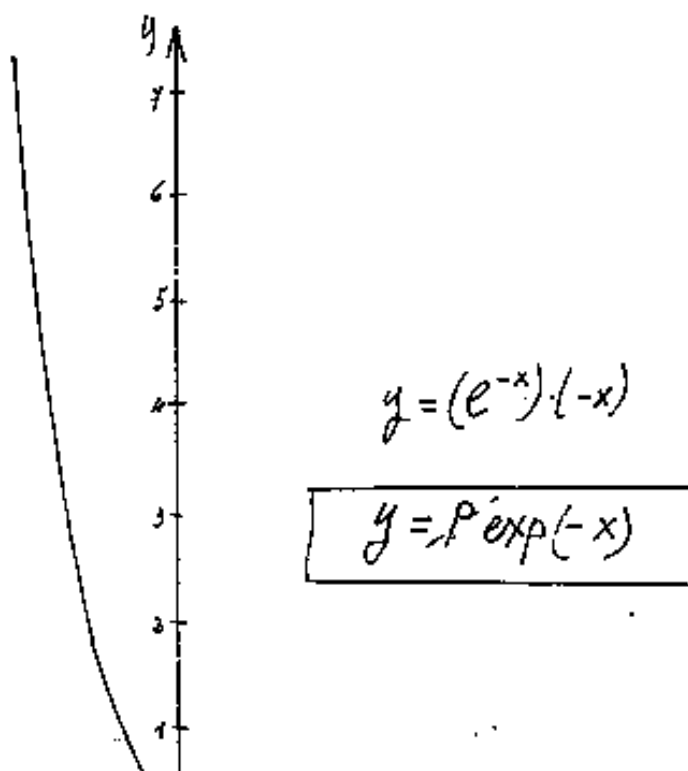
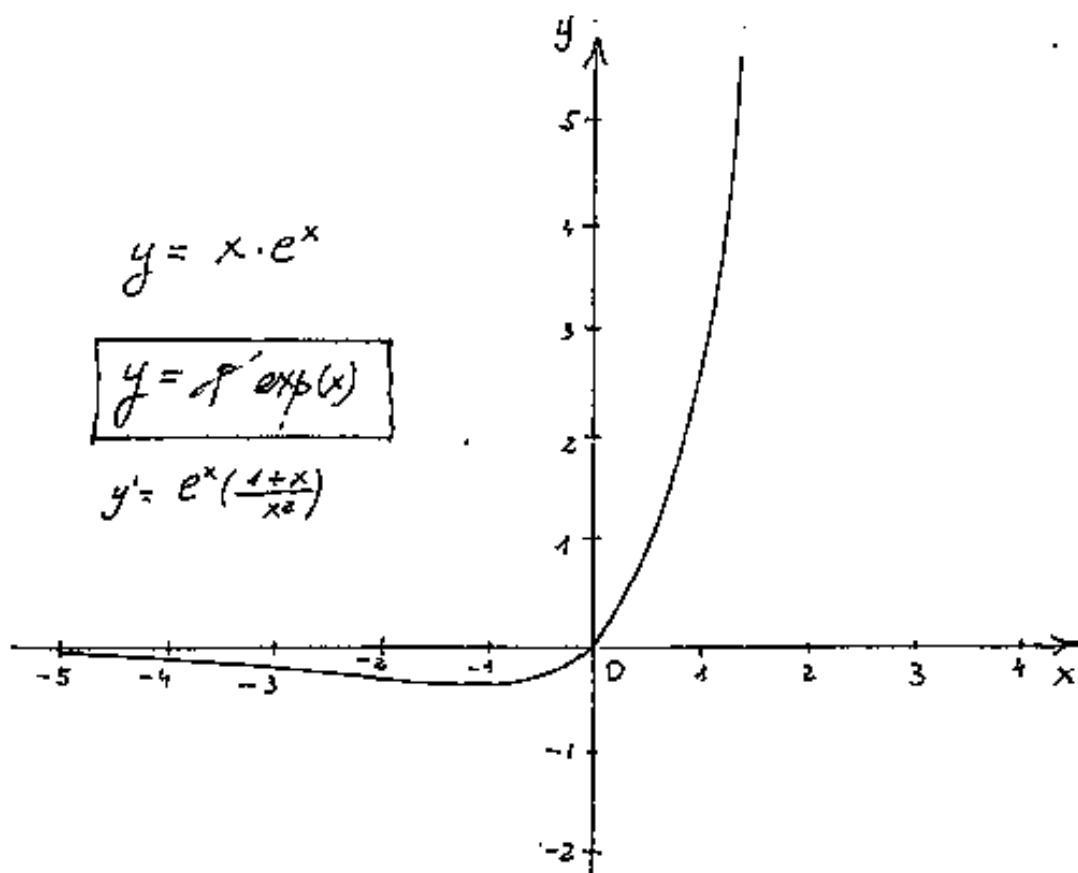
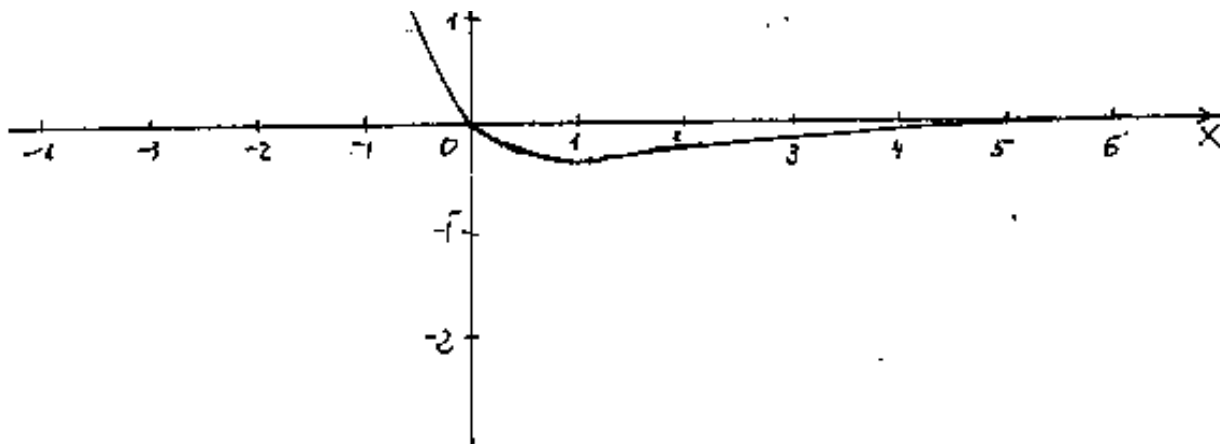
$y = e^{(-x)}/(-x)$

$y = x \cdot e^x$

$y = P' \exp(x)$

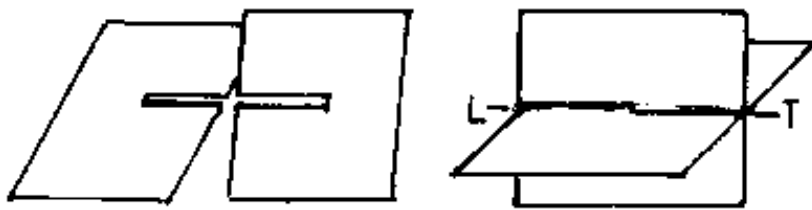
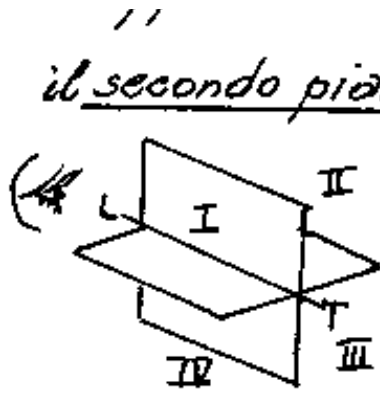
$y' = e^x\left(\frac{1+x}{x^2}\right)$

$y = (e^{-x})(-x)$

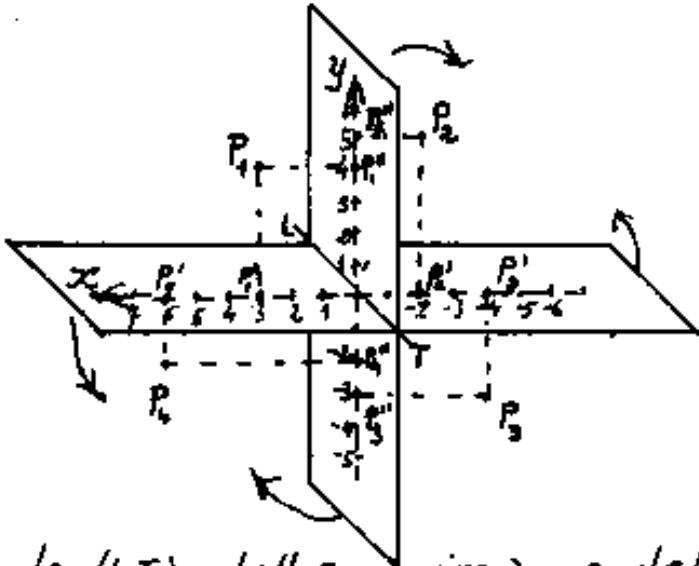
$y = P' \exp(-x)$

Elementi di Geometria Descrittiva

(Proiezioni di Monge)

Per una corretta rappresentazione delle grandezze nello spazio tridimensionale, occorre avvalersi della geometria descrittiva. Trattiamo ora le proiezioni di Monge.

Per capire velocemente i metodi della geometria descrittiva, procuriamoci un pezzo di cartone, (per es la base di un blocco di carta), dividiamolo a metá, ed a metá del taglio, incidiamo perpendicolarmente fino a metá profonditá, con spessore pari a quello del cartone. Incastrando sull'incisione i due cartoni, otteniamo la materializzazione dei piani di proiezione che possono ruotare intorno alla retta comune, detta: linea di terra, (LT). Un cartone lo poniamo orizzontale e rappresenta il primo piano di proiezione, l'altro verticale è

il secondo piano di proiezione; perpendicolare alla (LT) sarà il terzo piano di proiezione. Chiameremo: "I° diedro" quello che si apre all'osservatore, facendo ruotare un cartone; è delimitato dalla faccia superiore del piano orizzontale, e dalla faccia verso l'osservatore del piano verticale.

II° diedro, sempre sopra il piano orizzontale, dietro il piano verticale. Sotto il secondo diedro vi è il III diedro, e sotto il I° diedro vi è il IV diedro.

Poiché noi disegnamo su un foglio piano, apriamo il I diedro (che si affaccia all'osservatore), cioé materialmente facciamo ruotare i nostri due cartoni intorno alla linea di terra fino a farli sovrapporre. Vediamo cosa succede alle proiezioni dei punti ubicati nei vari diedri.

Siano: P_1, P_2, P_3, P_4 punti rispettivamente ubicati nel I, II, III, IV, diedro e siano: $P_1 \equiv (3,4)$; $P_2 \equiv (-2,5)$; $P_3 \equiv (-4,-3)$ $P_4 \equiv (6,-2)$; questi numeri indicano rispettivamente le distanze da (LT) della prima e della seconda proiezione, e sarebbero le coordinate dei punti per asse x orizzontale ed asse y verticale. (In assonometria la x è verticale). Indichiamo con P' e P'' rispettivamente la prima e la seconda proiezione di P, ed aprendo il I diedro si ha la rappresentazione di Monge.

aprendo il I diedro si ha la rappresentazione di Monge.

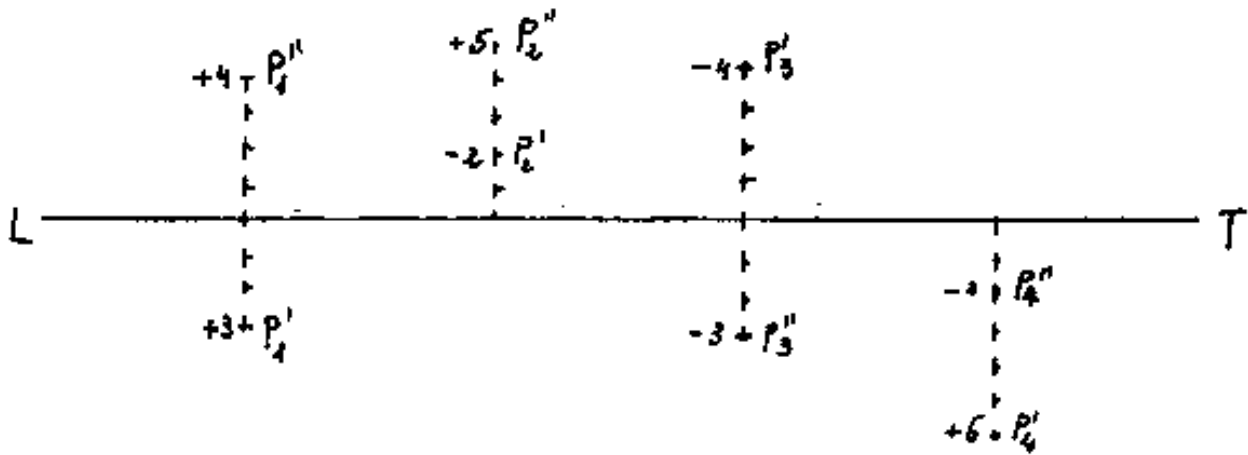
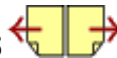
$+4\ P_1''$ $+5\ P_2''$ $-4\ P_3'$

$-2\ P_2'$

L T

$-1\ P_4''$

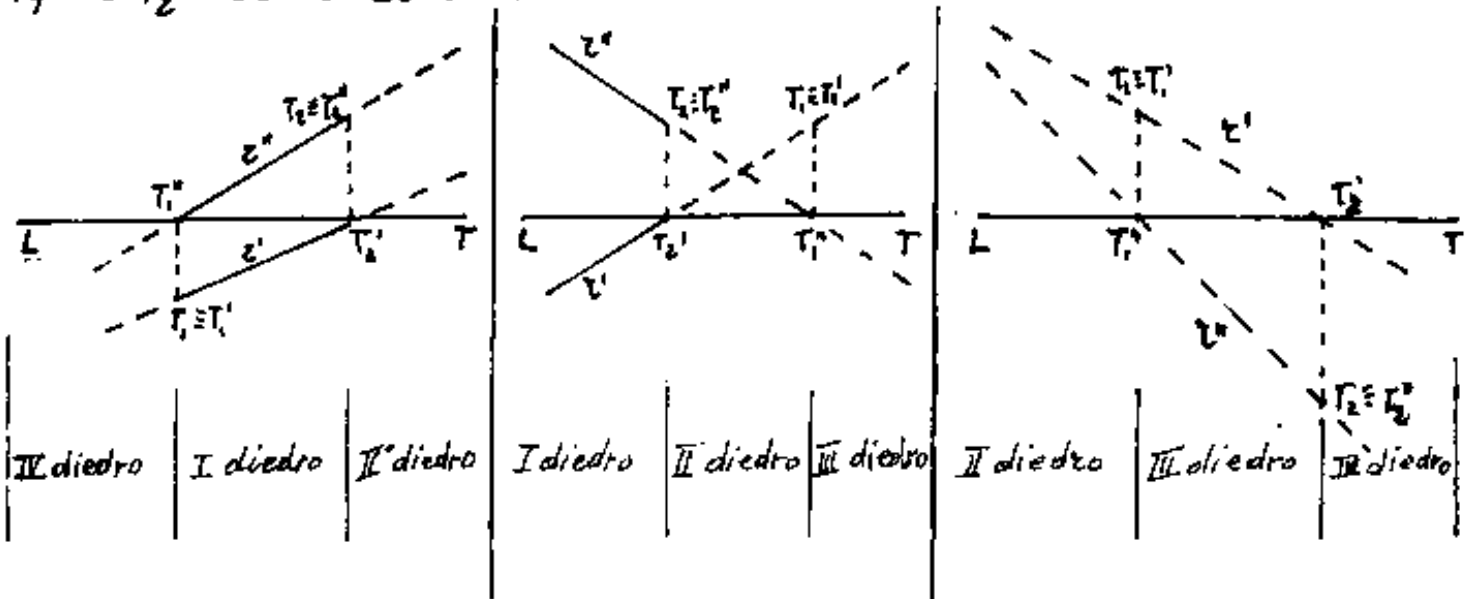
$+3\ P_1'$ $-3\ P_3''$

$+6\ P_4'$

Si nota che la I^a proiezione è positiva al disotto del=
la linea di terra, negativa al disopra; che la II^a pro=
iezione è positiva al disopra della linea di terra, ne=
gativa al disotto. Perciò:

il I° diedro avrà: la I^a proiezione sotto LT, la II^a sopra.
" II° diedro " entrambe le proiezioni sopra LT
" III diedro " invertite le proiezioni del I° diedro
" IV diedro " entrambe le proiezioni sotto LT.

Le proiezioni di ogni punto giacciono sulla stessa per=
pendicolare alla LT. – Per studiare le proiezioni del=
la retta procuriamoci un sottile rigido segmento rettilineo,
(per es. un ferro da maglieria), forando con questo i cartoni,
facciamogli attraversare tre diedri. Il foro nei cartoni,
cioè il punto comune alla retta ed al piano di proiezione
si chiama "traccia" della retta e si indica con la let=
tera T, avremo T_1 = I^a traccia sul I° piano di proiezione,
T_2 = II^a traccia sul II° piano di proiezione. $T_1 \equiv T_1'$; $T_2 \equiv T_2''$.

T_1'' e T_2' sono su LT. Avremo:

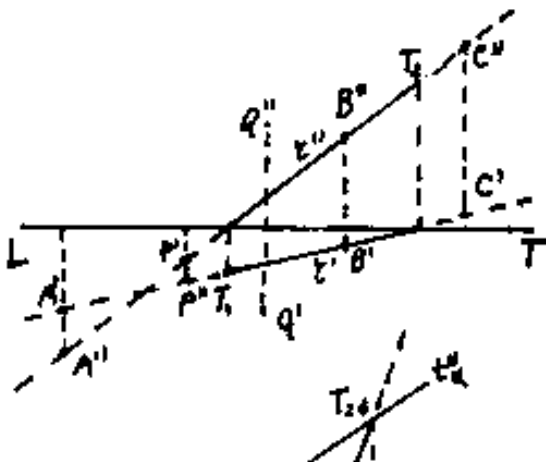
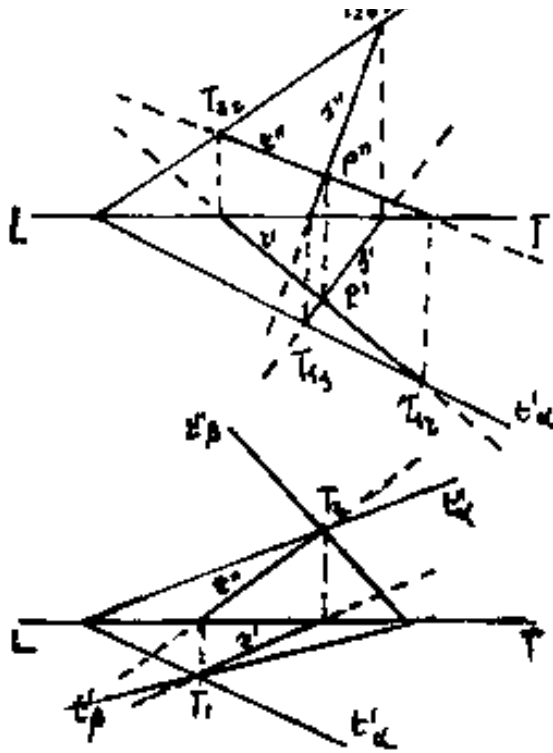
IV diedro | I diedro | II diedro | I diedro | II diedro | III diedro | II diedro | III diedro | IV diedro

Appartenenza

1) Un punto appartiene ad una retta se ha le proiezioni sulle proiezioni omonime della retta.

2) Due rette hanno un punto comune (non sono sghembe) se le proiezioni omonime delle due rette si incontrano in due punti che stanno sulla stessa perpendicolare ad $\overline{LT}$.

3) Un piano taglierà i due piani di proiezione secondo due rette (dette tracce) che si incontrano su $\overline{LT}$ e si indicano con t'_α, t''_α. (tracce del piano α sul I° e II° piano)

4) Le rette che appartengono ad un piano, hanno le tracce sulle tracce omonime del piano

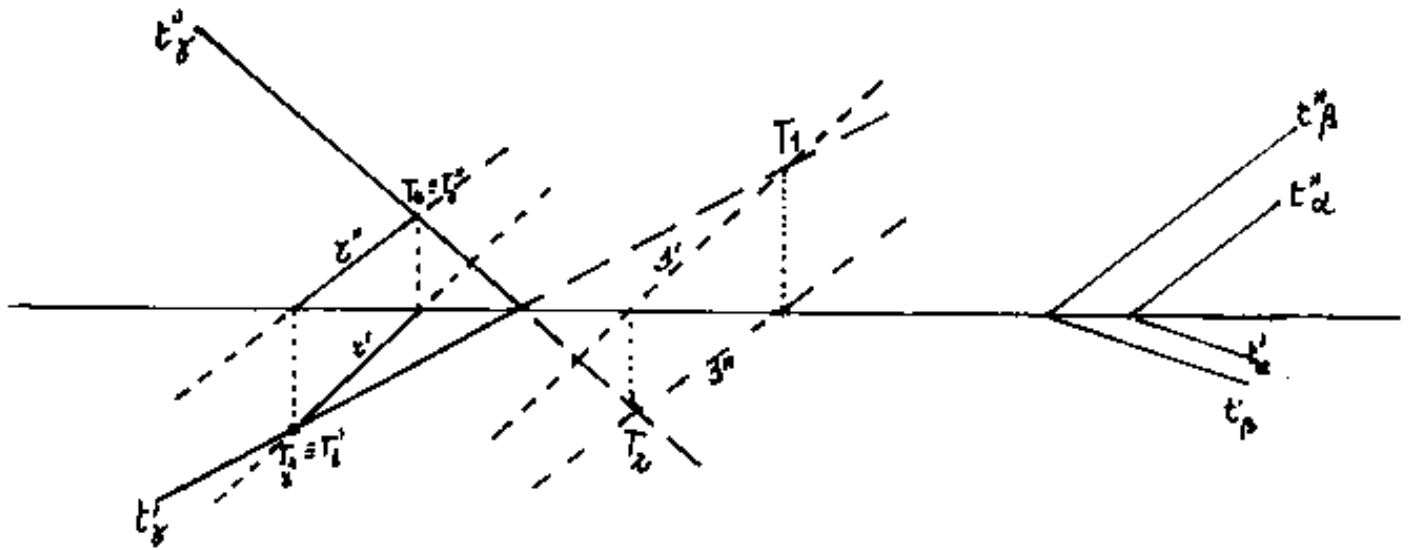
5) I punti comuni alle tracce omonime di due piani sono le tracce omonime della retta comune.

Nella figura: A, B, C appartengono alla retta t; P e Q non appartengono ad t (Perchè Q non ha le proiezioni su quelle della retta, e P' è su t'' e P'' su t'.

Le rette r ed s appartengono ad α ed hanno il punto P in comune.

Se due rette si incontrano in P determinano il piano comune α.

La retta r è comune ai piani α e β, è la loro intersezione. (Le tracce omonime per T_1 e per T_2). (P su α)

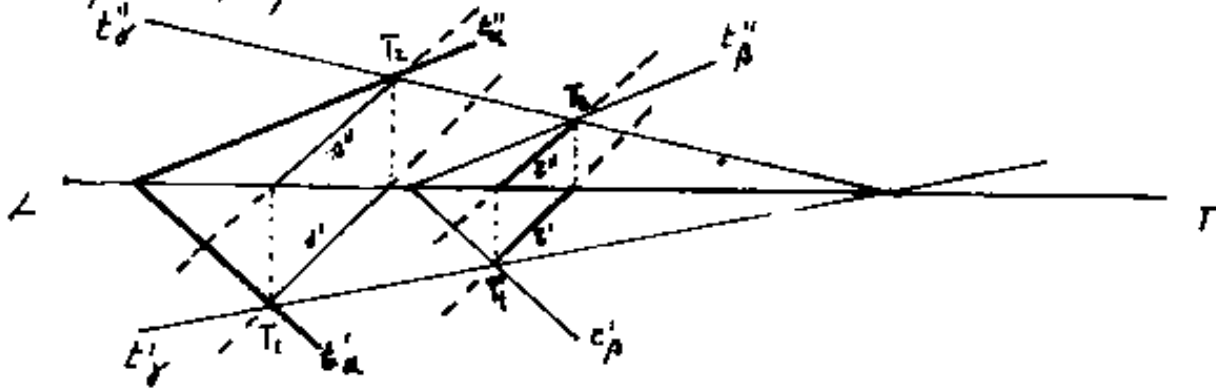
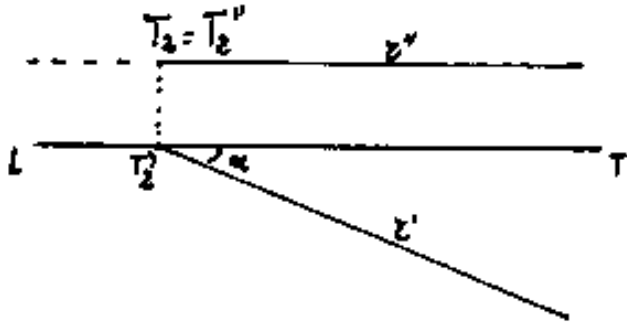
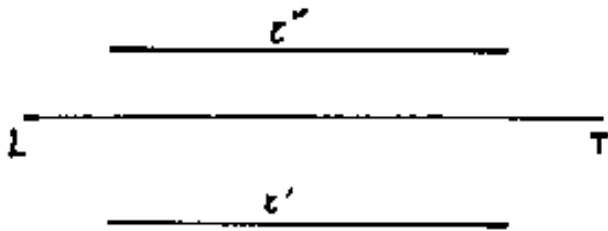
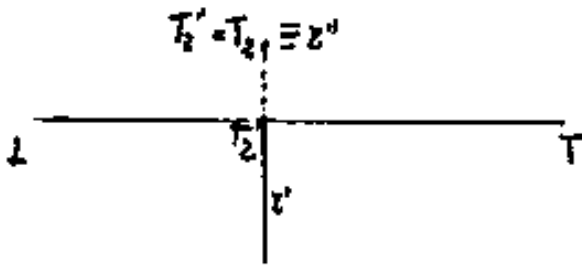
6) Un punto appartiene ad un piano se appartiene ad una retta del piano.

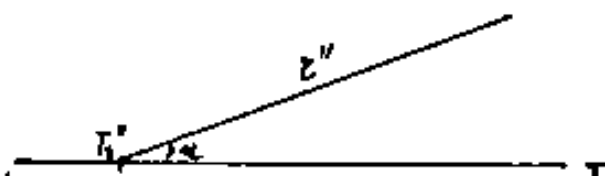
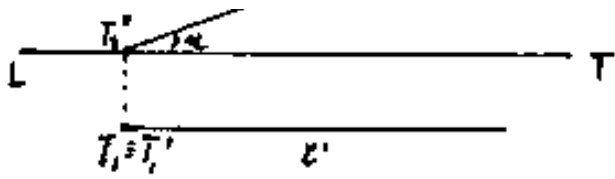
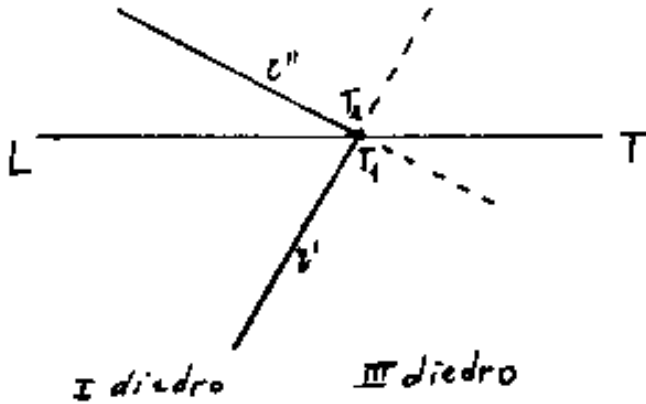
Condizioni di parallelismo

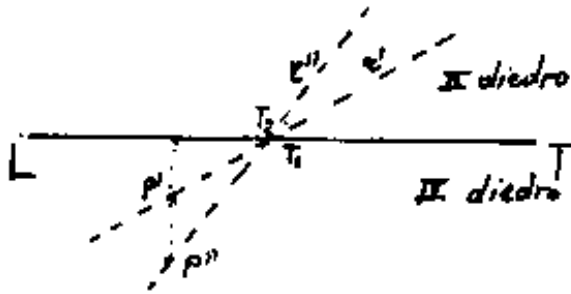
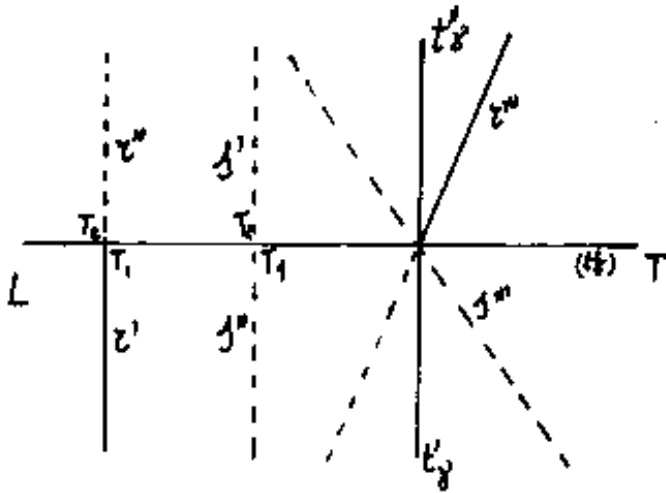
1) Due rette sono parallele, se hanno le proiezioni omonime parallele.
2) Due piani sono paralleli, se hanno le tracce omonime parallele
3) Una retta è parallela ad un piano se appartiene ad un piano parallelo.

La retta r che attraversa il I° diedro e la retta complanare s che non attraversa il primo diedro sono parallele.

I piani α e β sono paralleli.

Per verificare se una retta r ed un piano α sono paralle-

li, per la retta r tracciamo un qualsiasi piano γ la retta s intersezione di α con γ sarà parallela ad r e per r possiamo tracciare il piano β parallelo ad α.

Rappresentazione di enti particolari

Retta orizzontale (inclinata di α sul secondo piano.)

Retta parallela ad LT

Retta proiettante in seconda proiezione

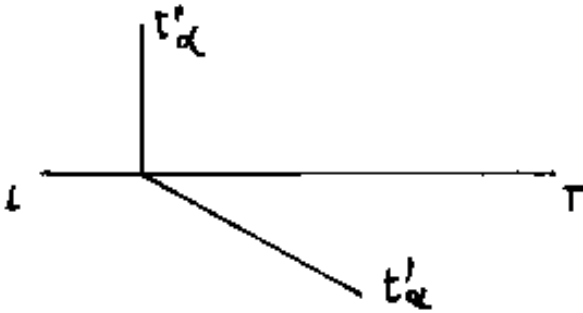
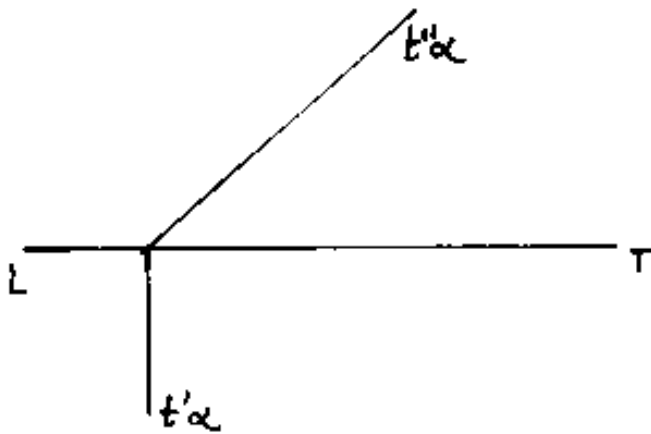
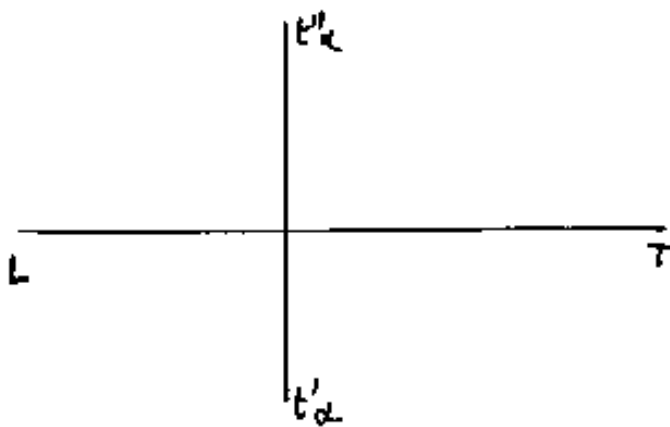
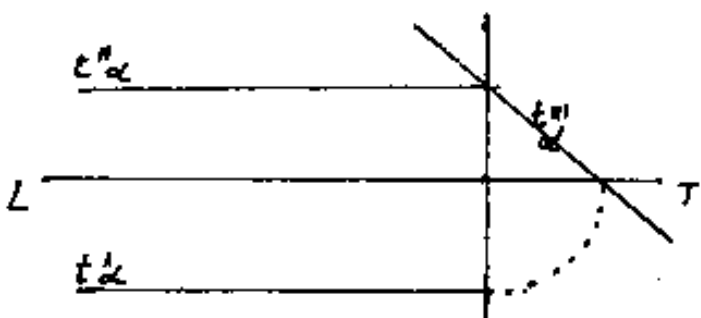
Retta proiettante in prima proiezione

Retta parallela al secondo piano di proiezione ed incli=

piano di proiezione ed incli=
nata di α sull'orizzontale

<u>Retta passante per</u> LT

T_1 e T_2 coincidono. Per determi=
nare l'inclinazione sull'oriz=
zontale occorre avvalersi di
un piano proiettante.

Retta per LT attraverso il II ed il IV diedro. Notare le inclinazioni delle proiezioni per poter prendere proiezioni di punti

Rette perpendicolari ad LT, passanti per I e III diedro e per II e IV diedro (Il terzo piano di proiezione consente di vedere l'inclinazione)

Ricordiamo che su un piano comunque inclinato, c'è sempre un insieme di rette orizzontali e per=pendicolarmente ad esse c'è l'insieme delle rette di massima pendenza. Solo se il piano di giacitura è verticale le rette di massima pendenza diventano rette verticali. In altre parole, in ogni piano vi sono infinite rette orizzontali mentre

in ogni piano vi sono infinite rette orizzontali mentre le rette verticali esistono solo su piani verticali.

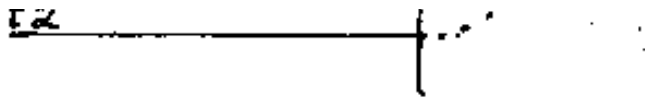
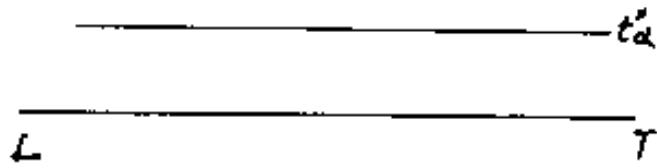
Si noti quindi che i termini: "verticale" ed "orizzontale" non possono scambiarsi, mentre è possibile scambiare gli assi cartesiani di riferimento.

Ogni retta verticale è asse di un fascio di piani verticali.

Piano proiettante in prima proiezione (È un piano verticale, le figure su esso si proiettano sulla I° traccia) (in prima proiezione)

Piano proiettante in seconda proiezione (Le figure su di esso si proiettano sulla 2ª traccia) (in seconda proiezione)

Piano di profilo (È un piano verticale, perpendicolare ad LT, le figure su di esso si proiettano sulle tracce, in 1ª ed in 2ª proiezione **è il terzo piano di proiezione**

Piano parallelo alla linea di terra (LT) rappresentato anche con la terza traccia.

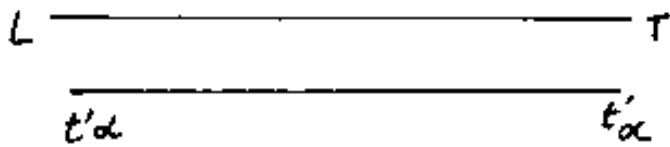
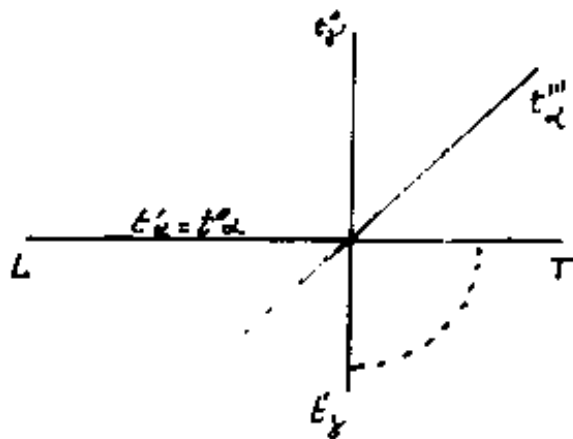
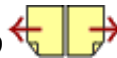
t_α

con la terza traccia.

t''_α

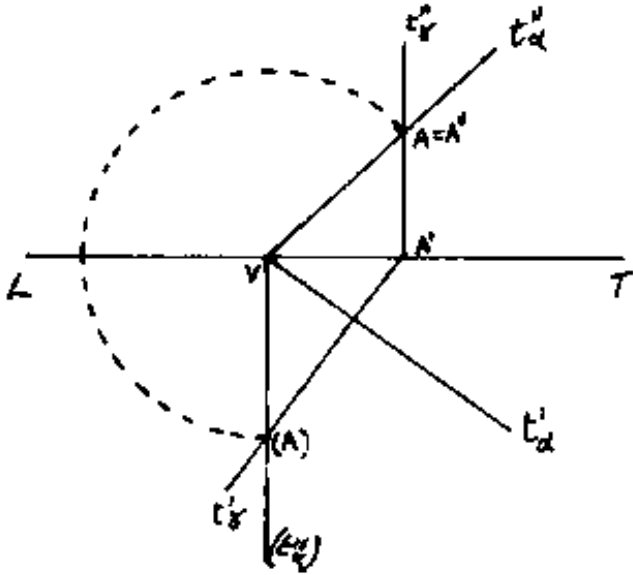
L T

Piano orizzontale (la prima traccia è all'infinito)

L T

t'_α t''_α

Piano verticale parallelo al secondo piano di proiezione (la seconda traccia è all'infinito)

Per rappresentare un piano passante per la linea di terra (LT) è necessario il III piano di proiezione.

Le vere grandezze

In geometria descrittiva vi sono due operazioni di notevole importanza in quanto consentono di disegnare in vera grandezza i segmenti visti "di scorcio" nelle proiezioni. – Esse sono: "Il ribaltamento del piano" e "La ruotazione della retta". Il primo consiste nel ribaltare il piano su uno dei piani di proiezione, in tal modo le figure su tale piano si vedranno in vera grandezza sul piano di proiezione ove si è ribaltato. La ruotazione della retta consiste nel renderla parallela ad un piano di proiezione, in tal modo i segmenti staccati sulla retta ruotata si proietteranno in vera grandezza sul piano di proiezione parallelo.

Il ribaltamento del piano

Vogliamo ribaltare il piano α sul primo piano di proiezione; assumiamo come asse di rotazione la sua prima traccia t'_α, tutti i punti del piano, nella rotazione, descriveranno circonferenze su

pioni perpendicolari all'asse; tracciamo quindi il piano γ proiettante in prima proiezione ed avente t'γ perpendicolare a t'α (quindi il piano è perpendicolare a t'α)
Il punto V comune alle due tracce di α è certamente un punto di α che non si sposterà nel ribaltamento perché appartenente all'asse di rotazione (t'α). Il punto A comune alle seconde tracce di α e γ appartiene ad entrambi i piani. Il segmento $\overline{VA}$ giacente sul II° piano di proiezione è già in vera grandezza, ed è il raggio della circonferenza che traccerà A sul piano γ nel ribaltamento.
$\overline{VA}$ rimane costante a ribaltamento avvenuto, cioè quando tutto il piano α coinciderà col primo piano di proiezione e quindi A sarà finito in (A) sulla prima traccia di γ ove: $\overline{VA} = \overline{V(A)}$. (Elementi ribaltati si indicano in parentesi). (γ è detto piano ausiliario)

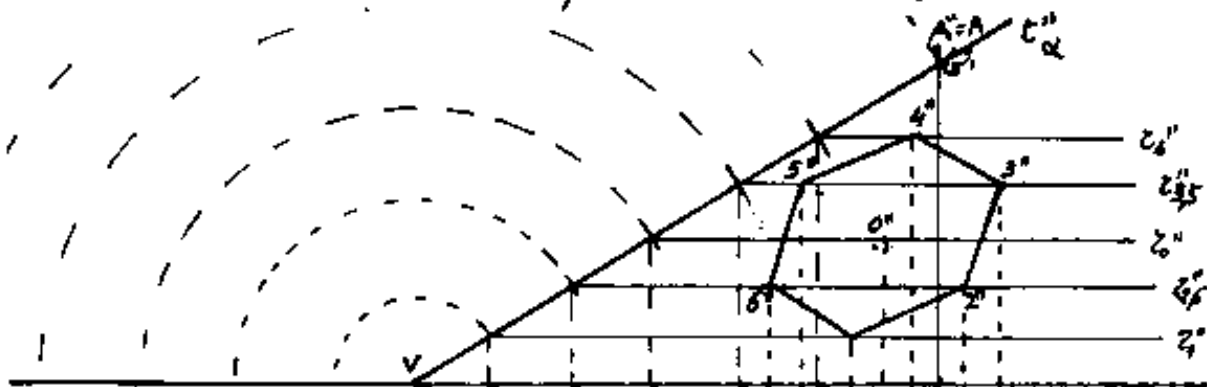
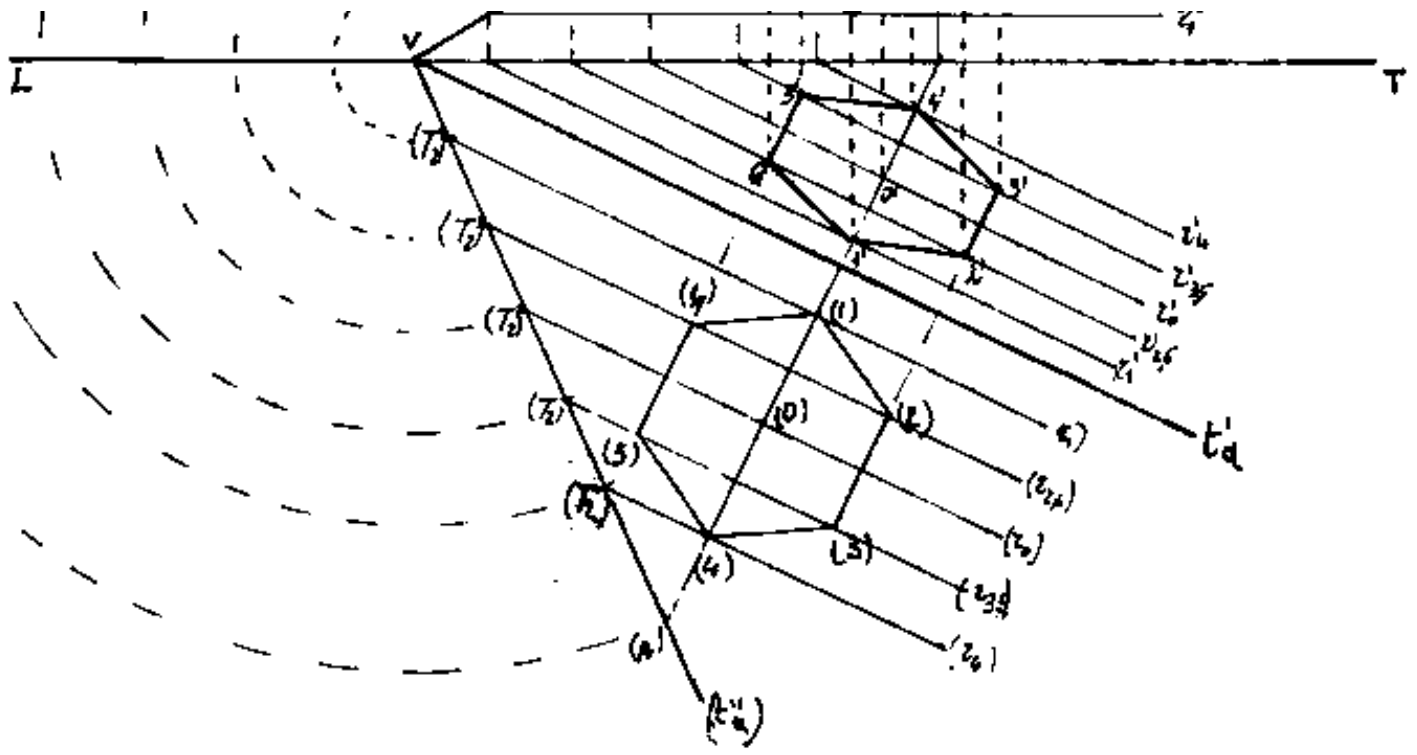
Una volta ribaltato il piano, possiamo dise=

gnarci in vera grandezza una figura qualsiasi, (per esempio un esagono) quindi riportando il piano nella sua primitiva posizione possiamo vedere come le proiezioni deformano la figura. (L'esagono proiettato non sarà più regolare). Per eseguire le proiezioni della figura, ci si avvale del fatto che rette paral=lele all'asse di rotazione, rimangono parallele nel

ribaltamento, e poiché il nostro asse (prima traccia) é orizzontale, tali rette saranno orizzontali. Quindi nel ribaltamento, ciascun punto della figura, e del piano α rimane su un piano perpendicolare all'asse di rotazione e su una retta parallela a tale asse.

Esempio

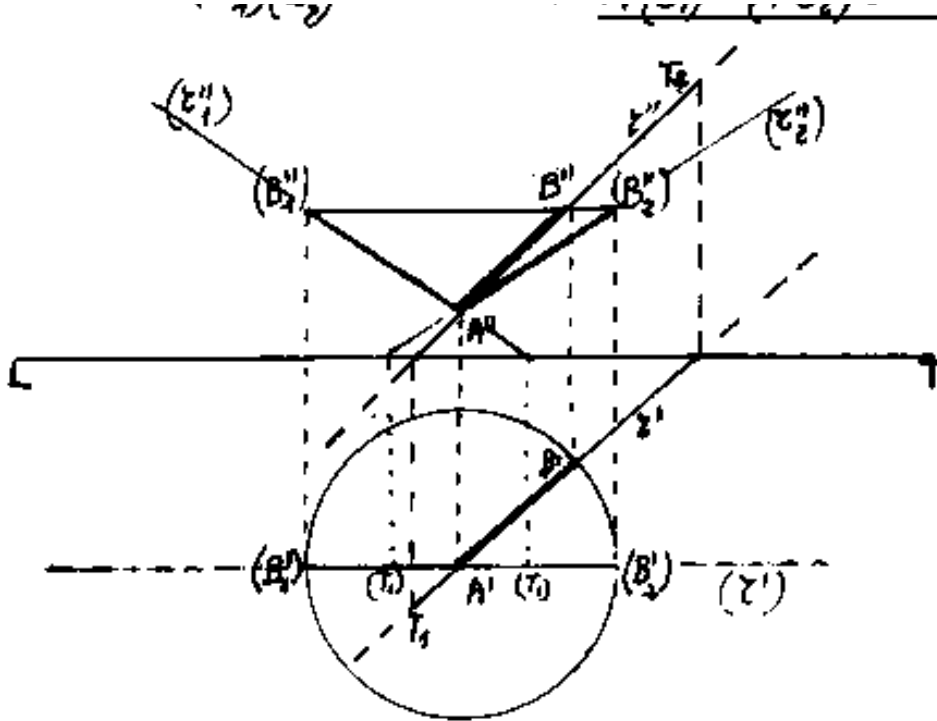
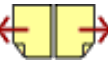
Tracciato su α ribaltato l'esagono regolare: 1,2,3,4,5,6; per ciascun punto tracciamo le rette perendicolari e parallele all'asse; le prime sono anche le tracce dei piani γ, le seconde avranno le tracce ribaltate (T_2) su (t''_α) e la loro distanza da V resta invariata nel ribaltamento per cui è facile tracciare le proiezioni delle rette parallele all'asse ed orizzontali da cui le proiezioni dei punti.

t''_α t''_4 t''_{35} t''_0 t''_{62} t''_1 4" 5" 3" 0" 6" 2" V

Rotazione della retta

Se vogliamo la vera grandezza di un segmento $\overline{AB}$ di cui conosciamo le proiezioni, basta rendere parallela ad un piano di proiezione la retta su cui giace il segmento, in quella proiezione ogni segmento della retta si proietterà in vera grandezza. A tal fine basta ruotare un segmento di retta, che nella rotazione descriverà una superficie conica.

Esempio

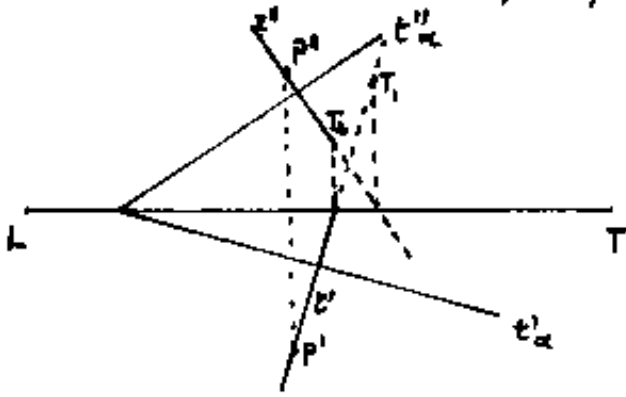
Il segmento $\overline{AB}$ della retta r vogliamo renderlo parallelo al 2ª piano di proiezione. L'asse di rotazione deve essere verticale, e la faremo passare per A, in tal modo le proiezioni di A resteranno immutate nella rotazione, mentre B' descriverà una circonferenza e B'' un segmento orizzontale pari al diametro della circonferenza: $\overline{(B_1'')(B_2'')}$ mentre: $\overline{A''(B_1'')} = \overline{(A''B_2'')}$ = vera grandezza

di $\overline{AB}$

Spesso l'asse di rotazione si fa passare per T_1 (prima traccia della retta).

Condizioni di perpendicolarità

1) Una retta è perpendicolare ad un piano quando le proiezioni della retta sono perpendicolari alle tracce omonime del piano

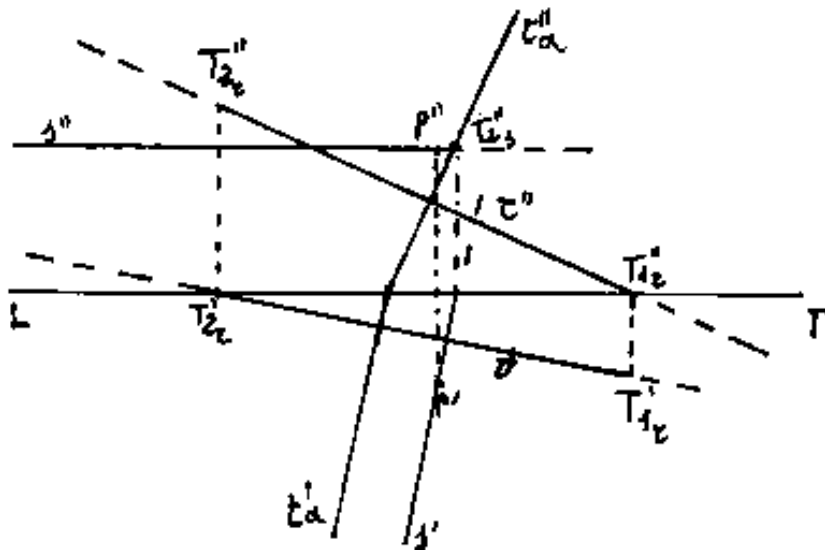
2) Due rette sono perpendicolari quando, incontrandosi, una appartiene ad un piano perpendicolare all'altra.

3) Due piani sono perpendicolari quando ciascuno di essi contiene rette perpendicolari all'altro.

È da notare che solo la 1) condizione è direttamente eseguibile. "Per esempio: per il punto P tracciare la retta perpendicolare al piano α"

Più complesso il problema: "Per il punto P tracciare il piano perpendicolare alla retta r."

È facile tracciare un piano α qualsiasi perendicolare ad

r, ed facile intuire che il piano per P sarà parallelo ad α. Ogni piano ha infinite rette orizzontali che hanno la caratteristica di avere la seconda proiezione parallela alla linea di terra e la prima proie-zione parallela alla traccia del piano cui ap-partiene, ($T_1 \to \infty$); perciò se per P facciamo

passare una retta orizzontale che abbia la prima proiezione perpendicolare alla prima proiezione della retta data; anche il piano che passa per la retta orizzontale conterrà P e se poniamo t''_α (passante per T_2) perpendicolare ad r'' t'_α dovendo essere parallelo alla prima proiezione della retta orizzontale sarà perpendicolare ad r' e quindi α contiene P ed è normale ad r.

La seconda condizione porta il problema:

" Per P tracciare una retta perpendicolare ad

una data retta r."

Notiamo che se una retta r ed un piano α sono perpendicolari, tutti i piani passanti per r sono perpendicolari ad α e tutte le rette giacenti su α e passanti per il punto Q comune ad r ed α sono perpendicolari ad r. Questa osservazione è la base per i problemi di perpendicolarità, quindi data una retta r

Le rette sghembe

Due rette sghembe, sono due rette che giacciono su due piani paralleli, per cui non hanno punti in comune.

Se per un punto di una delle due rette tracciamo una retta parallela all'altra, il piano che le contiene è parallelo all'altra retta; e l'angolo da esse formato è l'angolo delle direzioni delle due rette sghembe.

Se tracciamo tutti i piani perpendicolari ad una retta sghemba, nessuno di essi conterrà l'altra retta sghemba, salvo il caso che le loro direzioni siano ortogonali.

Se tracciamo tutti i piani passanti per una retta sghemba, uno solo di essi è parallelo all'altra retta sghemba e contiene tutte le sue rette parallele. Nessuno di essi è perpendecolare all'altra retta sghemba, salvo il caso che le direzioni delle

rette sghembe siano ortogonali.

L'angolo delle direzioni di due rette sghembe, può vedersi ribaltando il piano comune ad una sghemba ed alla parallela dell'altra retta sghemba.

Un retta perpendicolare ai due piani paralleli contenenti le rette sghembe intercetta il segmento distanza dei due piani.

3° metodo: Per r un piano α qualsiasi, e per P la retta s normale ad α, per s un piano β qualsiasi che conterrà P e sarà normale ad α, la retta i comune ad α e β incontrerà la retta r in N poiché β è normale ad r, ora si tratta solo di ruotare $\overline{PN}$ in modo da averne la vera grandezza. $\overline{P(N)}$ è a tratto e punto.

- Si noti come i vari metodi per risolvere un problema portino a soluzioni più o meno elaborate, ed anche più o meno precise per l'errore di graficismo.

Facendo molta pratica (non studiando teoremi a memoria) vengono spontanee risoluzioni talvolta

a memoria) vengono spontanee risoluzioni talvolta
molto semplici e precise. Abbiamo esposto risoluzio=
ni di carattere generale, potevamo aggiungerne altre,
però volevamo invitarvi a disegnare con cura
le varie risoluzioni e troverete che tutte possono
essere semplificate.

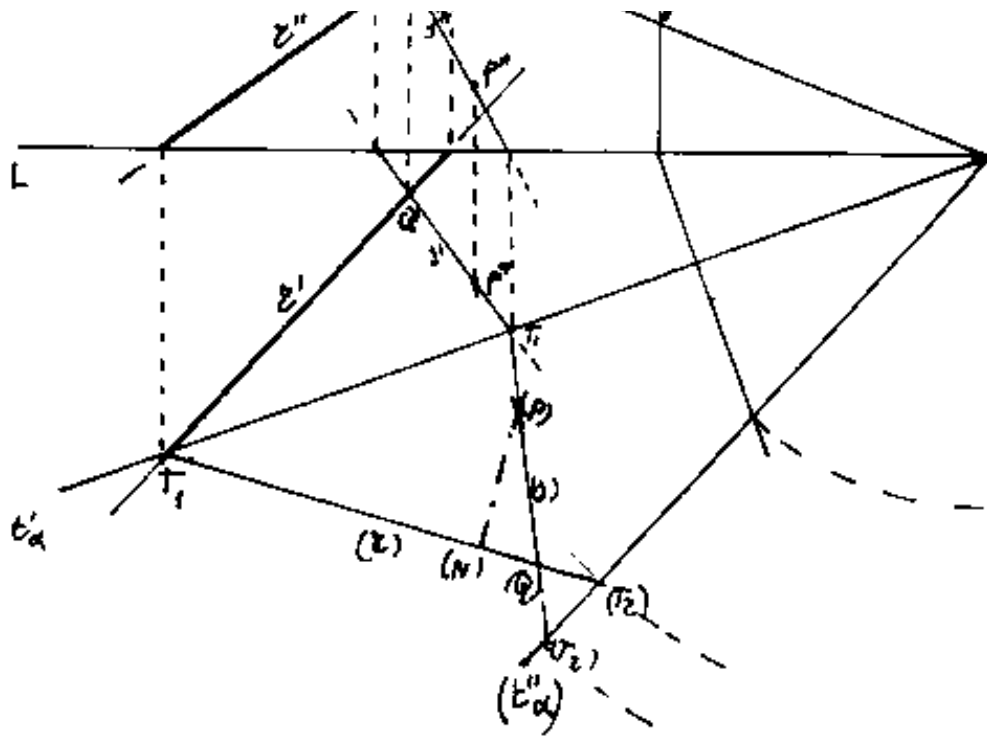
Problema: Dato la retta r ed il Punto P fuori di esso, trovare il segmento minima distanza di P da r.

Si può operare in più modi:

1) Ribaltare il piano comune ad r e P, e da P tracciare la normale ad r fino al punto comune N, il segmento $\overline{PN}$ è in vera grandezza, il segmento di minima distanza di cui si può riportare le proiezioni.

2) Si può da P tracciare le proiezioni della retta normale ad r ed individuato N comune ruotare la retta normale per avere $\overline{PN}$ in vera grandezza.

3) Per P si può tracciare la parallela alla r e ribaltare il piano delle due rette, oppure tracciare da P la normale al piano parallelo alla r e passante per P. ecc.

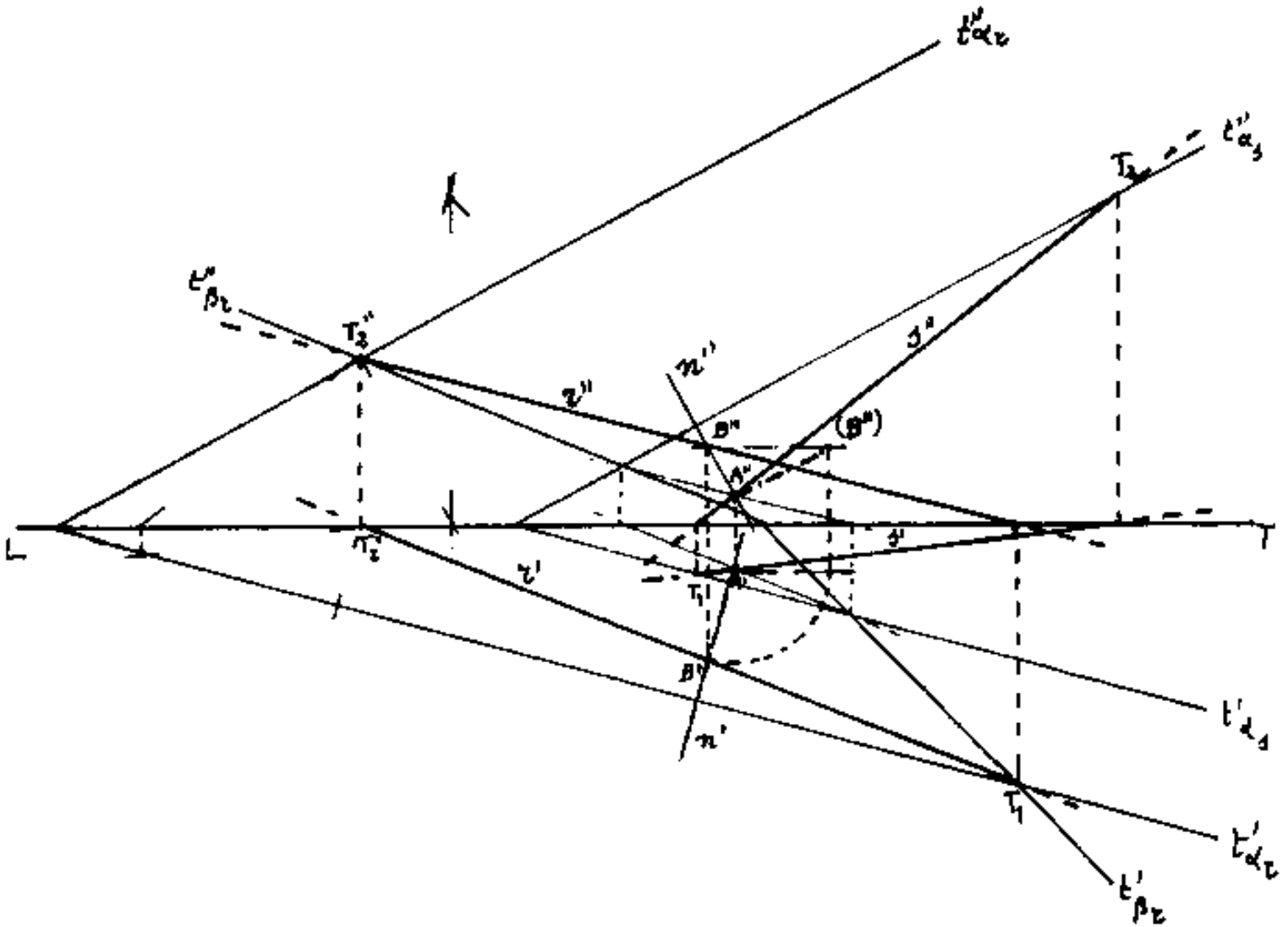
Vediamo il 1) metodo: preso un punto Q generico su r tracciamo la retta $\overline{PQ}=s$ ribaltiamo α comune

ripaltiamo α comune ad r ed s e da (P) ribaltato la normale ad (t) ripaltata. Il segmento $\overline{PN}$ è a tratto e punto.

Fra le infinite rette perpendicolari ai due piani contenenti le rette sghembe, v'è un piano di rette perpendicolari che contiene una delle due rette sghembe, ed un altro piano che contiene l'altra retta sghemba; la retta comune a questi due piani perpendicolari è la retta perpendicolare alle due rette sghembe, che intercettano su di essa il segmento di minima distanza delle due rette sghembe ed uguaglia la distanza dei due piani paralleli su cui giacciono le rette sghembe.

Siano: "r" ed "s" le rette sghembe giacenti rispettivamente sui piani paralleli: α_r ed α_s; e sui piani perpendicolari ad α: β_r e β_s; sia "n" la retta normale ad r ed s comune a βr e βs e su di essa $\overline{AB}$ il segmento di minima distanza. (ruotato per avere la vera grandezza.)

Date quindi due rette sghembe r ed s per un punto di r (per es. una traccia) si fa passare una retta parallela ad

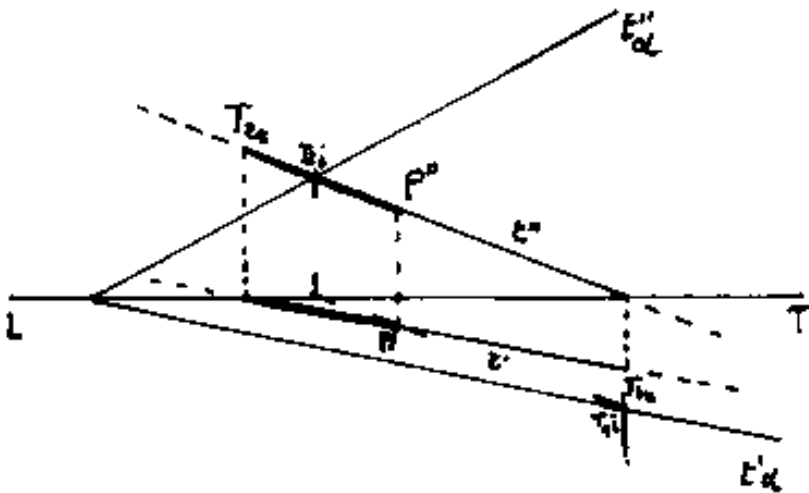
di r (per es. una traccia) si fa passare una retta parallela ad s (non importa disegnarla, basta segnare la sua prima traccia, che unita con la prima traccia di r sarà la traccia del piano α parallelo ad s (t'_α) che incontrando la linea di terra permette di tracciare (t''_α). Per lo stesso punto di "r" possiamo tracciare la normale ad α e quindi per r il piano β normale ad α, che incontra in A la s.

Da A la normale ad α che incontrerà in B la r, quindi ruotare il segmento $\overline{AB} = \overline{A''(B'')}$. (a tratto e punto)

Poiche' gli errori di graficismo possono in qualche caso essere notevoli; per cui conviene verificare ogni passaggio,

per esempio ripetendo la costruzione con punti diversi,
o ripetere la costruzione scambiando s e t. Di n° non
si sono disegnate le tracce, che, nel caso in esame risultano troppo ravvicinate e possono confondere il disegno.

Intersezioni

Molti problemi di geometria descrittiva richiedono, per essere risolti, elementi ausiliari; per esempio piani ausiliari (generalmente proiettanti, perché richiedono meno linee di disegno) o rette ausiliarie aventi caratteristiche particolari (per esempio orizzontali).

Basilare è l'intersezione di una retta con un piano, si fa passare per la retta "r" un piano ausiliario (in figura proiettante in seconda proiezione di cui si disegna solo le tracce della retta "i" comune col piano α, e della retta i si disegna il punto di intersezione con r (P') da cui P''. Il tratto di retta r al di qua del piano si è ingrossato)

z al di qua del piano si è ingrossato)

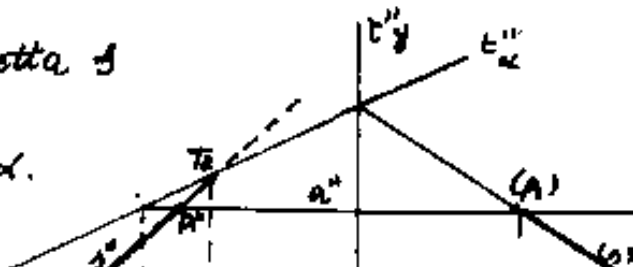
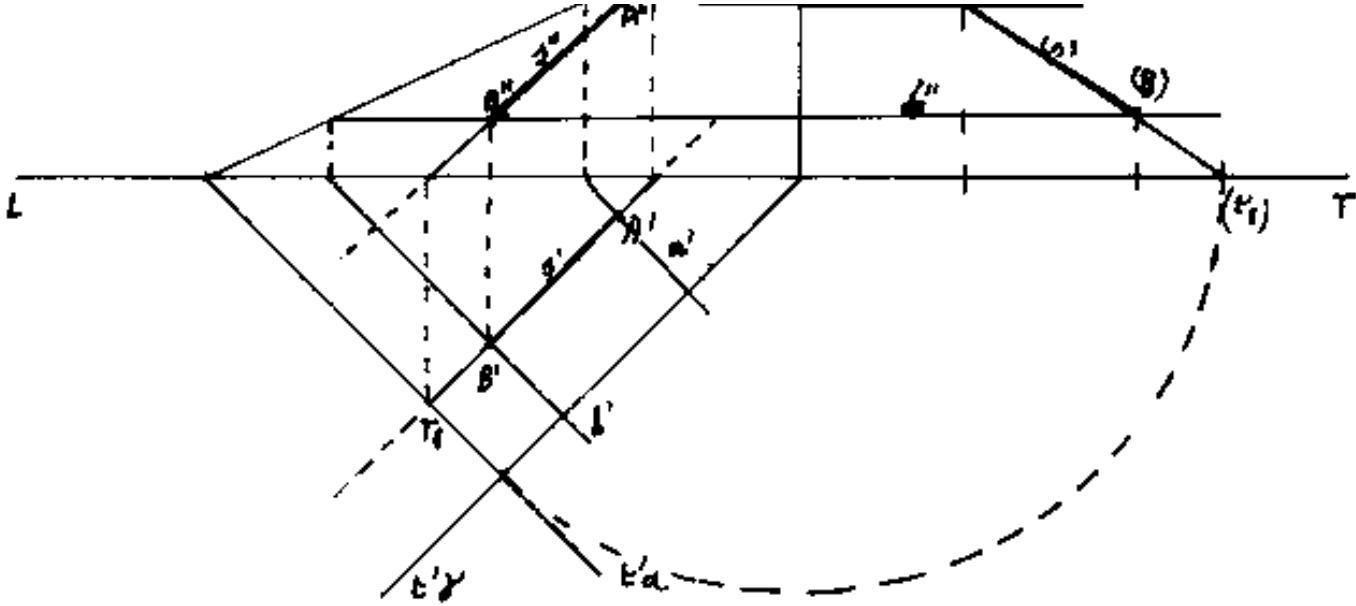
Cio' premesso risulta ora facile fare l'inter=
sezione di solidi. Iniziamo con un solido sezio=
nato da un piano (che ribalteremo per vedere la sezio=
ne in vera grandezza). Consideriamo la sezione di una
piramide, giacente sul primo piano di proiezione,
con un generico piano α. (per ogni spigolo della

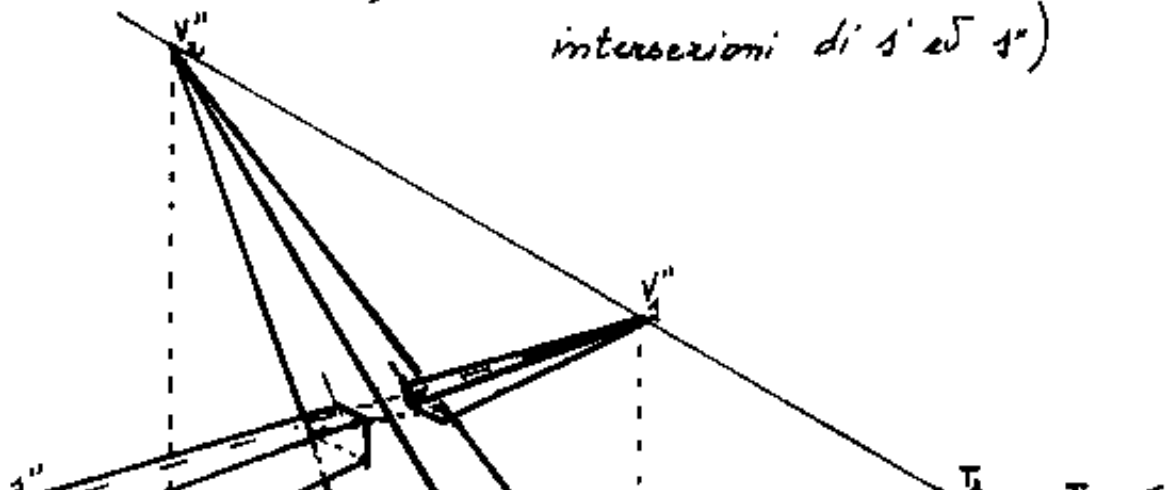
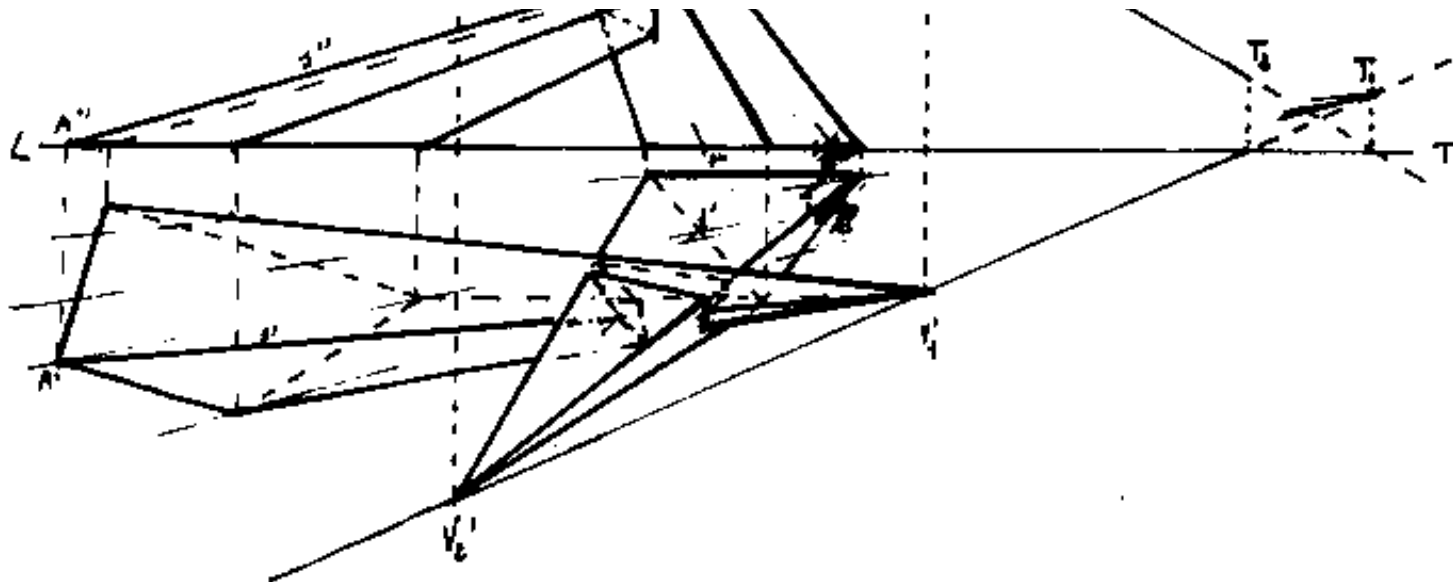
piramide si ripete la costruzione ora descritta)

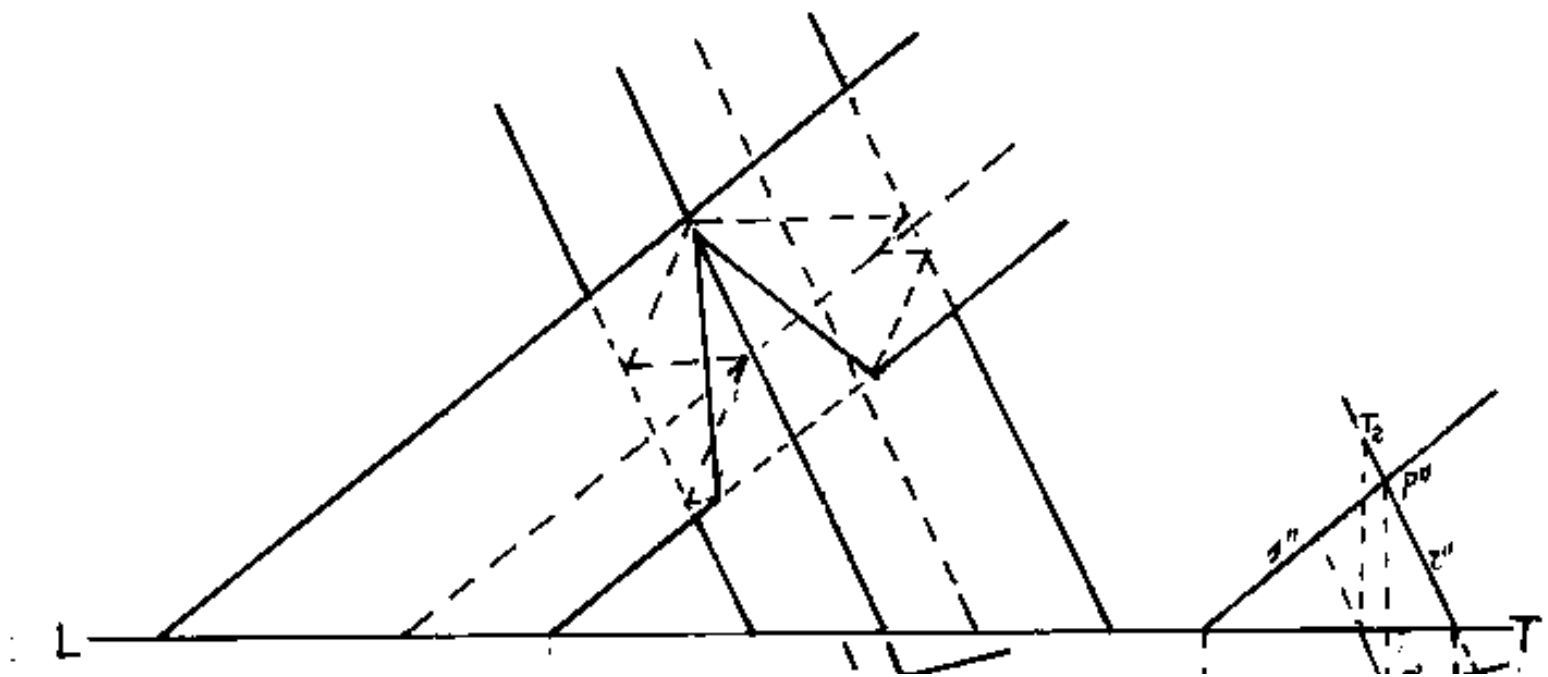
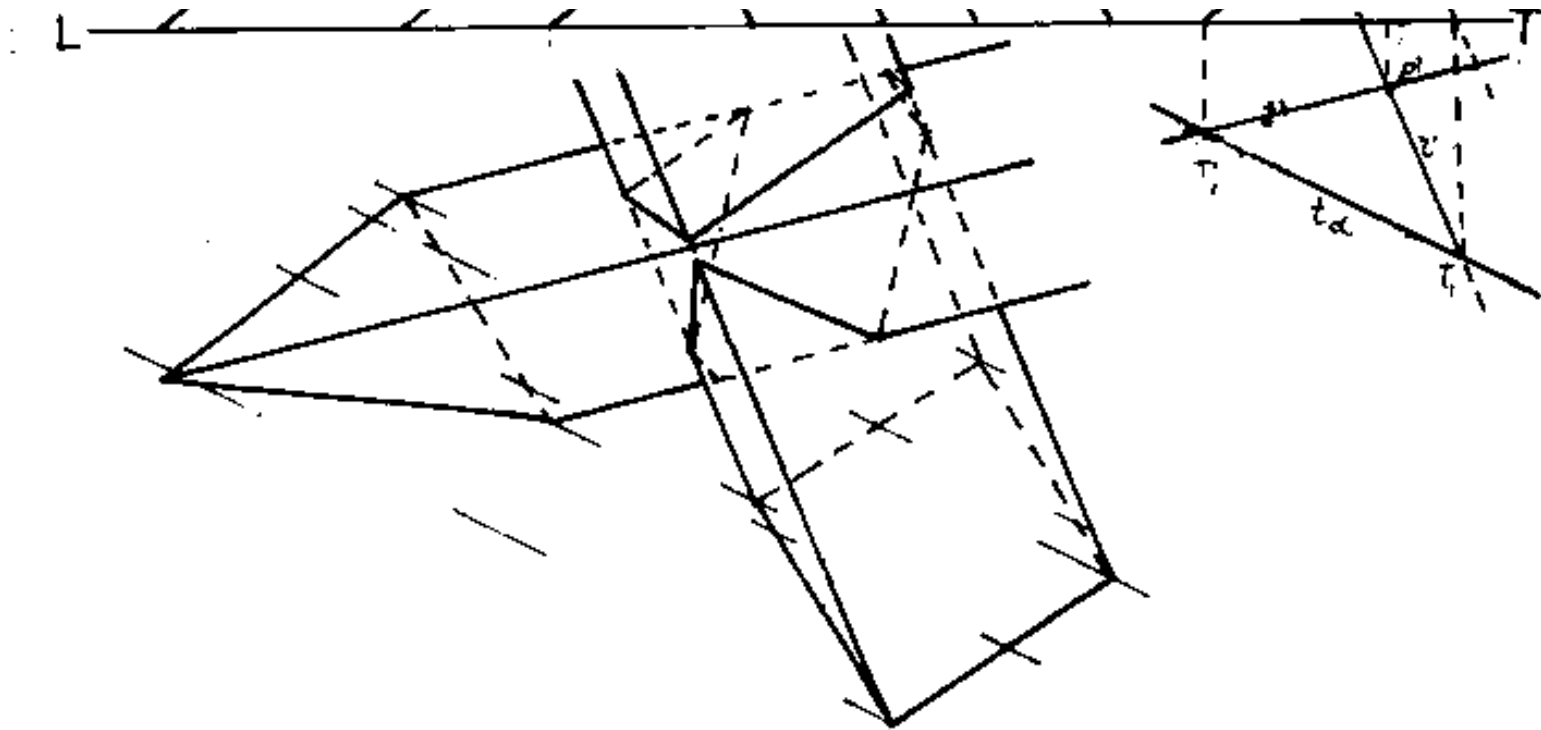
Poiché gli spigoli di qualsiasi solido a facce piane, sono delle rette, la costruzione è la stessa.

Per i solidi delimitati da superfici curve è necessario qualche accorgimento. (Cono circolare retto su α alto due diametri)

- Un cerchio, su qualunque piano si proietti, avrá sempre due punti distanti un diametro (dagli estremi di un segmento, al diametro maggiore degli infiniti ellissi, agli infiniti diametri della sua circonferenza). Il diametro minore di un ellisse è sempre perpendicolare al diametro maggiore. Se il diametro maggiore è orizzontale, il diametro minore è sulla retta di massima pendenza del piano su cui giace il cerchio proiettato. Se consideriamo un piano α ribaltato sul primo piano di proiezione, i segmenti paralleli alla Iª traccia di α si proiettano in vera grandezza in prima proiezione e giacciono su rette orizzontali, le rette di massima pendenza proietteranno in vera grandezza i loro segmenti sulla retta comune ad α e γ ribaltata sul secondo piano, facendo coincidere t'_γ con LT.

Per A segmento $\overline{AB}$ sulla retta s di massima pendenza su α.

Intersezione di due piramidi

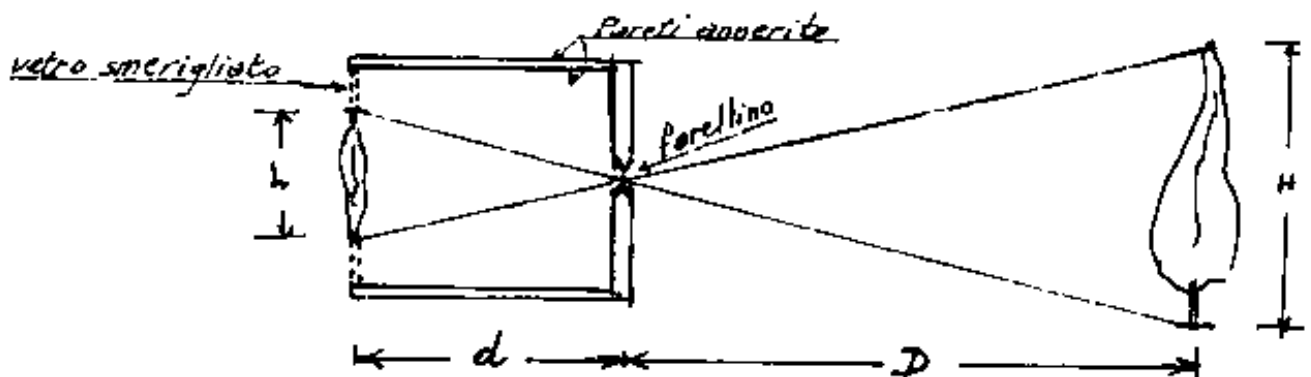
Per la retta che unisce i due vertici delle piramidi, facciamo passare un fascio di piani contenenti gli spigoli delle piramidi, se queste hanno le basi sul primo piano di proiezione, i vertici delle basi sono anche prime tracce delle rette spigoli, per cui ogni piano passante per i vertici delle piramidi la cui prima traccia passa per un vertice della base di una piramide, ne contiene lo spigolo, e se taglia due lati della base dell'altra piramide, determina le rette secondo cui il piano ne taglia le facce e quindi i punti in cui lo spigolo contenuto le perfora. ($\overline{T_1 A'}$ determina 1' e 2' da cui le intersezioni di s' ed s'')

Intersezione di prismi

L'intersezione di una piramide con un prisma ha reale la retta dei piani passante per il vertice della piramide e parallela al prisma; mentre per l'intersezione di due prismi tale retta è all'infinito ed i piani sono tutti paralleli fra loro. A noi interessa la direzione delle prime tracce, perciò prese due rette r ed s parallele ai prismi e complanari, le loro prime tracce danno la direzione cercata. Quindi si procede come l'esempio precedente per l'intersezione di due piramidi.

Le prospettive e le assonometrie

Oltre la proiezione di Monge che ha il centro di proiezione all'infinito e quindi proietta ortogonalmente sui piani di proiezione, consideriamo la proiezione centrale, ove il centro di proiezione è in campo finito e la proiezione dell'oggetto avviene su un piano detto quadro.

È evidente che se l'oggetto rimane fra il centro di proiezione ed il quadro, la sua rappresentazione risulta ingrandita, se sta dietro il quadro apparirà impiccolita. Questa seconda modalità utilizzeremo per la prospettiva

Consideriamo una camera oscura costituita da una scatola parallelepipeda, annerita, avente su una faccia un forellino centrale e sulla faccia opposta un vetro smerigliato;

a — D

sul vetro smerigliato si riforma l'immagine impiccolita nel raporto: $\frac{h}{H} = \left(\frac{d}{D}\right)$; $h = H\left(\frac{d}{D}\right)$. (l'immagine è capovolta)

quadro

centro di proiezione

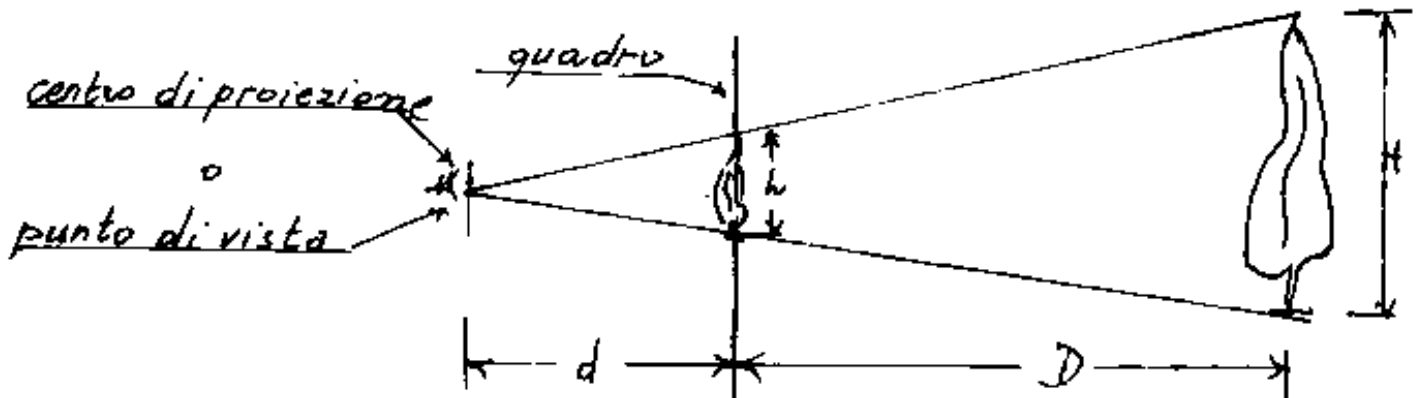
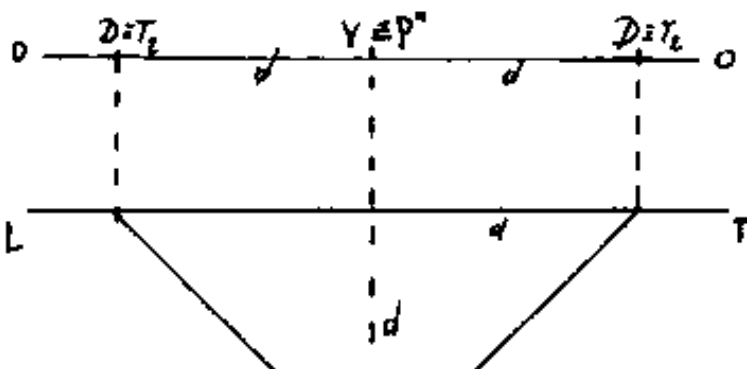
o

punto di vista

h

H

d — D

Nella proiezione centrale ad in prospettiva l'immagine si forma dritta e vale lo stesso rapporto della camera oscura. Nelle macchine fotografiche il forellino è dimensionabile col diaframma e vi è un sistema ottico "obiettivo" che mette a fuoco l'immagine sulla pellicola.

Consideriamo, nella proiezione di Monge, un punto P (punto di vista) nel primo diedro, e consideriamo il secondo piano di proiezione come "quadro" per immagini di oggetti nel secondo diedro. L'osservatore in P dista "d" dal quadro, e se il primo piano di proiezione si considera piano terra, il piano parallelo all'altezza dell'osservatore sarà il piano d'orizzonte, che intercetta sul secondo piano di proiezione la linea $\overline{OO}$ detta linea d'orizzonte. Se da P tracciamo due rette orizzontali a 45° sul quadro e siano sulla retta OO i punti D le loro seconde tracce; se indichiamo con $V \equiv P''$, la distanza $\overline{VD} = \overline{P''T_2} =$

d

45°

P'

con $V \equiv P''_1$ la distanza $\overline{VD} = \overline{P''T_0} = d$ è la distanza dell'osservatore dal quadro. <u>In prospettiva</u>: <u>V=centro di vista</u> = <u>punto di fuga di</u> tutte le rette normali al quadro. D= punti di fuga di tutte le rette a 45° sul quadro. $\overline{t_0 t_0}$ <u>luogo di tutti i punti di fuga.</u>

<u>Cosa si deve intendere per punto di fuga?</u> E' il punto all'infinito ove noi vediamo convergere un insieme di rette

parallele, che in prospettiva giace sulla linea d'orizzonte $\overline{oo}$
Tutte le rette parallele convergono nello stesso punto di fuga.
Se consideriamo un insieme di rette parallele, come in un rettifilo ferroviario vediamo le verghe del treno ed i cavi ad esse paralleli, oppure in un viale i filari di alberi o di siepi; le linee di gronda dei tetti, le linee dei davanzali delle finestre, le linee dei marciapiedi, ecc. noi le vediamo avvicinarsi, queste rette parallele, sempre di più, via via che si allontanano, fino a convergere in un ideale punto che chiamiamo punto di fuga. Gli oggetti più sono lontani, più li vediamo impiccoliti, è l'effetto prospettiva; le linee parallele al quadro si mantengono parallele, perché i loro punti hanno tutti la stessa distanza dal quadro perciò il loro punto di fuga è all'infinito; in particolare: le linee verticali si mantengono verticali in prospettiva.

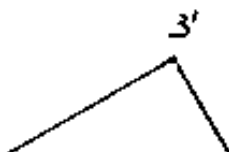
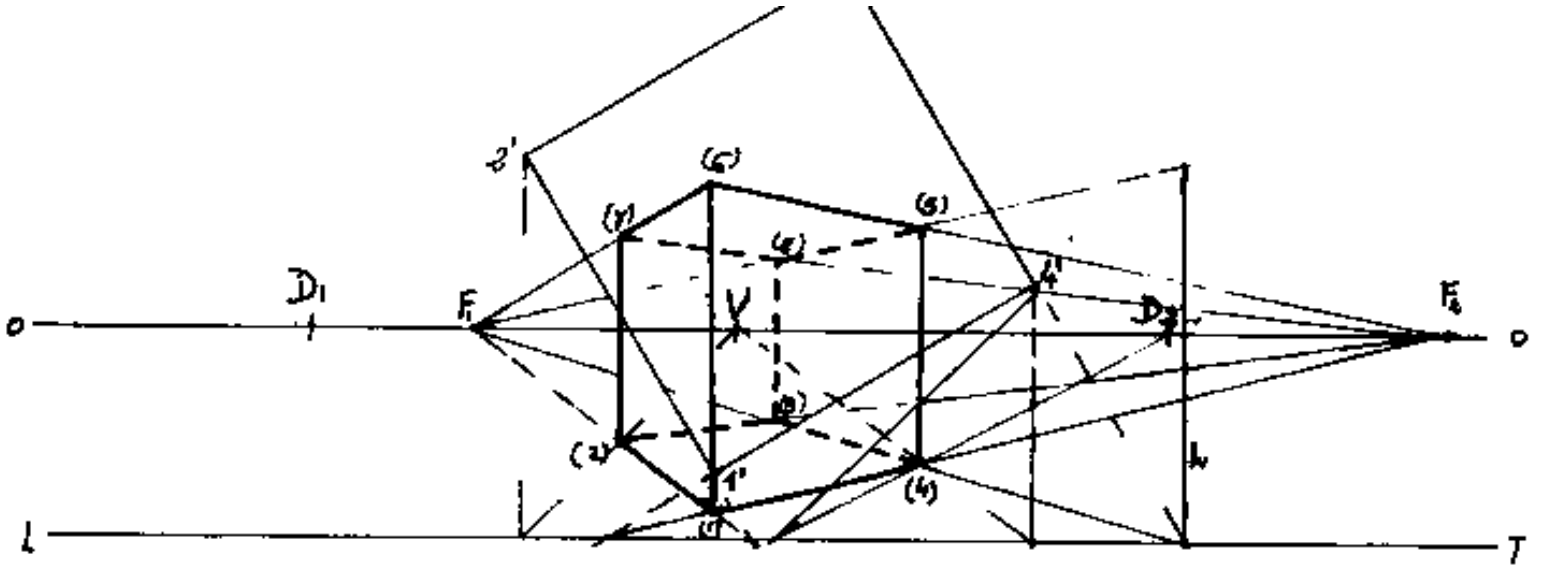
Facciamo la prospettiva di un cubo per

mettere in pratica la teoria.

Tracciata la linea di terra LT, si traccia al di sopra di LT la parallela linea d'orizzonte OO, la distanza fra le due parallele è l'altezza dell'osservatore al centro di $\overline{OO}$ fissiamo un punto V, punto di vista, che è

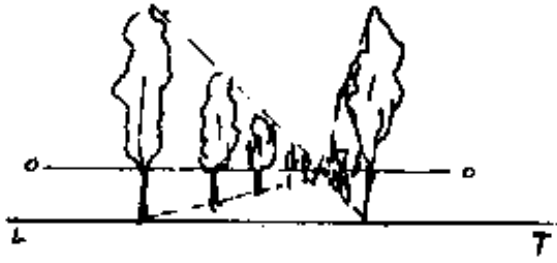
anche il punto di fuga delle rette normali al quadro.
Se "d" è la distanza dell'osservatore dal quadro, poniamo su $\overline{OO}$, simmetrici a V i punti D_1 e D_2 tali che $\overline{D_1V}=\overline{D_2V}=$ "d", ove D_1 e D_2 sono rispettivamente i punti di fuga delle rette a 45° a sinistra e a destra rispetto all'osservatore. Le distanze da LT delle prime proiezioni dei punti sono le distanze dei punti dal quadro. I punti sul quadro sono le seconde tracce delle rette e coincidono con la loro rappresentazione in prospettiva.

Disegnamo il quadrato 1',2',3',4', nel secondo diedro e prolunghiamo i lati fino alle tracce su LT. Per un punto (per es. 4') facciamo passare due rette orizzontali, una perpendicolare al quadro, l'altra a 45° ed uniamo le loro tracce su LT con i loro punti di fuga V e D, il punto comune è la rappresentazione in prospettiva del punto (per es (4)). Se uniamo le tracce di 1'-4' e

3'

di 4'-3' con (4) troviamo su $\overline{oo}$ i punti di fuga F_1 ed F_2 di tutte le

parallele a tali lati, per cui se su LT vi sono le tracce dei quattro lati, basterà unirle con i punti di fuga F_1 ed F_2 per avere la pianta completa in prospettiva, se un lato (come 2'-3') ha la traccia fuori dal disegno occorre riportare in prospettiva un punto (per es 2') e basterà una perpendicolare la cui traccia unita con V intersecherà la prospettiva del lato (in (2)). Queste costruzioni si possono fare anche per controllare il grafico.

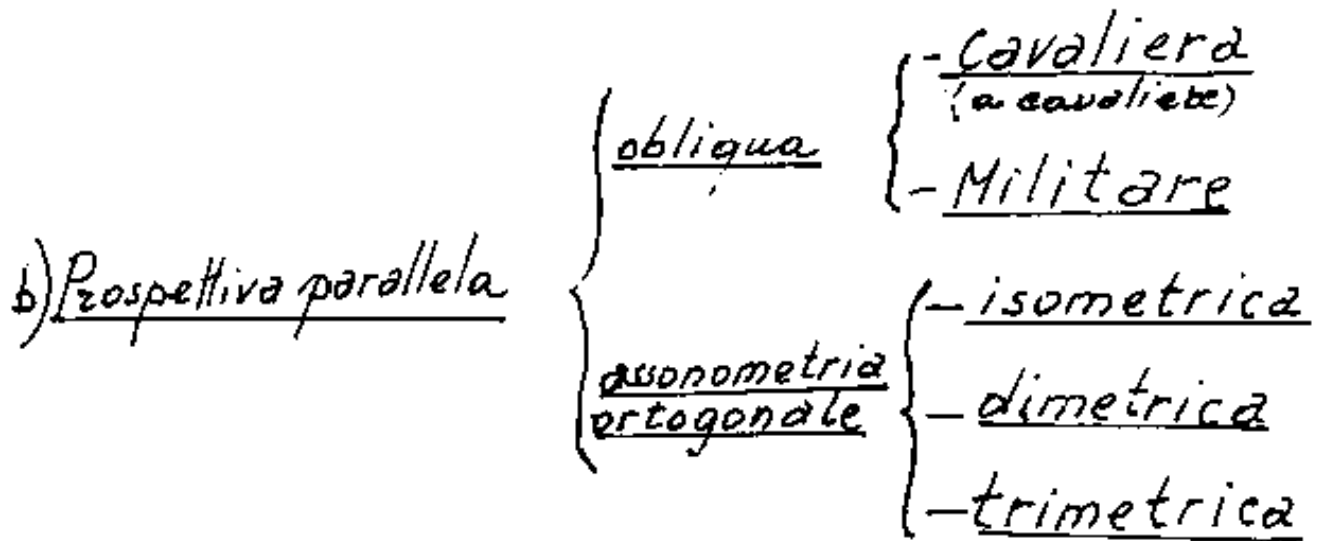
Se dalla traccia di un lato su LT riportiamo in verticale (sul quadro) l'altezza h (nel nostro caso un lato = spigolo) e l'estremo lo colleghiamo col punto di fuga, sulle verticali dei punti in prospettiva, si intercettano i lati superiori paralleli che uniti dai loro estremi ai punti di fuga delineano in prospettiva l'intero cubo.

Supponiamo di essere su un lato di un viale alberato largo otto metri e noi osserviamo a due metri da terra, la fuga dei due filari di alberi fra

loro distanti quattro metri ed alti otto metri. Si noti come le spaziature e l'impiccolimento degli alberi sia diverso per i due lati, data la posizione dell'osservatore. (I disegni possono eseguirsi in scala)

La prospettiva che abbiamo esposto è anche chiamata: "Prospettiva Conica" o "Prospettiva centrale" da distinguersi dalla cosiddetta: "Prospettiva parallela", spesso detta semplicemente Assonometria.

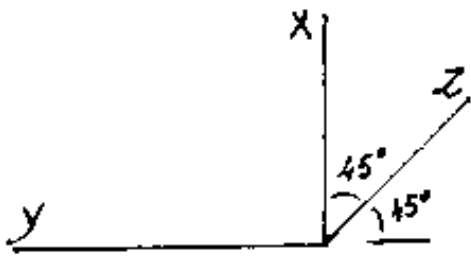
In effetti la visione complessiva di un oggetto può eseguirsi:

a) Prospettiva conica o Prospettiva centrale

b) Prospettiva parallela
- obliqua
  - Cavaliera (a cavaliere)
  - Militare
- assonometria ortogonale
  - isometrica
  - dimetrica
  - trimetrica

(Schema da: P. Vannelli e C. Corradi - Disegno di Macchine - ed. Vannini - Brescia - 1966)

Prospettiva obliqua Cavaliera

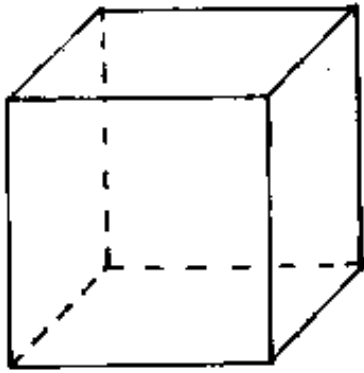
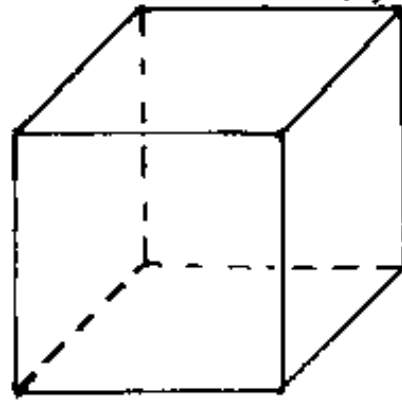
X| assi:

X
Z
45°
45°
y

assi:

in x ed y veri valori, in Z valori $\frac{1}{2}$.

tal volta in Z valori $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

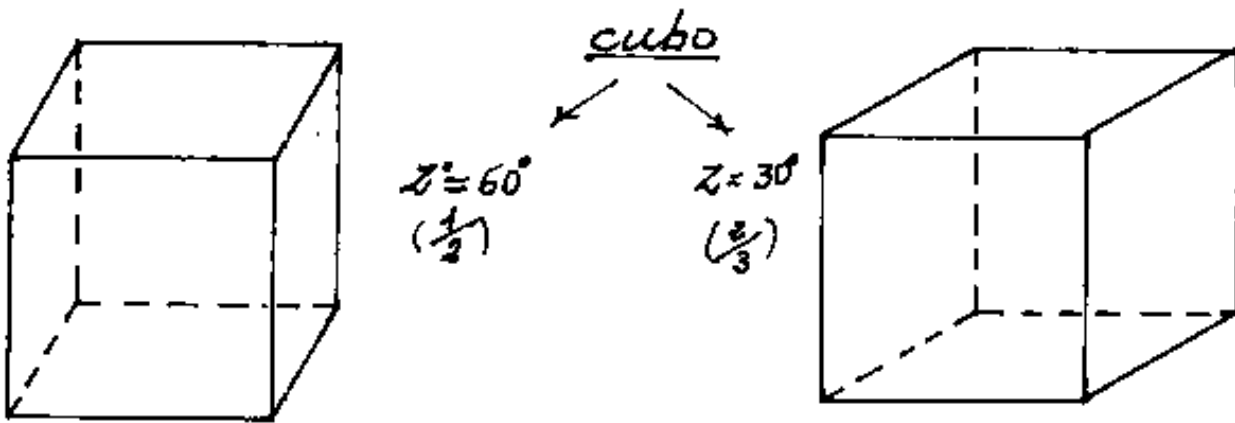
cubo

$Z=\frac{1}{2}$

$Z=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Tal volta l'asse z è inclinato di 60° con coeff. $\frac{1}{2}$ . .
oppure l'asse z è inclinato di 30° con coeff. $\frac{2}{3}$

cubo

z = 60° ($\frac{1}{2}$)

z = 30° ($\frac{2}{3}$)

Si noti, confrontando i quattro disegni, come sia possibile dare più o meno risalto alle facce laterali giocando sul modulo e sull'angolo.

Prospettiva obliqua militare.

Nella prospettiva militare resta verticale solo l'asse verticale, gli altri due assi sono entrambi inclinati sull'orizzontale degli angoli α e β. Spesso si pone: $\alpha = \beta = 45°$, od anche $\alpha = 30°$ e $\beta = 60°$, con modulo 1 (uno) in x, y, e z.

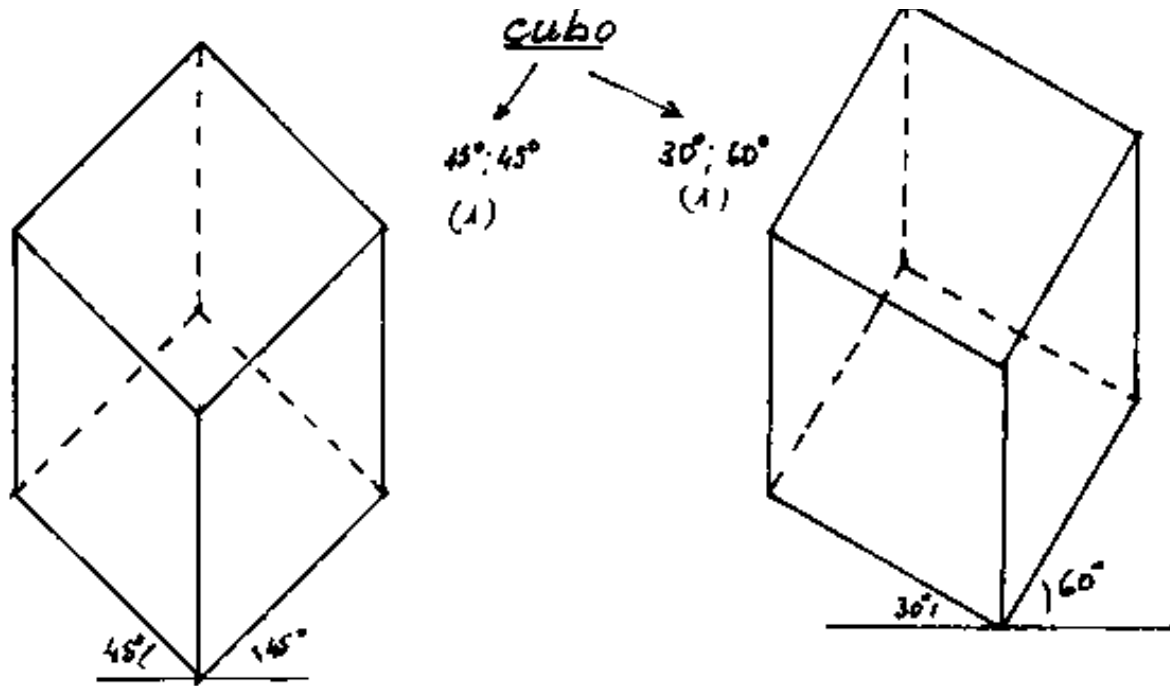
cubo

cubo

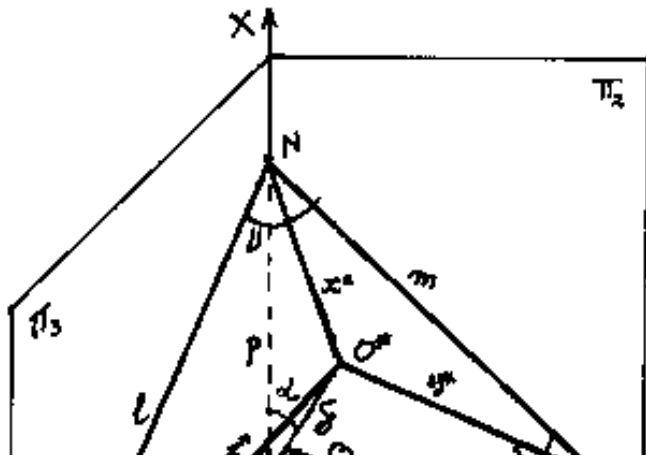
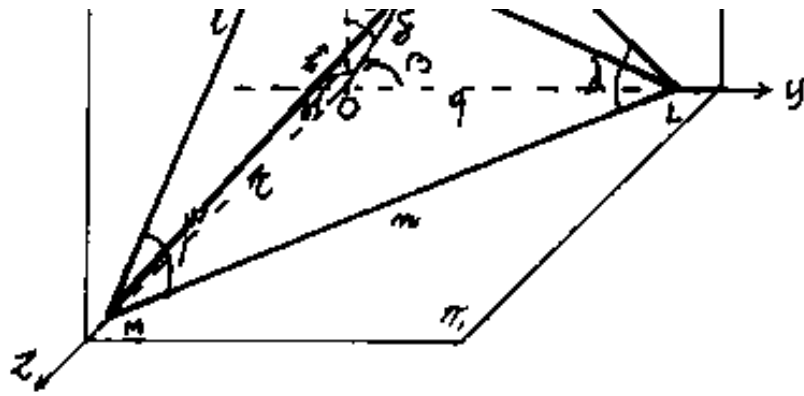
45°; 45° (1)

30°; 60° (1)

45° 45°

30° 60°

Prospettiva parallela assonometrica (Assonometria)

L'assonometria si ottiene proiettando un solido ortogonalmente su un piano comunque inclinato. (Centro di osservazione all'infinito). Per comprendere l'assonometria, (così facile ad eseguirsi), sono necessari alcuni complementi di Geometria dello Spazio, per confrontare le grandezze in assonometria con quelle, dello stesso solido, in proiezione di Monge.

Sia: $oxyz$ una terna oraria di assi cartesiani ortogonali, con la x disposta verticalmente, siano: π_1 = orizzontale, π_2 = verticale, π_3 = verticale, normale alla linea di terra comune a π_1 e π_2, i piani di proiezione secondo Monge. Un qualsiasi piano α intercetta, con i piani di proiezione, un triangolo LMN i cui lati: l, m, n, giacciono rispettivamente sulla III°, II°, I°

traccia di α.

Proiettando perpendicolarmente ad α gli assi cartesiani: x, y, z avremo su α gli assi assonometrici: x^*, y^*, z^*, non più ortogonali fra loro. L'origine O si proietta in O^* ortocentro del triangolo LMN. (vedi Vol III).

L'asse x^* è su $\overline{O^*N}$, l'asse y^* su $\overline{O^*L}$, l'asse Z su $\overline{O^*M}$.

L'equazione generica del piano α è:

$$ax + by + cz + d = 0$$

dividendo per $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ si ha:

$$(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z = \delta$$

ove: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, sono i coseni direttori del piano, cioè i coseni degli angoli che la retta per l'origine e normale al piano (retta di giacitura) forma rispettivamente con gli assi x, y, z. Il segmento $\overline{OO^*}=\delta$ è la distanza del piano dall'origine O degli assi.

Dividendo l'equazione per δ, si ha in forma segmentaria:

$$\frac{x}{\delta/\cos\alpha} + \frac{y}{\delta/\cos\beta} + \frac{z}{\delta/\cos\gamma} = 1$$

ove posto:

$p = \overline{ON} = \delta/\cos\alpha$; $q = \overline{OL} = \delta/\cos\beta$; $r = \overline{OM} = \delta/\cos\gamma$ si ha:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

con p, q, r segmenti staccati dal piano sugli assi x, y, z. Se: λ, μ, ν sono gli

[illegible]

angoli interni del triangolo LMN di lati l, m, n e δ R = raggio del cerchio circoscritto, si ha:

$$x^*_N = \overline{O^*N} = n/tg(\nu) = \delta\, tg(\alpha) = p\, sen(\alpha) = 2R \cos(\nu)$$

$$y^*_L = \overline{O^*L} = l/tg(\lambda) = \delta\, tg(\beta) = q\, sen(\beta) = 2R \cos(\lambda)$$

$$z^*_M = \overline{O^*M} = m/tg(\mu) = \delta\, tg(\gamma) = r\, sen(\gamma) = 2R \cos(\mu)$$

da queste relazioni calcoliamo i lati del triangolo.

$$l^2 = (p^2 + r^2) = \delta^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\gamma}\right) = \delta^2\left(\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\gamma}\right); \quad \boxed{l = \delta\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\gamma}}$$

$$m^2 = (p^2 + q^2) = \delta^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta}\right) = \delta^2\left(\frac{\operatorname{sen}^2\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}\right); \quad \boxed{m = \delta\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$n^2 = (q^2 + r^2) = \delta^2\left(\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma}\right) = \delta^2\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\beta\cos^2\gamma}\right); \quad \boxed{n = \delta\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}}$$

sostituendo nelle uguaglianze precedenti, abbiamo:

$$\delta\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\gamma}\cdot\frac{1}{tg(\lambda)} = \delta\, tg(\beta) \qquad \boxed{tg(\lambda) = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cos\gamma}}$$

$$\delta\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\frac{1}{tg(\mu)} = \delta\, tg(\gamma) \qquad \boxed{tg(\mu) = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$\delta\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}\cdot\frac{1}{tg(\nu)} = \delta\, tg(\alpha) \qquad \boxed{tg(\nu) = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{tg\lambda\, tg\mu}}}\ ; \quad \boxed{\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{tg\mu\, tg\nu}}}\ ; \quad \boxed{\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{tg\lambda\, tg\nu}}}\ ;$$

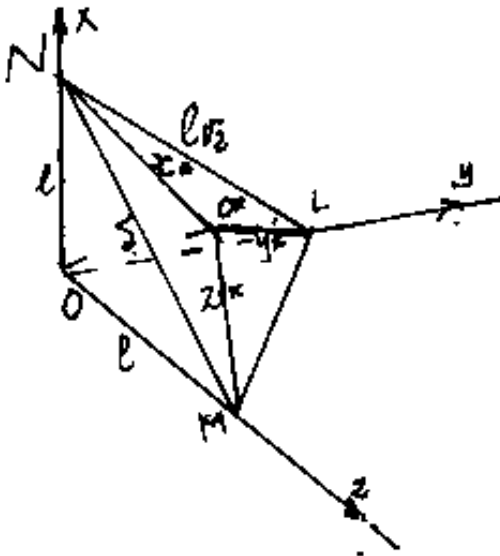
L'equazione del piano: $\frac{x}{\sqrt{tg\lambda\, tg\mu}} + \frac{y}{\sqrt{tg\mu\, tg\nu}} + \frac{z}{\sqrt{tg\lambda\, tg\nu}} = \delta$

può scriversi: $\boxed{\left(\sqrt{tg\nu}\right)x + \left(\sqrt{tg\lambda}\right)y + \left(\sqrt{tg\mu}\right)z = \delta\sqrt{tg\nu\, tg\lambda\, tg\mu}}$

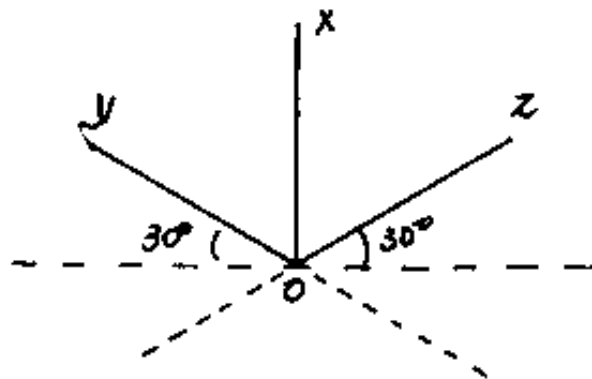
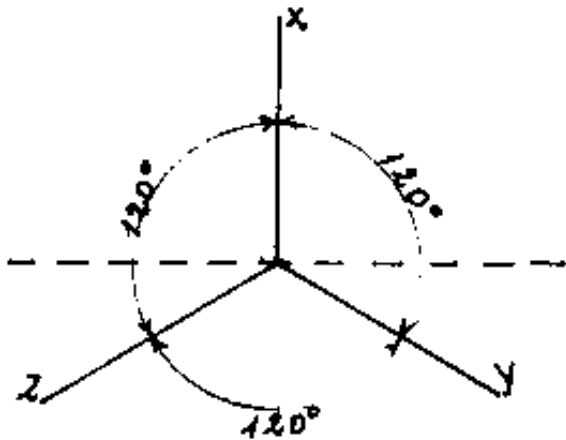
Vogliamo calcolare come gli assi assonometrici divido-no gli angoli interni del triangolo LMN. Cioè gli angoli: $\varepsilon = \hat{O}LM$; $\theta = O^*\hat{M}L$; che gli assi y^* e z^* formano con l'orizzontale. Siano: h_l, h_m, h_n le altezze rispetto ai lati: l, m, n ; $\cos\varepsilon = h_l/n$; $\cos\theta = h_m/n$ e poiché:

$h_l = m \operatorname{sen} \nu$; $h_m = l \operatorname{sen} \nu$ $\quad \cos\varepsilon = \dfrac{m \operatorname{sen} \nu}{n}$; $\cos\theta = \dfrac{l \operatorname{sen} \nu}{n}$

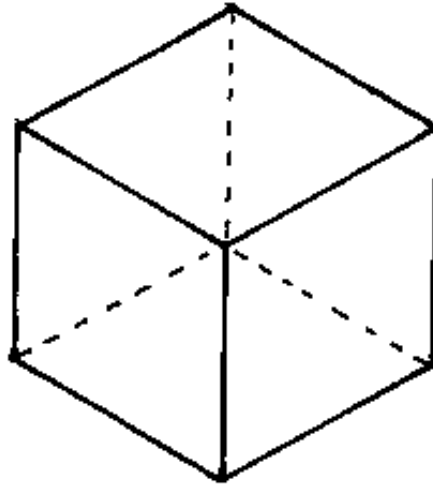
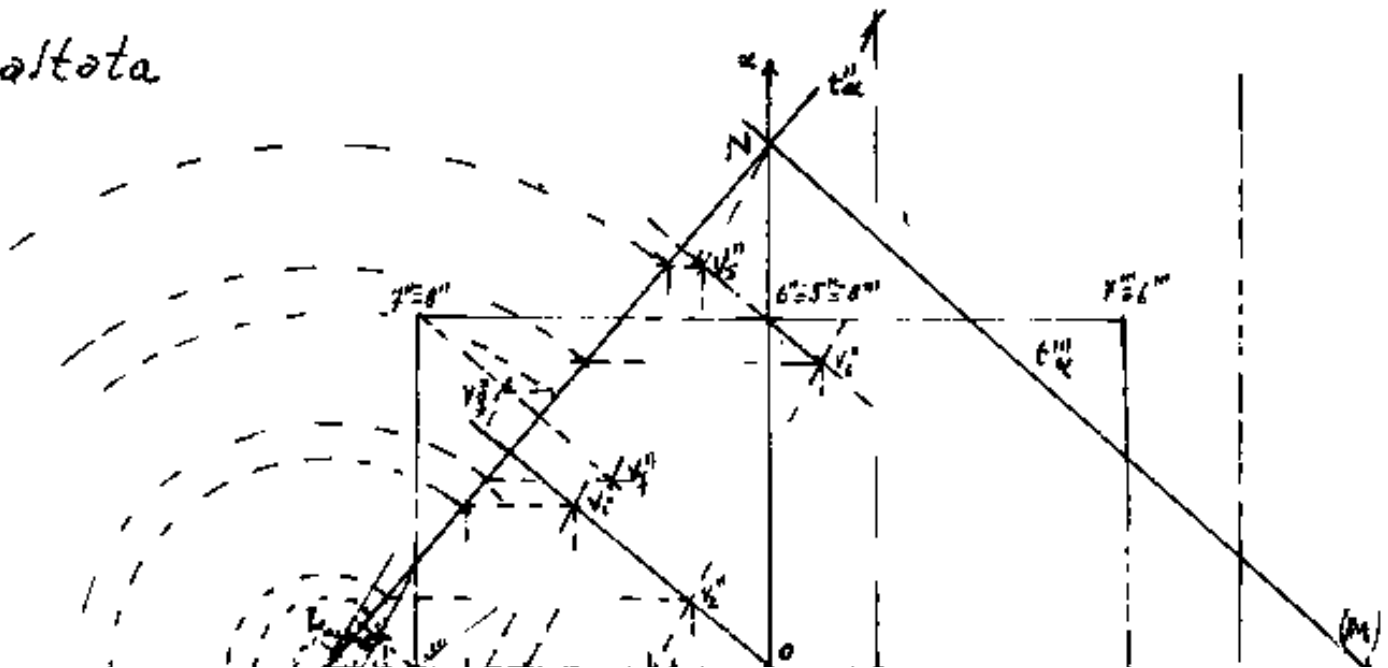
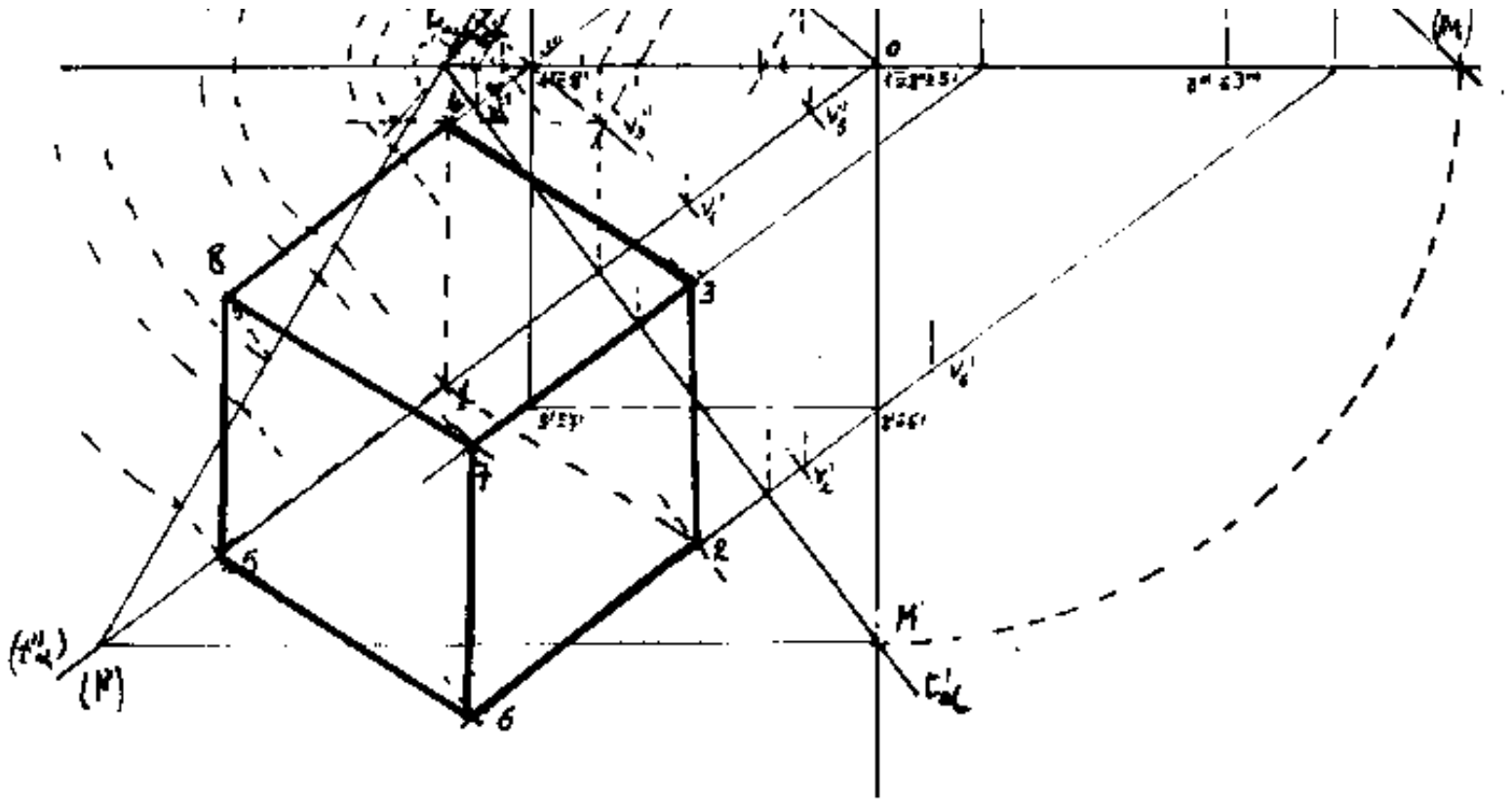
Prospettiva assonometrica isometrica

Se $\overline{LM} = \overline{LN} = \overline{MN}$, il triangolo del piano α intercettato dai piani π_1, π_2, π_3 è equilatero, il suo ortocentro è equi= distante dai vertici, ed i tre assi x^* su $\overline{O^*N}$; y^* su $\overline{O^*L}$; z^* su $\overline{O^*M}$, risultano ugualmente inclinati. In assonometria isometrica: $OL = OM = ON = \ell$;

$\overline{LM} = \overline{LN} = \overline{MN} = \ell\sqrt{2}$; $\overline{O^*N} = \overline{O^*M} = \overline{O^*L} = \frac{2}{3}\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{3}$

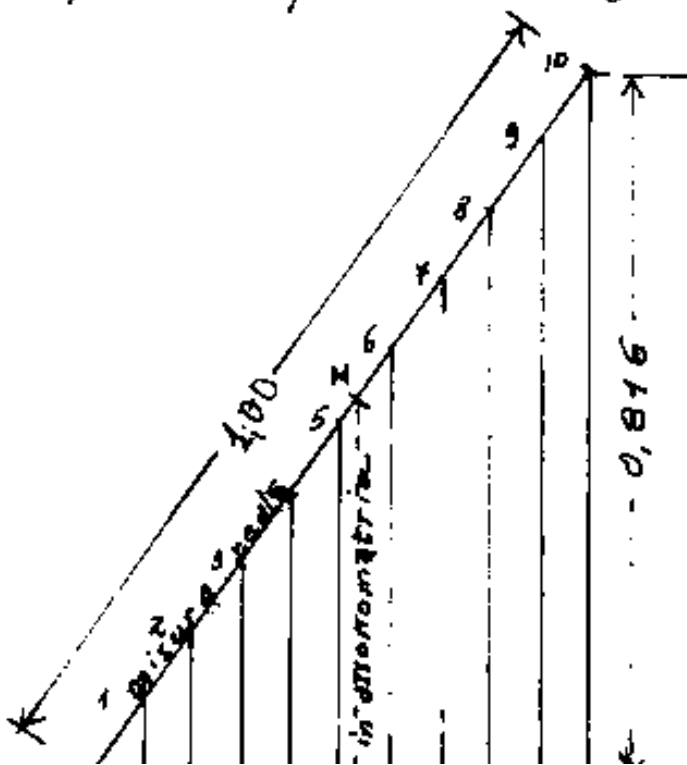
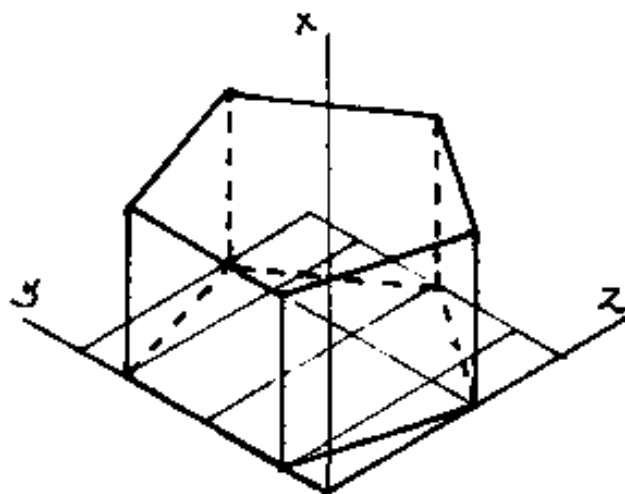
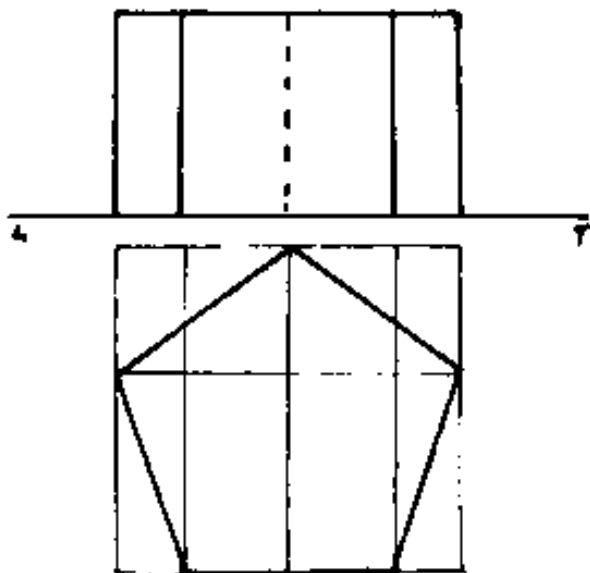
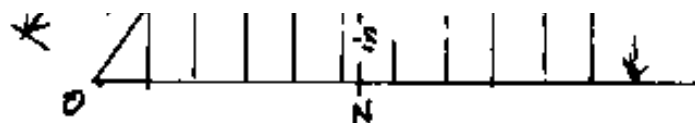
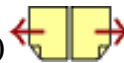
$\overline{O^*N} = \overline{O^*M} = \overline{O^*L} = \ell\sqrt{\frac{2}{3}} = \ell(0{,}816496581..)$.

I testi di disegno di macchine dicono di moltiplicare i valori per lo stesso modulo: 0,816 secondo i 3 assi.

Naturalmente si possono riportare i veri valori, la proiezione

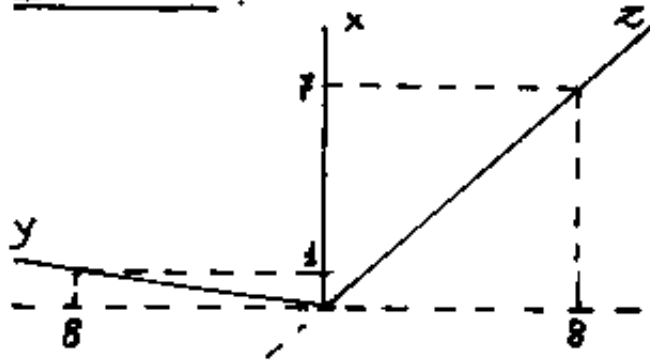
sarà in scala 1:0,816; cioè noi pensiamo di proiettare un oggetto più grande: $\frac{1}{0,816} = 1,22474$ in modo che sul disegno si leggano le vere misure.

cubo a spigoli paralleli agli assi in assonometria isometrica

Risolviamo col metodo di Monge, la proiezione di un cubo di spigolo $u = 28/3$ su un piano α che intercetti il triangolo di lati: 13, 14, 15; il cubo abbia tre facce sui piani di proiezione. Tracciata LT e le tracce del terzo piano di proiezione, da LT riportiamo sulla 2ª traccia di π_3; $p = 3\sqrt{11} = \overline{ON}$ e da N la t'''_α $(\overline{N(M)}) = 15$; e la $t''_\alpha = \overline{NL} = 13$ ribaltando (M) si ha $\overline{LM} = 14$ e si verifica: $q = \overline{OL} = \sqrt{70}$; $r = \overline{O(M)} = \overline{OM} = 3\sqrt{14}$.
Disegnamo le proiezioni dei vertici del cubo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. e per i vertici le rette normali ad α e cerchiamone i punti V di intersezione, ribaltando α abbiamo l'assonometria ribaltata

Ma se sullo stesso foglio del disegno figurano la pianta e l'alzata o comunque vere grandezze in proiezione di Monge, conviene in assonometria isometrica moltiplicare i valori per 0,816 ad evitare che l'oggetto rappresentato in assonometria isometrica appaia più grande dell'oggetto in proiezione di Monge.

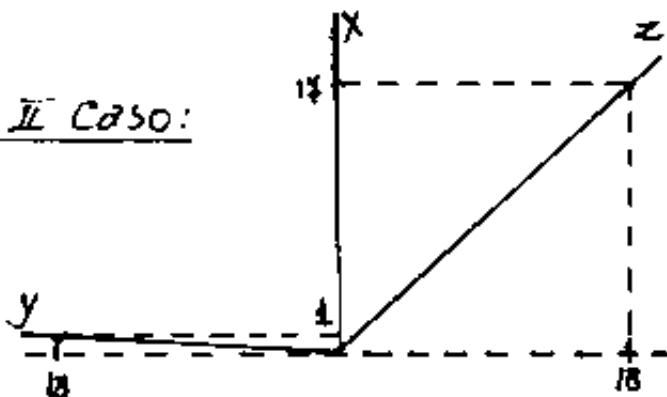
Per facilitare il disegno vi sono vari tipi di grafici che riportano il rapporto $0,81649658... = \sqrt{\frac{2}{3}}$, fra i più semplici è quello di disegnare un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa = 1 ed un cateto = 0,816 (vedi figura) per ogni misura reale $\overline{OM}$ dovremo porre in assonometria isometrica il segmento $\overline{MN}$.

1,00
misura reale
in assonometria
0,816
1 2 3 5 6 7 8 9 10 M

prisma pentagonale

Prospettiva assonometrica dimetrica

Al fine di evitare l'uso del goniometro per la direzione degli assi y e z (x è verticale), sono stati standardizzati tre casi, riportando le coordinate di un punto degli assi, in numeri interi.

I° Caso:

Molto usato in disegno di macchine, modulo in x ed y = 1 in z = 1/2;

angolo in z = arctg(7/8) = 41° 11' 9",33 ;

angolo in y = arctg(1/8) = 7° 7' 30",06

riduzione della proiezione 0,942

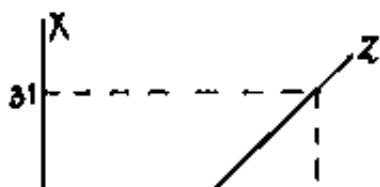
II° Caso:

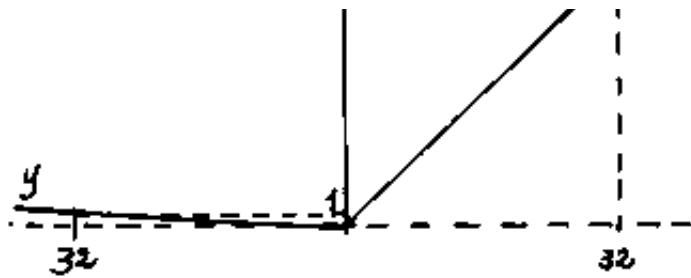
modulo in x ed y = 1 in z = 1/3

angolo in z = arctg(17/18) = 43° 21' 48",32

angolo in y = arctg(1/18) = 3° 10' 47",39

riduzione della proiezione 0,973

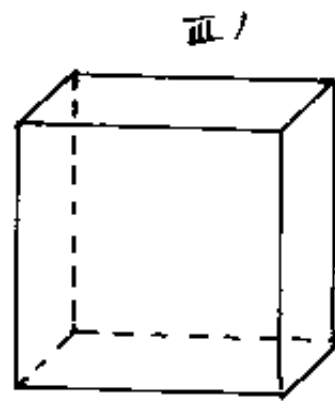
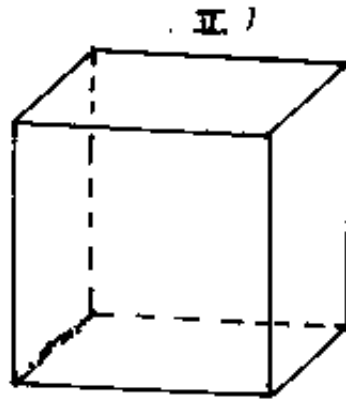
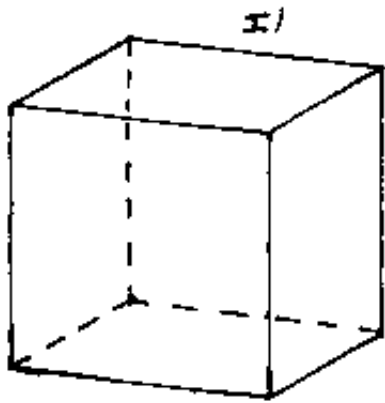
III° Caso

modulo in x ed y = 1 in z = 1/4

angolo in z = arctg(31/32) = 44° 5' 26",23

angolo in $y = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{32}\right) = 1° 47' 23'',68$

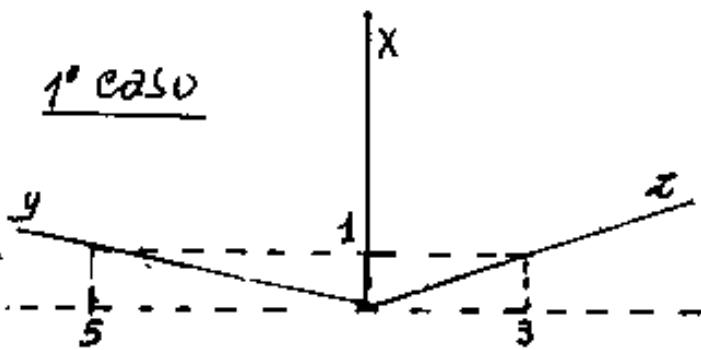
riduzione della proiezione 0,984.

y

32 32

I) II) III)

Assonometria trimetrica.

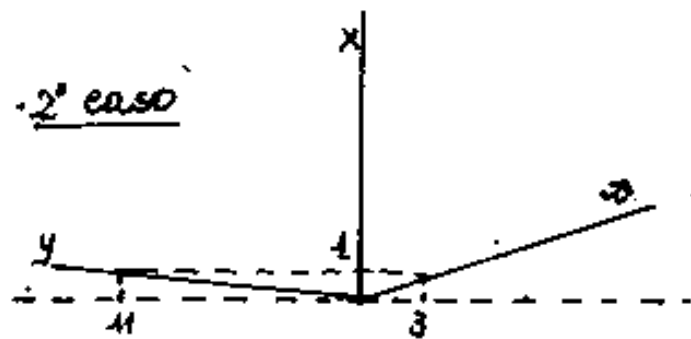
Detta anche prospettiva parallela trimetrica, anche per questa, analogamente alla dimetrica, l'inclinazione degli assi è determinata dal rapporto di numeri interi; e, praticamente i casi si riducono a due:

1° caso

modulo in x = 1

modulo in y = 5/6 = 0,83̄

modulo in z = 2/3 = 0,66̄

angolo in y = arctg(1/5) = 11° 18' 35",76

angolo in z = arctg(1/3) = 18° 26' 05",82

riduzione della proiezione 0,967.

2° caso

modulo in x = 1

modulo in y = 9/10 = 0,9

modulo in z = 1/2 = 0,5

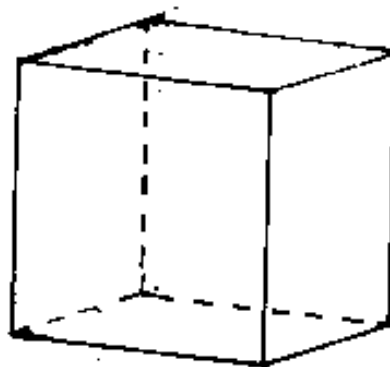
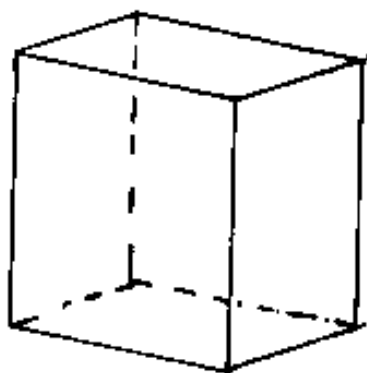
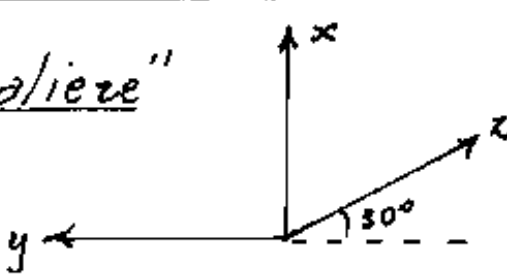
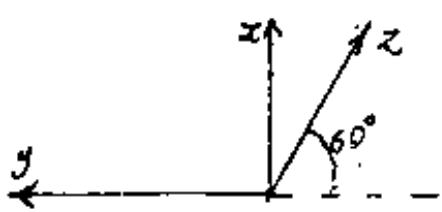
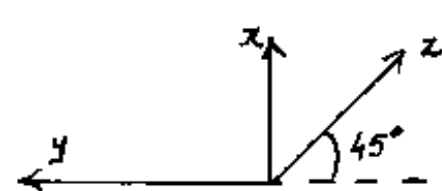
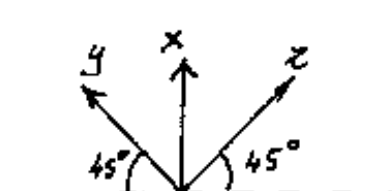
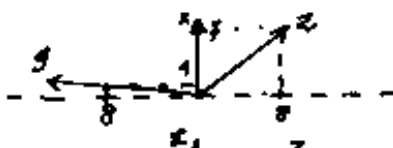
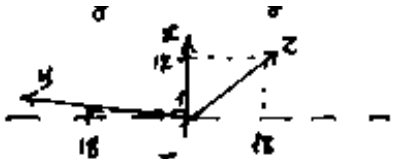
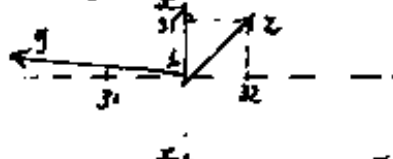
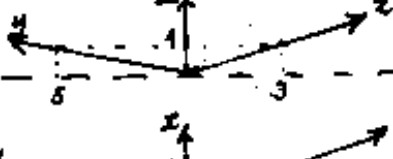
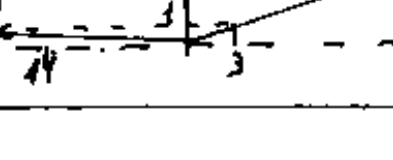
angolo in y = arctg(1/11) = 5° 11' 39",94

angolo in z = arctg(1/3) = 18° 26' 05",82

riduzione della proiezione 0,985

cubo

1° caso

2° caso

Cerchiamo di capire come nascono le standardizzazioni usate in assonometria che riepiloghiamo nel seguente prospetto.

Prospettiva parallela obliqua	scorcio o riduzione		
	x	y	z
a) "Cavaliere" (z a 30°)	1	1	1/2
(z a 60°)	1	1	2/3
(z a 45°)	1	1	$1/\sqrt{2}$
b) Militare (y e z a 45°)	1	1	1
Prospettiva parallela assonometrica			
a) isometrica (y e z a 30°)	1 (0,816)	1 (0,816)	1 (0,816)
b) dimetrica 1)	1 (0,942)	1 (0,942)	$\frac{1}{2}$ (0,942)

2)	$1(0,973)$	$1(0,973)$	$\frac{1}{3}(0,973)$
3)	$1(0,984)$	$1(0,984)$	$\frac{1}{4}(0,984)$
c) trimetrica 1)	$1(0,967)$	$\frac{5}{6}(0,967)$	$\frac{2}{3}(0,967)$
2)	$1(0,985)$	$\frac{9}{10}(0,985)$	$\frac{1}{2}(0,985)$

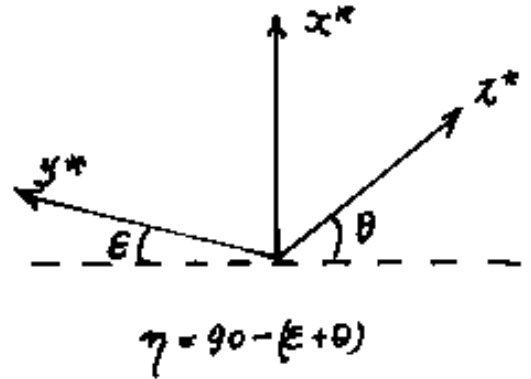
Calcolo dei coefficienti di riduzione (moduli)

modulo in $x^* = \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\theta}$

" " $y^* = \operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\eta}$

" " $z^* = \operatorname{sen}\gamma = \sqrt{1-\operatorname{tg}\eta\operatorname{tg}\theta}$

x^*, y^*, z^*, ε, θ

$\eta = 90-(\varepsilon+\theta)$

Prospettiva parallela assonometrica

Isometrica: $\alpha=\beta=\gamma=\arccos(\frac{1}{3}) = 54°44'08'',2$; $\theta=\varepsilon=30°$

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816496581 = \sqrt{1-\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\theta} \cong 0,816.$

Dimetrica: 1°) caso $\varepsilon = \operatorname{arctg}(\frac{1}{8})$; $\theta = \operatorname{arctg}(\frac{7}{8})$; $\operatorname{tg}\eta = \frac{57}{64}$

$y^* \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{8}\frac{7}{8}} = 0,943729304$ — $0,943729304/0,942 = 1,001 \simeq 1$

$(y^*) \operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\frac{1}{8}\frac{57}{64}} = 0,942693945$ posto $= 1$ — $(0,942)$ — 1

$(z^*) \operatorname{sen}\gamma = \sqrt{1-\frac{7}{8}\frac{57}{64}} = 0,469790511$ — $0,469790511/0,942 = 0,4987 \simeq 1/2$

2° caso

$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{18}$; $\operatorname{tg}\theta = \frac{17}{18}$; $\operatorname{tg}\eta = \frac{307}{324}$

$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{18}\cdot\frac{17}{18}} = 0,97341197 \simeq 1$

$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\frac{1}{18}\cdot\frac{307}{324}} = 0,97332389 \simeq 1$ — $(0,973)$

$\operatorname{sen}\gamma = \sqrt{1-\frac{17}{18}\cdot\frac{307}{324}} = 0,324206322 \rightarrow \frac{0,324206322}{0,973} = 0,3332 \simeq 1/3$

$$\operatorname{sen}\gamma = \sqrt{1-\frac{17}{18}\cdot\frac{307}{324}} = 0{,}324206322 \rightarrow \frac{0{,}324206322}{0{,}973} = 0{,}3332 \simeq 1/3$$

3ª Caso

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{32}\ ; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{31}{32}\ ; \quad \operatorname{tg}\eta = \frac{993}{1024}\ ;$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{32}\cdot\frac{31}{32}} = 0{,}984746953 \simeq 1$$

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\frac{1}{32}\cdot\frac{993}{1024}} = 0{,}984731458 \simeq 1$$

$$(0{,}984)$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \sqrt{1-\frac{31}{32}\cdot\frac{993}{1024}} = 0{,}246124 75\ ; \quad \frac{0{,}24612475}{0{,}984746953} = 0{,}249937 \simeq 0{,}25 \simeq \left(\frac{1}{4}\right)$$

Prospettiva parallela assometrica

$\eta = 90 - (\varepsilon + \theta)$

trimetrica

1° caso $tg(\varepsilon) = \frac{1}{5}$; $tg(\theta) = \frac{1}{3}$; $tg(\eta) = 14/8$

$$sen\,\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}} = 0{,}966091783 \simeq (\underline{0{,}967})$$

$$sen\,\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{14}{8}} = 0{,}806225774 \rightarrow \frac{0{,}806225774}{0{,}966091783} = 0{,}8345 \simeq \left(\frac{5}{6}\right)$$

$$sen\,\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{8}} = 0{,}645497224 \rightarrow \frac{0{,}645496224}{0{,}966091783} = 0{,}6681 \simeq \left(\frac{2}{3}\right)$$

---

2 caso $tg(\varepsilon) = \frac{1}{11}$; $tg(\theta) = \frac{1}{3}$; $tg(\eta) = \frac{32}{14}$

$$sen\,\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3}} = 0{,}984731927 \rightarrow \simeq \underline{0{,}985}$$

$$sen\,\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{11} \frac{32}{14}} = 0{,}890060555 \rightarrow \frac{0{,}890060556}{0{,}984731927} = 0{,}9038 \simeq \left(\frac{9}{10}\right)$$

$$sen\,\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{3} \frac{32}{14}} = 0{,}487950036 \rightarrow \frac{0{,}487950036}{0{,}984731927} = 0{,}4955 \simeq \left(\frac{1}{2}\right)$$

Restano così giustificati gli schemi esposti, che permettono una rapida costruzione dell'assonometria. Vogliamo però vedere, col calcolo, l'assonome=

vogliamo però vedere, col calcolo, l'assonome-
tria del cubo che abbiamo proiettato con Monge
su un piano che intercettava con i piani di proiezione
il triangolo di lati 13, 14, 15 ove il lato 14 era
sul piano orizzontale π_1., 13 su π_2 e 15 su π_3.

$h_m = 12$ per cui $sen(\mu) = 12/13$; $sen(\lambda) = 12/15$; $sen(\nu) = \frac{14 \cdot 12}{13 \cdot 15} =$
$sen(\nu) = \frac{56}{65}$; $cos(\varepsilon) = sen(\mu) = 12/13$; $cos(\theta) = sen(\lambda) = 12/15$; $sen\,\varepsilon = 5/13$

$sen(\theta) = \frac{3}{5}$; $cos(\mu) = \frac{5}{13}$; $cos(\lambda) = \frac{3}{5}$; $cos(\nu) = \frac{33}{65}$;

$tg(\nu) = \frac{56}{33}$; $tg(\lambda) = \frac{4}{3}$; $tg(\mu) = \frac{12}{5}$

$\boxed{tg(\varepsilon) = \frac{5}{12}}$; $\boxed{tg(\theta) = \frac{3}{4}}$; $\boxed{tg(\eta) = \frac{33}{56}}$

$sen\,\alpha = \sqrt{1 - \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{11} = 0{,}829156197$; $cos\,\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{5}$

$sen\,\beta = \sqrt{1 - \frac{5}{12}\cdot\frac{33}{56}} = \frac{13}{4}\sqrt{\frac{1}{14}} = 0{,}868599036$; $cos\,\beta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{55}{14}}$

$sen\,\gamma = \sqrt{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{33}{56}} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{5}{14}} = 0{,}74701788$; $cos\,\gamma = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{11}{14}}$

$x^*_N = \overline{O^*N} = 14\,\frac{33}{56} = \frac{33}{4} = 8{,}25$; $p = 3\sqrt{11}$; $\delta = \frac{33}{4}\sqrt{\frac{5}{11}}$; $2R = \frac{65}{4}$

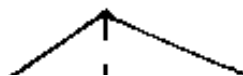
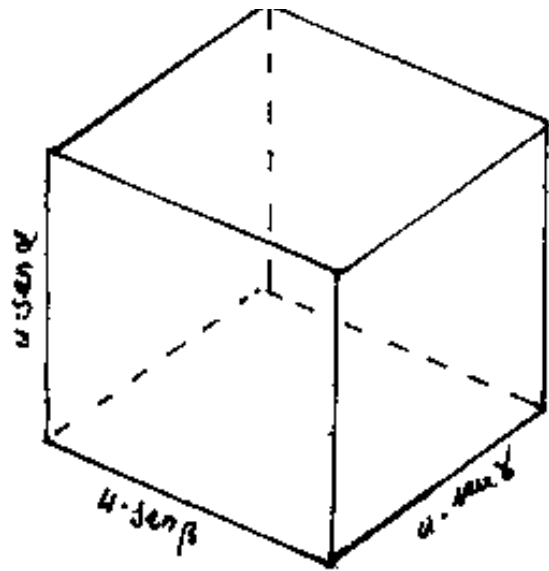
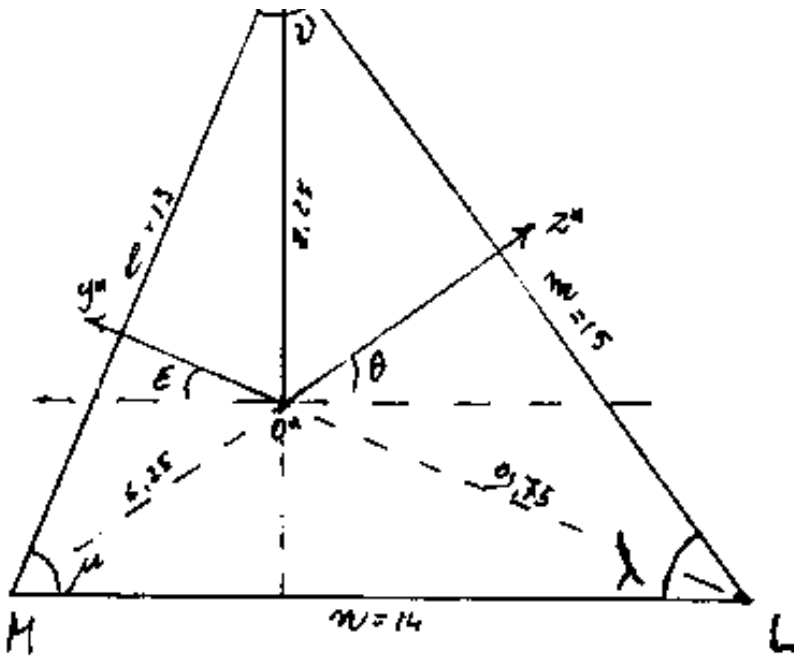
$y^*_L = \overline{O^*L} = 13\,\frac{3}{4} = \frac{39}{4} = 9{,}75$; $q = 3\sqrt{14}$; $\delta = \frac{9}{4}\sqrt{55}$; $2R = \frac{65}{4}$

$z^*_M = \overline{O^*M} = 15\,\frac{5}{12} = \frac{25}{4} = 6{,}25$; $r = \sqrt{70}$; $\delta = \frac{3}{4}\sqrt{55}$; $2R = \frac{65}{4}$

L'equazione del piano: $\boxed{(\sqrt{5})X + \left(\sqrt{\frac{55}{14}}\right)Y + 3\sqrt{\frac{11}{14}}\,Z = 3\sqrt{55}}$

può scriversi anche: $\boxed{\frac{X}{3\sqrt{11}} + \frac{Y}{3\sqrt{14}} + \frac{Z}{\sqrt{70}} = 1}$

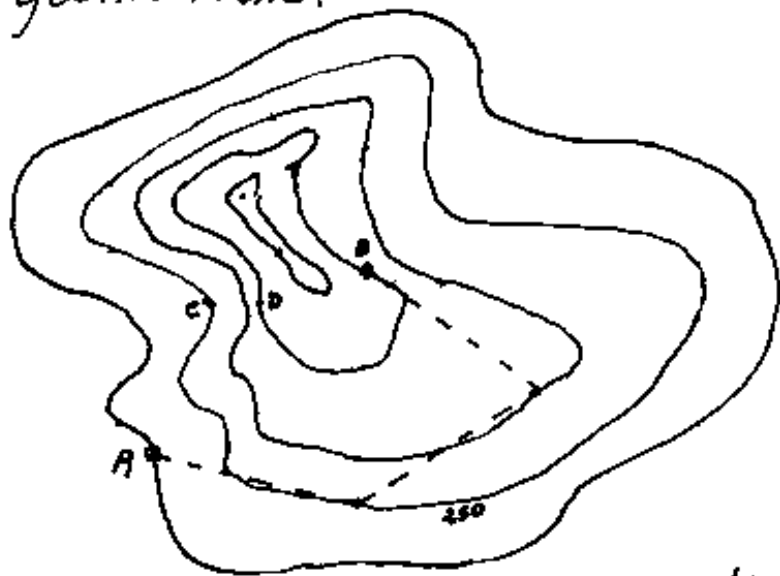
Nella proiezione di Monge il cubo aveva lo spigolo = 20/3 = u e l'unità grafica era il mezzo centimetro, basta riportare i coeff. senα, senβ, senγ in scala 10/3.

N, x^*, ν

(è sovrapponibile ribaltato).

Le proiezioni a curve di livello

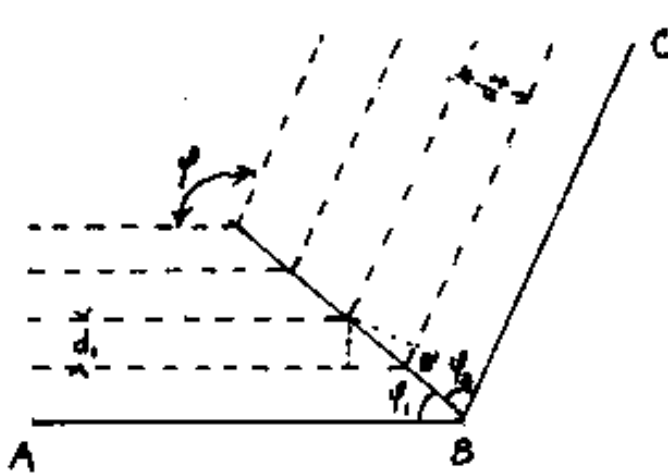
Un metodo di rappresentazione usato in topografia è quello delle proiezioni quotate detto anche a curve di livello od a isoipse, o proiezioni topografiche.

Questo metodo consiste nel sezionare l'oggetto da rappresentare, mediante piani paralleli al primo piano di proiezione (orizzontali) ed equidistanti fra loro. L'equidistanza è fondamentale e permette molte facili determinazioni geometriche.

Consideriamo la proiezione a fianco; le linee (isoipse) sono le intersezioni dei piani con una collinetta. Supponiamo che il disegno sia in scala 1:25000 e che la equidistanza delle curve di livello sia di 5 metri (piani equidistanti in quota di m 5). Si vuol costruire una strada a pendenza costante del 100% a partire da A. - Basta pren

pendenza costante del 1,00% a partire da A. - Basta prendere una apertura di compasso di 500 m. in scala 1:25000, e con centro in A cercare l'intersezione con l'isoipsa adiacente, e da qui ripetere, facendo centro, per trovare il punto sull'isoipsa successiva, e così via. (vedi poligonale tratteggiata).

pendenza 5/500 = 1% ; 5 m ; 500 m. La densità delle isoipse indica la maggiore o minore pendenza (o pendio) della collina. (Fra i punti C e D,

distanti orizzontalmente 130 m, vi sono 10 m. di disli=vello: 10/130 = 7,69 % di pendenza = 4° 23' 55",54.

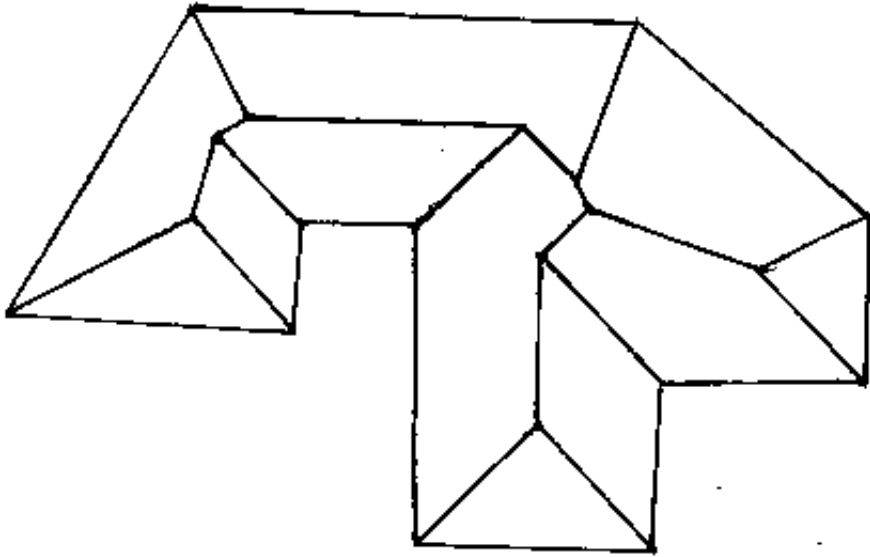
Consideriamo ora una isoipsa composta di due tratti rettilinei formanti un angolo $\varphi = \hat{ABC}$. I due tratti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sono le tracce di due piani di diversa penden=za; sia: "e" l'equidistanza (in quota) delle isoipse, sia: "d_1" la distanza in orizzontale delle isoipse parallele ad AB, cioè: $\frac{e}{d_1}$ = pendenza del piano di traccia AB; analogamente $\frac{e}{d_2}$ = pendenza del piano di traccia BC. Siano φ_1 e φ_2 gli angoli che la proie=zione orizzontale della retta intersezione dei due piani, forma con $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ avremo: $\frac{d_1}{\operatorname{sen}\varphi_1} = \frac{d_2}{\operatorname{sen}\varphi_2} = \overline{BB'}$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_2)}{\operatorname{sen}\varphi_2} = \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi_2 - \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi_2}{\operatorname{sen}\varphi_2} = \operatorname{sen}\varphi / \operatorname{tg}\varphi_2 - \cos\varphi$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{d_2 \operatorname{sen}\varphi}{d_1 + d_2\cos\varphi}}$$

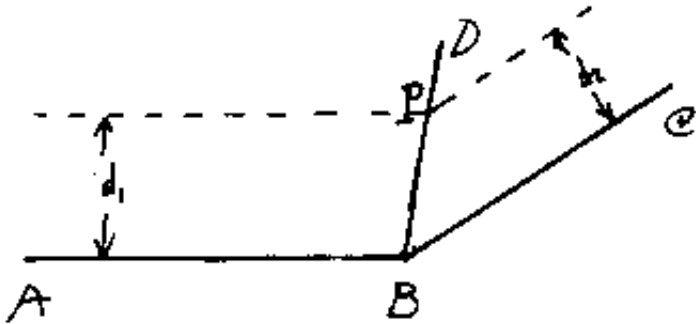
$$tg(\varphi/2) = \frac{}{d_1 + d_2 \cos\varphi}$$

- Se i due piani hanno la stessa pendenza $(d_1 = d_2)$ si ha:
$tg(\varphi/2) = \frac{sen\,\varphi}{1+\cos\varphi} = tg(\frac{\varphi}{2}) = tg(\varphi_1)$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi/2$. La retta intersezione è la <u>bisettrice</u> di $\hat{ABC}$.

Questa particolarità viene utilizzata per disegnare in pianta, le falde dei <u>tetti a pendenza costante</u>, <u>con linea di gronda orizzontale</u> .

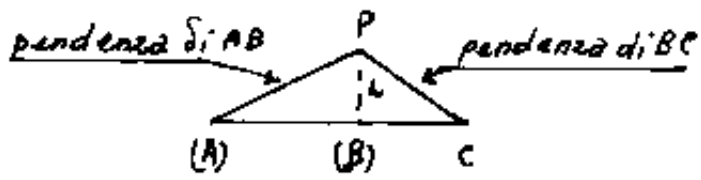
Dato il contorno del tetto, si tracciano le bisettrici, (anche se i vertici cadono fuori pianta).

Nel disegno a fianco è istruttivo rilevare da quali vertici sono partiti i singoli tratti di colmo o di conversa.

È interessante anche il problema inverso: "Data la spezzata a livello ABC e la linea di colmo o di conversa $\overline{BD}$ determinare il rapporto fra le due pendenze".

D P h C d_1 A B

Preso su $\overline{BD}$ un punto P, da esso tracciamo le parallele ad $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ determinando così d_1 e d_2 tali che d_1/d_2 è il rapporto cercato. (Essendo $d_1 > d_2$ la falda $\overline{BC}$ è più inclinata.) Se conosciamo la quota di P rispetto a B per es. $h = \vdash h \dashv$ possiamo disegnare le pendenze delle due falde $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$

pendenza di AB   P   pendenza di BC $p = \frac{h}{}$; $p = \frac{h}{}$

pendenza di AB — P — pendenza di BC

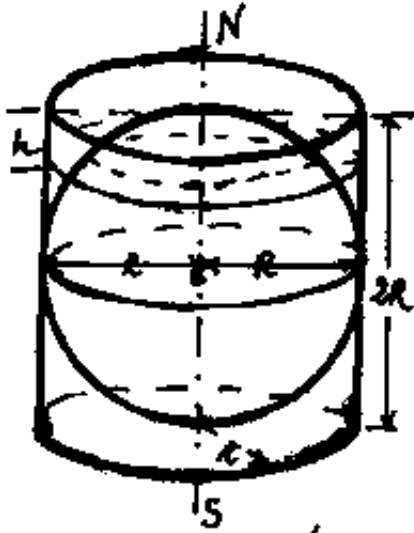
(A) (B) C

$$p_1 = \frac{h}{d_1} \; ; \quad p_2 = \frac{h}{d_2}$$

ove p_1 e p_1 sono rispettivamente le pendenze di $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

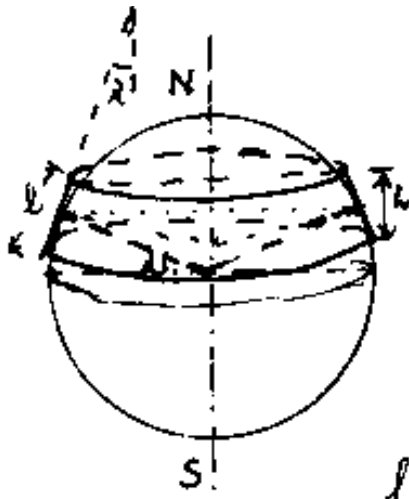
Proiezioni centrali e geografiche

Si dicono "centrali" le proiezioni da un polo in campo fi= nito. La prospettiva, (che abbiamo già trattato) è un caso di proiezione centrale.

Se ci proponiamo il problema di rappresentare, su un foglio piano, la superficie terrestre, supposta sferica, si incontrano no= tevoli difficoltà; perché, col foglio piano (se flessibile) è pos= sibile inviluppare un cilindro od un cono (superfici ad una curvatura), mentre non è possibile costruire una sfera o qua= lunque altra superficie a doppia curvatura. Quindi per rap= presentare in piano una superficie sferica, dovremo venire a compromessi; cioè dobbiamo accontentarci del= la validità solo di qualche caratteristica. Si hanno così le proiezioni equivalenti, che mantengono la proporzio= nalità delle aree; le proiezioni isogoniche, che mantengo= no inalterati gli angoli; le proiezioni equidistanti che man= tengono le distanze lungo certe linee; ecc.

vengono le distanze lungo certe linee; ecc.

Sappiamo che l'area di una zona sferica è equivalente all'area della porzione di cilindro che la circoscrive: $A=(2\pi R\cdot h)$ se h è l'altezza della fascia cilindrica, per cui se proiettiamo dall'asse sul cilindro la superficie sferica, avremo aree equivalenti; ma svolgendo

in piano la superficie cilindrica, si ha la proiezione cilindrica, ove ogni punto può essere individuato da due coordinate: "coordinate cilindriche" di cui una è un segmento sull'asse, l'altra l'angolo φ descritto dal raggio da una origine arbitraria. Quando svolgiamo il cilindro le coordinate cilindriche diventano cartesiane aventi in ordinate il segmento dell'asse, ed in ascisse il prodotto: $R\varphi$ con R = raggio del cilindro e φ=angolo in radianti.

Questa proiezione ("equivalente") è utilizzabile solo in una stretta fascia equatoriale ove il cilindro si confonde con la superficie sferica; per zone sferiche ad altre latitudini la proiezione pur mantenendosi equivalente nell'insieme, deforma la configurazione, si pensi che l'Antartide verrebbe rappresentata come una sottile striscia molto allungata. Quindi, per zone sferiche ad altre latitudini, si considerano le proiezioni coniche

ottenute avvolgendo la zona sferica con un tronco di cono. Se λ è la latitudine, 2λ sarà l'apertura del cono, il lato l, del tronco tangente la zona sferica di area: $Rh2\pi$, $l = h/\cos\lambda$, ed il raggio $R\cos\lambda$ per cui l'area del tronco di cono è $A = \frac{h}{\cos\lambda} R\cos\lambda \cdot 2\pi = Rh2\pi$ ancora equivalente.

Se $\lambda = 90°$ (zone polari) il cono diventa un piano tangente alla sfera, e le proiezioni su piani rientrano nelle proiezioni prospettiche, che si effettuano direttamente sul piano e possono distinguersi in centrali od in parallele a seconda che il polo, o centro, o punto di vista, sia in campo finito o all'infinito. Le proiezioni prospettiche parallele si dicono ortografiche quando i raggi paralleli provenienti dal polo all'infinito sono normali al piano di proiezione detto anche quadro. Si hanno così le prospettive parallele o assonometrie.
Se il polo (punto di vista) è in campo finito, si ha la prospettiva centrale detta anche prospettiva conica. Nella cartografia per la rappresentazione della superficie terrestre, le proiezioni centrali si distinguono in proiezione stereografica, se il punto di vista è sulla superfice sferica; proiezione centrografica, se il punto di vista è nel centro della

centrografica, se il punto di vista è nel centro della sfera; proiezione scenografica se il punto di vista è esterno alla sfera. La stereografica si distingue in: polare; equatoriale; orizzontale a seconda che il punto di vista sia in un polo terrestre, o sull'equatore, oppure in un dato punto della superfice terrestre definito dalle sue coordinate geografiche. La centrografica

si distingue in polare od equatoriale a seconda della posizione del quadro. La proiezione centrografica

v = punto di vista

punto di vista

piano di proiezione

piano di proiezione

piano di proiezione

superficie proiettata

superficie proiettata

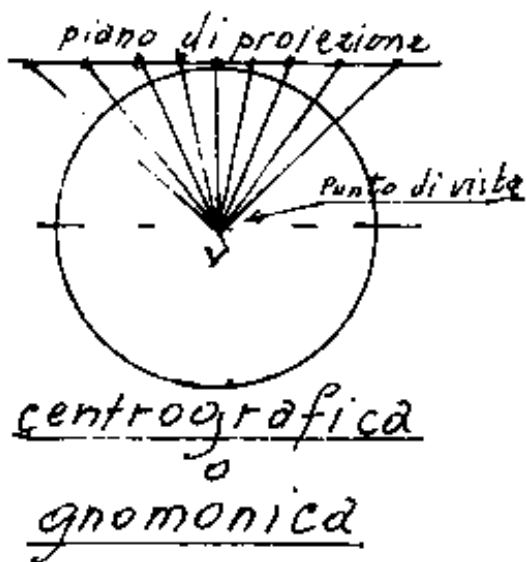
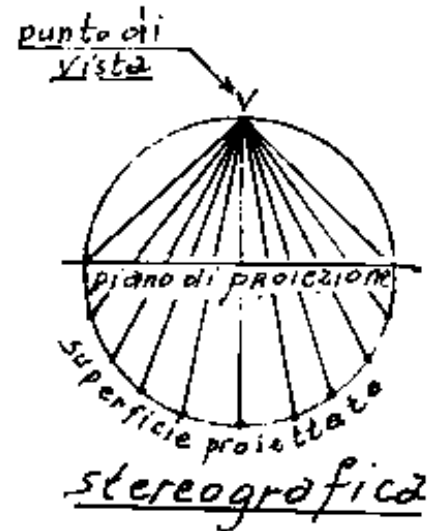
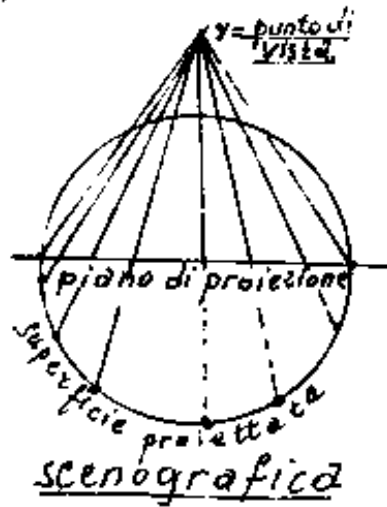
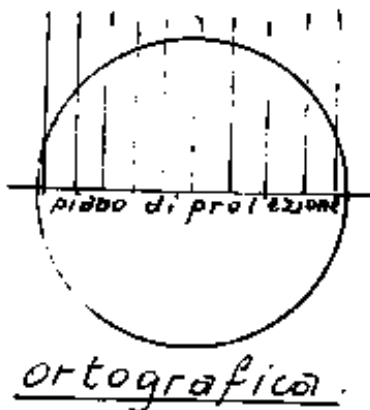
ortografica.

scenografica

stereografica

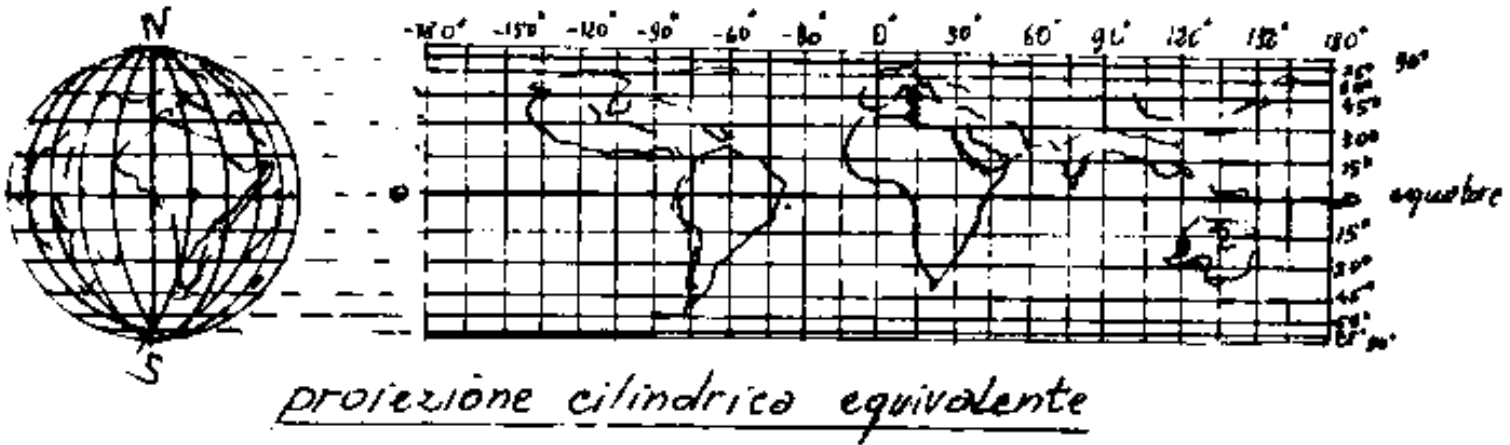
piano di proiezione

punto di vista

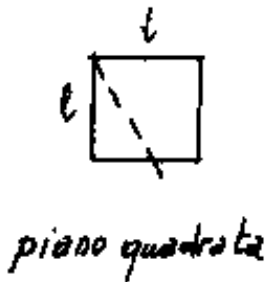
centrografica o gnomonica

è detta anche gnomonica da gnomone che è un'asta o stilo, la cui ombra solare indica le ore. (orologio solare)

Anche le proiezioni di sviluppo sono state modificate; la cilindrica modificata da Mercatore, detta appunto proiezione di Mercatore, nelle maglie rettangolari costituite dai meridiani e dai paralleli, conserva le distanze equato=

ziali dei meridiani, che risultano, nella proiezione sviluppata, delle linee verticali parallele equidistanti come nella cilindrica equivalente; però mentre in quest'ultima i paralleli originariamente equidistanti, diminuiscono la distanza sempre di più nell'avvicinarsi ai poli, nella proiezione di Mercatore aumentano sempre più la distanza avvicinandosi ai poli.

proiezione cilindrica equivalente

Per capire le modifiche alla proiezione cilindrica consideriamo le maglie rettangolari formate dai meridiani e dai paralleli, se R è il raggio della sfera e λ l'ampiezza angolare uguale fra due successivi meridiani e due successivi paralleli; se l è la distanza all'equatore fra due successivi meridiani: $l = R\lambda$. Alla latitudine: $K\lambda = \alpha$, il raggio terrestre sul piano parallelo è $r = R\cos(\alpha) = R\cos(K\lambda)$, per cui la distanza fra i meridiani diventa: $l_\alpha = \lambda R(\cos\alpha)$ $l_\alpha = l\cos(\alpha)$, mentre la distanza fra due paralleli, misurata sul meridiano terrestre è rimasta $R\lambda = l$. Qualora si trasformasse la proiezione cilindrica ponendo i paralleli alla stessa distanza l della distanza dei meridiani sull'equa-

[illegible] dei meridiani sull equa-
tore, si otterrebbe un reticolo di quadrati, la proiezione
è detta <u>piana quadrata</u>; per zone presso l'equatore questa
proiezione rispetta le distanze ed è pressoché <u>conforme</u>
cioè conserva gli angoli fra due direzioni, perché ad un
quadrato della proiezione corrisponde un quadrato sulla

superficie terrestre. Alla latitudine α un quadrato della proiezione piana quadrata corrisponde sulla superficie terrestre ad un rettangolo avente la distanza longitudinale molto accorciata, ($l \cos\alpha$), quindi gli angoli formati da una diagonale con la direzione del meridiano, sono diversi. Nella proiezione di Mercatore viene mantenuta la distanza l fra i meridiani, mentre viene accresciuta la distanza fra i paralleli: $l_p = l/\cos\alpha$; in tal modo in Mercatore le maglie sono simili a quelle reali, anche se la scala delle misure lineari varia da maglia a maglia, però vengono mantenuti al reale gli angoli; in particolare l'angolo col meridiano e quindi utilissime in navigazione ove si viaggia orientandosi col Nord (bussola, sestante, ecc.).

La proiezione di Mercatore, detta anche <u>cilindrico-isogonica</u>

La proiezione di Mercatore, detta anche cilindrico-isogonica presenta anche un'altra particolarità: Congiungendo due punti sulla carta con una retta, la retta forma lo stesso angolo coi meridiani che taglia, tale linea in navigazione è detta lossodròmica, sulla superficie terrestre (nello spazio) è una spirale ed è il percorso di una nave che mantiene rotta costante.

Proiezioni di sviluppo modificate.

Abbiamo visto le proiezioni coniche semplici, come equivalenti. Se pensiamo allo sviluppo della porzione di tronco di cono relativa ad un parte di una zona sferica, notiamo che i meridiani si sviluppano secondo rette convergenti in un punto, mentre i paralleli si proiettano sviluppati secondo archi di cerchio. Poiché alla latitudine λ il parallelo è lungo $R\cos\lambda \cdot 2\pi$, e la generatrice del cono $\rho = R/\mathrm{tg}\lambda$, se α è l'ampiezza angolare dello sviluppo, per avere lo sviluppo dell'intero parallelo dovrà essere: $\rho\alpha = \frac{R\cos\lambda}{\mathrm{sen}\lambda} \cdot \alpha = R\cos\lambda \, 2\pi$ cioè: $\alpha = 2\pi\,\mathrm{sen}\lambda$. (massimo di α a quel λ)

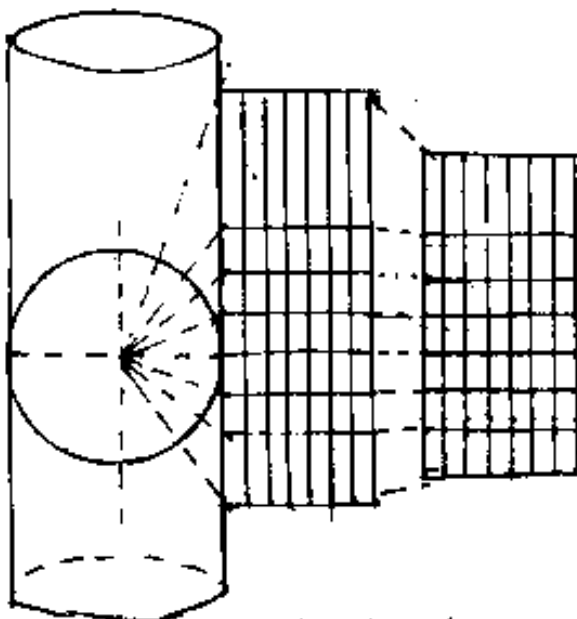
La proiezione conica semplice mantiene le distanze dei meridiani sul parallelo ove il cono è tangente.

<u>La proiezione conica di De L'Isle</u> mantiene in scala le distanze dei meridiani su due paralleli inter=

scala le distanze dei meridiani su due paralleli inter=
medi a quello centrale, è come se il cono sezionasse
la sfera su quei due meridiani queste proiezioni non
sono nè isogoniche, nè equivalenti.

<u>La proiezione sinusoidale</u> ha i paralleli rettilinei
equidistanti, ma i meridiani sono curve sinusoidali.
salvo il centrale. (Si usa per zone equatoriali).

Nella proiezione di Bonne i paralleli sono quelli della conica semplice, i meridiani sono curvilinei e sono ottenuti assumendo come rettilineo un meridiano centrale e da esso per coordinate i punti degli altri. È una proiezione equivalente.

La proiezione cilindrica equivalente di Lambert, considera il centro di proiezione al centro della terra, cio' implica che i paralleli oltre una certa latitudine siano troppo distaccati, per cui il Lambert fa un riavvicinamento dei paralleli originariamente equidistanti e poi distanziati troppo al crescere della latitudine, cio' implica che le regioni polari risultino un po' schiacciate, la proiezione mantiene l'equivalenza delle aree.

Proiezione di Lambert.

Altre proiezioni che considerano rettilinei i segmen

Altre proiezioni che considerano rettilinei i segmenti delle maglie costituite da paralleli e meridiani sono le <u>proiezioni rettangolari</u> oppure le <u>proiezioni trapezoidali</u> costituita da trapezi rettilinei, e si presta molto bene per zone estese.

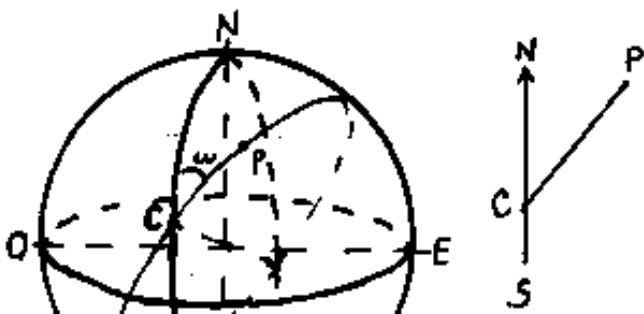
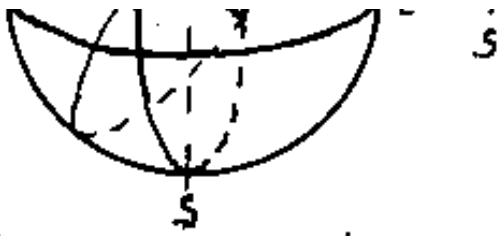
Proiezioni azimutali

E' detto "azimut" l'angolo che una direzione forma con la direzione Nord. Il rilievo mediante azimut è molto usato in topografia nella misura di poligonali, ove la differenza di due azimut in uno stesso vertice ci dà l'angolo fra i due lati della poligonale che concorrono in quel vertice.

Note le lunghezze dei lati si verifica la poligonale calcolando la distanza $\overline{AB}$ cioè le coordinate di A e di B già determinate per esempio per triangolazione o per poligonazione di ordine superiore.

Per punti su una superficie sferica, sia "C" il punto centrale del territorio da rappresentare; "C" è detto centro di proiezione, sia SCN

S

S

il meridiano passante per C,
sia P il punto da rilevare,
fra le infinite circonferenze terrestri determinate dal fascio di piani passanti per CP consideriamo la massima che ha il centro, nel centro della sfera e chiameremo: con "azimut" l'angolo diedro del piano meridiano col piano

della circonferenza massima che è anche l'angolo formato dalle tangenti in C al meridiano ed alla circonferenza massima per CP, e che ordinariamente (e impropriamente) viene detto l'angolo del meridiano (linea curva), con la circonferenza massima (linea curva). Anche la distanza $\widehat{CP}$ è misurata sull'arco di circonferenza massima, ed è minima rispetto ai possibili archi di cerchio sulla superficie terrestre. Nel riportare in piano, il rilievo, l'angolo ω, (azimut) deve restare immutato, mentre la distanza rettificata dell'arco $\widehat{CP}$ può subire modifiche in modo da dare caratteri particolari a quella: proiezione azimutale, v'è quindi la proiezione azimutale equivalente ove all'arco $\widehat{CP}$ si sostituisce la corda $\overline{CP}$, gli azimut sono gli stessi, così facendo si ha l'equivalenza delle aree; mentre nella proiezione azimutale equidistante le distanze sono proporzionali all'arco $\widehat{CP}$ raddrizzato, ma la figura risulta molto deformata e non è né equivalente, né isogonica.

quomala e non è né equivalente, né isogonica.

Le proiezioni di planisferi, come proiezione di Mollweide, di Hammer, di Eckert, (sinusoidale ed ellittica) sono più inerenti alla cartografia e potranno essere dettagliate in casi specifici.

Riportiamo una tabella delle proiezioni.

PROIEZIONI

- di sviluppo
  - Su piani ribaltabili sul quadro
    - doppia ortogonale o di Monge
    - tripla ortogonale (col III piano di proiezione)
    - esaortogonale (disegno di macchine)
  - su superfici ad una curvatura sviluppabili in piano sul quadro
    - cilindriche
      - cilindrica semplice
      - equivalente di Lambert
      - modificata di Mercatore
    - sinusoidale
    - coniche
      - conica semplice
      - conica di De L'isle
      - coniche modificate
        - proiezione di Bonne
        - " trapezoidale
- Parallela ortografica con polo all'infinito e raggi normali al piano
  - assonometrie
  - polare se il quadro è tangente la sfera in un polo (N o S)
  - equatoriale se il quadro è tangente la sfera all'equatore.
- centrale con polo in campo finito
  - stereografica se il polo o centro è sulla superficie sferica
    - Polare se il polo o centro di proiezione è sui poli terrestri (N.S)
    - equatoriale se il polo o centro è sull'equatore
    - orizzontale se il polo o centro è in un dato punto della superficie terrestre
  - azimutale
    - equidistante
    - equivalente
  - centrografica se il polo o centro è nel centro della sfera
    - Polare se il quadro è tangente sui poli terrestri (N.S)
    - equatoriale se il quadro è tangente all'equatore
  - scenografica se il polo o centro è esterno alla sfera

Cenni di trigonometria sferica.

Dati tre punti A, B, C, sulla superficie di una sfera, diremo triangolo sferico la figura ottenuta congiungendo i punti A, B, C con archi di cerchio massimo $\widehat{AB}$; $\widehat{AC}$; $\widehat{BC}$; che sono detti lati del triangolo sferico. (Sulla sfera, sono linee geodetiche)

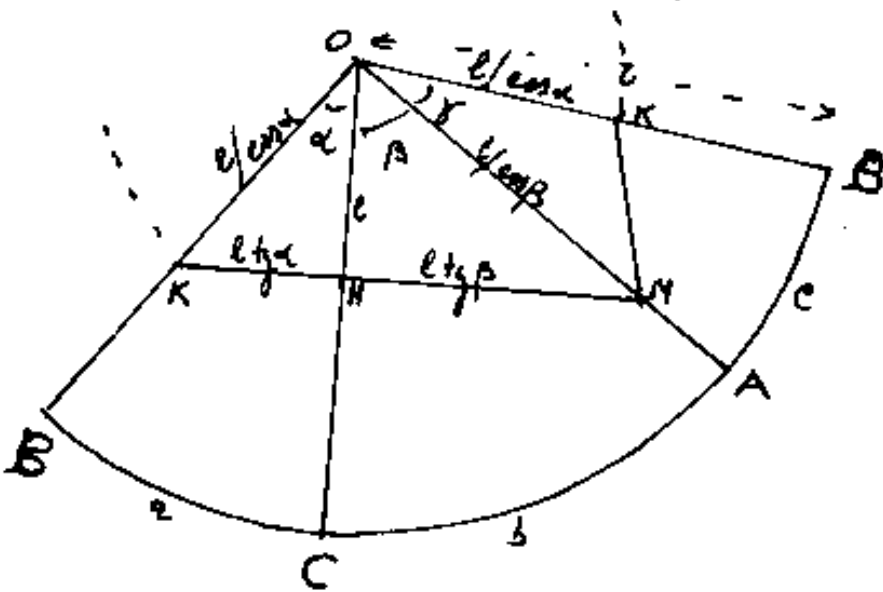
Se uniamo i punti A, B, C, col centro della sfera otteniamo tre settori circolari piani, delimitati da due raggi e dal corrispondente lato del triangolo sferico. Tali settori piani formano un triedro di centro O ove gli angoli delle facce sono dati rispettivamente da: $\widehat{AB}/r$; $\widehat{AC}/r$; $\widehat{BC}/r$; in radianti; con r = raggio della sfera. Invece gli angoli diedri fra le facce si ottengono sezionando perpendicolarmente al raggio

tengono sezionando perpendicolarmente al raggio comune alle due facce. <u>L'angolo solido del triedro</u> sarà l'area della superficie sferica delimitata dal triangolo sferico e divisa per r^2.

Mentre per determinare un triangolo piano occorrono tre elementi di cui almeno una misura lineare; per determinare il triangolo sferico, (noto r), gli ele=

menti possono essere tutti angoli; - d'altra parte nel trian=
golo sferico, si noti che ai "lati": "a, b, c," corrispon=
dono gli angoli nelle facce del triedro; agli "angoli": "A,
B, C," corrispondono gli angoli diedri formati dalle
facce del triedro. Un triedro è determinato se si
conoscono tre elementi (i tre angoli delle facce, op=
pure i tre angoli diedri.) Siano quindi:

$\widehat{BC}/r = a/r = \alpha$; $\widehat{AC}/r = b/r = \beta$; $\widehat{BA}/r = c/r = \gamma$

gli angoli delle facce del triedro che supponia=
mo di sviluppare in piano. Tracciamo una perpen=
dicolare al segmento $\overline{OC} = r$ e sia $\overline{OH} = \ell$

$\overline{OK} = \ell/\cos\alpha$; $\overline{OM} = \ell/\cos\beta$;

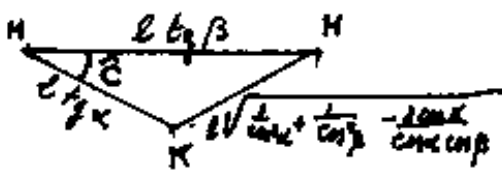
$\overline{KH} = \ell\, tg\,\alpha$; $\overline{HM} = \ell\, tg\,\beta$

calcoliamo ora il lato $\overline{MK}$ opposto all'angolo γ,

applicando Carnot. $\overline{MK}^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2\alpha} + \frac{\ell^2}{\cos^2\beta} - \frac{2\ell^2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Supponiamo ora di rimontare il triedro svilup=

Supponiamo ora di rimontare il triedro svilup=
pato, il triangolo KHM giace su un piano per=
pendicolare ad $\overline{OC} = r$ per cui l'angolo in H è
anche l'angolo diedro fra le facce adiacenti $\overline{OC}$
cioè è l'angolo in $\hat{C}$ del triangolo sferico.

Consideriamo quindi il triangolo piano MHK ottenuto per intersezione del triedro di vertice O con un piano normale ad $\overline{OC}$ e calcoliamo l'angolo in $H = \hat{C}$. Applicando ancora Carnot si ha:

$$\cos(\hat{C}) = \frac{\ell^2 tg^2\alpha + \ell^2 t^2\beta - \ell^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}\right)}{2\ell^2 \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{\frac{\sin^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\beta - 1}{\cos^2\beta} + \frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}}{2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{\frac{2\cos\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

ed analogamente per le altre facce si ha che gli angoli diedri in $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ sono dati da:

$$\cos\hat{A} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\cos a/r - \cos b/r \cos c/r}{\sin b/r \sin c/r}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\cos b/r - \cos a/r \cos c/r}{\sin a/r \sin c/r}$$

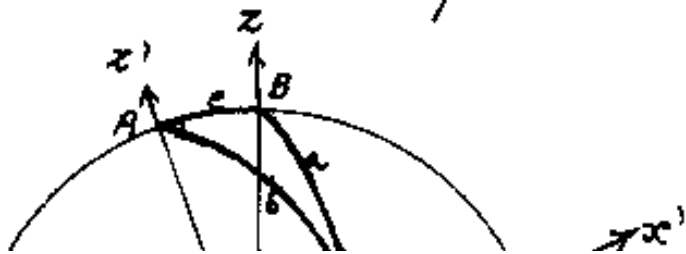
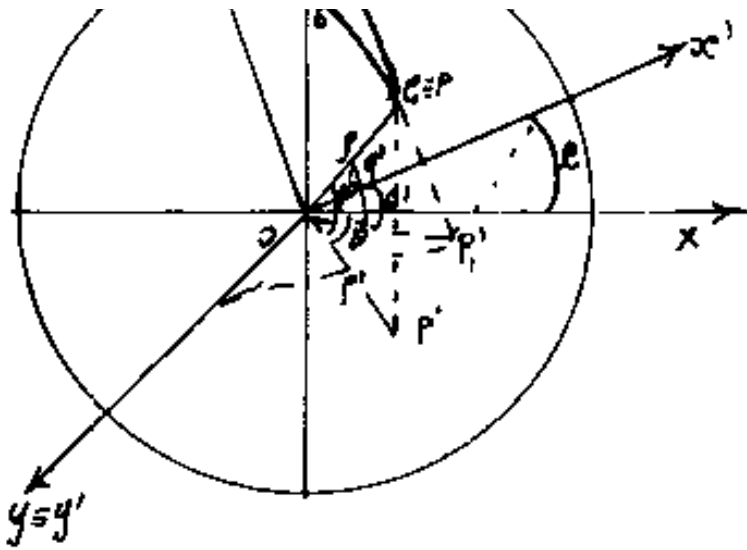
$$\qquad \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \qquad\qquad \operatorname{sen}{}^{a}/_{r} \operatorname{sen}{}^{c}/_{r}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta} = \frac{\cos {}^{c}/_{r} - \cos {}^{a}/_{r} \cos {}^{b}/_{r}}{\operatorname{sen} {}^{a}/_{r} \operatorname{sen} {}^{b}/_{r}}$$

Se consideriamo $r = 1$, come ordinariamente abbiamo già posto in trigonometria piana, evidenziando cos(a) ; cos(b) ; cos(c) ; abbiamo:

$$\begin{cases} \cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c)\cos(\hat{A}) \\ \cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(c)\cos(\hat{B}) \\ \cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\cos(\hat{C}) \end{cases} \qquad I$$

Questo gruppo di formule è detto: "formule del coseno e consentono di calcolare un lato del triangolo sferico quando sono noti gli altri due lati e l'angolo diedro sul vertice opposto al lato. Oppure noti i tre lati consentono di calcolare i tre angoli diedri nei vertici.

Ordinariamente per ricavare le formule di trigonometria sferica si parte diversamente. Consideriamo infatti con origine nel centro della nostra sfera di raggio unitario, tre diversi sistemi di riferimento dei suoi punti di superficie:

1°) Un sistema cartesiano oxyz ortogonale.

2°) Un altro sistema carte=
siano ortogonale O x'y'z'
avente in comune col
precedente l'origine O
e l'asse y'=y intorno al
quale è ruotato dell'an=
golo (ε).

3°) Un sistema di coordinate polari: O, ρ, θ, φ con origine O comune agli altri sistemi, ove: $\rho = r$ = raggio della sfera (unitario), θ = angolo sul piano xy formato dalla x e dalla proiezione di ρ; φ = angolo nel piano normale ad xy formato da ρ e dalla sua proiezione su xy. Analogamente θ' e φ' in riferimento ad $x'y'z'$.

Se facciamo in modo che l'asse z passi per B e l'asse z' per A, la rotazione (c) del sistema: $x'y'z'$ rispetto ad x,y,z è l'angolo (c) della faccia AOB del triedro e corrisponde al lato c del triangolo sferico con $\rho = 1$.

Ricordiamo le formule per la rotazione di assi:

$$\begin{cases} x = x'\cos(c) - z'\operatorname{sen}(c) \\ z = x'\operatorname{sen}(c) + z'\cos(c) \\ y = y' \end{cases}$$

Consideriamo ora un generico punto P non allineato con A, B, anzi consideriamo P coincidente con C del triangolo sferico A,B,C.

Il nostro punto P sia individuato dalle coordinate polari che trasformiamo in cartesiane; avremo:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \cos\theta \\ y = \rho \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \operatorname{sen}\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \rho \cos\varphi' \cos\theta' \\ y' = \rho \cos\varphi' \operatorname{sen}\theta' \\ z' = \rho \operatorname{sen}\varphi' \end{cases}$$

sostituendo questi valori nelle formule per la ruota=

zione degli assi e posto $\rho = 1$, abbiamo:

$$\begin{cases} \cos\varphi\cos\theta = \cos\varphi'\cos\theta'\cos(c) - \operatorname{sen}\varphi'\operatorname{sen}(c) \\ \operatorname{sen}\varphi = \cos\varphi'\cos\theta'\operatorname{sen}(c) + \operatorname{sen}\varphi'\cos(c) \\ \cos\varphi\operatorname{sen}\theta = \cos\varphi'\operatorname{sen}\theta' \end{cases}$$

Dalla figura notiamo: $a = 90° - \varphi$; $b = 90° - \varphi'$; $c = c$

e che gli angoli diedri A e B sono $A = \theta'$; $B = 180° - \theta$

Sostituendo questi valori nelle formule trovate, si ha:

$$\begin{cases} -\operatorname{sen} a\cos B = \operatorname{sen} b\cos A\cos c - \cos b\operatorname{sen} c \\ \cos a = \operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\cos A + \cos b\cos c \\ \operatorname{sen} a\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b\operatorname{sen} A \end{cases}$$

La prima di queste formule lega fra loro ben cinque elementi del nostro triangolo sferico.

La seconda è una delle formule del coseno che abbiamo già trattato.

La terza che può essere scritta nella forma: $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$

presenta un teorema di proporzionalità analogo al

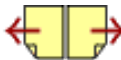
teorema dei seni in trigonometria piana.

Sostituendo nella prima: $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$;

si ha: $\operatorname{sen} b \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} \cos B = \operatorname{sen} b \cos A \cos c - \cos b \operatorname{sen} c$

ed anche:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{cotg} B = \cos A \cos(c) - \operatorname{cotg}(b) \operatorname{sen}(c)$$

scambiando ciclicamente gli elementi si hanno i seguenti gruppi di formule:

$$
\left.\begin{array}{l}
\cot(a)\,\text{sen}(b) = \cos(b)\cos C + \text{sen}\,C\cot A \\
\cot(b)\,\text{sen}(c) = \cos(c)\cos A + \text{sen}\,A\cot B \\
\cot(c)\,\text{sen}(a) = \cos(a)\cos B + \text{sen}\,B\cot C \\
\cot(a)\,\text{sen}(c) = \cos(c)\cos B + \text{sen}\,B\cot A \\
\cot(b)\,\text{sen}(a) = \cos(a)\cos C + \text{sen}\,C\cot B \\
\cot(c)\,\text{sen}(b) = \cos(b)\cos A + \text{sen}\,A\cot C
\end{array}\right\} \quad III
$$

$$
\left\{ \frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}\,A} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}\,B} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}\,C} \right\} \quad II
$$

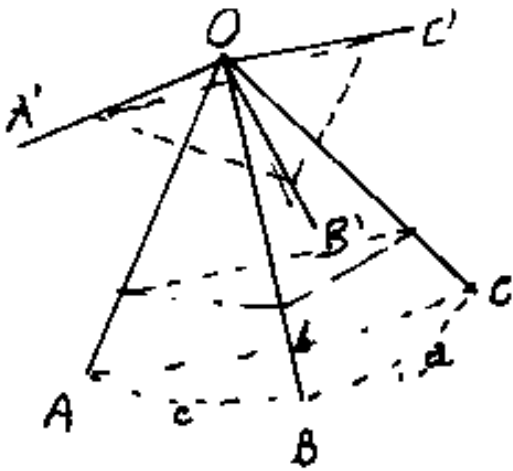
Triangoli sferici polari

Premesso che due triangoli sferici si dicono: "Polari" quando le facce di uno sono supplementari degli angoli dell'altro se applichiamo i gruppi di formule I, II, III al triangolo polare, le formule del coseno (I) diventano:

$$
\left.\begin{array}{l}
\cos(A) = \text{sen}(B)\,\text{sen}(C)\cos(a) - \cos(B)\cos(C) \\
\cos(B) = \text{sen}(C)\,\text{sen}(A)\cos(b) - \cos(C)\cos(A)
\end{array}\right\} \quad IV
$$

$\cos(B) = \text{sen}(C)\,\text{sen}(A)\cos(b) - \cos(C)\cos(A)$

$\cos(C) = \text{sen}(A)\,\text{sen}(B)\cos(c) - \cos(A)\cos(B)$

mentre le II e III restano invariate.

Dato il triedro OABC se da O tracciamo le perpendicolari alle facce di lato omonimo cioè: $\overline{OA'} \perp$ alla faccia (a) si costruisce il <u>triedro polare</u>

Il Teorema di Legendre e l'eccesso sferico

Il teorema di Legendre riduce a trigonometria piana triangoli sferici, rettificandone i lati, ed è valido con buona approssimazione per lati di triangoli molto piccoli, al più qualche decina di primi sessagesimali. (È quanto si verifica in Geodesia). Il teorema può esprimersi:

"Un triangolo sferico in cui sia piccolo il rapporto fra i lati ed il raggio, può, a meno di termini del quarto ordine in tal rapporto, essere calcolato come un triangolo piano i cui lati siano corrispondenti ai lati sferici rettificati, ed i cui angoli equivalgano i corrispondenti angoli sferici diminuiti di un terzo dell'eccesso sferico." (eccesso sferico $= \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$)

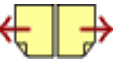
Omettiamo la dimostrazione del teorema che, avvalendosi della formula del coseno, esplicita Cos(A) e sviluppa in serie le funzioni trigonometriche che uguagliano cos(A), limitando i termini all'approssimazione prefissata; quindi confrontando cos(A) esplicitata dal teorema di Car

di confrontando cos(α) esplicitata dal teorema di Carnot: $\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ e sostituendone i valori arriva α l'espressione:

$$\cos(A) = \cos(\alpha) - \frac{bc \operatorname{sen}^2\alpha}{6R^2}$$

Posto: $A = \alpha + \varepsilon$ cioè: $\alpha = A - \varepsilon$ (con ε piccolissimo) :

$$\cos(A) = \cos\alpha - \varepsilon \operatorname{sen}\alpha \qquad (\cos\varepsilon \simeq 1)$$

cioè: $\boxed{\varepsilon = \frac{bc \operatorname{sen}\alpha}{6R^2}}$; ma: $\boxed{\frac{1}{2} bc \operatorname{sen}\alpha = S}$ = area

del triangolo piano per cui: $\boxed{\varepsilon = \dfrac{S}{3R^2}}$

data la piccolezza di ε si può scrivere:

$$\boxed{\varepsilon'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{R^2(\text{arc } 1'')}}$$

ove:

$$\boxed{\frac{S}{R^2} = \frac{\text{area triangolo piano}}{\text{quadrato del raggio}}} = \underline{\text{Eccesso Sferico}}$$

Quindi è detto: Eccesso Sferico il rapporto fra l'area del triangolo piano ed il quadrato del raggio.

Esempio: Calcolo dell'eccesso sferico del triangolo geodetico:

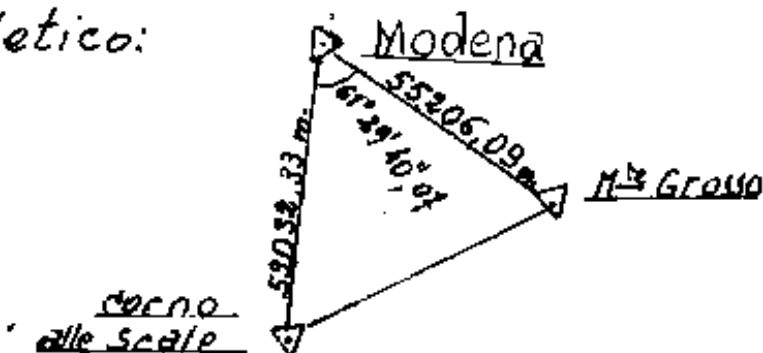
Modena

55206,09 m

61°29'40",07

59032,33 m

M.te Grosso

Corno alle Scale

con le misure poste in figura.

consideriamo:

$R = 6378309,23$

$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma$; $S = (55206,09)(59032,33) \operatorname{sen}(61°29'40",07) \frac{1}{2} = 1431932799 \text{ m}^2$

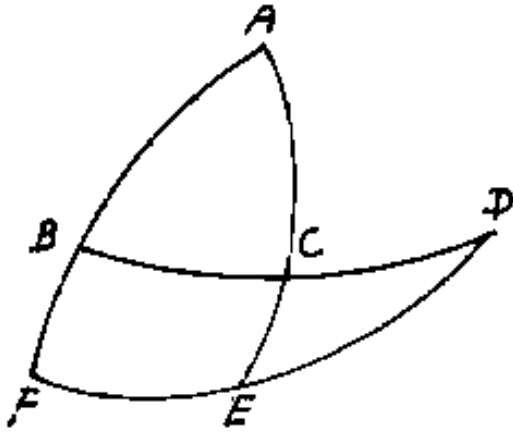
$$\text{Eccesso sferico} = \frac{S}{R^2} = \frac{1431932799}{(6378309,23)^2} = (3,519747324)10^{-5} \text{ rad}$$

$$3,519747324 \frac{(180^\circ)(3600'')}{\pi} = 7'',26 = \text{eccesso sferico}$$

Questi brevi cenni di proiezioni geografiche saranno ampliati trattando le curve geodetiche ed i problemi inerenti la geodesia.

La Sferica e la trigonometria sferica.

Abbiamo già considerato il solido "sfera" (vedi Vol III).
La distinzione fra "sferica" e "trigonometria sferica" risale ad autori tedeschi del XIX secolo, fra cui CH. Guderman; V.K.F. Schulz; A.F. Mobius; ecc.
Per "sferica" si intende lo studio delle proprietà delle figure tracciate su una sfera.
Per trigonometria sferica si intende lo studio delle correlazioni (metriche) che intercedono fra gli elementi delle figure tracciate sulla superficie sferica.
Lo studio della sfera risale agli antichi Caldei e Babilonesi che cercarono di inquadrare i fenomeni astronomici come appaiono nella volta celeste.
Un trattato sulla sfera di Autolico da Pitone, contemporaneo di Euclide; scritti di Teodosio (II sec a.C); Un importantissimo

testo di Menelao, il cui originale è andato perduto, ma la versione in arabo, ritradotta dall'arabo da Maurolico da Messina è pervenuta fino a noi. Tolomeo usava un teorema detto di Menelao, che esprime:

$$\frac{\text{sen}\,\widehat{AC}\,\text{sen}\,\widehat{FE}}{\text{sen}\,\widehat{AE}\,\text{sen}\,\widehat{FD}} = \frac{\text{sen}\,\widehat{BC}}{\text{sen}\,\widehat{BD}}$$

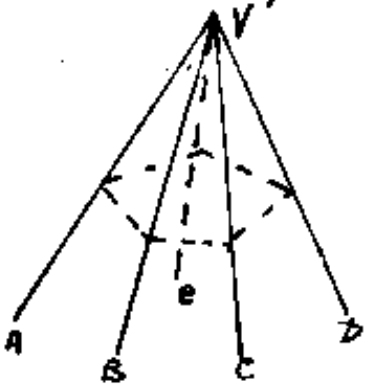
Si è scritto "sen" in effetti Tolomeo usava le "corde" di cui aveva calcolato una tavola.

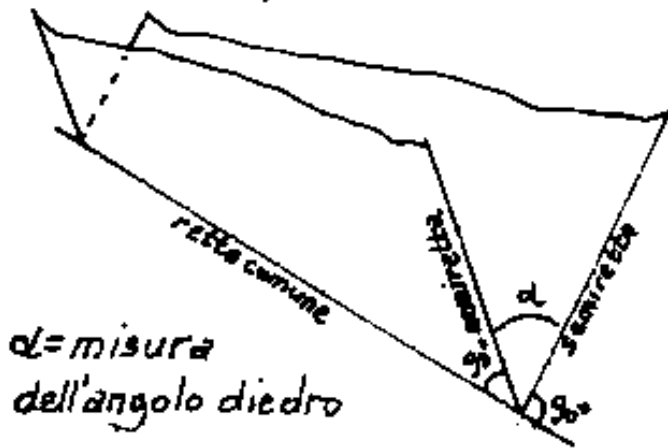
I solidi geometrici

Prima di entrare nel vivo della questione è bene definire certe denominazioni nella geometria dello spazio.

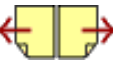
Angoli solidi

È detto angolo solido, o angoloide, o angolo poliedro, lo spazio compreso fra le facce di una piramide di altezza indefinita. (Il termine "poliedro" è limitato all'angoloide piramidale, non conico di qualsiasi sezione a linea continua, che si diranno semplicemente "angolo solido"). Avremo anche qui un angolo solido concavo, ed un angolo solido convesso, a seconda che si consideri lo spazio interno o lo spazio esterno alla superficie delimitante l'angolo solido. Tal volta l'angolo solido è visto come un insieme di angoli piani, ove ciascuna semiretta uscente dal vertice formerà un angolo piano infinitesimo con le semirette del suo intorno. Anche la superficie

ma considerevole dei suoi [illegible]. Anche la superficie angolare che delimita l'angolo solido nella pirami=de ove le singole facce (indefinite) sono costituite dal=l'angolo piano come spazio compreso fra due semirette (spigoli), uscenti da un punto comune (vertice)(V). È ovvio che la somma degli angoli delle facce nell'angoloide convesso non può superare l'angolo

giro; Se la somma degli angoli delle facce fosse esattamente un giro (360°=2π) la piramide (angoloide) degenererebbe in un piano.

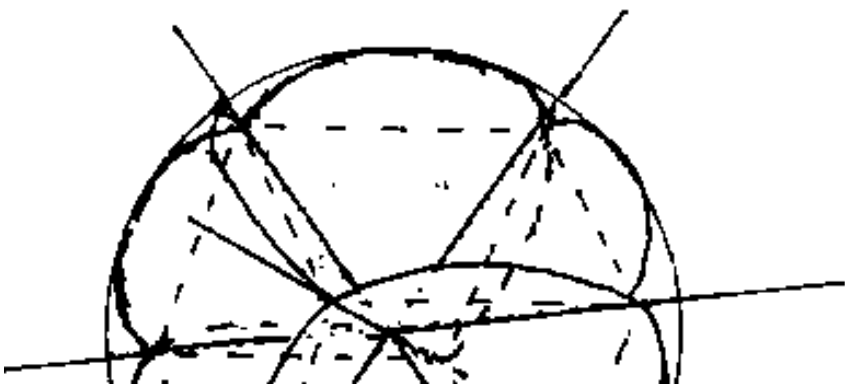
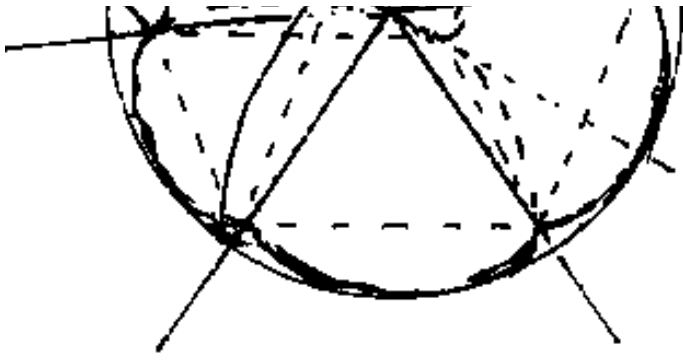
Gli angoloidi si classificano in base al numero delle facce, avremo così angoloidi triedri, tetraedri, pentaedri, ecc. Se le facce sono solo due, manca il vertice, si hanno due semipiani uscenti da una retta comune. Lo spazio compreso fra due semipiani è detto angolo diedro e di norma viene misurato dall'angolo formato da due semirette determinate

dall'intersezione dei due semipiani con un piano normale alla retta comune. In effetti l'angolo diedro sarebbe formato dall'angolo delle due semirette che trasla lungo la retta comune ai due semipiani.

Il limite opposto si ha quando l'angolo solido è

Il limite opposto si ha quando l'angolo solido è costituito da un'angoloide ad infinite facce; cioè quando la nostra piramide diventa un cono, che può essere circolare, ellittico o con qualsiasi curva chiusa come sezione ortogonale all'asse.

La misura degli angoli solidi

Ricordando che la misura degli angoli piani in radianti è l'arco di cerchio di raggio unitario sotteso angolo piano; analogamente nello spazio: "La misura dell'angolo solido è l'area della superficie sferica di raggio unitario sottesa all'angolo solido". (in "stereoradianti").

Poiché l'area della superficie dell'intera sfera è: $4R^2\pi$, l'angolo solido sferico è 4π stereoradianti (l'analogo dell'angolo giro 2π rad)

Se consideriamo un cubo inscritto o circoscritto alla sfera, le semidiagonali del cubo uscenti dal centro della sfera (o centro del cubo) delimitano, come spigoli di piramidi indefinite a base quadrata, angoloidi tetraedri, cioè dividono la superficie sferica in 6 parti uguali, perciò l'ampiezza di tali angoloidi tetraedri

tali angoloidi tetraedri

è $\frac{1}{6} 4\pi = \frac{2}{3}\pi$ stereoradianti.

Per l'ottaedro avremo

$\frac{1}{8} 4\pi = \frac{\pi}{2}$ stereoradianti.

Per il dodecaedro regolare, l'angoloide pentaedrico avrà un ampiezza di $\frac{1}{12} 4\pi = \frac{\pi}{3}$ stereorad. Per un solido di n facce uguali inscritto in una sfera l'angoloide sarà di: $\frac{4\pi}{n}$ s.rad.

La direzione media.

Ogni semiretta uscente da un punto (vertice) implica una direzione in modo univoco da quel punto.

Nell'angolo piano, costituito dall'insieme piano delle semirette di quell'angolo, diremo: direzione media la direzione della bisettrice.

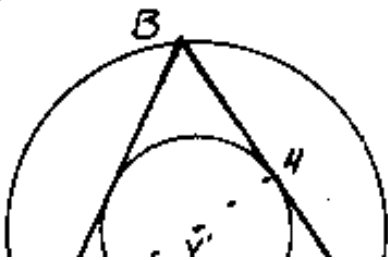
Ci domandiamo come definire direzione media dello spazio angolare di un angolo solido

Se l'angolo solido è un angoloide conico a base circolare, resta evidente che la direzione media passerà per il centro dei cerchi base.

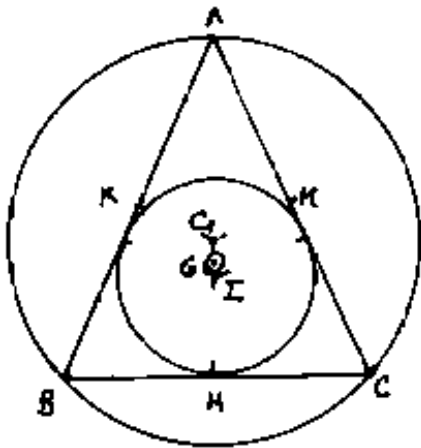
Se l'angolo solido è un angoloide poliedrico con base un poligono regolare inscritto e circoscritto a circonferenze, la direzione media passerà per i centri delle circonferenze, in quanto le tre parti, di triangolo, esterne al cer

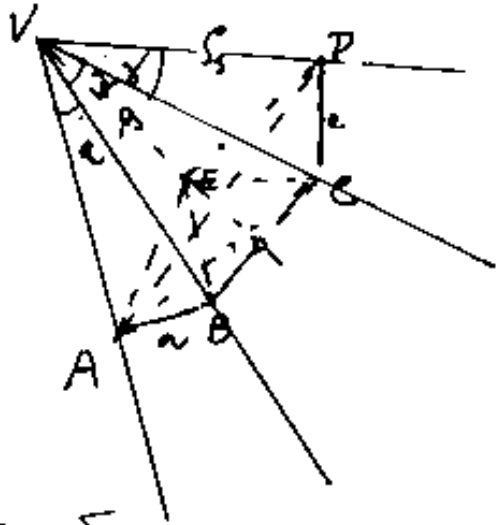
B

H

A C

chio inscritto, [o di poligono], sono sim=
metriche rispetto al centro, come
lo sono le tre semirette che uscenti dal vertice V del
poliedro passano per i vertici A, B, C del triangolo,
(o del poligono). Prese due a due tali semirette ammetto=
no come direzione media la bisettrice dell'angolo del
la faccia dell'angoloide triedro (o poliedro), che è

anche mediana della faccia; però se consideriamo tra le mediana (VH) e la semiretta opposta (VA), la direzione media dell'angoloide (VV'), non è più la bisettrice dell'angolo ($\widehat{AVH}$) delle due semirette.

Consideriamo quindi un triangolo isoscele, inscrittibile e circoscrittibile ad una circonferenza, ove però incentro (I) e circocentro (C), non coincidono pur essendo su una stessa mediana. Le bisettrici, direzioni medie degli angoli di faccia (VH), (VK), (VM) incontrano i lati del triangolo ABC nei punti medi (H, K, M) il che farebbe presumere che la direzione media sia $\overline{VG}$ ove G = baricentro del triangolo, estendibile al baricentro di tutte le figure. Sarebbe più proprio pensare al baricentro della porzione di superficie sferica intercettata dalle facce dell'angoloide poliedro. Consideriamo quindi il problema in generale.

Se a partire dal vertice V dell'angoloide riportia=
mo su ciascuna semiretta, uscente da V, un segmento
di lunghezza ρ_1 delimitiamo una parte di sfera.
Consideriamo le semirette uscenti da V che sono spi=
goli dell'angoloide poliedrico, unendo le estremità
dei segmenti lunghi ρ_1 si tracciano i lati e le dia=

gonali di base, se la base è piana tali segmenti sono anche complanari. (Nessun problema per basi triangolari).

Se: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ sono gli angoli piani delle facce dell'angoloide, detti a, b, c, d, .. gli opposti lati di base a distanza ρ_1 avremo:

$a = 2\rho_1 \sin\frac{\alpha}{2}$; $b = 2\rho_1 \sin\frac{\beta}{2}$; $c = 2\rho_1 \sin\frac{\gamma}{2}$; ... $d = 2\rho_1 \sin\frac{\delta}{2}$; ....

Il quadrilatero ABCD è piano se è inscrittibile in una circonferenza sezione della sfera ρ_1 con il piano di base ABCD. (ciò vale anche se gli spigoli ρ_1 sono più di 4 in generale n)(non inversamente)

Sia "r" il raggio della circonferenza di base e sia "O" il suo centro; la distanza $\overline{VO}$ del piano di base dal centro "V" della sfera è: $\overline{VO} = \sqrt{\rho_1^2 - r^2}$; $\rho_1 = \overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = \overline{VD} = \dots$

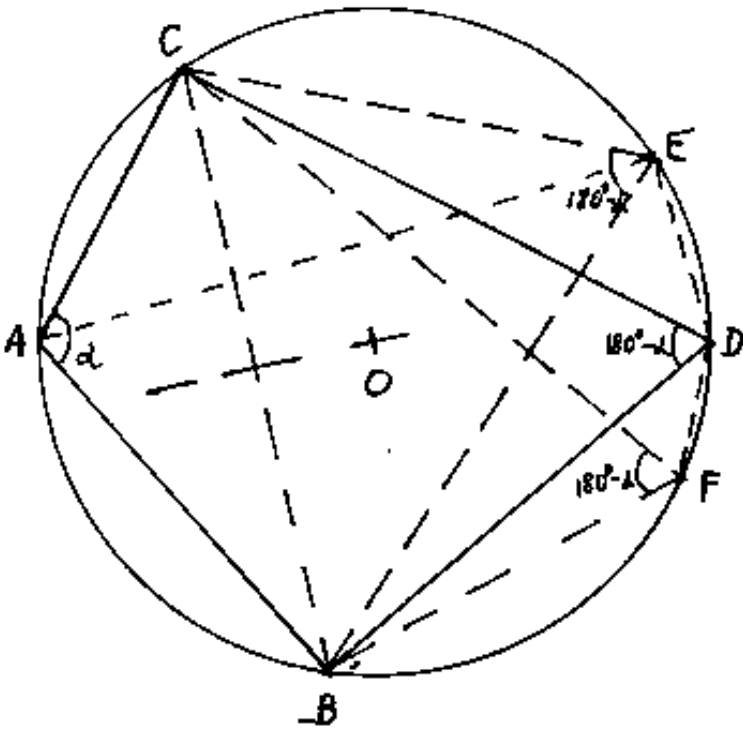
$r = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = \dots$ Notare che per un triangolo ottusangolo il circocentro (qui indicato con O) è esterno al triangolo

sangolo il circocentro (qui indicato con O) è esterno al triangolo.

Condizione per cui un quadrilatero ed in generale un poligono è inscrittibile in una circonferenza.

1) Se in un quadrilatero due angoli interni opposti sono supplementari;

(notare che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è un

angolo giro = due angoli piatti, perciò se due angoli opposti in un quadrilatero sono supplementari, necessariamente anche gli altri due angoli interni sono opposti e supplementari.)

<u>il quadrilatero è inscritti=bile in una circonferenza.</u>

Infatti considerata una dia=gonale come corda di una circonferenza, se un vertice opposto passa per tale circon=ferenza, necessariamente vi appartiene anche l'altro vertice opposto alla corda che ha l'angolo supplementare.

Se la diagonale $\overline{CB}$ è considerata <u>corda</u> di tutte le circonferenze che hanno il centro (o) sull'asse di $\overline{AB}$ e fra esse scegliamo la circonferenza che passa per "A" (vertice con angolo α), poiché l'arco di circonferenza $\widehat{BC}$ opposto all'arco di circonferenza $\widehat{BAC}$, è il luogo dei ver=tici di triangoli di base $\overline{BC}$ aventi l'angolo alla circon=

ici di triangoli di base BC aventi l'angolo alla circon=
ferenza suppementare di α, necessariamente tale circonfe
renza passa per il vertice opposto ad A.

Poiché non può esistere un triangolo di base $\overline{BC}$ che abbia l'angolo opposto ad A (α) cioè: ($180-\alpha$) il cui vertice op=
posto (D oppure E, oppure F...) che cada fuori della circonferenza

che passa per A, B, C ed avente in A l'angolo α. La condizione è anche sufficiente oltreché necessaria.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero piano sia inscrittibile in una circonferenza è che abbia due angoli interni opposti supplementari.

Si noti che un pentagono, ABDEC, (v. figura), ove tracciata la diagonale $\overline{BC}$ e fatta passare per A, B, C, una circonferenza, essa passerá anche per D ed E se gli angoli $B\hat{E}C$ e $B\hat{D}C$ sono supplementari ad α.

In generale:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un poligono sia inscrittibile in una circonferenza è che tracciata una diagonale che separi un solo vertice, tutti i triangoli che hanno per base tale diagonale e per vertice un altro vertice del poligono, abbiano l'angolo opposto alla base supplementare all'angolo del vertice separato.

Ogni poligono piano inscrittibile in una circonferenza

Ogni poligono piano inscrittibile in una circonferenza ammette infinite sfere le cui superfici contengano i vertici del poligono, tali sfere avranno tutte il centro sulla normale al piano del poligono e passante per il centro della circonferenza circoscritta.

Se il poligono piano non è inscrittibile in una circonferenza, non esiste alcuna superficie sferica che

contenga tutti i vertici del poligono.

Se il poligono è un quadrilatero non piano, esiste una sola sfera la cui superficie contenga i vertici del poligono quadrilatero.

Un quadrilatero non piano è composto di due triangoli (sempre piani) che hanno ruotato intorno alla diagonale comune del quadrilatero e poiché il piano normale a tale diagonale e passante per i circocentri contiene anche le normali ai piani dei due triangoli passanti per i circocentri, tali normali essendo complanari si incontrano nel punto che è il centro della sfera circoscritta al quadrilatero non piano se l'angolo fra i piani dei due triangoli diventasse piatto ed il quadrilatero non fosse inscrittibile in una circonferenza, il punto comune alle due normali divergerebbe all'infinito, e non vi sarebbe nessuna sfera di raggio finito per circoscriverlo.

Se il quadrilatero è inscrittibile in una circonferenza

di centro O, il centro O è circocentro comune dei triangoli a due a due ottenuti tracciando una diagonale.

Se il poligono non piano ha più di 4 vertici, la condizione che esista una superficie sferica che contenga tutti i vertici è che presi i vertici 4 a 4 e calcolato il raggio della sfera, ammettano lo stesso raggio.

Di un angoloide comunque poliedrico è sempre possibile staccare dal vertice sugli spigoli segmenti uguali a ρ_1 (qualsiasi ρ_1), perciò gli estremi dei segmenti ρ_1 costituiscono una base poligonale sulla superficie della sfera di raggio ρ_1. Tale base può essere piana o non piana, se piana ammette un cerchio circoscritto, delimitante la calotta sferica di un angoloide conico; mentre per determinare la misura del nostro angoloide occorrerà calcolare l'area della porzione di tale calotta delimitata dai piani delle facce dell'angoloide.

Poiché tre punti determinano sempre un piano, di un quadrilatero non piano consideriamo fuori del piano ABC, il punto D cioè consideriamo il triangolo BCD come se avesse ruotato intorno a BC. Se C_1 e C_2 sono i circocentri dei due triangoli ed M il punto medio di $\overline{BC}$, se R_1 ed R_2 sono i raggi dei cerchi circoscritti ai triangoli ABC e BCD

chi circoscritti ai triangoli ABC e BCD

e sia $\beta = C_1\widehat{M}C_2 = 90° + \alpha$; ρ_1 = raggio della

sfera : $\boxed{\rho_1 = \sqrt{(C_1K)^2 + R_1^2}} = \sqrt{(C_2V)^2 + R_2^2}$; $\overline{C_1M} = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{CB}{2}\right)^2}$; $\overline{C_2M} = \sqrt{R_2^2 - \left(\frac{CB}{2}\right)^2}$;

$\overline{C_1V} = \overline{C_2M} \cos\alpha + \overline{C_2K} \operatorname{sen}\alpha$

$\overline{C_1V} = \overline{C_2M} \cos\alpha + \overline{C_2M} \operatorname{sen}^2\alpha + \overline{C_1M} \operatorname{sen}\alpha$

$\overline{C_1V} = \overline{C_2M}(\cos\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + \overline{C_1M} \operatorname{sen}\alpha$ che

sostituita nella $\rho_1 = \sqrt{\overline{C_1V}^2 + R_1^2}$ risolve il problema.

Lo spazio angolare solido

Lo spazio angolare solido è di eccezionale importanza. Noi siamo stati abituati a considerare uno spazio "n"-dimensionale, attribuendo ad unità dimensionali valori di confronto arbitrariamente posti per convenzione umana.

L'angolo ha in se l'unità, cioè, se è piano, l'angolo giro è l'unità; se è solido l'angolo sferico è l'unità.

Abbiamo già definito l'angolo piano una variazione di direzione, lo spazio angolare piano sarà lo spazio piano percorso dalla semiretta (direzione) origine, per raggiungere la semiretta finale (nuova direzione). Nello spazio tridimensionale (geometrico), data la semiretta (direzione) origine, se "α" era l'ampiezza angolare piana vediamo tale semiretta origine come l'asse di un cono ove la semiretta (direzione piana) variata di α può essere una qualsiasi delle generatrici della superficie conica. Lo spazio

angolare solido è costituito da tutte le semirette interne al cono ove l'asse è la <u>direzione media</u>.

Nell'angolo piano vediamo la semiretta che torna all'origine ad ogni giro, nell'angolo solido, vediamo le semirette del cono dilatarsi, aprirsi come un fiore raggiungere il massimo sferico e riavvicinarsi per tornare alla direzione origine.

Come si vede nello spazio angolare che ritorna in se stesso all'origine dopo aver compiuto la sua unità è implicito il concetto del "pulsare", "pulsazione"; e, indipendentemente da qualsiasi dimensione lineare, possiamo pensare puntiforme qualsiasi sorgente raggiante.
Poiché un punto è aperto a tutte le direzioni, la sua pulsazione sarà in un angolo solido sferico (unitario), ma in una delle infinite direzioni vi può essere un'altro punto, sorgente di radiazioni le due superfici sferiche si intersecano secondo una circonferenza piana che è base dei due angoloidi conici aventi i vertici nei centri emissivi.
Ma nulla vieta di pensare ad un terzo centro emissivo, o meglio ad un insieme di centri emissivi ove i piani delle circonferenze di intersezione, delimiteranno gli angoloidi conici fino a renderli angoloidi poliedrici. Il gioco è fatto per costituire i cristalli.
. Il "pulsare" è una frequenza . solo per fissare le idee

Il "pulsore" è una frequenza; solo per fissare le idee, pensiamo il nostro punto come una carica elettrica che inverte la sua polarità, esso darebbe un campo elettrico alternato, però sappiamo che le onde elettromagnetiche implicano dipoli, cioè due punti la cui distanza è connessa con la frequenza, e, tenuto conto di una velocità finita di trasmissione, si ha la lunghezza d'onda.

Il modellino che semplicizza il concetto di frequenza e la sua connessione con la lunghezza d'onda, potrebbe essere il seguente: Consideriamo un punto che si muove su una circonferenza con velocitá periferica (tangenziale) $V =$ costante, il raggio R che congiunge il punto col centro della circonferenza si muoverá con velocitá angolare $\omega = \frac{V}{R}$ pure costante. Detto <u>T = periodo</u>, il tempo impiegato per compiere un giro (angolarmente 2π rad) avremo: $\frac{2\pi}{T} = \omega$, mentre il numero di giri compiuti nell'unitá di tempo é la frequenza $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$; $\omega = 2\pi f$; cioé la frequenza f é l'inverso del periodo T. Supponiamo che, in sincronismo col punto, si abbia un pendolo di periodo T, che é connesso ad un carrello che si muove di moto rettilineo perpendicolare al piano del pendolo e sia C la sua <u>velocitá finita</u>, se il pendolo é munito di penna scrivente, sul piano traccerá una sinusoide la cui lunghezza λ é detta lunghezza d'onda ove:

cui lunghezza λ è detta lunghezza d'onda ove:

$\lambda = f/C = (\text{cicli/sec})/(\text{m/sec}) \doteq \lambda = \text{m/ciclo}$.

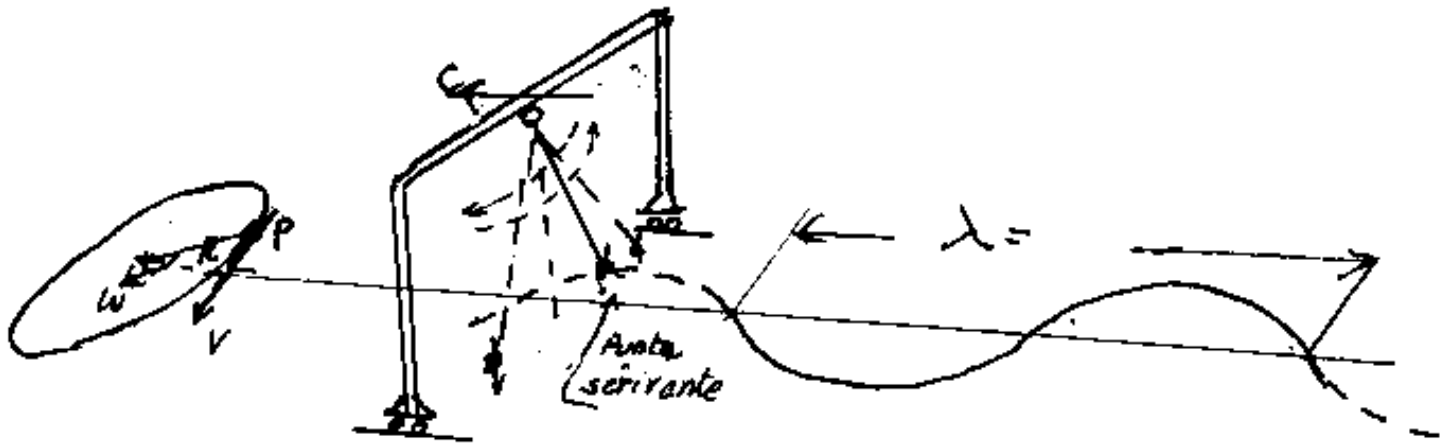
P

ω

V

C

$\lambda =$

Punta scrivente

Possiamo considerare il vertice di un angolo solido come un centro emissivo e vedremo che l'emissione può non essere la stessa in tutte le direzioni (Per esempio l'energia luminosa emessa dalla fiamma di una candela). Ciò implica il costituirsi di punti differenziati, di piani, di superfici. In fotometria si studiano le indicatrici fotometriche come luogo degli estremi di vettori uscenti dal centro e di intensità pari all'intensità di emissione in quella direzione.

L'energia raggiante è costituita da onde elettromagnetiche; questa generalizzazione, cui è pervenuta la fisica moderna, implica la variazione nel tempo di polarità; se il mezzo in cui si irraggia non è isotropo, si ha anche una diversa velocità di trasmissione nelle varie direzioni. In cristallografia, la definizione più generale di cristallo è che un certo materiale presenti una qualche anisotropia. Non solo, ma evidenzia che i cosiddetti "mezzi isotropi", cioè quei mezzi nei quali i fenomeni fisici avvengono identici in tutte le direzioni sono costituiti da

sici avvengono identici in tutte le direzioni, sono costituiti da minutissimi micro-cristalli mescolati, cioè senza alcun ordine disposti; mentre il fatto di <u>presentare anisotropia</u>, cioè fenomeni che avvengono <u>diversamente</u> in due diverse direzioni, implica che il materiale presenti internamente <u>un ordine</u> cioè presenti orientazioni privilegiate dei suoi elementi. Esasperando al limite le definizioni

della cristallografia potremmo dire che un pezzo di ferro non è un cristallo, ma se lo magnetizziamo, cioè se ordiniamo in una certa direzione i suoi magnetini elementari (magnetini di Barkhausen) diventa un cristallo.
Gli esperimenti di Barkhausen (1919) sulla magnetizzazione sono avvenuti prevalentemente su cristalli, perciò l'ordinamento interno dei materiali può avvenire in molteplici modi. Quindi in un "cristallo" vi può essere più o meno ordine e un pò di confusione.
Ogni direzione rilevabile in un materiale implica un ordine cioè una caratteristica per essere classificato non isotropo = anisotropo, e potersi chiamare cristallo.
L'ordinamento del materiale può avvenire sotto vari aspetti, per esempio ai fini della coesione, i piani di sfaldatura - definiti dalla direzione della retta di giacitura. Ai fini della trasparenza ai colori nelle varie direzioni; Ai fini magnetici, elettrici ecc. ecc.
Quello che comunemente chiamiamo cristallo

Quello che comunemente chiamiamo cristallo
è un solido geometricamente squadrato, la cui geo=
metria è connessa alla costituzione chimica del ma=
teriale, e si è formato naturalmente. La "squadratura"
geometrica può essere anche molto frastagliata come
certe geminazioni, ma troveremo la costanza degli angoli

diedri su facce più piccole. La costanza dell'angolo diedro fra due determinate facce, (piani), implica la costanza delle loro giaciture, infatti per quanto possa sfaldarsi anche diversamente di una faccia rispetto all'altra permane l'angolo diedro in quanto permangono le direzioni delle rette di giacitura.

Torneremo su questo argomento che abbiamo sintetizzato allo scopo di introdurre lo studio dei solidi. Una volta note certe caratteristiche dei solidi, soprattutto sulla loro formazione, potremo riprendere il discorso.

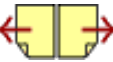
Un solido può considerarsi l'intersezione di più angoloidi, ma può considerarsi anche generato da un centro emissivo che trasmette secondo determinate direzioni. Le direzioni possono essere le giaciture dei piani facciali, gli

no essere le giaciture dei piani facciali, gli
intervalli di stratificazione come battimenti di
due frequenze sovrapposte. Se in un solido
qualsiasi, consideriamo un centro interno e
lo colleghiamo con i vertici delimitanti le fac=
ce; gli angoloidi aventi per vertice questo cen=
tro, e per spigoli le rette che uniscono il centro

con i vertici delle facce, possono riguardarsi come un flusso uscente dal centro che si dilata nello spazio angolare dei singoli angoloidi. Questo modo di riguardare i solidi ci servirà.

Ogni solido è delimitato da punti detti Vertici, da segmenti che uniscono vertici adiacenti, e sono detti spigoli, porzioni di piano delimitate da spigoli, non interne al solido, sono dette facce. Unione di vertici non adiacenti sono le diagonali (di faccia, o interne al solido).

Notiamo che per delimitare una faccia occorrono almeno tre spigoli e quindi almeno tre vertici, ogni vertice deve avere almeno tre spigoli non complanari e quindi almeno tre facce che vi concorrono. Ogni spigolo è comune a due sole facce. Ordinariamente considereremo angoloidi costitutivi di un solido, le piramidi aventi il vertice comune

in un punto interno al solido, aventi per base le facce del solido, e per spigoli i segmenti che uniscono il centro con i vertici del solido. Ma possia-mo anche considerare il solido come intersezione de-gli angoloidi aventi i vertici coincidenti con i vertici del solido e per piani delimitanti, le facce

che concorrono nei singoli vertici, e per spigoli gli spigoli del solido che concorrono in quel vertice.

In ogni vertice del solido concorra lo stesso numero di spigoli e di facce (ciò non sempre è possibile). Sia "n" tale numero. Se sezioniamo con un piano un angoloide di "n" spigoli si ha una piramide avente: (n+1) vertici (cioè i vertici intersezione del piano con gli n spigoli dell'angoloide più il vertice dell'angoloide stesso); (2 n) spigoli (cioè gli spigoli dell'angoloide più gli spigoli intersezione del piano base con le facce dell'angoloide); (n+1) facce (cioè le facce dell'angoloide più la faccia del piano base.)

Abbiamo che la quantità di vertici V=(n+1) più la quantità di Facce F=(n+1) ci dà (F+V)=(2n+2) che confrontata con 2n spigoli S, ritorna la famosa relazione di Eulero : $(F+V)=S+2$ In un solido "La somma delle facce e dei vertici supera di due il

numero degli spigoli."

Indice Enciclopedico Indice Pag. 88

Angoli diedri ed angoli delle facce

Consideriamo la piramide a base triangolare, che ha per vertice il centro "O" della sfera di raggio ρ, e per base il piano intercettato dalla superficie sferica sezionando gli spigoli dell'angoloide che genera la piramide. Gli spigoli di tale piramide sono tutti uguali a "ρ".

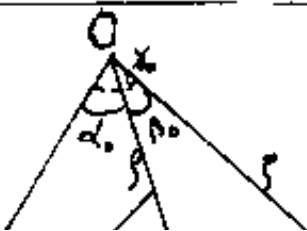
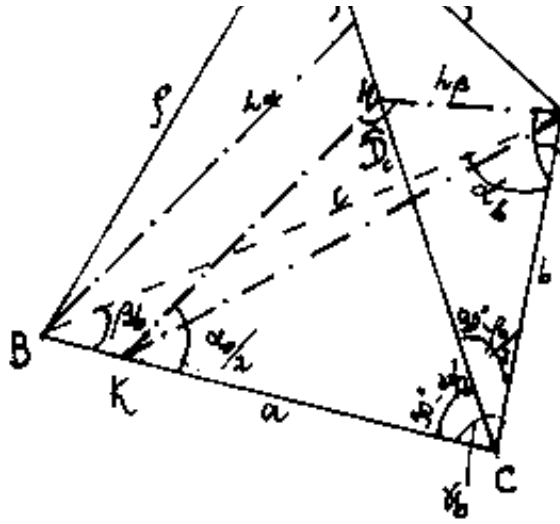
Sia ABC la base della piramide, rispettivamente di lati a, b, c e di angoli: $\alpha_b, \beta_b, \gamma_b$.

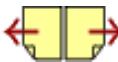
Le facce di tale piramide sono triangoli isosceli, rispettivamente di lati ρ e di basi: a, b, c cui corrispondono gli angoli al vertice $B\hat{O}C = \alpha_0$; $B\hat{O}A = \gamma_0$; $A\hat{O}C = \beta_0$

Noi supporremo noti gli angoli delle facce dell'angoloide triedro e vogliamo trovare gli angoli diedri formati da tali facce.

$$a = 2\rho \operatorname{sen}(\alpha_0/2)$$

$$b = 2\rho \operatorname{sen}(\beta_0/2)$$

$$c = 2\rho \, \mathrm{sen}(\gamma_0/2)$$

$$\cos(\alpha_b) = \cos(B\hat{A}C) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos(\beta_b) = \cos(A\hat{B}C) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos(\gamma_b) = \cos(A\hat{C}B) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

– Sezioniamo con un piano per perpendicolare ad $\overline{OC} = \rho$.

$$\cos \alpha_b = \frac{\rho^2\left(\text{sen}^2 \frac{\beta_0}{2} + \text{sen}^2 \frac{\gamma_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\alpha_0}{2}\right)}{\rho^2\left(2\,\text{sen}\, \frac{\beta_0}{2}\, \text{sen}\, \frac{\gamma_0}{2}\right)}$$
$$\cos \beta_b = \frac{\left(\text{sen}^2 \frac{\alpha_0}{2} + \text{sen}^2 \frac{\gamma_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\beta_0}{2}\right)}{\left(2\,\text{sen}\, \frac{\alpha_0}{2}\, \text{sen}\, \frac{\gamma_0}{2}\right)}$$
$$\cos \gamma_b = \frac{\left(\text{sen}^2 \frac{\alpha_0}{2} + \text{sen}^2 \frac{\beta_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\gamma_0}{2}\right)}{\left(2\,\text{sen}\, \frac{\alpha_0}{2}\, \text{sen}\, \frac{\beta_0}{2}\right)}$$

Si noti che se gli spigoli ρ sono uguali, gli angoli del triangolo di base sono indipendenti dalle misure lineari.

Per calcolare l'angolo diedro fra due facce occorre sezionare con un piano perpendicolare allo spigolo comune alle due facce; le tracce di tale piano su due facce della piramide sono parallele alle altezze di tali facce, relative allo spigolo comune. Ma se $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ le altezze relative allo spigolo comune non si incontrano nello stesso punto, per cui noi prenderemo il piano passante per una altezza e determineremo le tracce sull'altra faccia e sulla base.

(Vedi figura ove il piano passa per KHA). (sia $\hat{D}$ = diedro)

$$\cos\left(\hat{D}_c\right) = \cos\left(K\hat{H}A\right) = \frac{\overline{KH}^2 + \overline{HA}^2 - \overline{KA}^2}{2\,\overline{KH}\cdot\overline{HA}}; \quad \left(K\hat{H}C = C\hat{H}A = 90°\right)$$

$$\cos\left(\hat{D}_c\right) = \frac{\overline{HC}^2/tg^2(\alpha_0/2) + \overline{HC}^2/tg^2(\beta_0/2) - \left[\overline{KC}^2 + \overline{CA}^2 - 2\,\overline{KC}\cdot\overline{CA}\cos\gamma_0\right]}{2\,\overline{HC}/tg(\alpha_0/2)\cdot\overline{HC}/tg(\beta_0/2)}$$

$$\cos\left(\hat{D}_c\right) = \frac{\frac{\cos^2(\alpha_0/2)}{sen^2(\alpha_0/2)} + \frac{\cos^2(\beta_0/2)}{sen^2(\beta_0/2)} - \left[\frac{1}{sen^2(\alpha_0/2)} + \frac{1}{sen^2(\beta_0/2)} - \frac{2\cos\gamma_0}{sen(\alpha_0/2)\,sen(\beta_0/2)}\right]}{2\,\frac{\cos(\alpha_0/2)\cos(\beta_0/2)}{sen(\alpha_0/2)\,sen(\beta_0/2)}}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2} + \cos^2\frac{\beta_0}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2}}{\mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2}} - \left[\dfrac{\mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2} - 2\,\mathrm{sen}\frac{\beta_0}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\alpha_0}{2}(\cos\gamma_0)}{\mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2}}\right]}{2\,\dfrac{\cos\frac{\alpha_0}{2}\,\cos\frac{\beta_0}{2}}{\mathrm{sen}\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\beta_0}{2}}}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = \frac{\left(\cos^2\frac{\alpha_0}{2} - 1\right)\mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2} + \left(\cos^2\frac{\beta_0}{2} - 1\right)\mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2} + 2\,\mathrm{sen}\frac{\beta_0}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\alpha_0}{2}(\cos\gamma_0)}{2\cos\frac{\alpha_0}{2}\cos\frac{\beta_0}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\beta_0}{2}}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = \frac{2\left[-\mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2} + 2\,\mathrm{sen}\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\beta_0}{2}(\cos\gamma_0)\right]}{\mathrm{sen}\,\alpha_0\,\mathrm{sen}\,\beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = 2\,\frac{-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2} + 2\,\mathrm{sen}\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\beta_0}{2}\left(\dfrac{\mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\gamma_0}{2}}{2\,\mathrm{sen}\frac{\alpha_0}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\beta_0}{2}}\right)}{\mathrm{sen}\,\alpha_0\,\mathrm{sen}\,\beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = 2\,\frac{+\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2}\left(1 - \mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2}\right) + \mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2}\left(1 - \mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\frac{\gamma_0}{2}}{\mathrm{sen}\,\alpha_0\,\mathrm{sen}\,\beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = 2\,\frac{\mathrm{sen}^2\frac{\alpha_0}{2}\cos^2\frac{\beta_0}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\beta_0}{2}\cos^2\frac{\alpha_0}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\gamma_0}{2}}{\mathrm{sen}\,\alpha_0\,\mathrm{sen}\,\beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = 2\,\frac{\left(\frac{1-\cos\alpha_0}{2}\right)\left(\frac{1+\cos\beta_0}{2}\right) + \left(\frac{1-\cos\beta_0}{2}\right)\left(\frac{\cos\alpha_0+1}{2}\right) - \frac{1-\cos\gamma_0}{2}}{\mathrm{sen}\,\alpha_0\,\mathrm{sen}\,\beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = 2\,\frac{[illegible]}{\text{sen}\,\alpha_0\,\text{sen}\,\beta_0}$$

$$\cos(\hat{D}_c) = 2\,\frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{\cos\alpha_0\cos\beta_0}{4} - \frac{\cos\alpha_0}{4} + \frac{\cos\beta_0}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos\alpha_0\cos\beta_0}{4} - \frac{\cos\beta_0}{4} + \frac{\cos\alpha_0}{4}\right) - \frac{1}{2} + \frac{\cos\gamma_0}{2}}{\text{sen}\,\alpha_0\,\text{sen}\,\beta_0}$$

$$\boxed{\cos(\hat{D}_c) = \frac{\cos\gamma_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_0}{\text{sen}\,\alpha_0\,\text{sen}\,\beta_0}}$$

che è l'importantissima formula detta del coseno (vedi trigonometria sferica)

Abbiamo così gli angoli diedri fra le facce dell'angoloide triedro in funzione degli angoli al vertice delle facce.

$\hat{D}_{OA} = \arccos\left(\dfrac{\cos\alpha_0 - \cos\beta_0\cos\gamma_0}{\operatorname{sen}\beta_0\operatorname{sen}\gamma_0}\right)$
$\hat{D}_{OB} = \arccos\left(\dfrac{\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\gamma_0}{\operatorname{sen}\alpha_0\operatorname{sen}\gamma_0}\right)$
$\hat{D}_{OC} = \arccos\left(\dfrac{\cos\gamma_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_0}{\operatorname{sen}\alpha_0\operatorname{sen}\beta_0}\right)$

se $\alpha = \beta = \gamma = \varphi$ si hanno tre diedri uguali:

$$\hat{D} = 2\,\operatorname{arcsen}\frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}$$

Queste stesse formule si possono applicare per calcolare gli angoli diedri formati dalla base con le facce della piramide.

Infatti i tre angoli nel vertice C della base sono:

$$\gamma_1 \quad ; \quad \left(90° - \alpha_0/2\right) \quad ; \quad \left(90° - \beta_0/2\right)$$

ed avremo:

$$\cos\hat{D}_{CB} = \frac{\cos(90° - \beta_0/2) - \cos(\gamma_1)\cos(90° - \alpha_0/2)}{}$$

$$\cos D_{CB} = \frac{\cos(90 - \beta_0/2) - \cos(\gamma_b)\cos(90° - \alpha_0/2)}{\operatorname{sen}(\gamma_b)\operatorname{sen}(90° - \alpha_0/2)}$$

$$\boxed{\cos \hat{D}_{CB} = \frac{\operatorname{sen}\beta_0/2 - \cos(\gamma_b)\operatorname{sen}\alpha_0/2}{\operatorname{sen}(\gamma_b)\cos\alpha_0/2}} \quad ; \quad \left(\cos(\gamma_b) = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha_0/2 + \operatorname{sen}^2\beta_0/2 - \operatorname{sen}^2\gamma_0/2}{2\operatorname{sen}\alpha_0/2\,\operatorname{sen}\beta_0/2}\right)$$

$$\cos \hat{D}_{CB} = \frac{2\operatorname{sen}^2\beta_0/2 - \operatorname{sen}^2\alpha_0/2 - \operatorname{sen}^2\beta_0/2 + \operatorname{sen}^2\gamma_0/2}{2\operatorname{sen}\beta_0/2\,\cos\alpha_0/2\,\operatorname{sen}(\gamma_b)}$$

$$\cos \hat{D}_{CB} = \frac{-\operatorname{sen}^2\alpha_0/2 + \operatorname{sen}^2\beta_0/2 + \operatorname{sen}^2\gamma_0/2}{2\cdot\cos\alpha_0/2\,\operatorname{sen}\beta_0/2\,(\operatorname{sen}\gamma_b)} = \frac{\cos\alpha_0 - \cos\beta_0 - \cos\gamma_0 + 1}{2\operatorname{sen}(\gamma_b)\sqrt{(1-\cos\alpha_0)(1-\cos\beta_0)}}$$

$$\cos \hat{D}_{CO} = \frac{\cos(\gamma_b) - \operatorname{sen}\beta_0/2 \operatorname{sen}\alpha_0/2}{\cos\alpha_0/2 \cos\beta_0/2}$$; sostituendo $\cos(\gamma_b)$

$$= \frac{\left(\operatorname{sen}^2\alpha_0/2 + \operatorname{sen}^2\beta_0/2 - \operatorname{sen}^2\gamma_0/2\right) - 2\operatorname{sen}^2\alpha_0/2 \operatorname{sen}^2\beta_0/2}{\frac{\operatorname{sen}\alpha_0 \operatorname{sen}\beta_0}{2}}$$

$$= \frac{\left(1 - \cos\alpha_0 + 1 - \cos\beta_0 - 1 + \cos\gamma_0\right) - (1 - \cos\alpha_0)(1 - \cos\beta_0)}{\operatorname{sen}\alpha_0 \operatorname{sen}\beta_0}$$

$$= \frac{\cos\gamma_0 - \cos\alpha_0 - \cos\beta_0 + \cos\alpha_0 + \cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_0}{\operatorname{sen}\alpha_0 \operatorname{sen}\beta_0}$$

$$\cos \hat{D}_{CO} = \frac{\cos\gamma_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_0}{\operatorname{sen}\alpha_0 \operatorname{sen}\beta_0}$$

Diedro su $\overline{CO}$ ritorna il valore calcolato nel vertice O.; $(\hat{D}_{OC})$

Analogamente:

$$\cos \hat{D}_{CA} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_0/2 - \operatorname{sen}\beta_0/2 \cos(\gamma_b)}{\operatorname{sen}\gamma_b \cos\beta_0/2}$$ ove $\cos(\gamma_b) = \ldots$

È così possibile calcolare gli angoli diedri nei vertici O; ed A, B, C della base per angoloidi triedri.

Infatti un triangolo è determinato quando si conoscono

tre elementi di cui almeno un lato; ed è sempre piano.
Ciò non vale se l'angoloide poliedro ha un numero di facce maggiore di 3, (in generale "n" facce).
Consideriamo, per esempio, <u>l'angoloide tetraedro</u> di vertice "O" e si conoscano gli angoli α_o, β_o, γ_o, δ_o; delle quattro facce che vi convergono.

questi elementi non sono sufficienti per determinare l'=
angoloide tetraedro, infatti fermi restando $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$
l'angolo $\widehat{AOC} = \varepsilon_0$ resta indeterminato. Al più si può
affermare che ε_0 sarà minore della minor somma
dei due angoli adiacenti da una stessa parte:
$\left((\alpha_0+\beta_0) > (\gamma_0+\delta_0) > \varepsilon_0\right)$ oppure: $\left((\gamma_0+\delta_0) > (\alpha_0+\beta_0) > \varepsilon_0\right)$
Consideriamo "O" al centro di una sfera di rag=
gio "ρ"; l'angoloide tetraedro intercetterà sulla
superficie sferica quattro punti: A, B, C, D.
Il quadrilatero ABCD pur essendo coi vertici
su una superficie sferica può non essere inscrittibi=
le in una circonferenza, cioè può non essere piano.
Esiste un solo valore di ε_0 che rende piano il
quadrilatero, però l'essere piano è condizione ne
cessaria, ma non sufficiente perché sia anche in=
scrittibile in una circonferenza. In altre parole, un

quadrilatero è sempre inscrittibile in una sfera (vedi sfera per 4 punti), per essere inscritto in una circonferenza deve essere piano, ma non basta, deve anche avere gli angoli interni opposti supplementari. Se è piano ed è inscritto in una sfera è anche inscrittibile in una circonferenza, se però gli angoli interni opposti non sono supplementari la sfera diventa di raggio infinito, (cioè piano non inscrittibile).

Angoli diedri dell'angoloide tetraedro

$\hat{D}_{OA} = \arccos\left(\frac{\cos\beta_0 - \cos\alpha_0 \cos\varepsilon_0}{\operatorname{sen}\alpha_0 \operatorname{sen}\varepsilon_0}\right) + \arccos\left(\frac{\cos\gamma_0 - \cos\delta_0 \cos\varepsilon_0}{\operatorname{sen}\delta_0 \operatorname{sen}\varepsilon_0}\right)$
$\hat{D}_{OB} = \arccos\left(\frac{\cos\varepsilon_0 - \cos\alpha_0 \cos\beta_0}{\operatorname{sen}\alpha_0 \operatorname{sen}\beta_0}\right)$
$\hat{D}_{OC} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha_0 - \cos\beta_0 \cos\varepsilon_0}{\operatorname{sen}\beta_0 \operatorname{sen}\varepsilon_0}\right) + \arccos\left(\frac{\cos\delta_0 - \cos\gamma_0 \cos\varepsilon_0}{\operatorname{sen}\gamma_0 \operatorname{sen}\varepsilon_0}\right)$
$\hat{D}_{OD} = \arccos\left(\frac{\cos\varepsilon_0 - \cos\delta_0 \cos\gamma_0}{\operatorname{sen}\delta_0 \operatorname{sen}\gamma_0}\right)$

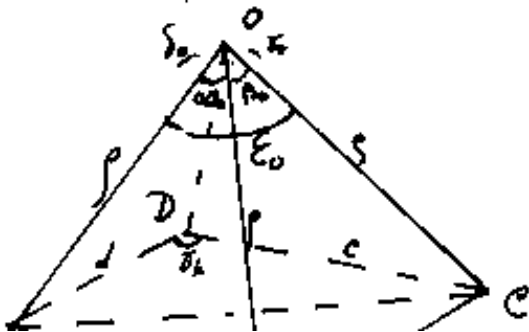
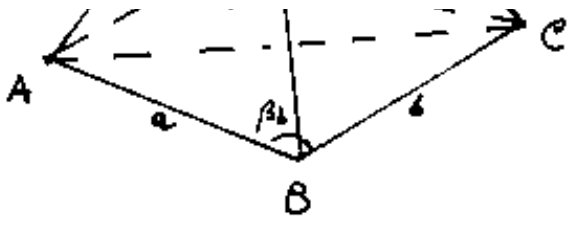
Per il calcolo degli angoli interni alla base, mediante i quali, sarà possibile decidere se il quadrilatero è piano, si applicano le stesse formule di vertici di base della piramide di spigoli "ρ". Abbiamo: indicando con: a, b, c, d, $\overline{AC}$, i lati dei due triangoli di base $\overline{AC}$ = comune

$a = 2\rho \operatorname{sen} \alpha_0/2 = \overline{AB}$

$b = 2\rho \operatorname{sen} \beta_0/2 = \overline{BC}$

$c = 2\rho \operatorname{sen} \gamma_0/2 = \overline{CD}$

$c = 2\rho \,\mathrm{sen}\, \cdot_0/2 = \overline{CD}$

$d = 2\rho \,\mathrm{sen}\, \delta_0/2 = \overline{DA}$

$\overline{AC} = 2\rho \,\mathrm{sen}\, \varepsilon_0/2$

Indichiamo con $\hat{\alpha}_b, \hat{\beta}_b, \hat{\gamma}_b, \hat{\delta}_b$ gli angoli alla base, osservando che $\hat{\beta}_b$ e $\hat{\delta}_b$ si risolvono dai triangoli piani, mentre $\hat{\alpha}_b$ e $\hat{\gamma}_b$ hanno significato solo se gli angoli diedri $\hat{D}_{AC}$ dei due triangoli sommano un angolo piatto, cioè se

il quadrilatero ABCD è piano.

Consideriamo inizialmente il triangolo di base ABC sono noti i tre lati e possiamo calcolare i tre angoli interni:

$$\cos(C\hat{A}B) = \frac{-\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}{2\overline{AC}\cdot\overline{AB}} = \frac{4\rho^2\left(\text{sen}^2\frac{\alpha_0}{2}+\text{sen}^2\frac{\varepsilon_0}{2}-\text{sen}^2\frac{\beta_0}{2}\right)}{4\rho^2\left(\text{sen}\,\varepsilon_0/2\;\text{sen}\,\beta_0/2\right)}$$

$$\cos(A\hat{C}B) = \quad = \frac{\left(\text{sen}^2\,\varepsilon_0/2+\text{sen}^2\beta_0/2-\text{sen}^2\alpha_0/2\right)}{\left(\text{sen}\,\varepsilon_0/2\;\text{sen}\,\beta_0/2\right)}$$

$$\cos\hat{\beta}_b = \quad = \frac{\left(\text{sen}^2\alpha_0/2+\text{sen}^2\beta_0/2-\text{sen}^2\varepsilon_0/2\right)}{\left(\text{sen}\,\alpha_0/2\;\text{sen}\,\beta_0/2\right)}$$

Analogamente per il triangolo ADC:

$$\cos\hat{\delta}_b = \quad = \frac{\left(\text{sen}^2\gamma_0/2+\text{sen}^2\bar{\delta}_0/2-\text{sen}^2\varepsilon_0/2\right)}{\left(\text{sen}\,\gamma_0/2\;\text{sen}\,\bar{\delta}_0/2\right)}$$

$$\cos(A\hat{C}D) = \quad = \frac{\text{sen}^2\gamma_0/2+\text{sen}^2\varepsilon_0/2-\text{sen}^2\bar{\delta}_0/2}{\text{sen}\,\gamma_0/2\;\text{sen}\,\varepsilon_0/2}$$

$$\cos(C\hat{A}D) = \quad = \frac{\text{sen}^2\bar{\delta}_0/2+\text{sen}^2\varepsilon_0/2-\text{sen}^2\gamma_0/2}{\text{sen}\,\bar{\delta}_0/2\;\text{sen}\,\varepsilon_0/2}$$

$\operatorname{sen} \nu_0/_2 \quad \operatorname{sen} \varepsilon_0/_2$

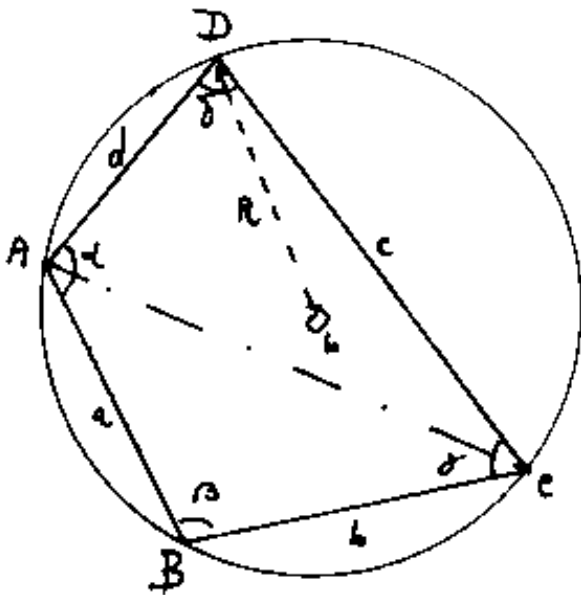
Verificare coi simboli indicati in figura. Consideriamo C = vertice:

$O\hat{C}B = (90° - \beta_0/_2)$; $O\hat{C}A = (90° - \varepsilon_0/_2)$; $O\hat{C}D = (90° - \gamma_0/_2)$

e calcoliamo i due diedri $\hat{D}_{AC/B}$; $\hat{D}_{AC/D}$.

$$\cos(\hat{D}_{AC/B}) = \left(\frac{\cos(90° - \beta_0/_2) - \cos(90° - \varepsilon_0/_2)\cos(A\hat{C}B)}{\operatorname{sen}(90° - \varepsilon_0/_2)\operatorname{sen}(A\hat{C}B)} \right) = \frac{\operatorname{sen}\beta_0/_2 - \operatorname{sen}\varepsilon_0/_2 \cos(A\hat{C}B)}{\operatorname{sen}\varepsilon_0/_2 \operatorname{sen}(A\hat{C}B)}$$

$$\cos(\hat{D}_{AC/D}) = \left(\frac{\cos(90° - \gamma_0/_2) - \cos(90° - \varepsilon_0/_2)\cos(A\hat{C}D)}{\operatorname{sen}(90° - \varepsilon_0/_2)\operatorname{sen}(A\hat{C}D)} \right) = \frac{\operatorname{sen}\gamma_0/_2 - \operatorname{sen}\varepsilon_0/_2 \cos(A\hat{C}D)}{\operatorname{sen}\varepsilon_0/_2 \operatorname{sen}(A\hat{C}D)}$$

Anziché considerare l'uguaglianza: $\cos\left(\hat{\delta}_{\frac{AC}{B}}\right) = -\cos\left(\hat{\delta}_{\frac{AC}{D}}\right)$ per ricavare il valore dell'angolo ε_0 che rende piano il quadrilatero ABCD, notiamo che ABCD essendo inscritto in una sfera, se piano, deve essere inscritto in una circonferenza, cioè: $\cos(\beta_b) = -\cos(\delta_b)$.

Con i simboli in figura si ha:

$$a^2+b^2-2ab\cos\beta = c^2+d^2+2cd\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

$$\overline{AC}^2 = a^2+b^2-2ab\,\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} =$$

$$= \frac{(a^2+b^2)ab + (a^2+b^2)cd - (a^2+b^2)ab + (c^2+d^2)ab}{(ab+cd)}$$

$$\overline{AC}^2 = \frac{(a^2+b^2)cd + (c^2+d^2)ab}{(ab+cd)}$$

Attenzione, nello spazio, date le 5 misure di: $a, b, c, d, \overline{AC}$ non è affatto determinato il quadrilatero, occorre

non è affatto determinato il quadrilatero, occorre anche che:

$$\overline{BD}^2 = \frac{(a^2+d^2)cb + (c^2+b^2)ad}{(ad+cb)}$$

Cioè per determinare un tetraedro nello spazio occorrono le sei misure dei suoi spigoli, che a loro volta sono condizionate dall'esistenza dei triagoli faccia.

$$\overline{AC}^2 = 4\rho^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{(a^2+b^2)cd + (c^2+d^2)ab}{(ab+cd)}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\left(\operatorname{sen}^2\frac{\alpha_0}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\beta_0}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\gamma_0}{2}\operatorname{sen}\frac{\delta_0}{2} + \left(\operatorname{sen}^2\frac{\gamma_0}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\delta_0}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha_0}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta_0}{2}}{\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha_0}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta_0}{2} + \operatorname{sen}\frac{\gamma_0}{2}\operatorname{sen}\frac{\delta_0}{2}\right)}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon_0}{2} = \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha_0/2}{\operatorname{sen}\beta_0/2} + \frac{\operatorname{sen}\beta_0/2}{\operatorname{sen}\alpha_0/2} + \frac{\operatorname{sen}\gamma_0/2}{\operatorname{sen}\delta_0/2} + \frac{\operatorname{sen}\delta_0/2}{\operatorname{sen}\gamma_0/2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha_0/2}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\beta_0/2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma_0/2}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\delta_0/2}\right)$$

è la condizione per cui la sezione della superficie sferica sugli spigoli dell'angoloide tetraedro, corrisponda ad una sezione piana. (Con ρ = cost)

Dati $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$, ogni valore di ε_0 diverso dalla espressione di cui sopra, nei limiti di esistenza di un angoloide tetraedro, determina quadrilateri non piani inscritti in una sfera, se l'angoloide è sezionato con un piano, la sfera circoscritta al quadrilatero piano ha raggio $=\infty$.

infatti la condizione di ε soprascritta vale solo per

infatti la condizione di $\mathcal{E}_0$ soprascritta vale solo per quell'$\mathcal{E}_0$ e per quella determinata giacitura di piani distanti da "O" $\overline{OO_b} = \sqrt{\rho^2 - r^2}$ ove r = raggio della circonferenza: $r = \dfrac{\overline{AC}}{2 \operatorname{sen} \gamma_b} = \dfrac{\overline{AC}}{2 \operatorname{sen}(\widehat{AO_bC}/2)}$

ed O_b = centro della circonferenza.

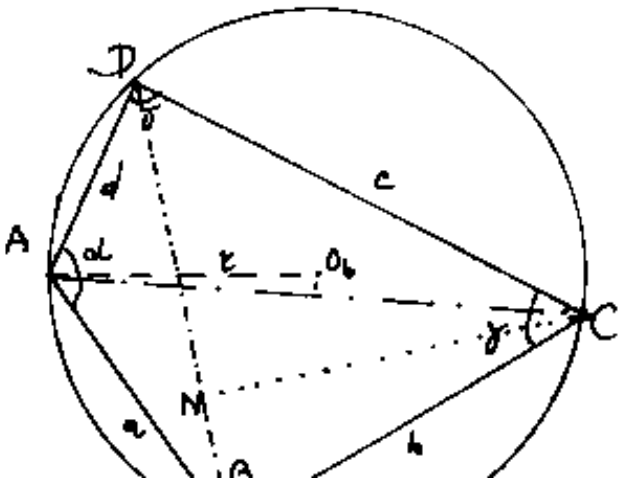
Abbiamo visto che: "Condizioni affinché una sfera di raggio finito non passi per quattro punti A, B, C, D; sono: che il quadrilatero ABCD sia piano; e che il valore dell'angolo ε_0 in funzione di $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ sia diverso da quello della relazione trovata; cioè che ρ diventi infinito.

Per comprendere meglio, facciamo un:

Esempio numerico

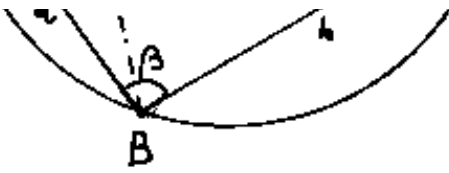
I lati del quadrilatero A, B, C, D siano:

$a = 6$, $b = 8$, $c = 10$, $d = 4$

se i quattro vertici sono su una superficie sferica di raggio $\rho = \overline{OA} = 3/\operatorname{sen}\frac{\alpha_0}{2} = \overline{OB} = 4/\operatorname{sen}\frac{\beta_0}{2} = \overline{OC} = 5/\operatorname{sen}\frac{\gamma_0}{2} = \overline{OD} = 2/\operatorname{sen}\frac{\delta_0}{2}$

condizione che il quadrilatero (piano) sia inscrittibile in una circonferenza è:

$$\cos\beta = -\cos\delta$$

cioè $(\beta + \delta) = 180° = \pi \text{ rad}.$

B

$(\beta+\delta) = 180 = \pi$ rad.

quindi dai triangoli ACB e ACD,

$$\overline{AC}^2 = a^2+b^2-2ab\cos\beta = c^2+d^2+2cd\cos\beta$$

da cui:

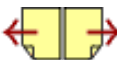
$$\cos\beta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} = -\frac{1}{11}; \quad \cos\delta = +\frac{1}{11}$$

$\beta = 95°\ 12'\ 57'',27$

$\delta = 84°\ 47'\ 02'',73$

$$\overline{AC} = \sqrt{36+64-2(6\cdot 8)\left(\frac{-1}{11}\right)} = 10,46723706$$

$$r = \frac{\overline{AC}}{2\,\mathrm{sen}\,\delta} = 5,2352968871 \text{ (raggio base)}$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{E_d}{2}\right) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{2}{5}}{\frac{\rho}{3}\frac{\rho}{4} + \frac{\rho}{5}\frac{\rho}{2}} = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 / \rho^2$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{E_d}{2}\right) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{25/12 + 29/10}{1/12 + 1/10}\right) = \frac{1}{\rho^2}\frac{299}{11} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{E_d}{2}\right) = \frac{1}{\rho}(5{,}2136)$$

Si noti che possiamo avere infinite sfere aventi il centro "O" sulla verticale al piano di ABCD passante per O_b. Se h è l'altezza della piramide: $\rho^2 = h^2 + r^2$. Quindi per definire quale sfera, occorre definire ρ, che non potrà mai essere inferiore ad r perché se $\rho = r$ i quattro punti stanno sul cerchio massimo della sfera e la piramide degenera in un piano ($h = 0$).

Esistono quindi infinite sfere che circoscrivono un quadrilatero piano inscritto in una circonferenza.

Consideriamo ora il nostro quadrilatero deformabile, prima però calcoliamone tutti gli elementi

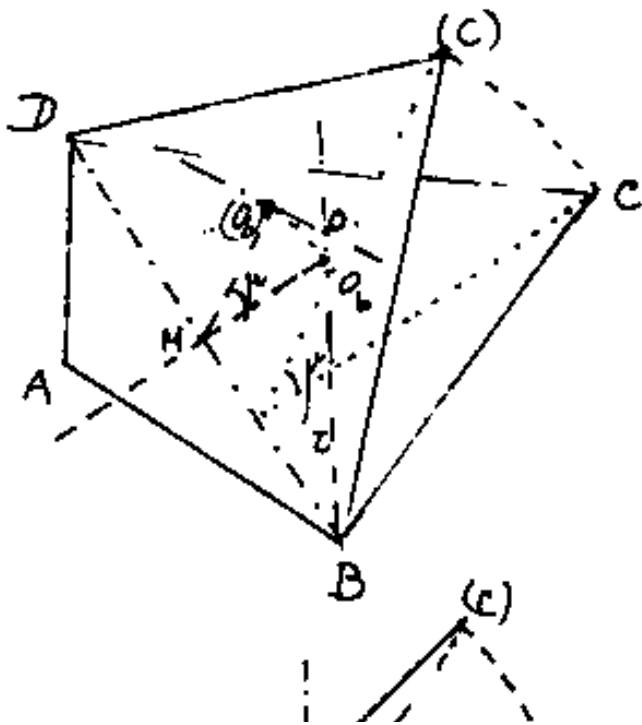
bile, prima però calcoliamone tutti gli elementi

$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-c^2-b^2}{2(ad+cb)} = -\frac{7}{13}$; $\cos\gamma = +\frac{7}{13}$; $\begin{cases} \alpha = 122° 34' 44,'' 29 \\ \gamma = 57° 25' 15,'' 71 \end{cases}$

$\overline{DB} = \sqrt{36+16-2(6\cdot 4)\left(-\frac{7}{13}\right)} = 8,823046744.$; $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\gamma = \frac{2}{13}\sqrt{30}$;

$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\delta = \frac{2}{11}\sqrt{30}$; Aree: $S_{ABC} = 23,90062069$; $S_{ACD} = 19,91718391$

$S = 43,8178046 = (4\sqrt{120})$; $S_{ABD} = 10,11180106$; $S_{BDC} = 33,70600354$;

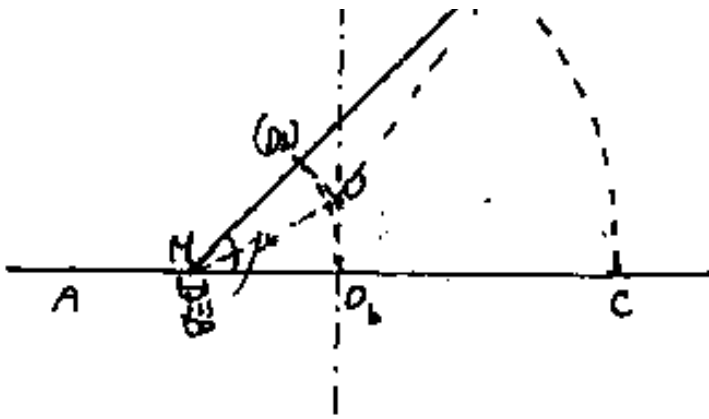
Supponiamo che il triangolo ABD resti nel suo piano, mentre il triangolo BCD ruota intorno a $\overline{BD}$ dell'angolo μ. Prima della rotazione i due triangoli avevano circocentro in comune, in O_b, (condizione perché il quadrilatero sia inscritto in una circonferenza), dopo la rotazione, mentre il circocentro di ABD, resta in O_b il circocentro di BCD segue il piano nella rotazione descrivendo una circonferenza nel piano che biseca ortogonalmente $\overline{BD}$ ed ha per traccia sul piano del quadrilatero iniziale l'asse di $\overline{BD}$ comune ai due triangoli.

Calcoliamo la distanza di Q_b dalla retta BD cioè: $\overline{O_bM} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)^2}$

$$\overline{O_bM} = \sqrt{\left(\frac{\overline{DB}}{2\sin\delta}\right)^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)^2} = r\sqrt{1 - \sin^2\gamma}$$

$$\overline{O_bM} = r\cos\gamma = 2{,}795708437$$

Sezioniamo col piano per M normale a $\overline{BD}$ ed avremo:

I triangoli rettangoli MO_bO ed

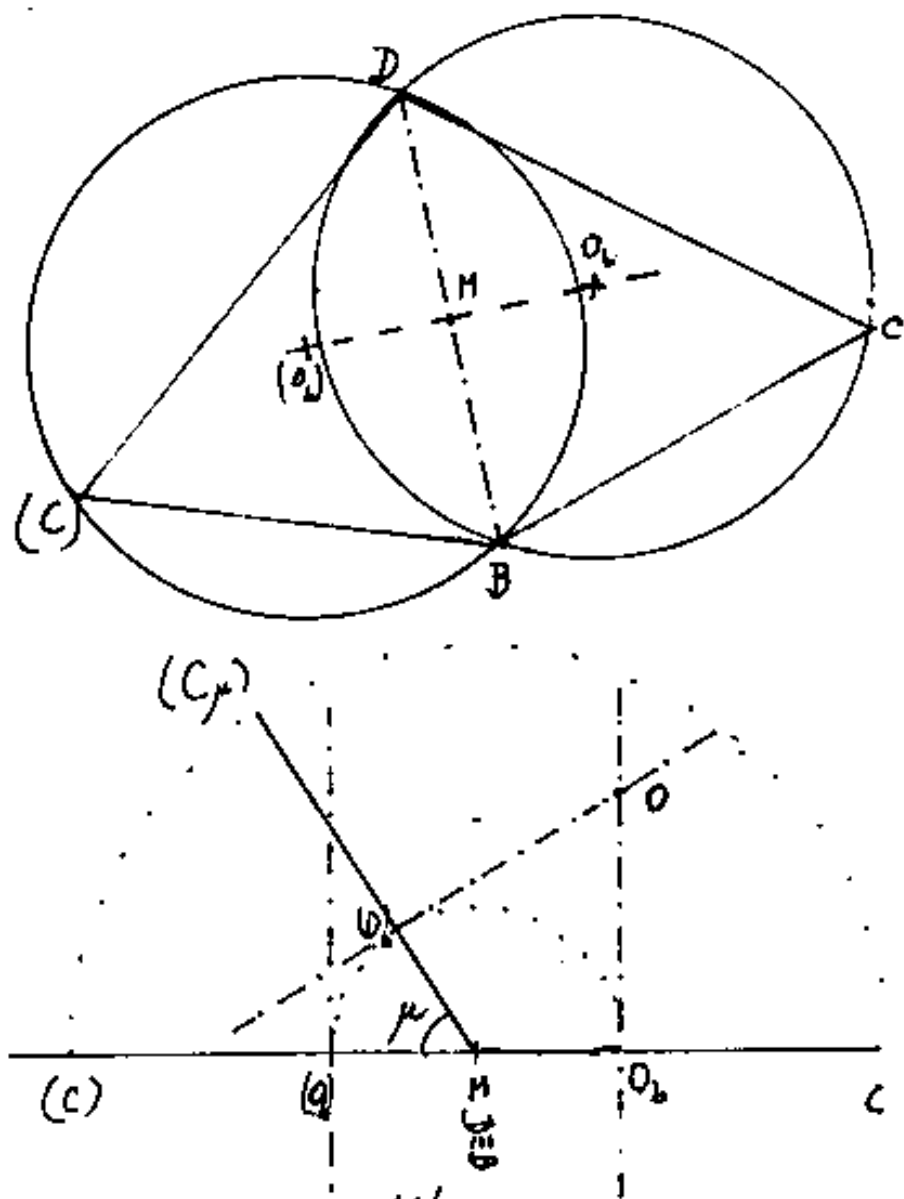
$M(O_b)O$ sono uguali avendo uguale

$M(O_b)O$ sono uguali avendo uguale ipotenusa $(\overline{MO})$ e cateto $\overline{MO_b} = \overline{M(O_b)}$

perciò: $(\overline{OO_b}) = \overline{MO_b}\, tg(\mu/2)$.

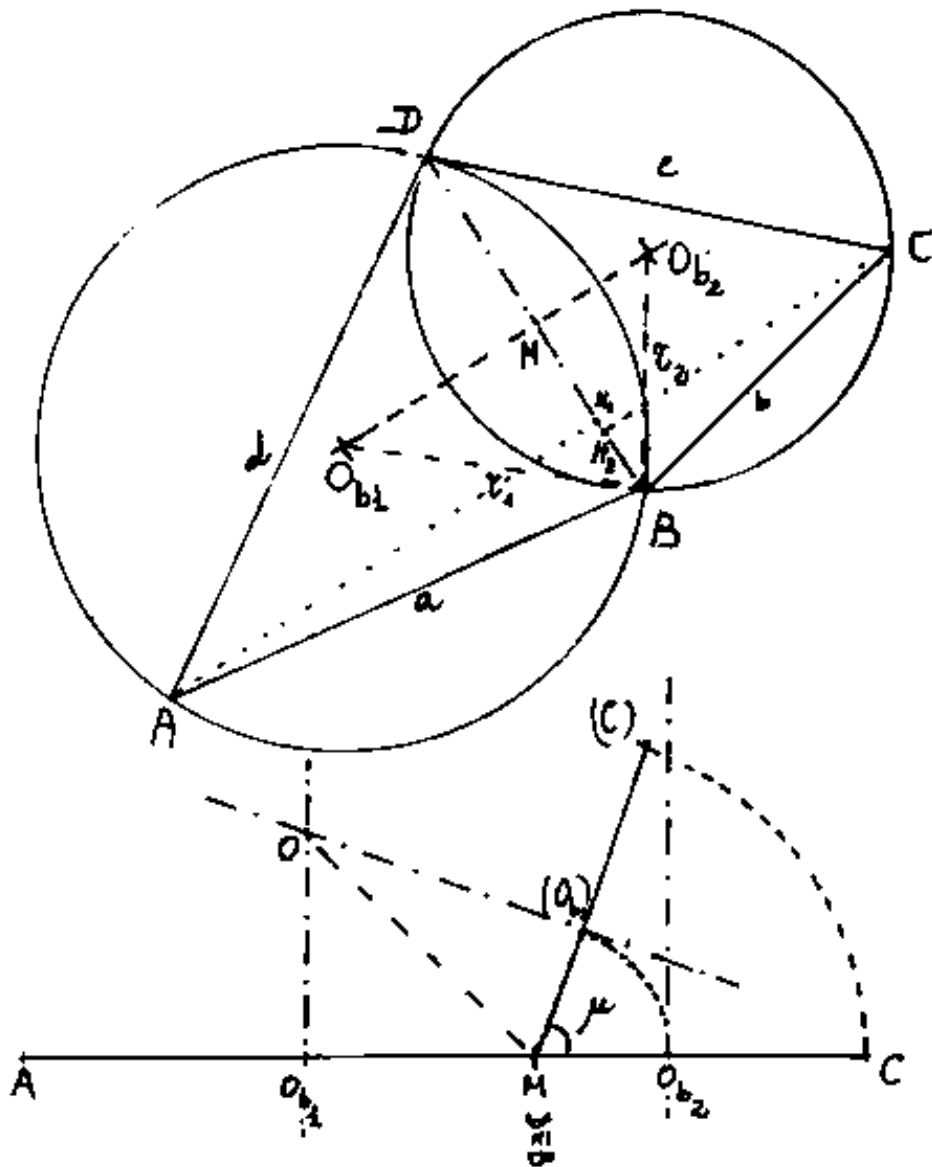
$\rho^2 = r^2 + (\overline{OO_b})^2 = r^2 \cos^2\gamma\, tg^2 \mu/2 + r^2$

$$\rho = r\sqrt{1 + \frac{\cos^2\gamma \,sen^2 \mu/2}{\cos^2 \mu/2}}$$

per $\mu = 90° \rightarrow \mu/2 = 45° \rightarrow tg^2 \mu/2 = 1 \rightarrow \rho = \frac{2}{13}\sqrt{218}$

Possiamo ora considerare un quadrilatero qualsiasi non inscrittibile in una circonferenza per esempio composto da due triangoli DBC ribaltati intorno a $\overline{DB}$ comune. I due triangoli hanno i circocentri distinti uno: è O_b, l'altro (O_b). Le perpendicolari da O_b e da (O_b) al piano del quadrilatero sono il luogo dei centri delle sfere circoscritte a ciascuno dei due triangoli.

Se un triangolo è ruotato dell'angolo μ rispetto al piano dell'altro cioè: $((C)\hat{M}C) = (180° - \mu)$ le due perpendicolari originariamente parallele hanno un punto "O" comune centro

mente parallele hanno un punto O comune centro della sfera circoscritta ai due triangoli, cioè circo- scritta al quadrilatero non piano (sghembo): G_1BCD. — $(\overline{OO_1})^2 + r^2 = \rho^2$. Le distanze $\overline{O_1H}$ sono in generale di- verse, le indichiamo con $\overline{O_{b1}H}$ ed $\overline{O_{b2}H}$ ed avremo che i due triangoli aventi in comune $\overline{BD}$ hanno r diversi: r_1; r_2;

è questo il caso più generale di quadrilatero piano non inscritto in una circonferenza.

I due triangoli ABD e BCD hanno due diversi circocentri, quando il quadrilatero è piano gli assi per O_{b_1} ed O_{b_2} normali al piano sono paralleli, cioè non hanno nessun punto comune, (sfere di raggio infinito). Non appena uno dei due triangoli ruota sul piano dell'angolo "μ" il suo asse per O_{b_2} ruota mantenendosi nel piano di O_{b_1} che passa per M, perciò i due assi essendo complanari al piano normale a $\overline{BD}$

e passante per il suo punto medio M, certamente si incontrano in un punto O centro della sfera comune.

Il raggio della sfera dovrà soddisfare: $\rho = \overline{O_{b_1}O}^2 + r_1^2 = \overline{O_{b_2}O}^2 + r_2^2$

ed anche: $\overline{OO_{b_1}}^2 + \overline{MO_{b_1}}^2 + \cancel{\overline{MB}^2} = \overline{OO_{b_2}}^2 + \overline{MO_{b_2}}^2 + \cancel{\overline{MB}^2}$ ove:

$$\overline{OO_{b_1}}^2 + \overline{MO_{b_1}}^2 = \overline{OO_{b_2}}^2 \overline{MO_{b_2}}^2 = \overline{OM}^2 = \rho^2 - \overline{MB}^2 = \rho^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2$$

Resta con ciò dimostrato che il punto "O" è equidistante.

indipendentemente dall'angolo μ, dai quattro punti del quadrilatero sghembo ABCD.

Occorre ora calcolare in funzione di μ tale distanza che è il raggio della sfera.

Dati i lati a, b, c, d e la distanza $\overline{BD}$ è facile calcolare i raggi dei cerchi circoscritti r_1 ed r_2 ed è facile trovare la distanza dei circocentri dalla distanza comune $\overline{BD}$ ove M è il punto medio:

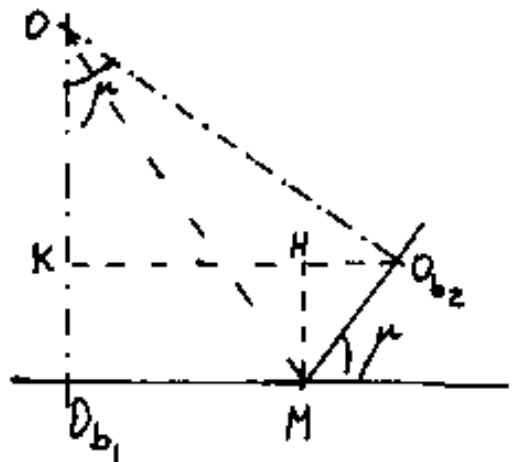
$$\overline{O_{b_1}M}^2 = r_1^2 - \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2 \; ; \quad \overline{O_{b_2}M}^2 = r_2^2 - \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2 \; ; \quad \overline{MO_{b_2}}\,\mathrm{sen}\,\mu = \overline{MH} \; ;$$

$$\overline{MO_{b_2}}\cos\mu = \overline{O_{b_2}H} \; ; \quad \overline{O_{b_1}M} = \overline{KH} \; ;$$

$$\left(\overline{O_{b_1}M} + \overline{MO_{b_2}}\cos\mu\right) = \overline{KO_{b_2}} \; ;$$

$$\overline{KO_{b_2}}/\mathrm{sen}\,\mu = \overline{OO_{b_2}} \; ;$$

$$\overline{OO_{b_2}}^2 + \overline{MO_{b_2}}^2 = \overline{OM}^2 \; ; \text{ (sostituendo)}$$

O, K, H, O_{b_2}, μ, O_{b_1}, M

$$\overline{OM}^2 = \frac{\left(\overline{O_{b_1}M}^2 + \overline{MO_{b_2}}^2\cos^2\mu + 2\,\overline{MO_{b_1}}\,\overline{MO_{b_2}}\cos\mu\right)}{\mathrm{sen}^2\mu} + \overline{MO_{b_2}}^2$$

$$\overline{OM}^2 = \frac{\overline{O_{b_1}M}^2 + \overline{MO_{b_2}}^2\left(\cos^2\mu + \mathrm{sen}^2\mu\right) + 2\,\overline{MO_{b_1}}\,\overline{MO_{b_2}}\cos\mu}{\mathrm{sen}^2\mu}$$

$$\overline{OM}^2 = \frac{\overline{O_1M}^2 + \overline{O_2M}^2 + 2\,\overline{O_1M}\;\overline{O_2M}\cos\mu}{\operatorname{sen}^2\mu}$$

$$\rho^2 = \overline{OM}^2 + \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2$$

Si noti che per: $\mu = 0 \rightarrow \rho = \infty$.

Quindi nel capitolo della sfera per 4 punti, si ha che se il determinante dei coefficienti è nullo o si hanno ∞ soluzioni reali (quadrilatero circoscrittibile piano) o non si hanno soluzioni reali (quadrilatero piano non circoscrittibile).

Un angoloide tetraedro determina sulla superficie della sfera che ha il centro nel vertice dell'angoloide, quattro punti in genere non appartenenti allo stesso piano, inversamente dati quattro punti non complanari si determina univocamente il raggio della sfera. Se invece sono dati quattro punti complanari sono dati due casi:

1) Il quadrilatero è circoscrittibile con una circonferenza, allora esistono infinite sfere la cui superficie passa per i quattro punti.
2) Il quadrilatero non è circoscrittibile con una circonferenza, allora solo la superficie della sfera di raggio infinito passa per i quattro punti.

Nel caso di angoloidi poliedri

occorre verificare: se il poligono è piano e circoscrittibile, esistono infinite sfere; se non circoscrittibile vale solo la sfera di raggio infinito.

fare con la sfera di raggio infinito.

Se il poligono non è piano, fatta passare la sfera per 4 punti non complanari, occorre verificare se i restanti punti soddisfano l'equazione e quindi se appartengono o meno alla sfera.

I solidi geometrici

Gli elementi caratteristici di un solido sono: gli spigoli, i vertici, le facce.

Le facce sono porzioni finite di piani delimitate dagli spigoli e gli spigoli sono delimitati dai vertici.

Vale la relazione di Eulero: $F+V=S+2$ cioè:

"La somma delle facce e dei vertici equivale il numero degli spigoli più due"

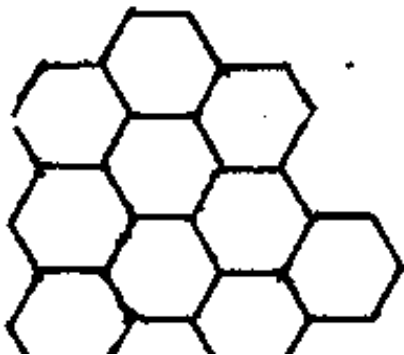
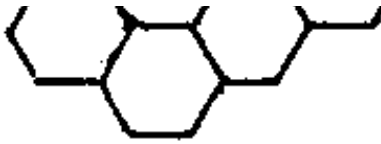
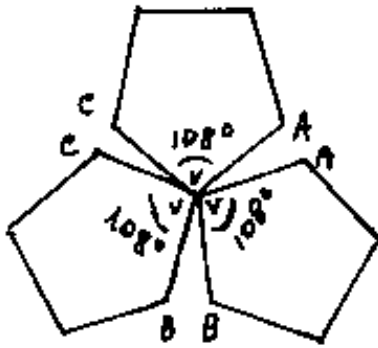
Ciò vale per tutti i solidi geometrici regolari o irregolari.

I Solidi regolari (Poliedri regolari)

"Un poliedro si dice regolare se tutte le facce sono poligoni regolari e gli angoloidi sono uguali fra loro."

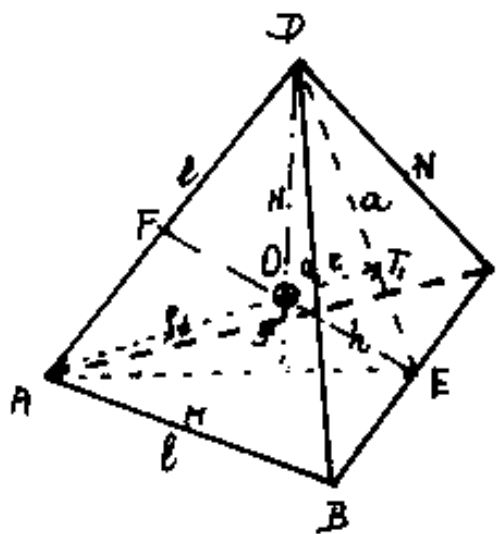
I poliedri regolari sono solo cinque e non possono essere più di cinque.

: Infatti se le facce sono triangoli equilateri (angolo al vertice 60°) poiché la somma degli angoli delle facce di un angoloide deve essere minore di 360°, le facce triangolari equilatere che convergono in un vertice debbono essere meno di sei (6x60°=360°); cioè possono essere tre dando luogo al tetraedro;

possono essere quattro e formeranno l'ottaedro;
possono essere cinque ed avremo l'icosaedro.
Se le facce sono quadrati (angolo 90°)
debbono essere meno di quattro ($4 \cdot 90° = 360°$) perciò
le facce che convergono in un vertice non possono
essere che tre si ha così il cubo o esaedro
Se le facce sono pentagoni regolari (angolo 108°)
anche in questo caso le facce che convergono in
un vertice possono essere solo tre ($3 \cdot 108° = 324 < 360°$)
e con tre abbiamo il dodecaedro (regolare).
E' impossibile fare un solido di sole facce
esagonali (regolari) perché l'angolo di 120°
($120° \times 3 = 360°$) porta a costituire un piano.
Se invece ritagliamo i pentago=
ni in figura ed uniamo i lati
$\overline{VA}$ fra loro, $\overline{VB}$ fra loro, $\overline{VC}$ fra loro
si ottiene un vertice del dodecae=

si ottiene un vertice del dodecaedro.

Resta così dimostrato che i solidi regolari sono solo cinque:

tetraedro, esaedro (cubo), ottaedro, dodecaedro, icosaedro.

Il tetraedro

Il tetraedro regolare è costituito da quattro facce triangolari equilatere, quattro vertici e sei spigoli, (la relazione di Eulero: 4+4 = 6+2). E' il solido col numero minimo di facce.

l = lato della faccia = spigolo del tetraedro

$l = \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$

a = apotema = altezza della faccia

$a = \overline{DE} = \overline{DM} = \overline{DS}$; $= \overline{AE} = \overline{BS} = \overline{CH}$; $= \overline{BF} = \overline{CF} =$

$= \overline{AN} = \overline{AQ} = \overline{BN} = \overline{CQ}$.

h = altezza del triangolo isoscele (AED) =

h = distanza fra due spigoli opposti (sghembi) = $\overline{FE} = \overline{MN} = \overline{QS}$.

Si noti che il tetraedro è la figura geometrica base per lo studio della costituzione della materia, ne vedremo l'importanza in cristallografia, ma soprattutto come fatto energetico, al quale possiamo ridurci par

tendo da principi molto diversi: per esempio notiamo che due spigoli opposti hanno direzioni ortogonali e sono su rette sghembe di minima distanza h, ortogonale agli spigoli, esattamente come il campo elettrico, il campo magnetico, ed il campo di forze pondero= motrici. (Supponete di prendere fra il pollice e l'indice della mano destra e della mano sinistra due spigoli opposti,)

Torneremo sul problema energetico.

Simboli: indicheremo con:

l = lato di una faccia = spigolo

a = apotema = altezza di una faccia

H = altezza del tetraedro = distanza di un vertice dalla faccia opposta

h = altezza del triangolo isoscele di base l e lati a = = distanza di due spigoli opposti

d = distanza degli spigoli dal centro $(d = h/2)$

r = raggio della sfera inscritta = distanza delle facce dal centro del tetraedro.

ρ_1 = raggio della sfera circoscritta = distanza dei vertici dal centro del tetraedro

g = distanza fra i centri delle facce = spigolo del tetraedro inscritto

S = superficie laterale del tetraedro

V = volume del tetraedro

$\hat{\pi}$ = angolo diedro fra le facce: [dal triangolo

$\hat{D}$ = angolo diedro fra le facce: (dal triangolo di base l e lati a il cui piano è normale allo spigolo nel vertice – vedi in figura AED) si ha:

$$\hat{D} = \widehat{AED} = 2\arcsen\left(\frac{l}{2a}\right) = 2\arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{70°\,31'\,43'',61}$$

$$= 2\arccos\left(\frac{h}{a}\right) = 2\arccos\left(\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2}\right) = 2\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \arcsen\left(2\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \boxed{\hat{D} = \arcsen\frac{2}{3}\sqrt{2}}$$

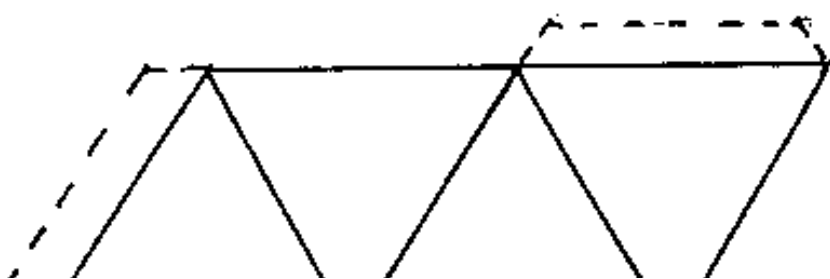
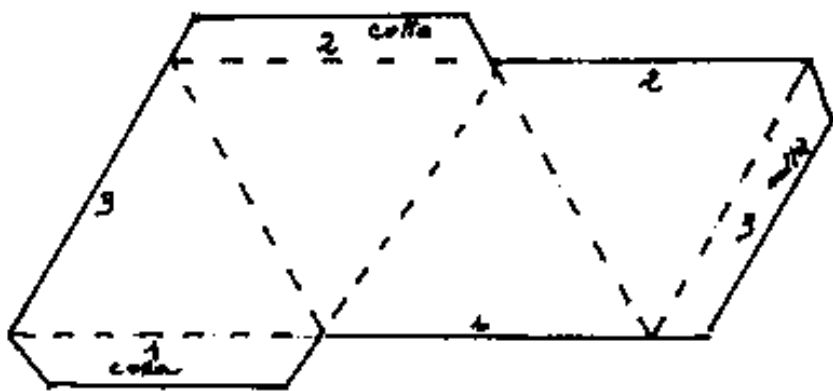
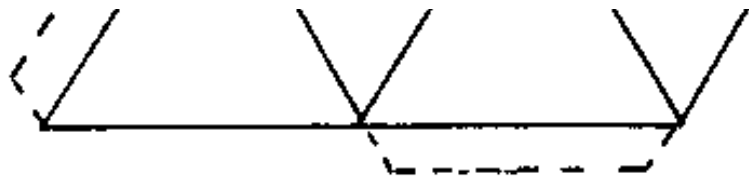
$$\boxed{\hat{D} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)} = \boxed{\hat{D} = \arctg\left(2\sqrt{2}\right)} \quad \boxed{\hat{D} = 1{,}230959417 \text{ rad.}}$$

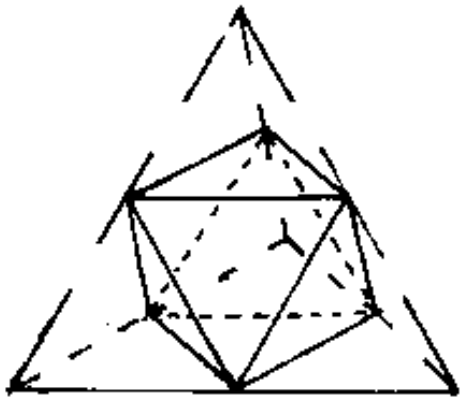
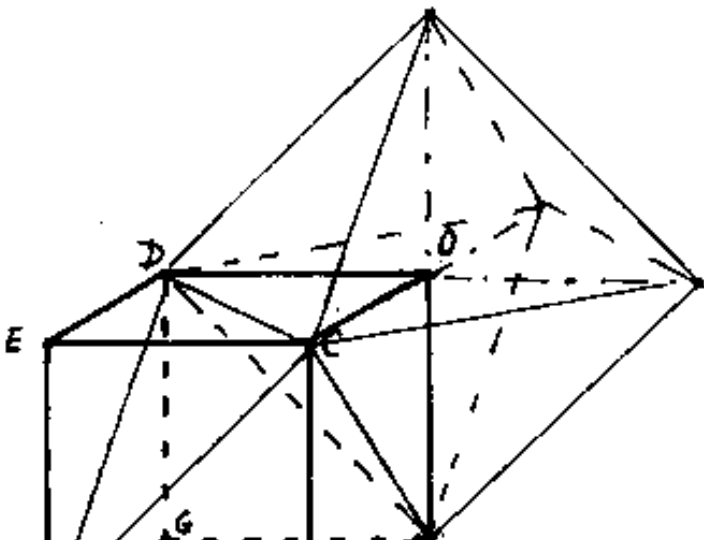
TAVOLA delle relazioni fra gli elementi del tetraedro

	l	a	H	h	d	τ	ρ_1	g	S	V
l	l	$\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot a$ 1,1547005	$\frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot H$ 1,22474487	$\sqrt{2}\cdot h$ 1,41421356	$2\sqrt{2}\cdot d$ 2,828427	$2\sqrt{6}\ \tau$ 4,898979	$\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot\rho_1$ 1,632993	$3\cdot g$ 3,000000	$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}S}$ 0,75983568$\sqrt{S}$	$2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{V}$ 2,0396489$\sqrt[3]{V}$
a	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ l$ 0,866025	a	$\frac{3}{4}\sqrt{2}\cdot H$ 1,06066017	$\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot h$ 1,22474487	$\sqrt{6}\cdot d$ 2,4494897	$3\sqrt{2}\cdot\tau$ 4,2426407	$\sqrt{2}\cdot\rho_1$ 1,41421356	$\frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot g$ 2,5980762	$\frac{1}{2}\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{S}$ 0,658037$\sqrt{S}$	$\frac{3^{5/6}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{V}$ 1,76[illegible]$\sqrt[3]{V}$
H	$\frac{\sqrt{6}}{3}\ l$ 0,81649658	$\frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot a$ 0,9428090	H	$\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot h$ 1,1547005	$\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot d$ 2,30940108	$4\cdot\tau$ 4,00000	$\frac{4}{3}\cdot\rho_1$ 1,3333333	$\sqrt{6}\cdot g$ 2,4494897	$\frac{1}{3}\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt{S}$ 0,62040323	$\frac{2}{\sqrt[6]{3}}\cdot\sqrt[3]{V}$ 1,665366$\sqrt[3]{V}$
h	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot l$ 0,70710678	$\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot a$ 0,8164966	$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot H$ 0,866025	h	$2\cdot d$ 2,00000	$2\cdot\sqrt{3}\cdot\tau$ 3,4641016	$\frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\rho_1$ 1,1547005	$\frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot g$ 2,1213203	$\frac{1}{\sqrt[4]{12}}\sqrt{S}$ 0,537284965	$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{V}$ 1,44224957$\sqrt[3]{V}$
d	$\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot l$ 0,35355339	$\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot a$ 0,40824829	$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot H$ 0,4330127	$\frac{1}{2}\ h$ 0,500000	d	$\sqrt{3}\cdot\tau$ 1,73205080	$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\rho_1$ 0,57735027	$\frac{3}{4}\sqrt{2}\cdot g$ 1,060660	$\frac{1}{2\sqrt[4]{12}}\sqrt{S}$ 0,26864248	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{V}$ 0,721124785
τ	$\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot l$ 0,204124	$\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot a$ 0,23570226	$\frac{1}{4}\cdot H$ 0,250000	$\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot h$ 0,288675	$\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot d$ 0,57735027	τ	$\frac{1}{3}\cdot\rho_1$ 0,3333333	$\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot g$ 0,6123724	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{108}}\sqrt{S}$ 0,155100809	$\left(\frac{1}{2\sqrt[6]{3}}\right)\sqrt[3]{V}$ 0,416341588
ρ_1	$\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot l$ 0,6123724	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$ 0,70710678	$\frac{3}{4}\cdot H$ 0,750000	$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot h$ 0,866025	$\sqrt{3}\cdot d$ 1,73205080	$3\cdot\tau$ 3,000000	ρ_1	$\frac{3}{4}\sqrt{6}\cdot g$ 1,8371173	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{8}}\ \sqrt{S}$ 0,46530243	$\frac{3^{[illegible]}}{2}\sqrt[3]{V}$ 1,249024766
g	$\frac{1}{3}\cdot l$ 0,3333333	$\frac{2}{9}\sqrt{3}\cdot a$ 0,38490018	$\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot H$ 0,40824829	$\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot h$ 0,47140452	$\frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot d$ 0,94280904	$\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot\tau$ 1,63299316	$\frac{2}{9}\sqrt{6}\cdot\rho_1$ 0,54433105	g	$\frac{1}{3\sqrt[4]{3}}\cdot\sqrt{S}$ 0,25327856	$\sqrt[6]{\frac{8}{81}}\cdot\sqrt[3]{V}$ 0,679882961
S	$\sqrt{3}\cdot l^2$ 1,7320508$\cdot l^2$	$\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot a^2$ 2,30941$\cdot a^2$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot H^2$ 2,5980762$\cdot H^2$	$2\sqrt{3}\ h^2$ 3,4641016$\ h^2$	$8\sqrt{3}\ d^2$ 13,856406$\ d^2$	$24\sqrt{3}\cdot\tau^2$ 41,56929$\cdot\tau^2$	$\frac{8}{3}\sqrt{3}\cdot\rho^2$ 4,618802$\cdot\rho^2$	$9\sqrt{3}\cdot g^2$ 15,588457$\cdot g^2$	S	$6\cdot 3^{\frac{1}{6}}\cdot V^{\frac{2}{3}}$ 7,206621731
V	$\frac{\sqrt{2}}{12}\ l^3$ 0,11785113$\cdot l^3$	$\frac{2\sqrt{6}}{27}\cdot a^3$ 0,18144364	$\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot H^3$ 0,21650635$\cdot H^3$	$\frac{1}{3}\cdot h^3$ 0,33333$\cdot h^3$	$\frac{8}{3}\cdot d^3$ 2,666667$\cdot d^3$	$8\sqrt{3}\ \tau^3$ 13,856406$\cdot\tau^3$	$\frac{8}{27}\sqrt{3}\cdot\rho_1^3$ 0,5132002$\ \rho_1^3$	$\frac{9}{4}\sqrt{2}\cdot g^3$ 3,1819805$\cdot g^3$	$\frac{1}{2^{3/2}\cdot 3^{7/4}}S^{\frac{3}{2}}$ 0,051700269	V

Modelli - sviluppo in piano di solidi

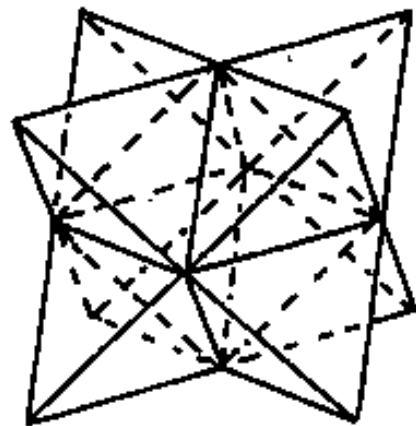
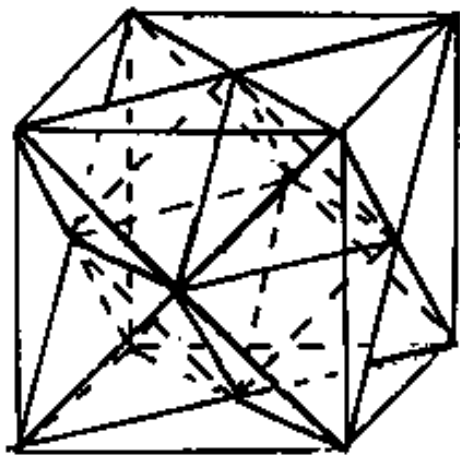
Lo sviluppo in piano del tetraedro, per cosrui= re modellini in cartoncino è molto semplice: questi modellini (ciò vale per tutti i solidi) ordinariamente riportano in piano lo sviluppo delle sole facce, è però comodo siano indicate anche le linguette da incol= lare. Per avere spigoli nitidi, le linee possono essere incise con un rifilatore, tali incisioni permettono an= che di ridurre lo spessore delle linguette.

Il disegno può essere effettuato con criteri diver= si; per esempio: ritagliare lungo la linea intera e piegare lungo le linee tratteggiate, il tratteggio può esser fatto in due diversi modi per piegature in dentro oppure in fuori. Le parti da combaciare e incollare

combaciare e incollare possono essere numerate. Oppure si può fare a tratto intero le facce ed a tratteggio le linguette da incollare, quest'ultimo modo rende difficoltoso montare modellini con "elevatus" cioè che hanno piegature in due versi opposti. Le linguette, di regola, vanno alternate. In figura i due tipi di sviluppo per il tetraedro.

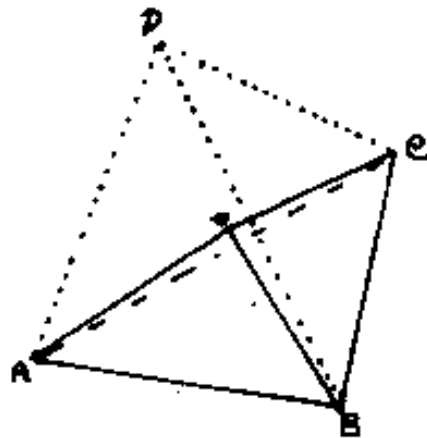
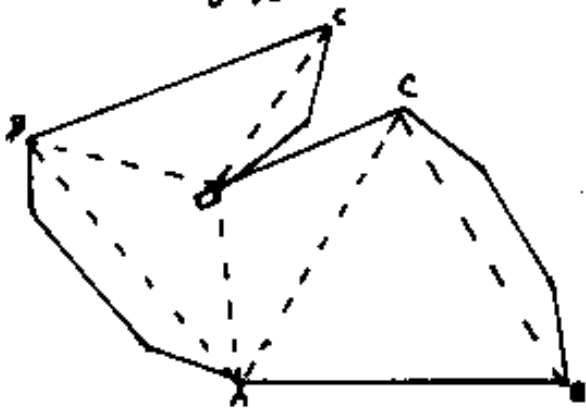
Unendo i punti medi degli spigoli di un tetraedro, si ottengono quattro tetraedri di spigolo metà ed un ottaedro centrale avente gli spigoli in comune coi quattro tetraedri.

Si noti che la continuità nello spazio tridimensionale, non si ha solo considerando un insieme di cubetti paralleli agli assi ed affiancati, come insegna il calcolo infinitesimale col cubetto dx, dy, dz; in effetti, come si può notare dalla figura, si ha che, facendo combaciare sulle facce del tetraedro ABCD. un ottavo di ottaedro come BCDO = ACDE = ABCF = ABDG, si ottiene il cubo AFBGDECO

ottiene il cubo AFBGDECO.

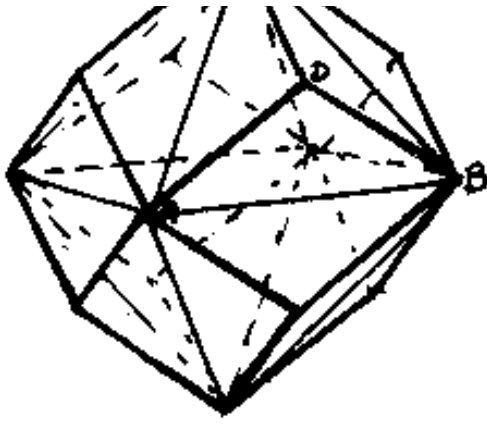
Il rapporto con lo spigolo del tetraedro è $\sqrt{2}$; lo spigolo del cubo è la distanza fra due spigoli opposti del tetraedro (minima distanza delle rette sghembe su cui giacciono tali spigoli)

Lo spigolo del tetraedro è una diagonale della faccia del cubo.

Se alle facce del cubo tracciamo entrambe le diagonali, otteniamo l'intersezione di due tetraedri, uguali ed opposti, aventi in comune l'ottaedro centrale di spigolo metà. Per vedere tale solido, occorre togliere dal cubo i dodici quarti di ottaedro di spigolo metà aventi in comune, ciascun ottavo, uno spigolo con l'ottaedro centrale, e sono inoltre delimitati da due semidiagonali del cubo, (spigoli) e dallo spigolo (lato) del cubo che è diagonale comune, cioè asse comune dei piani che hanno sezionato l'ottaedro in quarti.

Se uniamo il centro del tetraedro con i vertici otteniamo 4 [illegible] triangolare equilatera, alte [illegible] ; le facce la

piramidi a base triangolare equilatera, alte $r = \frac{\ell}{12}\sqrt{6}$; le facce laterali sono tre triangoli isosceli con base ℓ e lati obliqui $= \rho_s = \frac{\ell}{4}\sqrt{6} = 3r$. Le facce laterali costituiscono un angoloide triedro di $\frac{4\pi}{4} = \pi$. stereoradianti. Gli angoli piani al vertice delle facce sono: $\alpha = \arccos(-\frac{1}{3}) = 109°28'16'',39 = 1,910633236$ rad., (supplementari dell'angolo diedro delle facce del tetraedro); gli angoli alla

base delle facce: 35° 15' 51",8 e l'angolo diedro fra le facce laterali di questi angoloidi triedri è 120° — (un terzo di angolo giro); l'angolo diedro fra base e faccia è arctang $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = 35° 15' 51",8.

Disegnamo lo sviluppo per fare il modellino e la sua posizione nel tetraedro di una delle quattro piramidi interne.

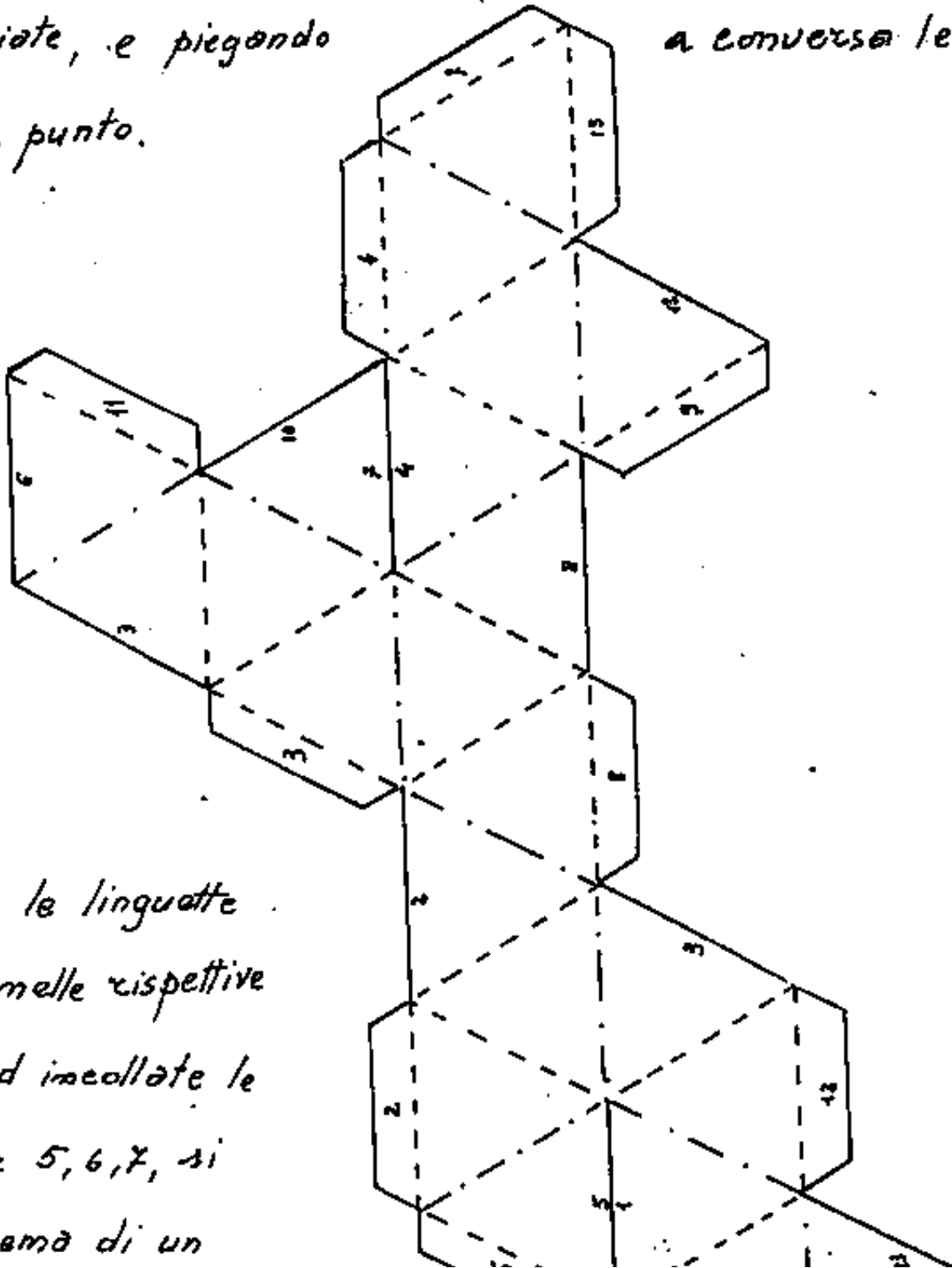
Supponiamo di aver costruito otto piramidi che costituiscono due tetraedri; le basi triangolari equilatere le facciamo combaciare con le facce di un ottaedro di uguale spigolo, si ottiene così un altro solido: il <u>rombododecaedro</u> ove un elemento come ABCD (vedi figura) e

un quarto di tetraedro, cioè una delle piramidi suddette.

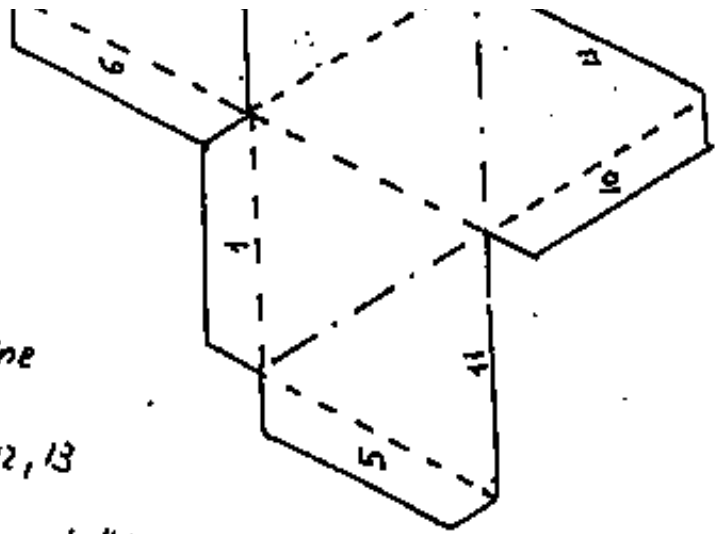
Il rombododecaedro non è un poliedro regolare poiché le sue facce (rombi), pur essendo tutte uguali non sono costituite da un poligono regolare.

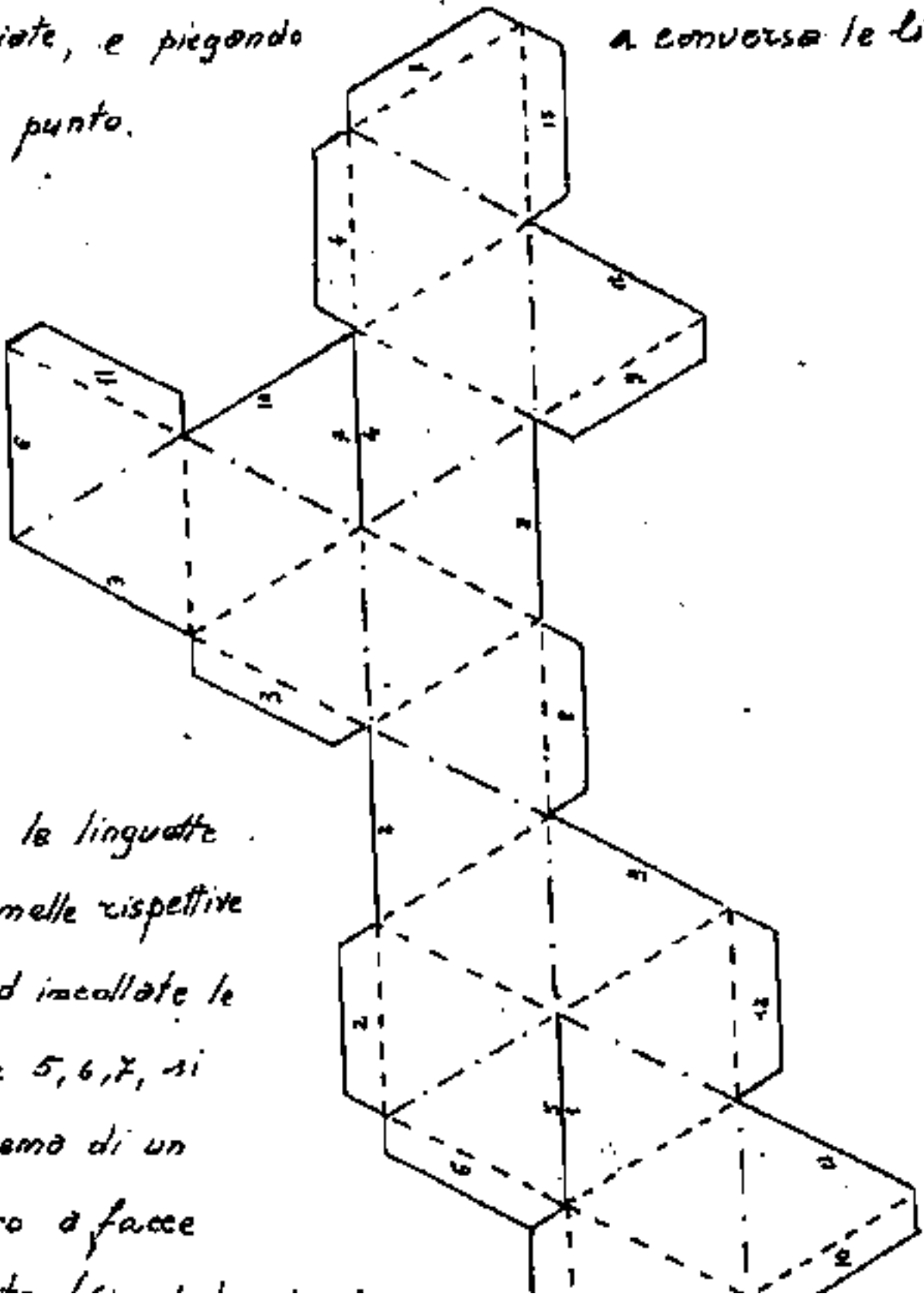
Notiamo che l'angolo solido dello spazio piramidale

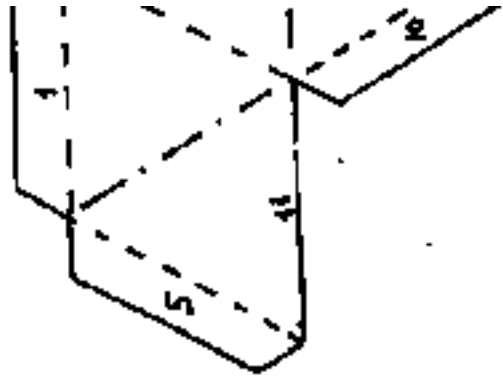
che va dal centro del rombododecaedro alle sue facce, è $\frac{1}{12}(4\pi) = \frac{\pi}{3}$ stereoradianti, (uguale a quello del dodecaedro regolare). L'angolo diedro fra le facce del rombododecaedro è quindi 120° (che abbiamo calcolato per le piramidi aggiunte ; ottenute scomponendo il tetraedro). Sulla diagonale delle facce rombiche, ove si toccano due piramidi aggiunte, si ha l'angolo diedro dell'ottaedro 109° 28' 16",39 più i due angoli diedri alla base delle piramidi aggiunte : 2(35° 15' 51",805) = = 70° 31' 43",61 ove 109° 28' 16",39 + 70° 31' 43",61 = 180° = <u>angolo piatto</u>! (cioè le due facce delle due piramidi aggiunte ed adiacenti, formano una faccia rombica <u>piana</u>!). Abbiamo visto che, quattro piramidi angoloidi ottenute dalla scomposizione dell'ottaedro, aggiunte e fatte combaciare con le facce di un tetraedro, formano un cubo; ed inversamente le piramidi angoloidi ottenute dalla scomposizione dei tetraedri, aggiunte

ottenute dalla scomposizione del [illegible], affiancate e fatte combaciare con le facce di un ottaedro, formano un rombododecaedro. I tre spigoli della piramide tetraedrica che corrispondono a <u>tre spigoli del rombododecaedro sono tre semidiagonali del cubo tracciate da vertici non adiacenti</u>. (Ne vedremo meravigliose conseguenze studiando i pentagonododecaedri (Tetartoedri). Si pensi alla continuità di goli rombododecaedri affiancati.

Per fare un modellino dei due tetraedri incastrati e delimitanti il cubo, si può usare lo schema sotto disegnato tagliando lungo le linee intere, piegando a colmo le linee tratteggiate, e piegando a conversa le linee a tratto e punto.

Incollate le linguette 1,2,3,4 nelle rispettive facce, ed incollate le linguette 5,6,7, si ha lo schema di un

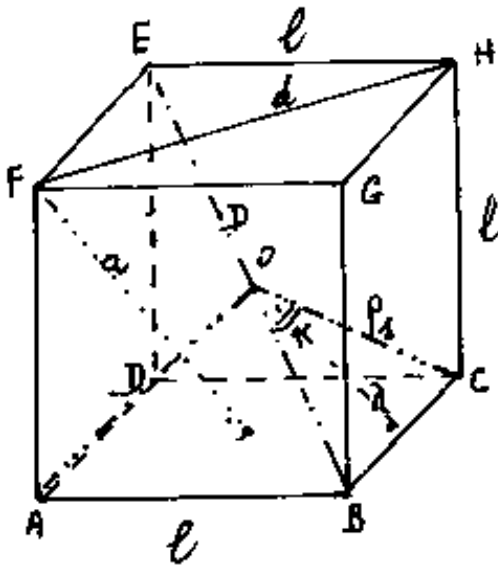
ha lo schema di un tetraedro a facce cuspidate. (Si veda lo schema del tetraedro), incollando infine le residue linguette 8, 9, 10, 11, 12, 13 nelle rispettive sedi si ha il modellino.

Il disegno dello schema deve essere molto preciso.

Per fare un modellino dei due tetraedri incastrati e delimitanti il cubo, si può usare lo schema sotto disegnato tagliando lungo le linee intere, piegando a colmo le linee tratteggiate, e piegando a conversa le linee a tratto e punto.

Incollate le linguette 1, 2, 3, 4 nelle rispettive facce, ed incollate le linguette 5, 6, 7, si ha lo schema di un tetraedro a facce

cuspidate. (Si veda lo schema del tetraedro), incollando infine le residue linguette 8, 9, 10, 11, 12, 13 nelle rispettive sedi si dà il modellino.

Il disegno dello schema deve essere molto preciso.

Il cubo o esaedro

Il cubo ha sei facce quadrate, 8 vertici, 12 spigoli; la relazione di Eulero $F+V=S+2$; $(6+8=12+2)$

Simboli: indicheremo con:

ℓ = lato di una faccia = spigolo del cubo = (semidiagonale dell'ottaedro = diagonale di faccia del rombododecaedro)

d = diagonale di una faccia del cubo = (spigolo del tetraedro = altra diagonale di faccia de rombododecaedro).

D = diagonale fra vertici opposti del cubo

a = distanza dei vertici dai centri delle facce opposte

ρ_1 = raggio della sfera circoscritta = semidiagonale fra i vertici del cubo = (spigolo del rombododecaedro = raggio della sfera circoscritta al tetraedro)

= raggio della sfera circoscritta al tetraedro)

r = raggio della sfera inscritta.

λ = distanza del centro da uno spigolo = $d/2$

S = superficie laterale = $6\ell^2$

V = volume = ℓ^3.

TAVOLA delle relazioni fra gli elementi del CUBO

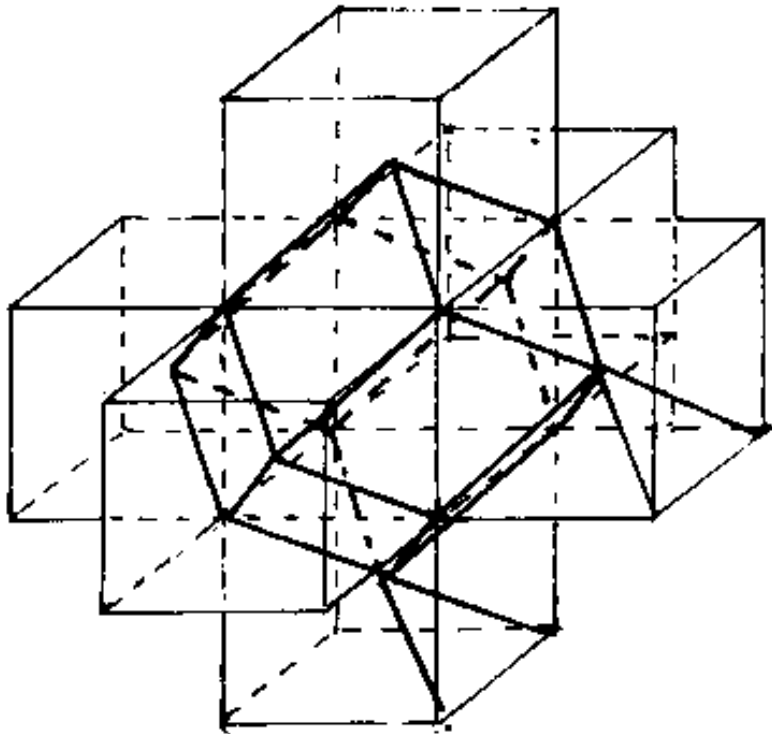
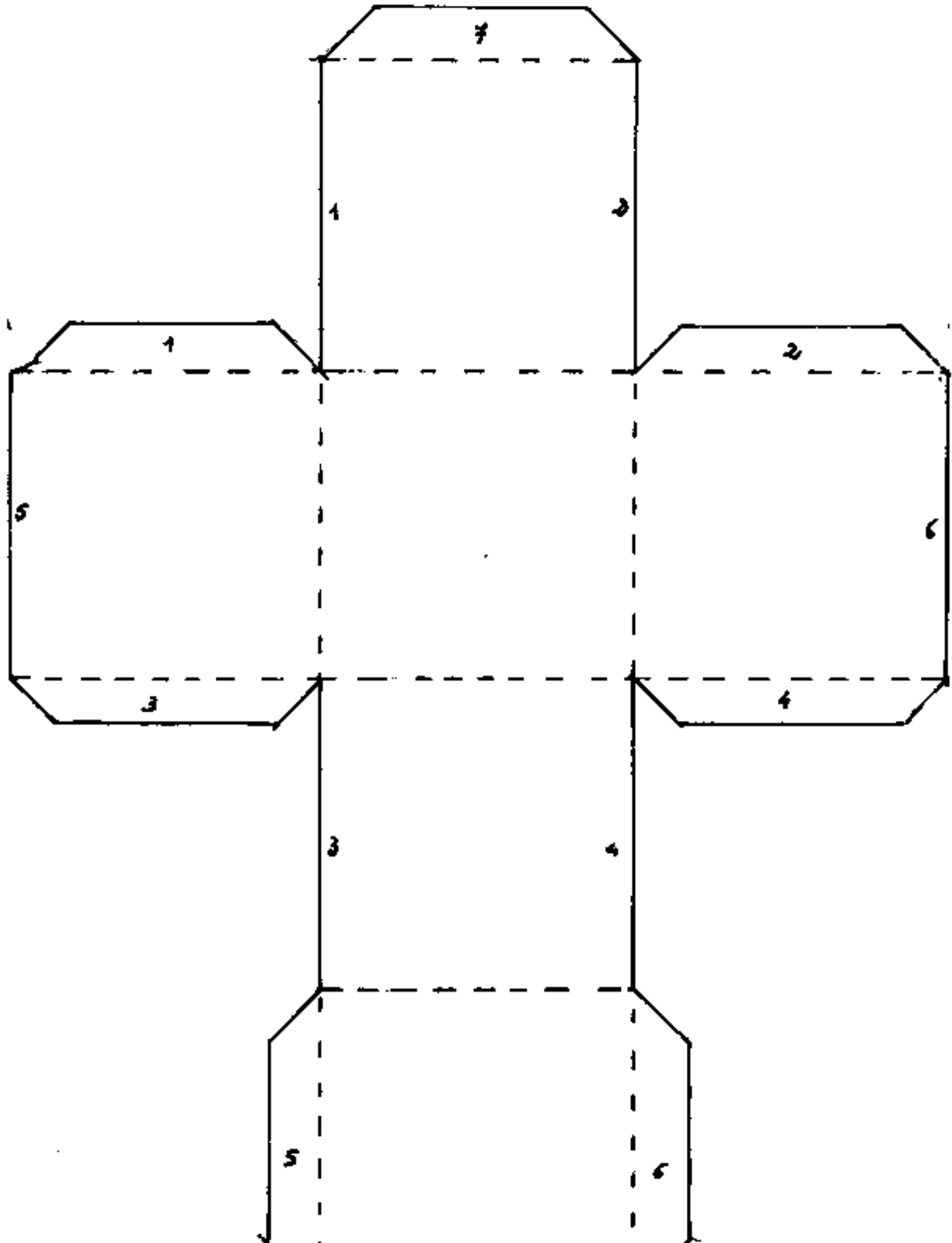
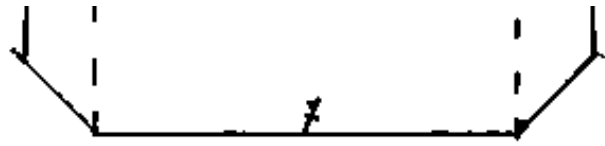
	ℓ	d	D	a	ρ_1	r	λ	S	V
ℓ	ℓ	$d/\sqrt{2}$ 0,707106781	$D/\sqrt{3}$ 0,577350269	$\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$ 0,81649658	$\frac{2}{\sqrt{3}}\rho_1$ 1,154700538	$2r$ 2,000000	$\sqrt{2}\,\lambda$ 1,41421356	$\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{S}$ 0,40824829	$\sqrt[3]{V}$
d	$\ell\sqrt{2}$ 1,414213562	d	$\sqrt{\frac{2}{3}}\,D$ 0,81649658	$\frac{2}{\sqrt{3}}\,a$ 1,154700538	$2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\rho_1$ 1,632993162	$2\sqrt{2}\,r$ 2,828427125	2λ 2,000000	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{S}$ 0,577350269	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\sqrt{2}}}$ 1,414213562 $\sqrt[3]{V}$
D	$\ell\sqrt{3}$ 1,732050810	$\sqrt{\frac{3}{2}}\,d$ 1,224744871	D	$\sqrt{2}\,a$ 1,414213562	$2\rho_1$ 2,000000	$2\sqrt{3}\,r$ 3,464101615	$\sqrt{6}\,\lambda$ 2,449489743	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{S}$ 0,707106781	$\sqrt[3]{\frac{V}{3\sqrt{3}}}$ 1,732050808 $\sqrt[3]{V}$
a	$\sqrt{\frac{3}{2}}\,\ell$ 1,224744871	$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,d$ 0,866025404	$\frac{1}{\sqrt{2}}\,a$ 0,707106781	a	$\sqrt{2}\cdot\rho_1$ 1,414213562	$\sqrt{6}\,r$ 2,449489743	$\sqrt{3}\,\lambda$ 1,732050808	$\frac{1}{2}\sqrt{S}$ 0,500000	$\sqrt[3]{\frac{V}{3\sqrt{3}}}$ 1,224744871 $\sqrt[3]{V}$
ρ_1	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$ 0,8660254	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,d$ 0,612372435	$\frac{D}{2}$ 0,500000	$\frac{1}{\sqrt{2}}\,a$ 0,707106781	ρ_1	$\sqrt{3}\,r$ 1,732050808	$\sqrt{\frac{2}{3}}\,\lambda$ 0,81649658	$\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{S}$ 0,35355339	$\sqrt[3]{\frac{8V}{3\sqrt{3}}}$ 0,866025404 $\sqrt[3]{V}$
r	$\ell/2$ 0,500000	$\frac{\sqrt{2}}{4}\,d$ 0,35355339	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\,D$ 0,288675134	$\frac{1}{\sqrt{6}}\,a$ 0,40824829	$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\rho_1$ 0,577350269	r	$\lambda/\sqrt{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{6}}\sqrt{S}$ 0,204124145	$\sqrt[3]{8V}$ 0,5 $\sqrt[3]{V}$
λ	$\ell/\sqrt{2}$ 0,707106781	$\frac{1}{2}\,d$ 0,500000	$\frac{1}{\sqrt{6}}\,D$ 0,40824829	$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot a$ 0,577350269	$\sqrt{\frac{3}{2}}\,\rho_1$ 1,224744871	$\sqrt{2}\,r$	λ	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{S}$ 0,288675134	$\sqrt[3]{2\sqrt{2}\,V}$ 0,707106781 $\sqrt[3]{V}$
S	$6\ell^2$ 6,0000 ℓ^2	$3d^2$ 3,0000 d^2	$2D^2$ 2,0000 D^2	$4a^2$ 4,000000	$8\rho_1^2$ 8,0000	$24r^2$ 24,0000	$12\lambda^2$ 12,0000	S	[illegible]
V	ℓ^3 1,00	$\frac{1}{2\sqrt{2}}\,d^3$ 0,35355339	$\frac{1}{3\sqrt{3}}\,D^3$ 0,192450089	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\,a^3$ 0,544331054	$\frac{8}{3\sqrt{3}}\,\rho_1^3$ 1,539600718	$8r^3$ 8,0000	$2\sqrt{2}\,\lambda^3$ 2,828427125	$\left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}$	V

L'angolo solido dello spazio piramidale che dal centro del cubo va ad una faccia è: $\frac{1}{6}(4\pi) = \frac{2}{3}\pi$ stereoradianti l'angolo solido dello spazio piramidale che da un vertice del cubo fluisce verso l'interno, è un angoloide triedro di $\frac{1}{8}(4\pi) = \frac{\pi}{2}$ stereoradianti; la somma degli angoloidi uscenti dagli 8 vertici è: $8\,\frac{\pi}{2} = 4\pi$ stereoradianti cioè l'angolo sferico. L'angolo diedro fra le facce è $\pi/2$ rad., l'angolo fra due semidiagonali adiacenti del cubo è $\widehat{BOC} = \alpha$
$\alpha = 70°\,31'\,43'',61 = 1{,}230959417$ rad. $= \text{arctg}(2\sqrt{2})$ che equivale all'angolo diedro fra le facce di un tetraedro. Perciò la somma degli angoli delle facce dello spazio piramidale uscente dal centro con angolo solido $\frac{2}{3}\pi$ stereoradianti, è $4(70°\,31'\,43'',61) = 282°\;6'\;54'',42 = 4(1{,}230959417) = 4{,}923837669$ rad.
L'angolo fra due diagonali di faccia uscenti dallo stesso vertice è $60° = \frac{\pi}{3}$ rad., tre diagonali di faccia consecutive, formano un triangolo equilatero come: HFBH, che è la faccia del tetraedro alla quale viene

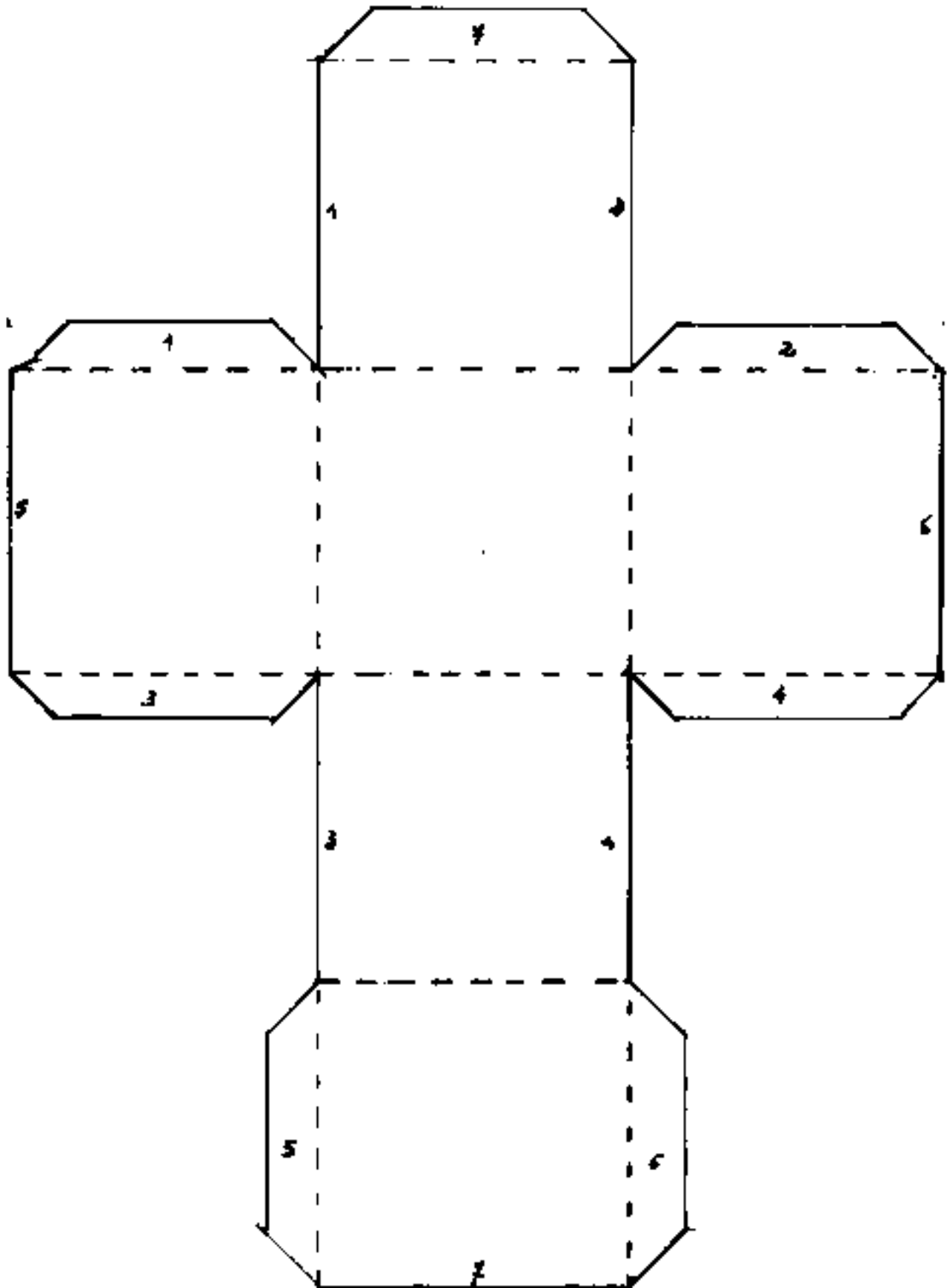
sovrapposta la piramide di vertice G, che è $\frac{1}{8}$ di ottaedro scomposto secondo le sue diagonali.

L'angolo fra due semidiagonali uscenti dal centro del cubo, interne ed opposte, cioè: $\hat{AOC} = 109° 28' 16'',39 =$

$= 1,910633236 \text{ rad} = \arccos(-\frac{1}{3})$, ovviamente supplementare dell'angolo fra due semidiagonali adiacenti.

Poiché solo il cubo, fra i solidi regolari, ha facce quadrate; possiamo sovrapporre alle facce del cubo solo le piramidi angoloidi uscenti dal cubo stesso; otteniamo così, di nuovo, un rombododecaedro. (Che avevamo già visto come sovrapposizione delle piramidi angoloidi del tetraedro, sulle facce dell'ottaedro.) Per far vedere il rombododecaedro nella continuità dello spazio tridimensionale disegnamo sette cubi, cioè un cubo con un altro cubo affacciato sulle sue sei facce, e dai sei cubi affacciati disegnamo le piramidi angoloidi che vanno verso il cubo centrale,

si ottiene così il rombododecaedro. (Si sono disegnate intere due diagonali per evidenziare la continuità spaziale di soli rombododecaedri. Ordinariamente si considera la continuità spaziale di soli cubi. Il rombododecaedro, che tratteremo più diffusamente, ha in sè l'anomalia sufficiente a non creare spazi vuoti)

7

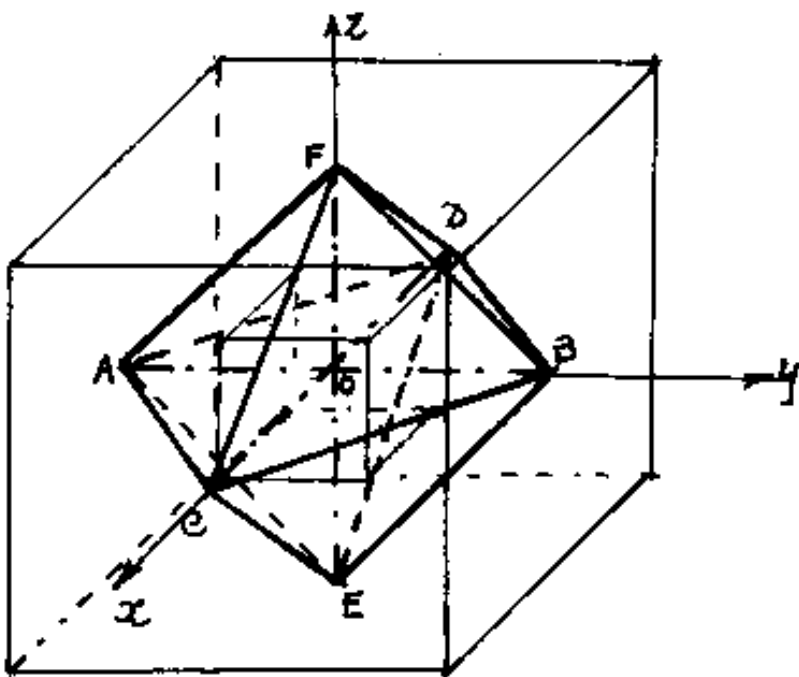
Schema del cubo o esaedro

Tagliare lungo le linee intere, piegare lungo le linee tratteggiate, incollare le linguette facendo combaciare gli spigoli omonimi.

Schema del cubo o esaedro

Tagliare lungo le linee intere, piegare lungo le linee tratteggiate, incollare le linguette facendo combaciare gli spigoli omonimi.

L'ottaedro

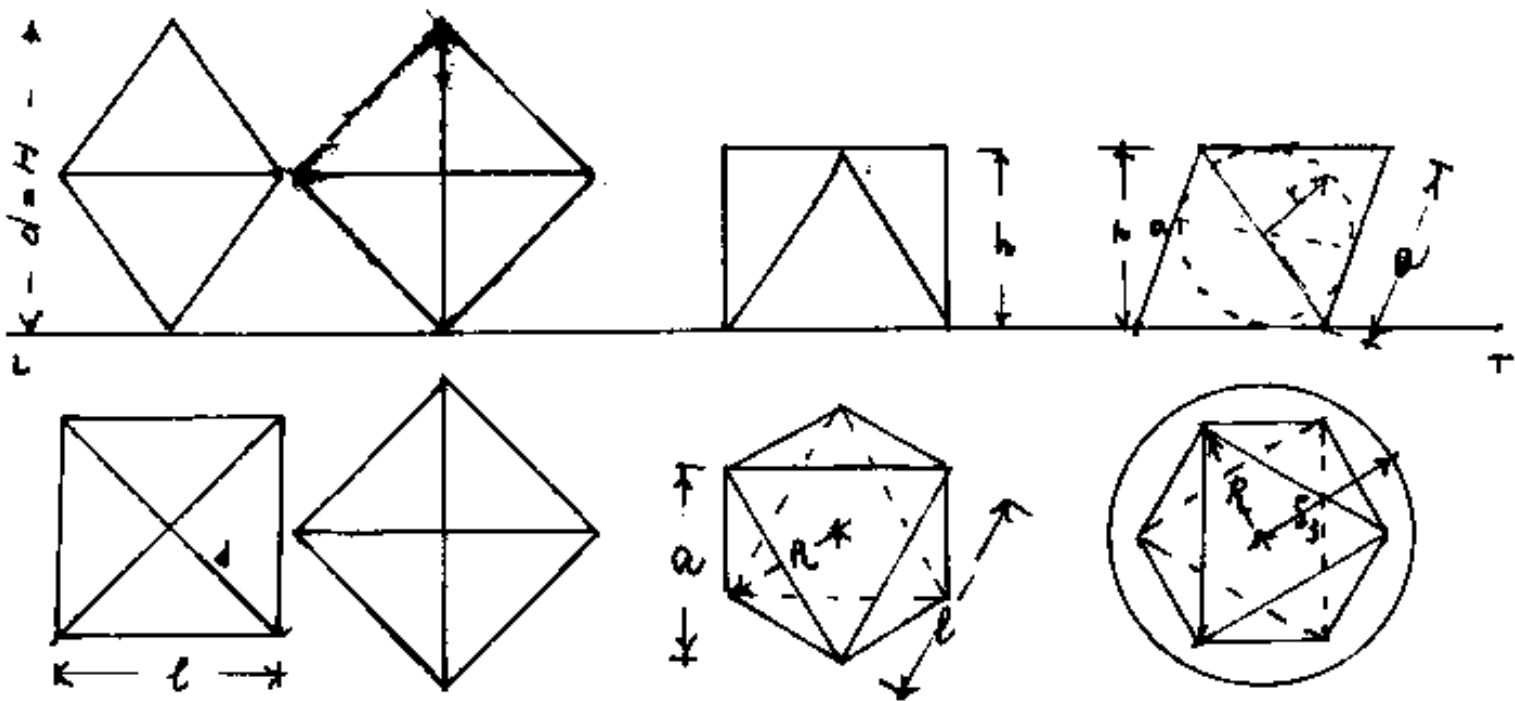
L'ottaedro ha otto facce triangolari equilatere, sei vertici e dodici spigoli. $(F+V=S+2)=(8+6=12+2)$

Si noti che rispetto al cubo, ha gli stessi spigoli ed ha scambiato il numero dei vertici col numero delle facce e viceversa, cosicché ad ogni faccia dell'ottaedro corrisponde un vertice del cubo, ed ad ogni vertice dell'ottaedro corrisponde una faccia del cubo.

Notiamo come le diagonali interne dell'ottaedro corrispondono agli assi cartesiani ortogonali: oxyz.

Gli otto triedri trirettangoli costituiti dai piani di proiezione, che dividono in ottanti lo

piani di proiezione che dividono in ottanti lo spazio, che sono anche gli angoloidi piramidali con vertice al centro dell'ottaedro con angolo solido di $\frac{1}{8} \cdot 4\pi = \frac{\pi}{2}$ stereoradianti.

Gli spigoli dell'ottaedro costituiscono tre quadrati aventi in comune il centro ed a due a due le diagonali, e ciascuno giacente su un piano di proiezione (ACBD su xy ; AEBF su yz ; CFDE su xz.)

Abbiamo visto come posso ottenersi l'ottaedro come nucleo centrale di un tetraedro avente i punti medi degli spigoli riuniti fra loro, (i segmenti unione, sono gli spigoli dell'ottaedro, lunghi metà spigolo del tetraedro). È anche interessante vedere le proiezioni di un ottaedro in prima e seconda proiezione; si noti il diverso aspetto e

l'apparente diversa grandezza di un ottaedro avente lo stesso spigolo!.

Simboli: indicheremo con:

l = lato o spigolo dell'ottaedro

a = apotema di una faccia

a = apotema di una faccia

d = diagonale = (distanza fra vertici opposti)

h = distanza fra due facce = (altezza del solido poggiato in piano)

r = raggio della sfera inscritta

ρ_1 = raggio della sfera circoscritta (R = raggio dell'esagono)

Sl = superficie laterale

V = Volume

TAVOLA delle relazioni fra gli elementi dell' OTTAEDRO

	l	a	d	h	r	ρ_1	R	S	V
l	l	$\frac{2}{\sqrt{3}}a$ 1,1547005	$\frac{1}{\sqrt{2}}d$ 0,70710678	$\sqrt{\frac{3}{2}}h$ 1,22474487	$\sqrt{6}\,r$ 2,44948974	$\sqrt{2}\cdot\rho_1$ 1,41421356	$\sqrt{3}\,R$ 1,73205080	$\sqrt[4]{\frac{1}{2\sqrt{3}}}\sqrt{S}$ 0,537284965	$\sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[3]{V}$ 1,28489829
a	$\frac{\sqrt{3}}{2}l$ 0,8660254	a	$\frac{1}{4}\sqrt{6}\,d$ 0,612372435	$\frac{3}{4}\sqrt{2}\cdot h$ 1,06066017	$\frac{3}{\sqrt{2}}r$ 2,12132034	$\frac{\sqrt{6}}{2}\rho_1$ 1,22474487	$\frac{2}{3}R$ 0,6666666	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{8}}\sqrt{S}$ 0,46630243	$\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\sqrt[3]{V}$ 1,11275456
d	$\sqrt{2}\,l$ 1,41421356	$\frac{4}{\sqrt{6}}a$ 1,63299316	d	$\sqrt{3}\,h$ 1,7320508	$2\sqrt{3}\,r$ 3,464101615	$2\cdot\rho_1$ 2,000000	$\sqrt{6}\,R$ 2,4494897	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{S}$ 0,75983568	$\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{V}$ 1,81712059
h	$\sqrt{\frac{2}{3}}l$ 0,81649658	$\frac{2}{3}\sqrt{2}\,a$ 0,94280904	$\frac{1}{\sqrt{3}}d$ 0,57735027	h	$2\cdot r$ 2,000000	$\frac{2}{\sqrt{3}}\rho_1$ 1,154700538	$\sqrt{2}\,R$ 1,41421356	$\frac{1}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$ 0,43869133	$\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{3}}}\sqrt[3]{V}$ 1,048115063
r	$\frac{1}{\sqrt{6}}l$ 0,40824829	$\frac{\sqrt{2}}{3}a$ 0,47140452	$\frac{\sqrt{3}}{6}d$ 0,28867513	$\frac{1}{2}h$ 0,50000.	r	$\frac{1}{\sqrt{3}}\rho_1$ 0,577350269	$\frac{1}{\sqrt{2}}R$ 0,70710678	$\frac{1}{2\sqrt[4]{27}}\sqrt{S}$ 0,21934566	$\sqrt[3]{\frac{1}{4\sqrt{3}}}\sqrt[3]{V}$ 0,52455753
ρ_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}l$ 0,707106781	$\sqrt{\frac{2}{3}}a$ 0,81649625	$\frac{1}{2}d$ 0,500000	$\frac{\sqrt{3}}{2}h$ 0,8660254	$\sqrt{3}\,r$ 1,73205080	ρ_1	$\frac{\sqrt{6}}{2}R$ 1,22474487	$\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\sqrt{S}$ 0,37991784	$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\sqrt[3]{V}$ 0,90856029
R	$\frac{1}{\sqrt{3}}l$ 0,577350269	$\frac{3}{2}a$ 1,500000	$\frac{1}{\sqrt{6}}d$ 0,40824829	$\frac{1}{\sqrt{2}}h$ 0,70710678	$\sqrt{2}\,r$ 1,41421356	$\frac{\sqrt{6}}{3}\rho_1$ 0,81649658	R	$\frac{1}{\sqrt{6\sqrt{3}}}\sqrt{S}$ 0,31020161	$\frac{1}{\sqrt[3]{6\sqrt{2}}}\sqrt[3]{V}$ 0,74183637
S	$2\sqrt{3}\,l^2$ 3,464101615	$\frac{8}{\sqrt{3}}a^2$ 4,61880215	$\sqrt{3}\,d^2$ 1,7320508	$3\sqrt{3}\,h^2$ 5,196152423	$12\sqrt{3}\,r^2$ 20,78460969	$4\sqrt{3}\,\rho_1^2$ 6,92820323	$6\sqrt{3}\,R^2$ 10,39230485	S	$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[3]{V^2}$ 5,71910575
V	$\frac{\sqrt{2}}{3}l^3$ [illegible]	$\frac{8}{9}\sqrt{\frac{3}{8}}\,a^3$ [illegible]	$\frac{1}{6}d^3$ [illegible]	$\frac{\sqrt{3}}{2}h^3$ [illegible]	$4\sqrt{3}\,r^3$ [illegible]	$\frac{4}{3}\rho_1^3$ [illegible]	$\sqrt{6}\,R^3$ [illegible]	$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{3^{3/4}}S^{3/2}$ [illegible]	V

gli angoli dell'ottaedro:

angoli piani delle facce (equilatere) $60° = \frac{\pi}{3} = 1,047197551$ rad.

angoli piani delle facce al vertice degli angoloidi piramidali: $90° = \frac{\pi}{2}$

" " " " alla base " " $45° = \frac{\pi}{4}$

" " degli spigoli con le diagonali $= 45° = \frac{\pi}{4} = 0,785398163$ rad.

angoli diedri fra le facce dell'ottaedro $109° \, 28' \, 16'',3 =$

$= 1,9106 \, 33236$ rad.

angoli diedri alla base degli angoloidi cioè fra le facce triangolari ed i piani diagonali:

$= 54° \, 44' \, 8'',2 = 0,955316618$ rad

angoli solidi degli angoloidi con vertice al centro dell'ottaedro $= \frac{1}{8} 4\pi = \frac{\pi}{2}$ stereoradianti

<u>angoli solidi degli angoloidi con vertice nei vertici dell'ottaedro (angoloidi tetraedri)</u>

Per rispondere a questa domanda, ricordando che la misura dell'angolo solido è l'area della superficie sferica di raggio unitario in=

della superficie sferica di raggio unitario in-
tercettata dall'angoloide uscente dal suo
centro.

Nel nostro caso, dividendo diagonalmente la base
quadrata dell'angoloide, il problema si riduce
al calcolo dell'area dei triangoli sferici.

Area dei triangoli sferici

Bonaventura Cavalieri, utilizzando il suo principio degli indivisibili dimostrò il teorema: "La superficie del triangolo sferico di vertici A, B, C collegati con archi di cerchio massimo, è equivalente alla metà del fuso sferico, appartenente alla stessa sfera ed avente la sezione normale uguale all'eccesso sferico". (TEOREMA di CAVALIERI).

Detto E l'eccesso sferico: $\mathcal{E}_\omega = (\hat{D}_{oa} + \hat{D}_{ob} + \hat{D}_{oc} - \pi)$ rad.

metà dell'area di un fuso ampio E è data:

$$S = \frac{1}{2} \frac{4\pi \rho^2}{4\pi} \mathcal{E}_\omega =$$

$$\boxed{S = \rho_s^2 \mathcal{E}_{\omega}}$$

L'area del triangolo sferico è data dal suo eccesso sferico in radianti moltiplicato per il quadrato del raggio della sfera

perciò: se $\rho_1 = 1$

Abbiamo che:

L'ampiezza di un angolo solido triedro in stereoradianti è espressa dallo stesso valore dell'eccesso sferico in radianti del triangolo sferico intercettato dall'angoloide sulla sfera di raggio unitario.

Poiché ogni figura sulla superficie sferica che che sia delimitata da archi di cerchio massimo è sempre scomponibile in triangoli sferici, poiché gli angoli ai vertici dei triangoli sferici, essendo gli angoli fra le tangenti agli archi nei vertici, sono anche gli angoli diedri delle due facce dell'angoloide triedro che hanno in comune quel vertice. Poiché l'angolo solido è la somma degli angoli solidi degli angoloidi triedri che compongono la figura avremo che detto $\hat{\Delta}_s$ l'angolo solido il suo valore è dato dalla somma degli angoli diedri delle facce che delimitano l'angoloide. diminuita di tanti π quante sono le facce meno due.

Applicando questo principio si ha:

l'angolo diedro fra due facce dell'ottaedro è

$1,910633236$ rad $= 109° 28' 16'',37$ le facce sono 4

per cui occorre togliere $2.\pi$; $\Rightarrow 1,910633236 \times 4 - 6,283185307 =$

$\hat{\Lambda} = 1,359$ [illegible]

$\hat{A}_3 = 1{,}359347575$ sterrdiradianti dell'angoloide che ha per vertice un vertice dell'ottaedro.

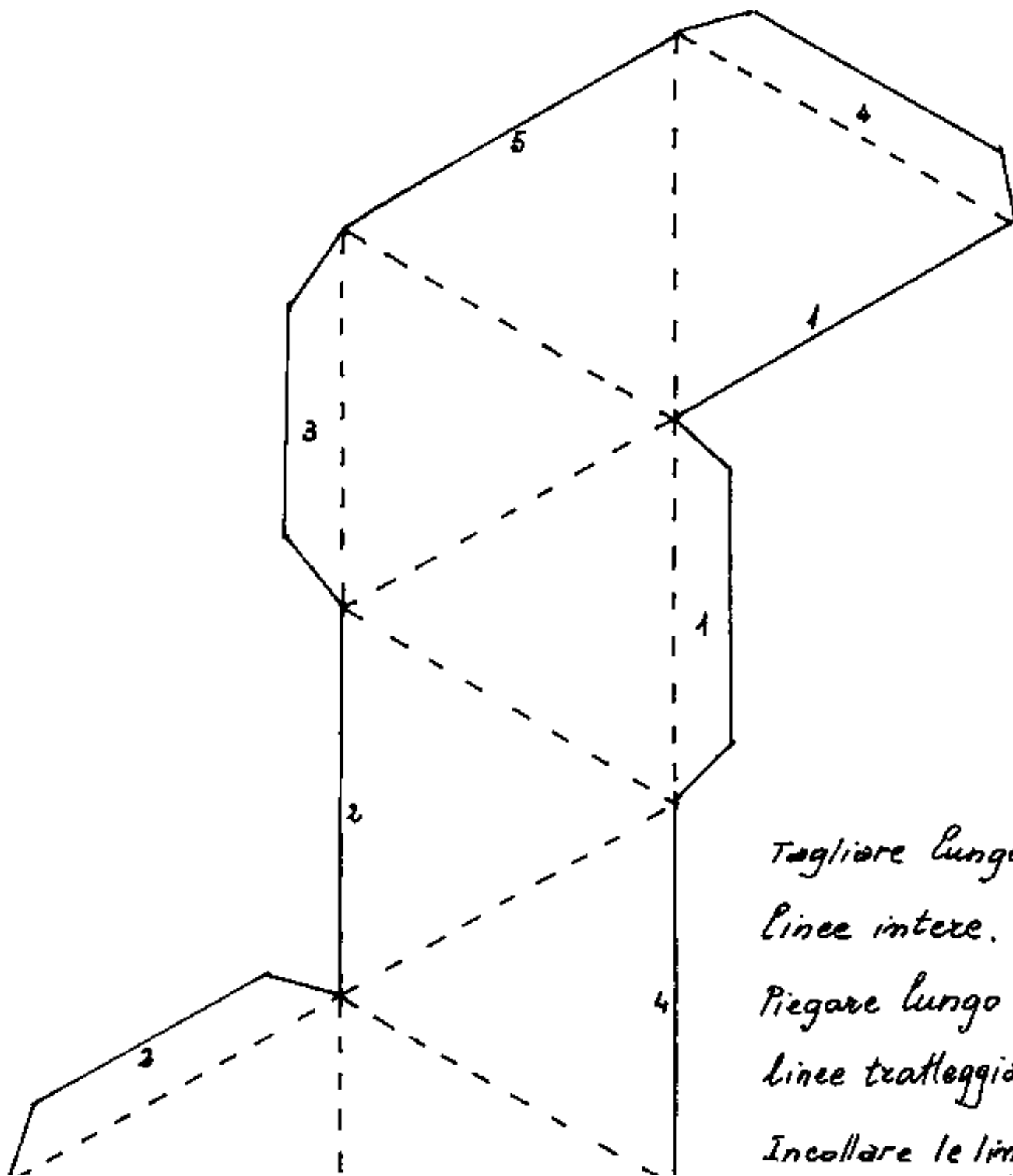
Confronto Angoloidi (stereoradianti)

solido / vertice	Tetraedro	cubo	ottaedro
al centro sfera	3,141592653	2,094385102	1,570796327
nel vertice del solido	0,551285598	1,570796327	1,359347575

Si noti che il rapporto fra il volume dell'ottaedro ed il volume della sfera circoscritta è esattamente π.
Si noti inoltre che il volume dell'ottaedro è quattro volte il volume del tetraedro di pari spigolo; e se si considera l'ottaedro nato dall'unione dei punti medi degli spigoli di un tetraedro, si ha che il volume dei quattro tetraedri di spigolo metà ed il volume del nucleo ottaedrico centrale si equivalgono.
Indichiamo con u_v l'unità volumetrica costituita dal tetraedro di spigolo metà, avremo che il tetraedro avrà un volume: $8u_v$, l'ottaedro di pari spigolo $32u_v$, il cubo costituito da un tetraedro e $\frac{4}{8}$ di ottaedro avrà un volume $24u_v$ ed uno spigolo $s = \ell/\sqrt{2}$ ove ℓ è lo spigolo comune del tetraedro e dell'ottaedro. $V = s^3 =$
$V = \frac{\ell^3}{4}\sqrt{2} = 24u_v$. $\left(\frac{\ell^3}{3}\sqrt{2} - \frac{\ell^3}{4}\sqrt{2} = \frac{\ell^3}{12}\sqrt{2}\right)$ = (volume ottaedro − volume cubo = volume tetraedro) Prendendo il volume del tetraedro di spigolo metà $= 1u_v$ l'ottaedro centrale di spigolo metà $= 4u_v$; mentre

golo metà = 1 uv l'ottaedro centrale di spigolo metà = 4 uv; mentre il cubo che ne deriva ha per volume $1 + \frac{4}{8}(4) = 3$ uv.

Torneremo su questo argomento. (Il rombododecaedro ha per volume $4+2 = 6$ uv oppure $3+3 = 6$ uv.)

È spontaneo equiparare il nucleo centrale ottaedrico ad una carica di valore 4 uv equilibrata dai quattro tetraedri di 1 uv.

modellino di ottaedro

5 4 1 3 1 2 4 3

Tagliare lungo le linee intere.
Piegare lungo le linee tratteggiate.
Incollare le linguette

3

5

Incollare le linguette sulle facce facendo corrispondere gli spigoli omonimi.

modellino di ottaedro

Tagliare lungo le linee intere.

Piegare lungo le linee tratteggiate.

Incollare le linguette sulle facce facendo

3

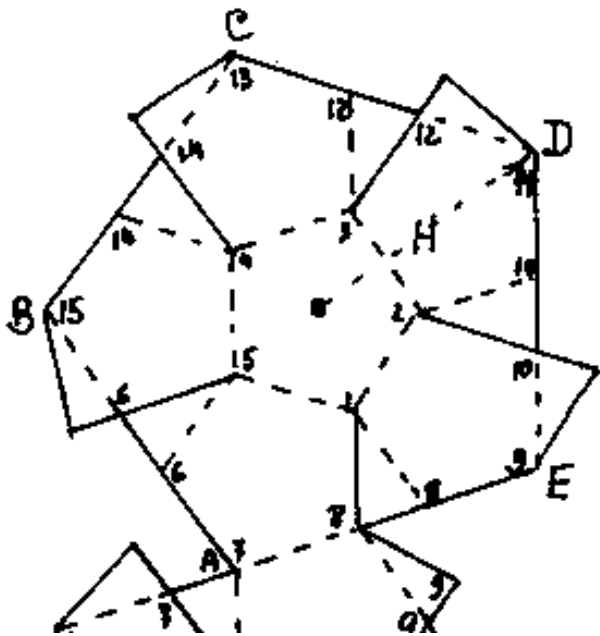
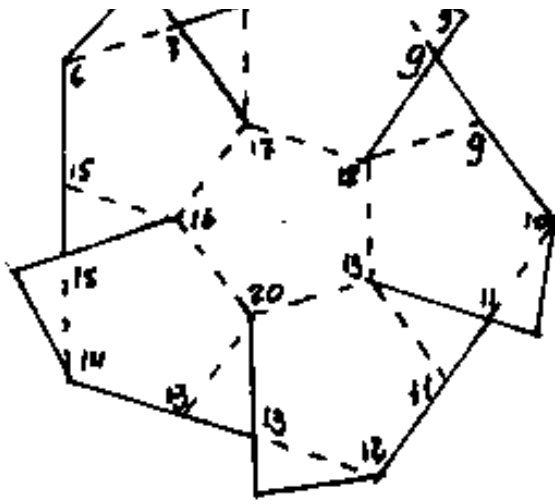
5

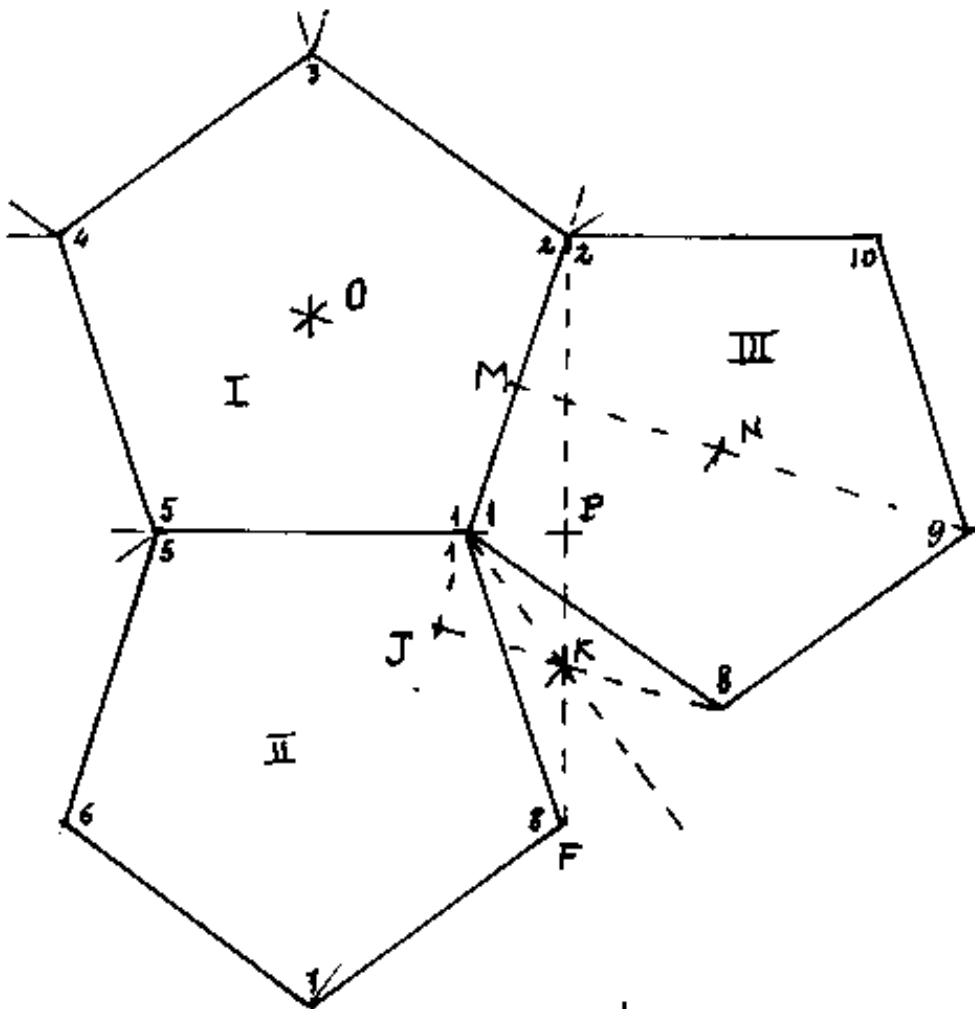
corrispondere gli
spigoli omonimi.

Il dodecaedro

Il dodecaedro è costituito da dodici facce pentagonali regolari, 20 vertici, 30 spigoli; (12+20 = 30+2).

Per ricavare le grandezze caratteristiche del dodecaedro, partiamo dallo schema piano per costruire il suo modellino in carta. Ricordiamo le correlazioni del pentagono e del decagono regolari. (Vedi Vol I).

Supponiamo di volere un dodecaedro alto H, tracciamo un cerchio di raggio H ed inscriviamo nel cerchio un pentagono regolare : ABCDE.

(Per fare un buon disegno conviene fare un cerchio il più grande possibile e dividerlo in dieci parti uguali con la massima precisione; i punti di questo cerchio, a due a due saranno le direzioni di fede da controllare per ogni linea. Il cer:

chio di raggio H può essere concentrico)
Tracciando le diagonali di ABCDE otteniamo il pentagono 1,2,3,4,5 dalle cui diagonali possiamo costruire la figura a fianco, che, ripetuta darà il nostro modellino ove abbiamo numerato i vertici ed disegnate le linguette da incollare. Tagliare lungo le linee intere e piegare le linee a tratti.

Vediamo ora cosa succede quando, ritagliato il mo=dellino, vogliamo montarlo (Per maggiore chiarezza non disegnamo le linguette da incollare, che servono solo a farlo stare insieme). Consideriamo tre facce adiacenti co=me: 1,2,3,4,5 ; 1,5,6,7,8 ; ed 1,8,9,10,2; che per semplicitá chiameremo: I, II, III. Le facce II e III ruo=tando intorno ai lati $\overline{5-1}$ ed $\overline{1-2}$ porteran=no a combaciare in K il vertice 8 (K= =proiezione del ver=tice 8 sul piano di I). Se con centro O e raggio $\overline{OK}$ tracciamo un cerchio su di esso vi saranno le proiezioni dei vertici 6, 8, 10, 12, 14. Ma anche i vertici

7 e 9, ruotando le facce si mantengono su piani perpendicolari ai rispettivi assi (lati) di ruotazione, perciò si ha la proporzione: $\overline{J-8} : \overline{J-K} = \overline{M-9} : \overline{M-N}$. (Si noti che i punti: 7, K, N sono allineati e che $\overline{OK} = \overline{ON}$, cioè sullo stesso cerchio vi sono anche le proiezioni dei vertici: 7, 9, 11, 13, 15; ciò consente di fare la I^a proiezione del dodecaedro).

Notiamo che i triangoli 1-2-F ed 1-K-F sono isosceli e sono simili, detto l lo spigolo, $(1\text{-}8 = l = 1\text{-}2)$; dalle relazioni sul pentagono abbiamo: $\overline{J\text{-}8} = \frac{l}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \overline{F\text{-}P}$;

$$\overline{1\text{-}P} = \sqrt{l^2 - \overline{FP}^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{16}(10+2\sqrt{5})} = \frac{l}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \frac{l\sqrt{2}}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{l}{4}(\sqrt{5}-1)$$

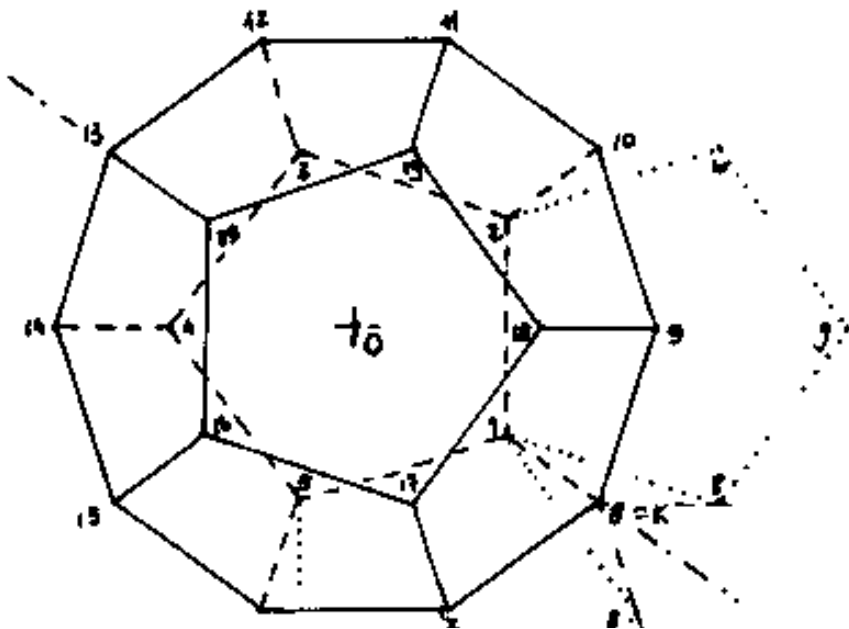
$$\boxed{\overline{1P} = l\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)} = (0,309016994 \cdot l)$$

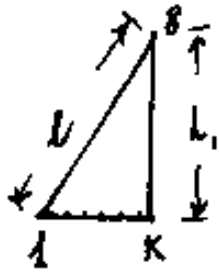
Per similitudine abbiamo: $\overline{1\text{-}K} : \overline{1\text{-}F} = \overline{1\text{-}F} : \overline{2\text{-}F}$ cioè:

$$(\overline{1\text{-}K}) : l = l : 2(\overline{F\text{-}P}) \quad \text{da cui: } (\overline{1\text{-}K}) = \frac{l^2}{2\left(\frac{l}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)} = \frac{2l}{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\, l =$$

$$(\overline{1\text{-}K}) = l\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{20}} = \boxed{(\overline{1\text{-}K}) = l\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}} = (0,525731112\ l)$$

$$\overline{OK} = \overline{O\text{-}1} + \overline{1\text{-}K} = l\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + l\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = (\text{vedi vol I radicali doppi}) =$$

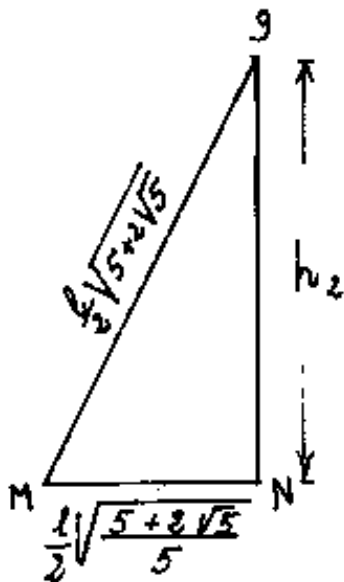
$$= l\sqrt{\frac{2}{10}}\sqrt{5+\sqrt{25-5}} = l\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \boxed{\overline{OK} = l\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}} = (1,376381920 \cdot l) = \overline{O8}$$

Se consideriamo una sezione perpendicolare passante per i vertici 13-8 (cioè: 13-20-8-1) possiamo determinare le altezze ed eseguire la seconda proie-

zione del dodecaedro.

Il triangolo rettangolo $1-K-8$, ove: $\overline{1-K} = \ell\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$; $\overline{1-8} = \ell$; h_1 $\frac{5+\sqrt{5}}{10}$

$h_1 = (0,850650808 \cdot \ell) = R_p$ = raggio del cerchio circoscritto al pentagono $= \overline{O1} = \overline{O2} = \overline{O3} = \overline{O4} = \overline{O5}$.

Dalla proporzione: $\overline{J\text{-}8} : \overline{J\text{-}K} = \overline{M\text{-}9} : \overline{M\text{-}N}$, od anche considerando il triangolo: M-N-9 ove: $\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} =$
$\overline{MN} = \overline{OK} - a_p = \ell\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} - \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = a_p = r_p = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$;
(è molto interessante notare che $\overline{OK}$ = raggio del cerchio circoscritto alla prima proiezione del dodecaedro, è doppio del raggio del cerchio inscritto nella faccia pentagonale)
$\overline{M\text{-}9} = h_p = R_p + r_p = \frac{\ell}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; l'altezza h_2 dei vertici dispari dal piano di proiezione sarà: $h_2 = \frac{\ell}{2}\sqrt{(5+2\sqrt{5}) - \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)}$;

$$h_2 = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{4(5+2\sqrt{5})}{5}} \qquad \boxed{h_2 = \ell\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}} = 2a_p = 2r_p = \overline{OK} = (1.37638192 \cdot \ell).$$

9
$\frac{\ell}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
h_2
M N
$\frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

L'altezza h_2 dei vertici dispari è uguale al raggio $\overline{OK}$ del cerchio circoscritto alla prima proiezione del dodecaedro. $H = (h_1 + h_2)$ = altezza del dodecaedro = distanza fra due facce parallele:

$$H = \ell\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) = \overline{OM} + \overline{ON} = \overline{N\text{-}9}$$

$$h = l\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) = OM + ON = N\text{-}y$$

$$H = 2r_p + R_p = \overline{O9} = \text{raggio per costruire il modellino}$$

$$\boxed{H = l\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}} = (2{,}227032728 \cdot l) .$$

Possiamo ora disegnare la seconda proiezione del dodecaedro e calcolare il raggio ρ_1 della sfera

circoscritta. Abbiamo visto che: $\overline{OK} = 2 r_q = h_2 = \ell \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

$h_1 = \ell \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$; $2(\overline{OK}) = 2\ell \sqrt{\frac{5+2\cdot\sqrt{5}}{5}}$;

$$2\rho_1 = \sqrt{(h_2-h_1)^2 + (2(\overline{OK}))^2} =$$

$$2\rho_1 = \sqrt{h_2^2 - 2h_1h_2 + h_1^2 + 4h_2^2}$$

$$2\rho_1 = \sqrt{5h_2^2 + h_1^2 - 2h_1h_2}$$

$$2\rho_1 = \ell\sqrt{(5+2\sqrt{5}) + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) - 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}$$

$$2\rho_1 = \ell\sqrt{\frac{55+21\sqrt{5}}{10} - 2\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}\sqrt{10+4\sqrt{5}}}{10}}$$

$$2\rho_1 = \ell\sqrt{\frac{55+21\sqrt{5} - 2(\sqrt{70+30\sqrt{5}})}{10}}$$

$$2\rho_1 = \ell\sqrt{\frac{(55+21\sqrt{5}) - 2\sqrt{\frac{5}{2}}(\sqrt{7+2} - \sqrt{7-2})}{10}} = \ell\sqrt{\frac{(55+21\sqrt{5}) - \sqrt{10}(3+\sqrt{5})}{10}} =$$

$$2\rho_1 = \ell\sqrt{\frac{55+21\sqrt{5} - 6\sqrt{5} - 10}{10}} = \ell\sqrt{\frac{45+15\sqrt{5}}{10}} = \ell\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}} =$$

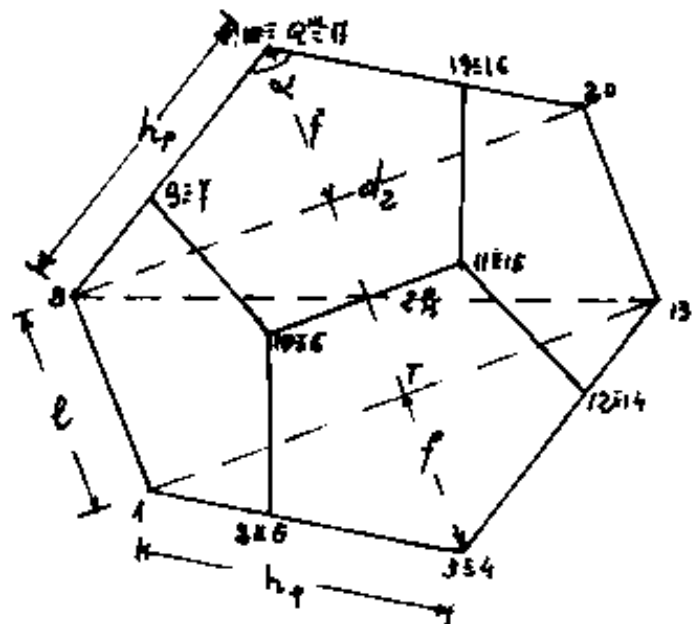
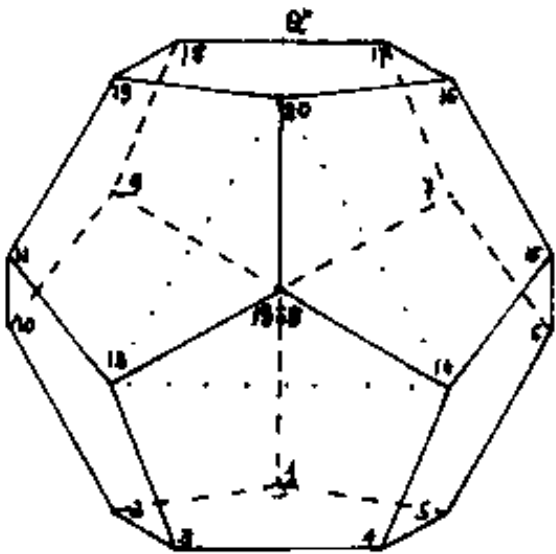
$$2\rho_1 = \ell\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{3+2}{2}} + \sqrt{\frac{3-2}{2}}\right) = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\ell}{4}\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)} = (1{,}401258539 \cdot \ell)$$

$$\rho_1 = \frac{d_p}{2}\sqrt{3}$$ (ove d_p = diagonale di una faccia)

Il raggio della sfera inscritta è ovviamente: $r_i = \frac{H}{2} = \frac{R_p}{2} + r_p$

Se proiettiamo il dodecaedro su un piano normale alla direzione determinata dagli spigoli 13 ed 8 (diametro della sfera circoscritta),

si ha un triangolo equilatero costituito dalle tre diagonali di faccia parallele ai lati opposti al vertice 13. Le diagonali sono: $\overline{12-14}$; $\overline{13-20}$; $\overline{14-20}$ e si proiettano in vera grandezza come la: $\overline{19-16}$; la $\overline{11-3}$; e la $\overline{4-15}$; anche i lati: $\overline{17-18}$; $\overline{19 \div 11}$; $\overline{10-2}$; $\overline{3-4}$; $\overline{5-6}$; $\overline{15-16}$ e le diagonali "d", come: $\overline{11-16}$; $\overline{11-4}$; $\overline{16-4}$; $\overline{10-17}$; $\overline{10-5}$; $\overline{5-17}$; — si proiettano in vera grandezza, in quanto segmenti paralleli al piano di proiezione. (Afianco la veduta laterale)

Detto Q il punto medio dello spigolo $\overline{17-18}$ (Lo vediamo in seconda ed in terza proiezione), si noti che l'angolo: $\alpha = 8\hat{Q}20$ è l'angolo

[illegible]

diedro fra le facce, che si proietta in vera grandezza nella veduta laterale: $\overline{8-Q''} = \overline{Q''-20} = \boxed{h_p = \frac{\ell}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$; $\overline{8-20} = \overline{1-13} = d_2$ = distanza di due spigoli paralleli: $d_2^2 = (2\rho_1)^2 - \ell^2$;

$d_2^2 = \left[\ell^2\left(\frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right) - \ell^2\right]$; da cui $d_2 = \ell\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$; $\boxed{d_2 = \frac{\ell}{2}(3+\sqrt{5})}$

$\boxed{d = \ell(2,618033989)}$; $f^2 = h_p^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$; $\frac{\ell^2}{4}(5+2\sqrt{5}) - \frac{\ell^2}{16}(14+6\sqrt{5}) = \frac{\ell^2}{8}(3+\sqrt{5})$;

$f = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{3+2}{2}} + \sqrt{\frac{3-2}{2}}\right) = \boxed{f = \frac{\ell}{4}(\sqrt{5}+1)} \boxed{= \ell(0,809016994)}$

Calcoliamo l'angolo diedro α:

Applicando Carnot si ha: $\cos\alpha = \dfrac{h_p^2 + h_p^2 - d_2^2}{2 h_p^2}$;

$$\cos\alpha = 1 - \frac{d_2^2}{2 h_p^2} = 1 - \frac{\ell^2 \frac{7+3\sqrt{5}}{2}}{2\ell^2 \frac{5+2\sqrt{5}}{4}} =$$

$$\cos\alpha = \frac{5+2\sqrt{5}-7-3\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}} = \frac{-2-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}} = -\frac{(10+5\sqrt{5}-4\sqrt{5}-10)}{5} =$$

$\cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{5}}{5}$; $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}}$ $\alpha = 116°\,33'\,54'',1$

$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{5}}$; $\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}}$ $\alpha = 63°\,26'\,5'',82$ (non valido); $\alpha = 116°\,33'\,54'',1$

$\operatorname{tang}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} =$ $\boxed{tg\,\alpha = -2}$ $\alpha = 116°\,33'\,54'',1$

Il valore di $\operatorname{tang}\alpha$ ci dice che α è supplementare all'angolo maggiore del triangolo rettangolo che ha i cateti uno doppio dell'altro.

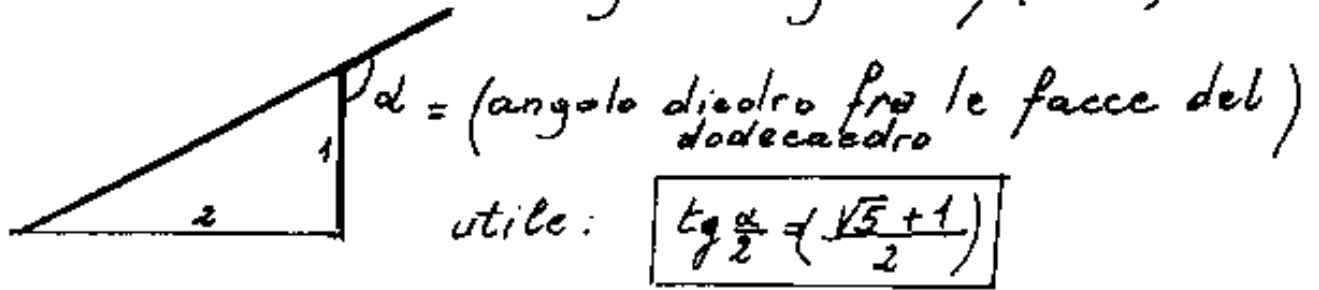
(Triangolo che abbiamo utilizzato per la sezione aurea e per la costruzione del decagono regolare) (...)

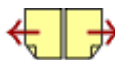
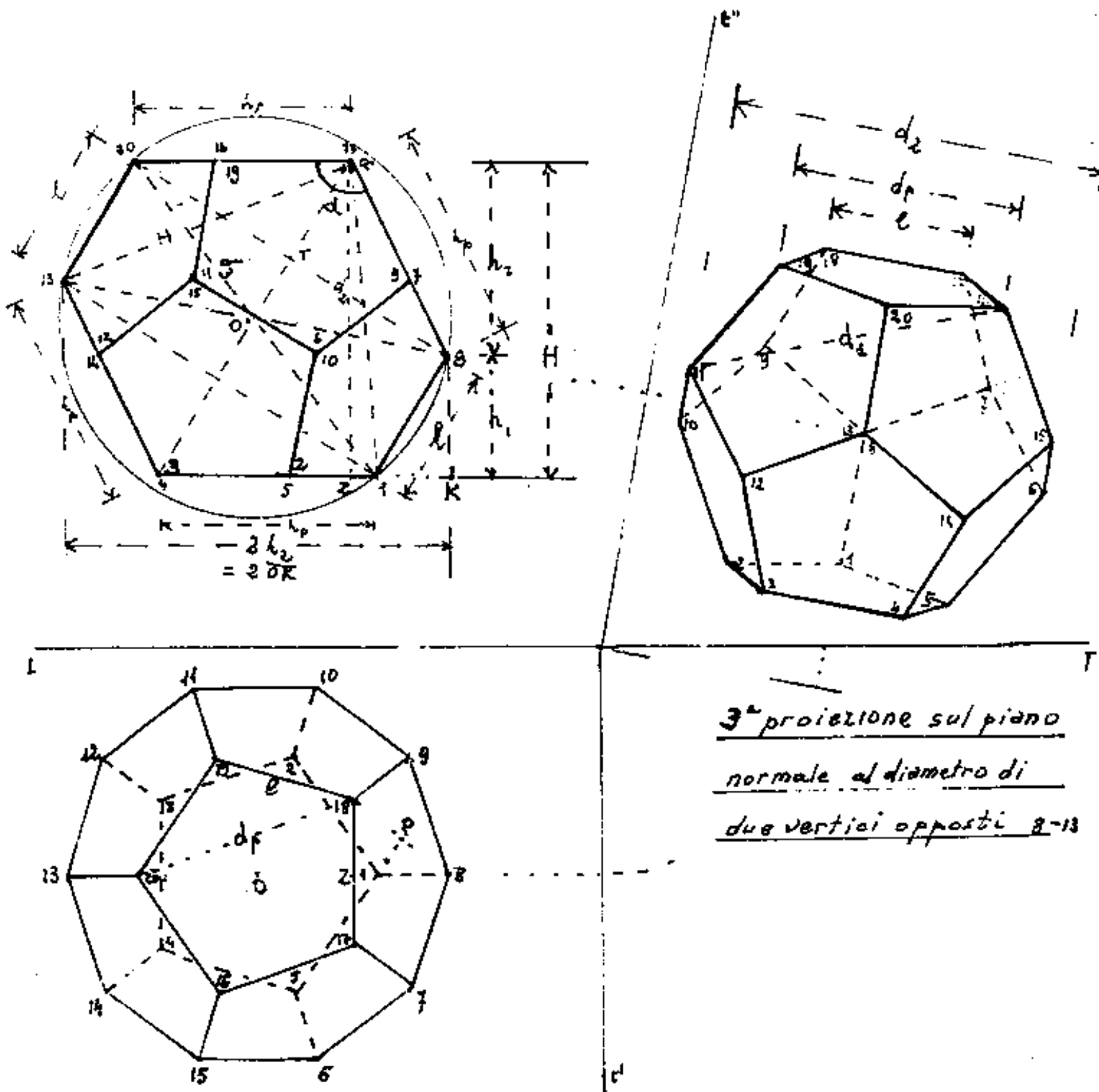
per la costruzione del decagono regolare) (V. Vol I)

1

2

α = (angolo diedro fra le facce del dodecaedro)

utile: $\boxed{tg\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$

Facciamo le tre proiezioni del dodecaedro per evidenziare il calcolo degli altri elementi.

3ª proiezione sul piano normale al diametro di due vertici opposti 8-13

$$\overline{1\text{-}Z} = (R_p - z_p) = \left(\ell\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} - \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right) \; ; \; \overline{1\text{-}Q''}^2 = H^2 + \overline{1\text{-}Z}^2 \; ;$$

$$d_1 = \overline{1\text{-}18} \; ; \; d_1^2 = \overline{1\text{-}Q''}^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = H^2 + \overline{1\text{-}Z}^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 =$$

$$d_1^2 = \ell^2\left(\frac{25+11\sqrt{5}}{10} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5+2\sqrt{5}}{20} - \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$d_1^2 = \ell^2\left(\frac{30+12\sqrt{5}}{10} + \frac{5+2\sqrt{5}}{20} + \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{50}}\right)$$

$$d_1^2 = \ell^2\left(\frac{70+26\sqrt{5}}{20} - \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}}\right) = \ell^2\left(\frac{35+13\sqrt{5}}{10} - \frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{2}\right)$$

$$d_1^2 = \ell^2\left(\frac{30+10\sqrt{5}}{10}\right) = \ell^2(3+\sqrt{5}) \quad \text{da cui:} \quad \boxed{d_1 = \ell\sqrt{3+\sqrt{5}}}$$

$$\boxed{d_1 = \ell(2{,}288245611)} \quad \boxed{d_1 = \ell\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \quad \boxed{d_1 = \frac{\ell}{2}\left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)}$$

Consideriamo ora le piramidi aventi il vertice al centro del dodecaedro e per base le facce del dodecaedro stesso, esaminiamo i pentaedri uscenti dal centro e formanti angoli solidi di $\frac{1}{12}4\pi = \frac{\pi}{3}$ steradianti. Gli spigoli delle facce laterali di tali piramidi sono $= \rho_1$ cioè il raggio della sfera circoscritta, l'altezza $= \frac{H}{2} = r_s$ è il raggio della sfera inscritta nel dodecaedro.

La superficie laterale del dodecaedro $= S_l = 12 \cdot A_n$;

La superficie laterale del dodecaedro $= S_l = 12 \cdot A_p$;

ove A_p = area facce pentagonali $= \frac{5}{2} a_p l = \frac{l^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$; da cui

$S_l = 3l^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ $S_l = l^2(20{,}64572881) = 30\, l\, a_p$

Il volume del dodecaedro è 12 volte la piramide.

$$V = 12 \cdot \frac{1}{3} A_p \cdot \frac{H}{2} = 2\left(\frac{l^3}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\right) = \frac{l^3}{2}\sqrt{\frac{235+105\sqrt{5}}{2}} =$$

$$V = \frac{l^3}{4}\left(\sqrt{245}+\sqrt{225}\right);\quad V = \frac{l^3}{4}(15+7\sqrt{5})\quad V = l^3(7{,}66311896)$$

altezza piramide = raggio sfera inscritta = $\frac{u}{2}\cdot r_i = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$

apotema di una faccia della piramide = $h_c = \sqrt{r_i^2 + a_f^2} =$

$h_c = \sqrt{\rho_1^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$; utilizzando $h_c^2 = r_i^2 + a_f^2$ si ha:

$$h_c = \sqrt{\frac{\ell^2}{4}\left(\frac{25+11\sqrt{5}}{10}\right)+\frac{\ell^2}{4}\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)}$$

$$h_c = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{10}} = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} = \boxed{h_c = \frac{\ell}{4}\left(3+\sqrt{5}\right)}$$

$$\boxed{h_c = \ell\,(1,309016994)}$$

altezza relativa al lato obliquo nelle facce piramidali

$$h_1 = \frac{\ell\cdot h_c}{\rho_1} = \frac{\ell^2(3+\sqrt{5})/4}{\ell(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}/4} = \frac{\ell}{4}\,\frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}} = \boxed{\ell\,\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} = h_1}$$

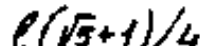
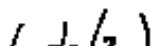
angolo al vertice nelle facce piramidali: $V = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{\ell/2}{\rho_1}\right) =$

$$V = 2\,\mathrm{arctang}\left(\frac{\ell/2}{h_c}\right) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{4(\ell/2)}{\ell(3+\sqrt{5})}\right) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\boxed{\hat{V} = 41^\circ\ 48'\ 37'',13}$$

angoli alla base delle facce piramidali: $\hat{B} = \frac{180^\circ - \hat{V}}{2} =$

$$\boxed{\hat{B} = 69^\circ\ 05'\ 41'',44}$$

angolo diedro fra le facce delle piramidi

$$\hat{D}_f = 2 \arcsen\left(\frac{d_f/2}{h_1}\right) = 2 \arcsen \frac{\ell(\sqrt{5}+1)/4}{\ell(\sqrt{5}+1)/2\sqrt{3}} = 2\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{\hat{D}_f = 120°}$$

<u>angolo diedro fra una faccia e la base della piramide</u>

$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctang}\left(\frac{z_i}{a_p}\right) = \operatorname{arctang} \frac{\ell\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}/2}{\ell\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}/2} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{250-220+110\sqrt{5}-100\sqrt{5}}{20}}\right) = \boxed{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{2} = 58° \; 16' \; 57'',09}$$

α = angolo diedro fra le facce del dodecaedro $\boxed{\alpha = 116° 33' 54'',1}$

distanza fra i centri di due facce adiacenti nel dodecaedro = $g_1 = 2\, a_p \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$;

abbiamo già calcolato $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ per cui: $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-(-1/\sqrt{5})}{2}}$

$\boxed{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}}$ $\quad g_1 = 2\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) = \ell\sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{50}}$

$g_1 = \ell\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}} = g_1 = \ell\,\frac{(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = \boxed{g_1 = \ell\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)}$

$g_1 = d_2/\sqrt{5}$; $\quad \boxed{g_1 = \ell\,(1,17082039)}$

distanza fra i centri di due facce alterne, cioè non adiacenti e non opposte = g_2 = è la diagonale del pentagono di lato g_1, perciò: $g_2 : g_1 = d_p : \ell$.

$g_2 = \frac{g_1\, d_p}{\ell} = \frac{\ell\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\cdot \ell\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}{\ell} = \ell\,\frac{(8+4\sqrt{5})}{4\sqrt{5}} = \boxed{g_2 = \ell\,\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

$\boxed{g_2 = \ell\,(1,894427191)}$

distanza fra i centri di facce opposte = g_3

distanza fra i centri di facce opposte = g_3

$$g_3 = H = 2r_i = l\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$$

$$g_3 = l(2,227032729)$$

Simboli del dodecaedro

l = spigolo = lato faccia pentagonale

$a_p = r_p$ = apotema della faccia = raggio del cerchio nella faccia.

$R_p = h_1$ = raggio del cerchio circoscritto alla faccia = minor altezza vertici

$h_2 = \overline{OK} = 2a_p$ = maggior altezza dei vertici, dalle basi = raggio del cerchio contenente i vertici in prima proiezione = diametro del cerchio inscritto in una faccia ($2r_p$)

$h_p = (r_p + R_p)$ = altezza di una faccia $= (u_p + v_p)$ (vedi Vol I - pentagono)

d_p = diagonale di faccia

v_p = distanza del vertice dalla diagonale di faccia

u_p = distanza del lato parallelo dalla diagonale di faccia

h_c = distanza di uno spigolo dal centro del dodecaedro = altezza facce delle piramidi angoloidi uscenti dal centro

$H = 2r_i = (h_1 + h_2)$ = altezza dodecaedro = diametro ($2r_i$) della sfera inscritta nel dodecaedro = raggio per costruire il modellino.

$\frac{d_3}{2} = \rho_3$ = raggio della sfera circoscritta = metá diagonale maggiore

d_2 = diagonale media = distanza fra due spigoli paralleli $= 2h_c$

d_2 = diagonale media = distanza fra due spigoli paralleli ≠ esp

d_1 = diagonale minore (interno, al dodecaedro)

g_1 = distanza centri facce adiacenti

g_2 = distanza centri facce alterne (non adiacenti, non opposte)

g_3 = H = distanza facce opposte.

S_ℓ = superficie laterale

V = Volume.

TAVOLA delle correlazioni fra gli elementi del dodecaedro

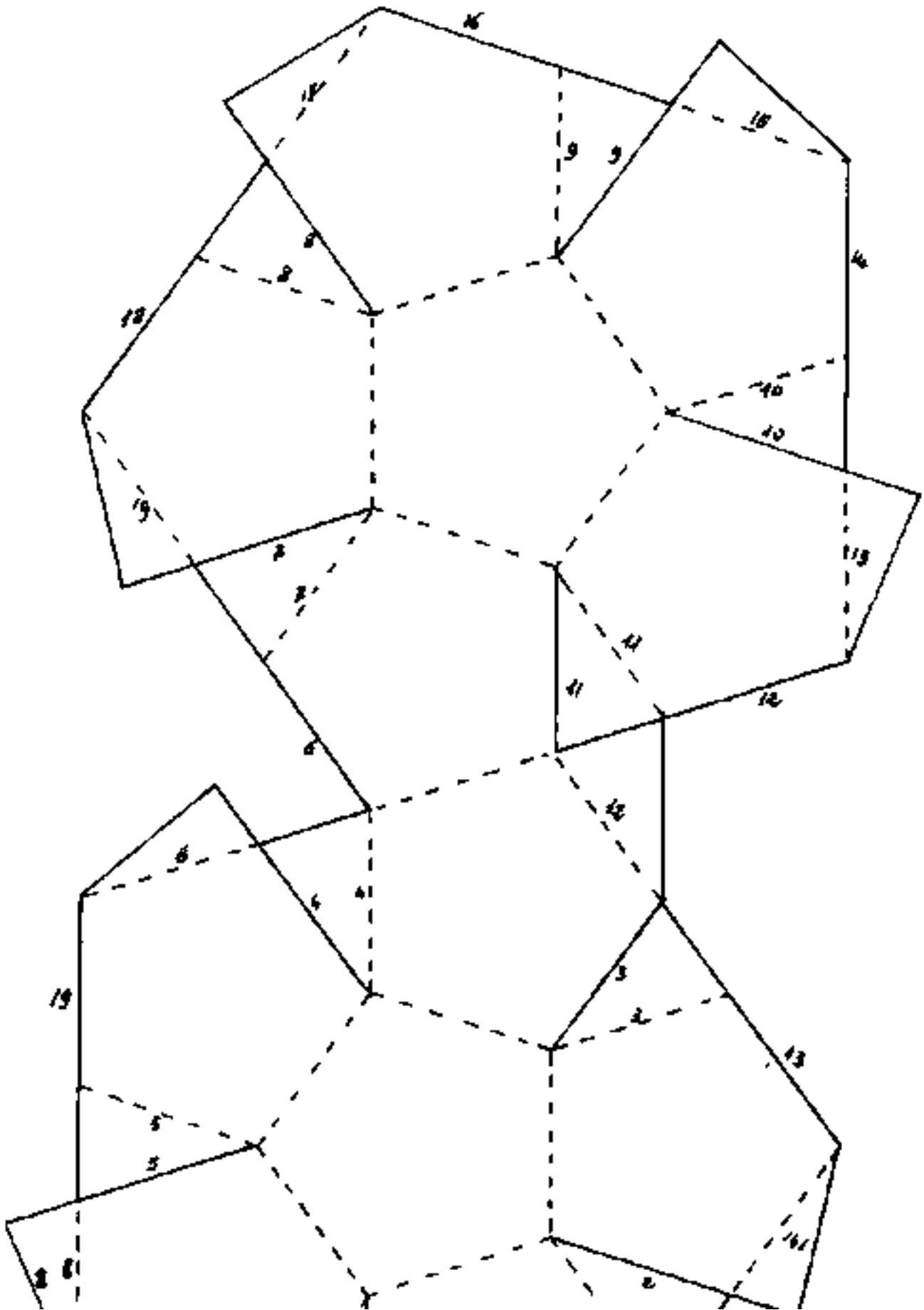
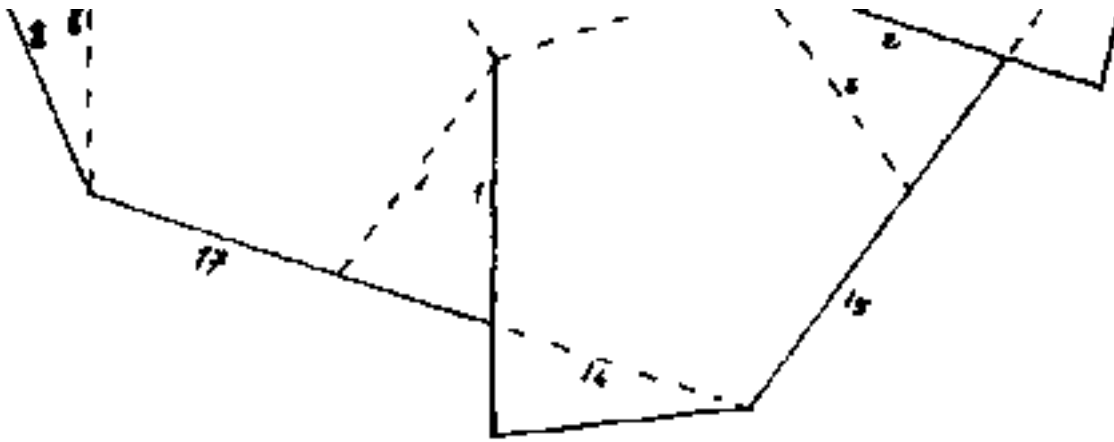
x \ noti	ℓ	$R_p=h_1$	$a_p=r_p$	$h_2=\overline{OK}$	h_p	$d_p=2\overline{TQ}$	V_p
ℓ	ℓ	$R\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 1,175570505 R	$a_p 2\sqrt{5-2\sqrt5}$ 1,453085057·a	$h_2\sqrt{5-2\sqrt5}$ 0,726542528 h_2	$h_p 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt5}{5}}$ 0,649839392 h	$d_p\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,618033989 d	$V\sqrt{\frac{10+2\sqrt5}{5}}$ 1,701301616 V
$R_p=h_1$	$\ell\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 0,850650808 ℓ	$R_p=h_1$	$a_p\left(\sqrt5-1\right)$ 1,236067977 a	$h_2\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,618033989 h_2	$h_p\left(1-\sqrt{\frac15}\right)$ 0,552786405 h	$d_p\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$ 0,525731112 d	$V\left(1+\frac{1}{\sqrt5}\right)$ 1,447213595 V
$a_p=r_p$	$\frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}$ 0,688190960 ℓ	$R\left(\frac{\sqrt5+1}{4}\right)$ 0,809016994·R	$a_p=r_p$	$\frac12 h_2$	$h_p\left(\frac{\sqrt5}{5}\right)$ 0,447213596 h	$\frac{d_p}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 0,425325404 d	$V\left(\frac{3\sqrt5+5}{10}\right)$ 1,170820394 V
$h_2=\overline{OK}$	$\ell\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}$ 1,376381920 ℓ	$R\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$ 1,618033989 R	$2a_p$	$h_2=OK=2a_p$	$h_p\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)$ 0,894427191 h	$d_p\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 0,850650808 d	$V\left(\frac{3\sqrt5+5}{5}\right)$ 2,341640786 V
h_p	$\frac{\ell}{2}\sqrt{5+2\sqrt5}$ 1,538841769 ℓ	$R\left(\frac{5+\sqrt5}{4}\right)$ 1,809016994·R	$a\sqrt5$ 2,236067977 a	$\frac{h_2\sqrt5}{2}$ 1,118033989 h_2	$h_p=(r_p+R_p)=u_p+V_p$	$\frac{d_p}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$ 0,951056516 d	$V\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)$ 2,618033989 V
$d_p=2\overline{TQ}$	$\ell\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)$ 1,618033989 ℓ	$R\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{2}}$ 1,902113032·R	$a\sqrt{(5-\sqrt5)2}$ 2,351141009	$h_2\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 1,175570505 h_2	$h_p\sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{5}}$ 1,051462224 h	$d_p=2\overline{TQ}$	$V2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}$ 2,752763840 V
V_p	$\frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 0,587785253 ℓ	$R\left(\frac{5-\sqrt5}{4}\right)$ 0,690983006 R	$a\left(\frac{3\sqrt5-5}{2}\right)$ 0,854101966 a	$h_2\left(\frac{3\sqrt5-5}{4}\right)$ 0,427050983 h_2	$h_p\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$ 0,381966012 h	$\frac{d_p}{2}\sqrt{5-2\sqrt5}$ 0,363271264 d	V_p
u_p	$\frac{\ell}{4}\sqrt{10+2\sqrt5}$ 0,951056516·ℓ	$R\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)$ 1,118033989·R	$a\left(\frac{5-\sqrt5}{2}\right)$ 1,3819660 a	$h_2\left(\frac{5-\sqrt5}{4}\right)$ 0,690983 h_2	$h_p\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,618033989	$\frac{d_p}{4}\sqrt{10-2\sqrt5}$ 0,587785252 d	$V\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$ 1,618033989 V
$H=2h_1$	$\ell\sqrt{\frac{25+11\sqrt5}{10}}$ 2,227032728·ℓ	$R\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)$ 2,618033989·R	$a\left(\sqrt5+1\right)$ 3,236067977 a	$h_2\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)$ 1,618033989 h	$h_p\left(\frac{5+\sqrt5}{5}\right)$ 1,447213594	$d_p\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}$ 1,376381920	$V_p\left(\frac{10+4\sqrt5}{5}\right)$ 3,788854381 V
$\frac{d_3}{2}=\rho_1$	$\frac{\ell}{4}(\sqrt5+1)\sqrt3$ 1,401258538·ℓ	$\frac{R}{4}\sqrt{30+6\sqrt5}$ 1,647278207 R	$\frac{a}{2}\sqrt{30-6\sqrt5}$ 2,036147844	$\frac{h_2}{4}\sqrt{30-6\sqrt5}$ 1,018073921·h_2	$\frac{h_p}{2}\sqrt{\frac{30-6\sqrt5}{5}}$ 0,910592998	$\frac{d_p}{2}\sqrt3$ 0,866025404 d	$V\sqrt{\frac{15+6\sqrt5}{5}}$ 2,383463417 V
$d_2=2h_c$	$\frac{\ell}{2}(3+\sqrt5)$ 2,618033989 ℓ	$R\sqrt{5+2\sqrt5}$ 3,077683537 R	$a\sqrt{10+2\sqrt5}$ 3,804226065 a	$\frac{h_2}{2}\sqrt{10+2\sqrt5}$ 1,902113035 h_2	$h_p\sqrt{\frac{10+2\sqrt5}{5}}$ 1,701301616	$d_p\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$ 1,618033989	$V\sqrt{\frac{50+22\sqrt5}{5}}$ 4,454065456
d_1	$\ell\left(\frac{\sqrt5+1}{\sqrt2}\right)$ 2,288245612 ℓ	$R\sqrt{5+\sqrt5}$ 2,689994050 R	$a\cdot2\sqrt{5-\sqrt5}$ 3,325015506 a	$h_2\sqrt{5-\sqrt5}$ 1,662507754 h_2	$h_p2\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{5}}$ 1,486992131	$d_p\sqrt2$ 1,414213562 d	$V2\sqrt{\frac{10+4\sqrt5}{5}}$ 3,892995958 V
S_e	$\ell^2\cdot3\sqrt{25+10\sqrt5}$ 20,6457288 ℓ^2	$R^2\frac{15}{2}\sqrt{10+2\sqrt5}$ 28,53169549 R^2	$a^2 60\sqrt{5-2\sqrt5}$ 43,59255113 a^2	$h_2^2 15\sqrt{5-2\sqrt5}$ 10,89813795 h^2	$h_p^2 12\sqrt{5-2\sqrt5}$ 8,71851032 h^2	$d_p^2\frac32\sqrt{50-10\sqrt5}$ 7,88596669 d^2	$V_p^2\frac65\sqrt{50(25+11\sqrt5)}$ 59,75755878 V^2
V	$\frac{\ell^3}{4}(15+7\sqrt5)$ 7,663118960 ℓ^3	$R^3\frac54\sqrt{50+22\sqrt5}$ 12,44949143 R^3	$a^3 10\sqrt{10-2\sqrt5}$ 23,5114101 a^3	$h_2^3\frac54\sqrt{10-2\sqrt5}$ 2,938926261 h^3	$h_p^3 2\sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{5}}$ 2,102924448 h^3	$d_p^3\left(\frac{5+\sqrt5}{4}\right)$ 1,809016993 d^3	$V_p^3 2\sqrt{\frac{890+398\sqrt5}{5}}$ 37,73544811 V^3

x \ noti	u_p	H	ρ_1	d_2	d_1	S_e	V
ℓ	$u\sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{5}}$ 1,051462224·u	$H\sqrt{\frac{25-11\sqrt5}{2}}$ 0,449027977 H	$\rho_1\left(\frac{\sqrt5-1}{\sqrt3}\right)$ 0,713644179 ρ_1	$d_2\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$ 0,381966012	$\frac{d_1}{2}\left(\frac{\sqrt5-1}{\sqrt2}\right)$ 0,437016024 d_1	$\sqrt{\frac{S_e}{3\sqrt{25+10\sqrt5}}}$ 0,220082186 $\sqrt{S_e}$	$\sqrt[3]{\frac{4V}{15+7\sqrt5}}$ 0,507223072 $\sqrt[3]{V}$
$R_p=h_1$	$u\left(\frac25\sqrt5\right)$ 0,894427191 u	$H\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$ 0,381966011	$\rho_1\sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{15}}$ 0,607061998 ρ	$d_2\sqrt{\frac{5-2\sqrt5}{5}}$ 0,324919696 d	$\frac{d_1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{5}}$ 0,371748034 d_1	$\sqrt{\frac{2S_e}{15\sqrt{10+2\sqrt5}}}$ 0,1872130293 $\sqrt{S_e}$	$\sqrt[3]{\frac{4V}{5\sqrt{50+22\sqrt5}}}$ 0,431468814 $\sqrt[3]{V}$
$a_p=r_p$	$u\left(\frac{5+\sqrt5}{10}\right)$ 0,723606797 u	$H\left(\frac{\sqrt5-1}{4}\right)$ 0,309016994	$\rho_1\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{30}}$ 0,491123473 ρ	$d_2\frac12\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$ 0,262865556 d	$\frac{d_1}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{5}}$ 0,300750477 d_1	$\sqrt{\frac{S_e}{60\sqrt{5-2\sqrt5}}}$ 0,151458707 $\sqrt{S_e}$	$\sqrt[3]{\frac{V}{10\sqrt{10-2\sqrt5}}}$ 0,349065645 $\sqrt[3]{V}$
$h_2=\overline{OK}$	$u\left(\frac{5+\sqrt5}{5}\right)$ 1,447213595 u	$H\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,618033989	$\rho_1 2\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{30}}$ 0,982246946	$d_2\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$ 0,525731112	$\frac{d_1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{5}}$ 0,601500955 d_1	$\sqrt{\frac{S_e}{15\sqrt{5-2\sqrt5}}}$ 0,302917412 $\sqrt{S_e}$	$\sqrt[3]{\frac{4V}{5\sqrt{10-2\sqrt5}}}$ 0,698131290 $\sqrt[3]{V}$
h_p	$u\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)$ 1,618033989 u	$H\left(\frac{5-\sqrt5}{4}\right)$ 0,690983006	$\rho_1\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{6}}$ 1,098185491·ρ_1	$d_2\frac12\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$ 0,587785253	$\frac{d_1}{4}\sqrt{5+\sqrt5}$ 0,672498512 d_1	$\sqrt{\frac{S_e}{12\sqrt{5-2\sqrt5}}}$ 0,3386716604 $\sqrt{S_e}$	$\sqrt[3]{\frac{V\sqrt5}{2\sqrt{10-2\sqrt5}}}$ 0,780534511 $\sqrt[3]{V}$
$d_p=2\overline{TQ}$	$u\sqrt{\frac{10+2\sqrt5}{5}}$ 1,701301616 u	$H\sqrt{5-2\sqrt5}$ 0,726542528	$\rho_1\left(\frac23\sqrt3\right)$ 1,154700538 ρ_1	$d_2\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,618033989	$\frac{d_1}{2}\sqrt2$ 0,707106781 d_1	$\sqrt{\frac{2S_e}{3\sqrt{50-10\sqrt5}}}$ 0,3561004564 $\sqrt{S_e}$	$\sqrt[3]{\frac{4V}{5+\sqrt5}}$ 0,8207025531 $\sqrt[3]{V}$
V_p	$u\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 0,618033989 u	$H\left(\frac{5-2\sqrt5}{2}\right)$ 0,263932023	$\rho_1\sqrt{\frac{5-2\sqrt5}{3}}$ 0,419469524 ρ	$d_2\frac12\sqrt{\frac{25-11\sqrt5}{2}}$ 0,224513989	$\frac{d_1}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt5}{2}}$ 0,256871574 d_1	$\sqrt{\frac{5S_e}{6\sqrt{50(25+11\sqrt5)}}}$ 0,1293610432 $\sqrt{S_e}$	$\sqrt[3]{\frac{V\sqrt5}{2\sqrt{890+398\sqrt5}}}$ 0,299031816 $\sqrt[3]{V}$
u_p	u_p	$H\frac12\sqrt{\frac{35-15\sqrt5}{2}}$ 0,427050983·H	$\rho_1\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{6}}$ 0,678715947 ρ	$\frac{d_2}{2}\sqrt{5-2\sqrt5}$ 0,363271264	$\frac{d_1}{4}\sqrt{5-\sqrt5}$ 0,415626938 d_1	$\sqrt{\frac{5S_e}{6\sqrt{50(5+\sqrt5)}}}$ 0,2093105971 $\sqrt{S_e}$	$\sqrt[3]{\frac{V\sqrt5}{2\sqrt{50+22\sqrt5}}}$ 0,482396857 $\sqrt[3]{V}$
$H=2h_1$	$u\sqrt{\frac{14+6\sqrt5}{5}}$ 2,341640785	$H=(h_1+h_2)$	$\rho_1 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}$ 1,589308963 ρ	$d_2\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}$ 0,850650807	$d_1\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{10}}$ 0,973248988 d_1	$\sqrt{\frac{S_e\sqrt2}{15\sqrt{65-29\sqrt5}}}$ 0,490130230 $\sqrt{S_e}$	$\sqrt[3]{\frac{4V}{5\sqrt{2(65-29\sqrt5)}}}$ 1,129600156 $\sqrt[3]{V}$
$\frac{d_3}{2}=\rho_1$	$u\frac12\sqrt{\frac{30+6\sqrt5}{5}}$ 1,473370420 u	$H\frac12\sqrt{15-6\sqrt5}$ 0,629204271	$\rho_1=\frac12 d_3$	$d_2\left(\frac{\sqrt3(\sqrt5-1)}{4}\right)$ 0,535233135	$d_1\left(\frac{\sqrt6}{4}\right)$ 0,612372436 d_1	$\sqrt{\frac{S_e}{2\sqrt{50-10\sqrt5}}}$ 0,3083920424 $\sqrt{S_e}$	$\sqrt[3]{\frac{3V\sqrt3}{2(5+\sqrt5)}}$ 0,710714826 $\sqrt[3]{V}$
$d_2=2h_c$	$u\cdot2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{5}}$ 2,752763841 u	$H\cdot\frac12\sqrt{10-2\sqrt5}$ 1,175570506	$\rho_1\cdot\left(\frac{\sqrt5+1}{\sqrt3}\right)$ 1,868344212	d_2	$d_1\cdot\left(\frac{\sqrt5+1}{2\cdot\sqrt2}\right)$ 1,144122803 d_1	$\sqrt{\frac{S_e\sqrt2}{3\sqrt{5(25-11\sqrt5)}}}$ 0,5761826641 $\sqrt{S_e}$	$\sqrt[3]{\frac{4V}{7\sqrt5-5}}$ 1,327924623 $\sqrt[3]{V}$
d_1	$u\cdot2\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{5}}$ 2,406003820 u	$H\cdot\sqrt{10-4\sqrt5}$ 1,027486298 H	$\rho_1\cdot\frac23\sqrt6$ 1,632993161 ρ_1	$d_2\left(\frac{\sqrt5-1}{\sqrt2}\right)$ 0,874032051 d	d_1	$\sqrt{\frac{4S_e}{3\sqrt{50-10\sqrt5}}}$ 0,5036020361 $\sqrt{S_e}$	$2\sqrt[3]{\frac{V\sqrt2}{5+\sqrt5}}$ 1,160628632 $\sqrt[3]{V}$
S_e	$u_p^2\frac65\sqrt{50(5+\sqrt5)}$ 22,82535636 u^2	$H^2\cdot15\sqrt{\frac{65-29\sqrt5}{2}}$ 4,16271822 H^2	$\rho_1^2 2\sqrt{50-10\sqrt5}$ 10,51462222 ρ^2	$d_2^2 3\sqrt{\frac{5(25-11\sqrt5)}{2}}$ 3,012127125 d^2	$d_1^2\frac34\sqrt{50-10\sqrt5}$ 3,942983332	S_e	$3\sqrt[3]{10\sqrt{2(65-29\sqrt5)}V^2}$ 5,31161399 $\sqrt[3]{V^2}$
V	$u_p^3\cdot2\sqrt{\frac{50+22\sqrt5}{5}}$ 8,90813091 u^3	$H^3\cdot\frac54\sqrt{2(65-29\sqrt5)}$ 0,6937863785 H^3	$\rho_1^3\left(\frac{2(\sqrt5+5)}{3\sqrt3}\right)$ 2,785163863 ρ^3	$d_2^3\cdot\frac{3\sqrt5-5}{4}$ 0,427050983 d^3	$d_1^3\left(\frac{5+\sqrt5}{8\sqrt2}\right)$ 0,639584010	$\frac{S_e\sqrt{S_e}}{\sqrt{270\sqrt{2(65-29\sqrt5)}}}$ 0,08168837 $S_e\sqrt{S_e}$	V

Schema di dodecaedro regolare $\varrho_1 = 5/12$

16
17
9
9
15
8
8
18
14
10
10
19
7
7
13
11
11
12
6
12
6
4
4
19
3
2
13

Tagliare le linee intere, piegare le linee a tratti, incollare le linguette facendo combaciare gli spigoli omonimi

Schema di dodecaedro regolare $\rho_1 = 5/12$

Tagliare le linee intere, piegare le linee a tratti, incollare le linguette facendo combaciare gli spigoli omonimi

L'Icosaedro

(dal greco: icos = 20)

L'Icosaedro è il quinto dei solidi regolari, ha 20 facce triangolari equilatere, 12 vertici, 30 spigoli: (F+V=S+2 ; 20+12 =30+2) (Eulero).

Confrontiamo la formula di Eulero per i cinque solidi regolari:

solido	F	V	S	NOTE
tetraedro	4	4	6	(base fondamentale)
cubo	6	8	12	scambio V ⇄ F
ottaedro	8	6	12	
dodecaedro	12	20	30	scambio V ⇄ F
icosaedro	20	12	30	

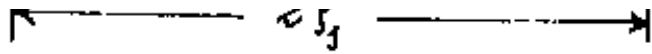
Vedremo come queste caratteristiche permettono la formazione di solidi, (regolari o no), combinando

le parti di solidi regolari, e quali sono i moduli per paragonarli.

Questo argomento è importantissimo per lo studio della costituzione dei cristalli ("La geometria chimica, l'ha inventata la Natura prima, molto prima, dell'uomo"). L'argomento è affascinante.

Facciamo le proiezioni del nostro icosaedro, ci aiuteranno a trovare le correlazioni fra i vari elementi che lo costituiscono.

costruito in prima proiezione il pentagono di lato ℓ (con ℓ = spigolo dell'icosaedro); in prima proiezione gli spigoli come: $\overline{1-3}$; $\overline{3-5}$; $\overline{5-7}$; $\overline{7-9}$; $\overline{9-1}$; $\overline{2-4}$; $\overline{4-6}$; $\overline{6-8}$; $\overline{8-10}$; $\overline{10-2}$; si proiettano in vera grandezza, è facile com-

$\leftarrow \approx S_1 \rightarrow$

pletare la prima proiezione.

Per la II° proiezione basta ribaltare, in prima proiezione, un triangolo come quello di ipotenusa $\overline{3\text{-}12} = l$ che si proietta accostato, per trovare l'altezza del vertice 12 sul piano dei vertici dispari. (R_p raggio del cerchio circoscritto al pentagono).

l 12 3' h_1 R_p 12'

Queste osservazioni ci portano a considerare una: "Grandezza - modulo" comune a tutti i solidi e che ne rispecchi le composizioni delle forme nel continuo tridimensionale. Abbiamo già cercato di introdurre a questo problema che tratteremo. Ora completiamo l'icosaedro.

Il simbolismo dell'icosaedro.

l = spigolo dell'icosaedro

a_t = altezza faccia triangolare

R_p = raggio del cerchio circoscritto al pentagono proiezione = R

r_p = " " " inscritto " " "

R_{es} = " " " circoscritto all'esagono "

r_{es} = " " " inscritto " " "

ρ_1 = " della sfera circoscritta al solido icosaedro $= \frac{R}{2} + h_1$

$r_i = \frac{H}{2}$ = raggio " inscritta " " "

H = altezza del solido = (distanza di due facce parallele)

h_p = " altezza della figura pentagonale.

h_1 = distanza del vertice sul piano della figura pentagonale

d_p = diagonale pentagono = d. esagono.

g_1 ; g_2 ; g_3 ; g_4 ; g_5 = distanza fra i centri faccia.

y_1 ; y_2 , y_3 , y_4 , y_5 = [illegible]

Sl = superficie laterale

V = volume.

Usando le relazioni trovate per il dodecaedro è stato facile calcolare: g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 per l'icosaedro.

$$g_1 = \frac{\ell}{6}(\sqrt{5}+1) = (0,539344663)\,\ell$$

$$g_2 = \frac{\ell}{6}(3+\sqrt{5}) = (0,872677996)\,\ell$$

$$g_3 = \frac{\ell}{3}\,\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = (1,234153058)\,\ell \quad = g_2\sqrt{2}$$

$$g_4 = \frac{\ell}{3}(2+\sqrt{5}) = (1,412022659)\,\ell$$

$$g_5 = \frac{\ell}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) = (1,511522628)\,\ell \quad = H = \text{altezza dell'icosaedro} = 2r_i$$

Il confronto ci avverte che, il simbolismo che noi abbiamo adottato per i solidi regolari, anche se pratico, non è in linea con gli scopi di questi studi. Noi infatti abbiamo sempre indicato con "ℓ" il lato delle facce dei solidi, con ρ_s e r_i rispettivamente i raggi delle sfere circoscritte o inscritte nei solidi, con d le diagonali,

circoscritte o inscritte nei solidi, con d le diagonali,
con g le distanze dei centri facce. Ma la nostra indagine ci ha portato ad una visione d'insieme, con correlazioni fra gli elementi dei vari solidi, (per esempio lo spigolo del tetraedro è la diagonale sia della faccia del cubo sia della faccia del rombododecaedro; lo spigolo dell'ottaedro, se posto uguale a quello del tetraedro ha le semidiagonali interne pari allo spigolo del cubo, ecc.)

in vera grandezza, e poichè i centri delle facce dividono le apoteme in due parti: $\left(\frac{1}{3} \text{ e } \frac{2}{3}\right)$; dato che il triaugolo $(1-(2\equiv10)-11)$ in terza proiezione è isoscele, avremo:

distanza dei centri di due facce adiacenti $= g_1 = \frac{d_e}{3} =$

$$\boxed{g_1 = \frac{\ell}{6}(\sqrt{5}+1)} = \underline{\ell(0{,}53934663)}$$

Consideriamo nel I disegno, in prima proiezione i centri delle tre facce consecutive: 5-12-7; 7-12-9; 9-12-1; possiamo scrivere la proporzione:

$$g_1 : \ell = g_2 : d_p \qquad g_2 = \frac{d_p^2}{3\ell}$$

$$g_2 = \frac{\ell^2(6+2\sqrt{5})4}{3\ell} \qquad \boxed{g_2 = \frac{\ell}{6}(3+\sqrt{5})} = \underline{\ell(0{,}87267800)}$$

Si noti che i centri faccia <u>dell'icosaedro di lato ℓ</u>, sono i vertici di un <u>dodecaedro di lato g_1</u>, perciò le distanze fra i centri faccia dell'icosaedro corrispondono alle distanze fra i vertici del dodecaedro.

Le distanze fra i vertici del dodecaedro sono:

Le distanze fra i vertici del dodecaedro sono:

elementi del dodecaedro di lato l		distanza facce icosaedro		valori espressi in funzione del lato l dell'icosaedro
$l = l$	$\rightarrow$	g_1	$=$	$g_1 = \frac{l}{6}(\sqrt{5}+1)$
$d_p = l\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$	$\rightarrow$	g_2	$=$	$g_2 = g_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \frac{l}{6}(3+\sqrt{5})$
$d_1 = l\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)$	$\rightarrow$	g_3	$=$	$g_3 = g_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{l}{3}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$
$d_2 = l\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\rightarrow$	g_4	$=$	$g_4 = g\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{l}{3}(2+\sqrt{5})$
$d_3 = l\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\sqrt{3}$	$\rightarrow$	g_5	$=$	$g_5 = g_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\sqrt{3} = \frac{l}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) = 2r_i$

Angolo diedro fra le facce della piramide (angoloide triedro: $\hat{D} = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right)$; ove φ = angolo al vertice delle facce della piramide: $\frac{\ell/2}{\rho_1} = \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \frac{\ell/2}{\frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}$

$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5}{20}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$; $\varphi/2 = 31°\,43'\,2'',91$

$\varphi = 63°\,26'\,5'',82$. (angolo al vertice facce piramidali)

$\hat{D} = 2\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}}\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)$

$\boxed{\hat{D} = 72°.=}$ = angolo diedro fra le facce piramidali

apotema delle facce piramidali $= h_e = \sqrt{\rho_1^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} =$

$h_e = \sqrt{\frac{\ell^2}{4}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\ell^2}{4}} = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \boxed{h_e = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\ell}$

$h_e = (0{,}80901699{4})\ell$; area faccia piramide $= \frac{\ell h_e}{2} = \frac{\ell^2(\sqrt{5}+1)}{8}$;

altezza relativa al lato obliquo $= h_3 = \frac{2\,\text{Area}}{\rho_1} = \frac{\ell^2(\sqrt{5}+1)/4}{\ell\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}/2} =$

$h_3 = \frac{\ell}{2}\,\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5-\sqrt{5}})}{\sqrt{10}} = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{5}} = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}} = \boxed{h_3 = \ell\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}}$

Si noti che l'angolo diedro fra le facce delle piramidi (triedri angoloidi) di: $72° = \frac{1}{5}360°$, ci dice che ogni lato obliquo(ρ_1) delle facce piramidali è asse di un fascio di 5 piani angolarmente equidistanti, per

un fascio di 5 piani angolarmente equidistanti, per cui proiettando il solido su un piano perpendicolare a tale asse, i contigui lati obliqui termineranno ai vertici di un pentagono (vedi proiezioni).

Calcoliamo ora le distanze fra i centri delle facce dell'icosaedro. Poiché in terza proiezione le apoteme delle facce dell'icosaedro ($\frac{\ell}{2}\sqrt{3}$) si proiettano

abbiamo: $\left(\rho_1 = h_1 + \frac{R_p}{2}\right)$; $h_1 = R_p\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; $\rho_1 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{2}\right)R_p$

$$\boxed{\rho_1 = R_p\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$$

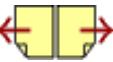
$$\rho_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \ell \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2 \cdot 5}} = \boxed{\rho_1 = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = (0,9510565146)\,\ell$$

Il raggio della sfera inscritta è anche altezza delle piramidi che hanno per base le facce e per vertice il centro sfera. Perciò essendo l'area di una faccia: $A_1 = \frac{\ell^2}{4}\sqrt{3}$, l'area laterale totale dell'icosaedro sarà:

$$S\ell = \frac{20\ell^2}{4}\sqrt{3} \; ; \; \boxed{S\ell = (5\sqrt{3})\,\ell^2}.$$

Il volume di una tale piramide sarà: $V_1 = \frac{A_1 \cdot H/2}{3}$

cioè il volume dell'icosaedro sarà:

$$V = 20 \cdot \frac{\ell^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\sqrt{3}\,\ell^2 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} =$$

$$\boxed{V = \frac{5}{12}\ell^3(3+\sqrt{5})} = (2,181694991)\,\ell^3$$

Lo spazio angolare delimitato dai triedri laterali delle piramidi è: $\frac{1}{20} 4\pi = \boxed{\frac{\pi}{5} \text{ stereoradianti}}$

L'angolo diedro fra le facce dell'icosaedro si

α angolo diedro fra le facce dell'icosaedro si proietta in vera grandezza nella nuova seconda proiezione. (si è indicato con α) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\frac{l}{3}\sqrt{3}}{\frac{l}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{cases} 41^\circ\ 48'\ 37'' \ \text{(non vale)} \\ 138^\circ\ 11'\ 23'' = 2{,}4186 \ \text{rad.} \end{cases}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 138^\circ\ 11'\ 22'',8$$

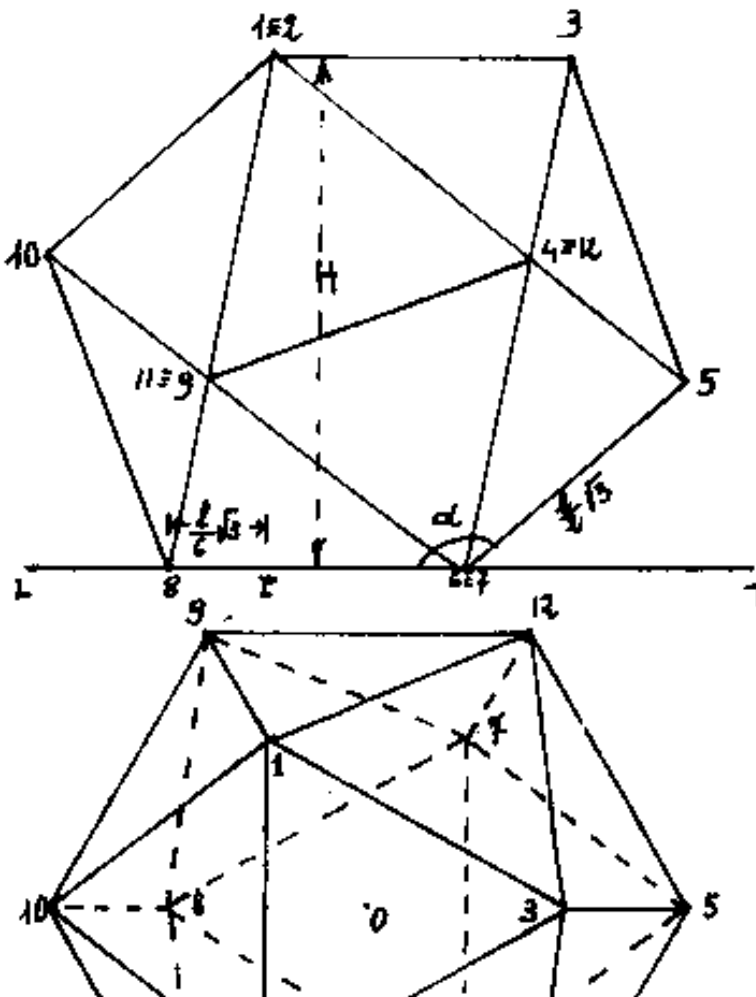
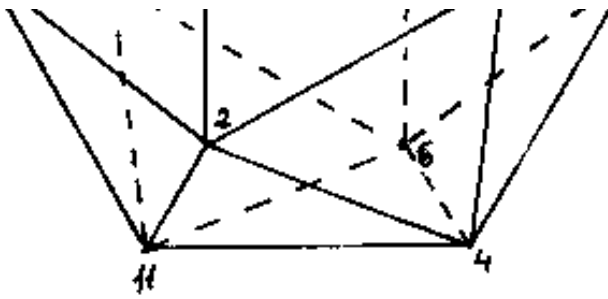
$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 138^\circ\ 11'\ 22'',8$$

Raggio del cerchio inscritto nel pentagono $r_p = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$

Diagonale del pentagono (e dell'esagono) $d_p = \ell\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

Raggio del cerchio circoscritto all'esagono $R_{es} = d_p/\sqrt{3}$

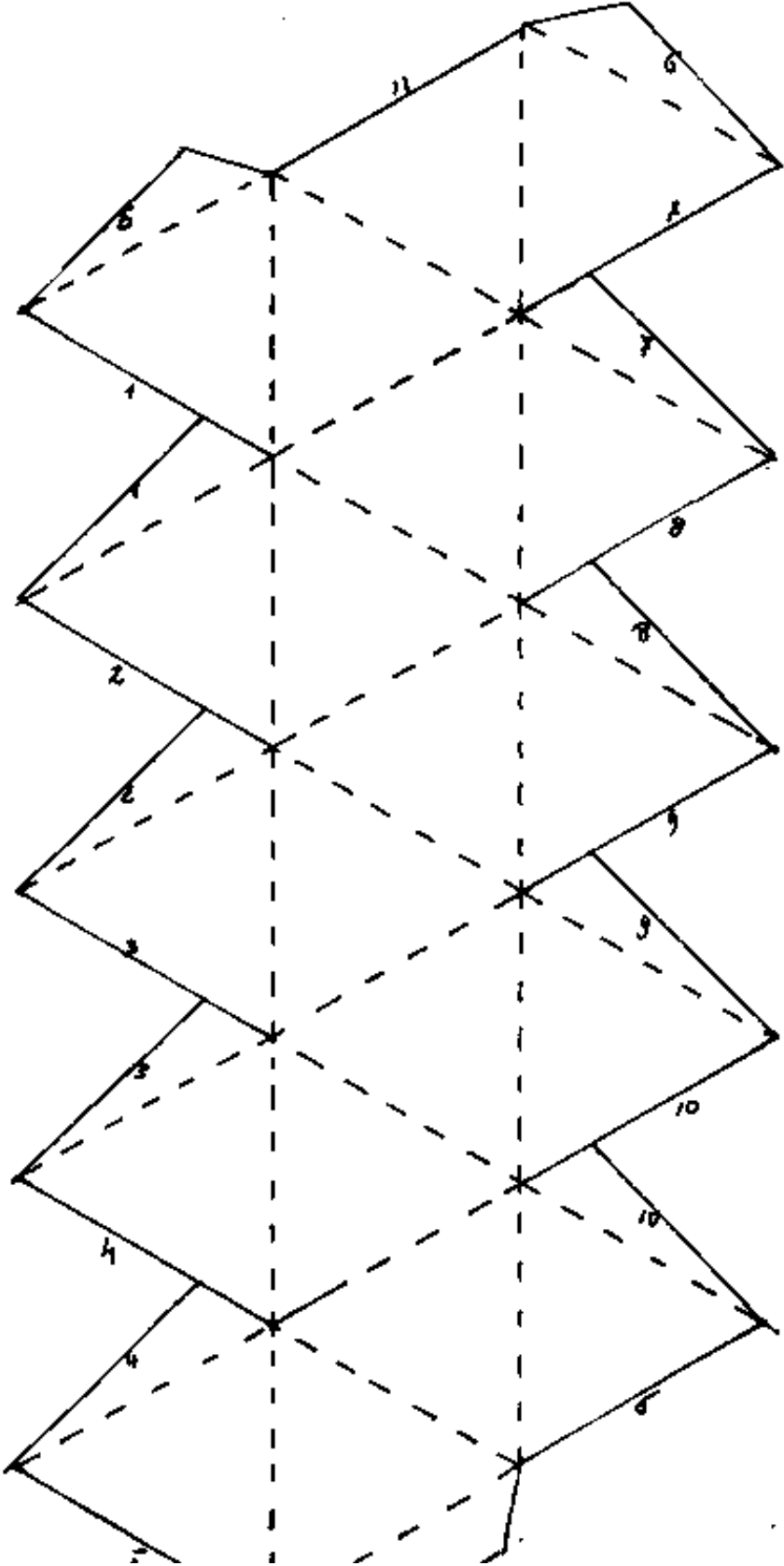
$$R_{es} = \frac{\ell}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Si noti che l'altezza h_p del pentagono 1-2-11-8-9 si proietta in vera grandezza, in seconda proiezione nel segmento: $\overline{8-(1\equiv2)}$; che la prima proiezione di tale segmento è $\frac{1}{3}$ dell'apotema della faccia triangolare, cioè: $\frac{\ell}{6}\sqrt{3}$. Quindi dal triangolo rettangolo (in seconda proiezione) (8-P-(1≡2)) si ha: $h_p^2 - \left(\frac{\ell}{6}\sqrt{3}\right)^2 = H^2$, e poiché $h_p = \frac{\ell}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ abbiamo:

$$H = \frac{l}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}-\frac{1}{3}} = \frac{l}{\sqrt{6}}\sqrt{7+3\sqrt{5}} =$$

$$H = \frac{l}{2\sqrt{3}}(3+\sqrt{5}) = \frac{l}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\boxed{H = (1{,}511522638)\,l}$$

come avevamo già calcolato.

Il raggio della sfera inscritta nell'icosaedro è: $\left(\frac{H}{2}\right)$; il raggio della sfera circoscritta all'icosaedro $= \rho_1 = \frac{1}{2}(h_1 + R_p + h_1)$ ove sostituendo

Schema dell'icosaedro

Come si vede lo schema dell'icosaedro è molto semplice trattandosi di facce triangolari equilatere.

Si noti che somiglia a cinque schemi di tetraedro affiancati.

E' facile costruire lo schema se è noto il lato, quindi se vogliamo una particolare misura, basta consultare la tabella delle relazioni fra gli elementi dell'icosaedro.

Tagliare lungo le linee intere, incidere per poter piegare, lungo le linee tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli omonimi.—

Schema dell'icosaedro

Come si vede lo schema del=
l'icosaedro è molto semplice
trattandosi di facce tri=
angolari equilatere.
Si noti che somiglia
a cinque schemi di te=
traedro affiancati.
È facile costruire lo
schema se è noto il
lato, quindi se vogliamo=
mo una particolare mi=
sura, basta consultare
la tabella delle relazio=
ni fra gli elementi del=
l'icosaedro.

Tagliare lungo le linee intere, incidere per poter piegare, lungo le linee tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli omonimi.—

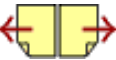
Gli angoli dei corpi solidi

Ogni solido, comunque irregolare, delimitato da facce piane, spigoli rettilinei, e vertici, ammette la misura "esterna" degli angoli diedri. Se la costituzione del solido è tale da ammettere sfaldamenti secondo i piani paralleli alle facce, gli angoli diedri fra le facce non mutano. Se sfaldandosi, una faccia o più facce scompariscono, diventano adiacenti facce che prima non lo erano e formeranno un angolo diverso con le facce adiacenti, ma invariato nelle primitive direzioni.

Noi considereremo le <u>giaciture</u> dei piani paralleli, intendendo per <u>giacitura</u> la direzione delle rette normali all'insieme di piani paralleli. Chiameremo <u>retta di giacitura</u> quella normale che passa per il centro assi del sistema di riferimento

ferimento.

L'angolo diedro fra due piani è <u>supplementare</u> dell'angolo fra le rispettive giaciture.

Poiché i <u>solidi regolari</u> ammettono un centro, (centro della sfera inscritta e circoscritta), considereremo le rette di giacitura delle facce, contenenti i raggi della sfera inscritta, cioè i segmenti che dal

centro del solido vanno al centro faccia. Indicheremo con $g_1, g_2, \ldots g_n$; le distanze fra i centri delle facce, avremo, indicando con r_i il raggio della sfera inscritta, che l'angolo fra le giaciture è dato da: $\gamma_n = 2 \arcsin\left(\frac{g_n}{2 r_i}\right)$
e vale anche per il supplementare angolo diedro.

Consideriamo ora i raggi della sfera circoscritta ai solidi regolari, che vanno dal centro ai vertici delle facce (vertici del solido), costituendo tante piramidi, quante sono le facce, aventi per base le facce stesse e per vertice comune il centro sfera. Gli angoloidi poliedri costituenti le facce laterali di tali piramidi, delimitano un angolo solido pari a: $\frac{4\pi}{n}$ (stereoradianti) ove n è il numero delle facce del solido.

Le facce delle piramidi uscenti dal centro sono triangoli isosceli, aventi per base uno spigolo del solido (lato di una faccia), e per lati obliqui i raggi della sfera circoscritta.

i raggi della sfera circoscritta.

Poiché ogni raggio che esce dal centro sfera e va nel vertice del solido è asse di tanti piani (facce laterali di piramidi) quante sono le "n" facce del solido che convergono in quel vertice, avremo che l'angolo diedro fra le facce laterali di una di tali piramidi è $\hat{D}_{er} = \frac{1}{n} 2\pi$ rad.

Noi considereremo anche i triangoli isosceli aventi per lati obliqui i raggi della sfera circoscritta col aventi per base tutte le possibili diagonali congiungenti due vertici del solido.

Ciò premesso, noi considereremo gli angoli al vertice (ω) ed alla base: $\frac{1}{2}(180-\omega)$ di tali triangoli, ed anche gli angoli diedri sia sui raggi della sfera, sia sia sul segmento congiungente due vertici per il diedro fra la faccia e la base delle piramidi, nonché l'angolo diedro fra le facce del solido (supplementare all'angolo fra le giaciture), e gli angoli sulle facce del solido stesso.

Per le correlazioni fra gli elementi dei triangoli sferici individuati dai raggi, vedasi trigonometria sferica. Per le aree dei triangoli sferici e la conseguente determinazione dell'angolo

solido dell'angoloide poliedro costituito dalle facce laterali delle piramidi uscenti dal centro sfera, o dai vertici del solido, vedasi il capitolo: "area dei triangoli sferici" posto in fine alla trattazione dell'ottaedro.

Distanze fra i centri delle facce (g), angoli fra le giaciture (γ), angoli diedri fra le facce. ($180-\gamma$)

Tetraedro ($r_i = \frac{l}{2\sqrt{6}}$)

$g_1 = l/3$; $\gamma_1 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} = \arccos(-\frac{1}{3})$

angolo fra le giaciture $= \gamma_1 = 109°\ 28'\ 16'',39 = 1,910633236$ rad.

diedro $(180° - \gamma_1) = 70°\ 31'\ 43'',61 = 1,230959417$ rad.

Cubo ($r_i = l/2$)

$g_1 = \frac{l}{2}\sqrt{2}$; $\gamma_1 = 2 \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \arccos(0)$

angolo fra le giaciture $= \gamma_1 = 90° = \pi/2$ rad. $= 1,570796327$ rad.

diedro $180° - \gamma_1 = 90°$

$g_2 = l$; $\gamma_2 = 180°$

angolo fra le giaciture $= \gamma_2 = 180° = \pi$ rad $= 3,141592654$ rad

diedro $(180 - \gamma_1) = 0$

ottaedro ($r_i = \frac{l}{\sqrt{6}}$)

$g_1 = \frac{l}{3}\sqrt{2}$; $\gamma_1 = 2 \arcsin(\sqrt{\frac{1}{3}}) = \arccos(\frac{1}{3})$

$g_1 = \frac{\ell}{3}\sqrt{2}$; $\gamma_1 = 2 \arcsen\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

angolo fra le giaciture $= \gamma_1 =$ 70° 31' 43",61 = 1,230959417 rad

diedro $(180 - \gamma_1)$ = 109° 28' 16",39 = 1,910633236 rad

$g_2 = \frac{2}{3}\ell$; $\gamma_2 = 2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

angolo fra le giaciture $= \gamma_2 =$ 109° 28' 16",39 = 1,910633236 rad

diedro $(180° - \gamma_2)$ = 70° 31' 43",61 = 1,230959417 rad

---

dodecaedro $\left(r_i = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\right)$

$g_1 = \ell\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)$; $\gamma_1 = 2\,\text{arcsen}\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right) = \text{arctg}(2)$

angolo fra le giaciture: $\gamma_1 = 63°\,26'\,05'',82 = 1,107148718$ rad

diedro $(180° - \gamma_1) = 116°\,33'\,54'',18 = 2,034443936$ rad

$g_2 = \ell\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)$; $\gamma_2 = 2\,\text{arcsen}\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) = \text{arccos}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

angolo fra le giaciture: $\gamma_2 = 116°\,33'\,54'',18 = 2,034443936$ rad.

diedro $(180° - \gamma_2) = 63°\,26'\,05'',82 = 1,107148718$ rad.

$g_3 = \ell = H = 2r_i$; $\gamma_3 = 2\,\text{arcsen}(1)$

angolo fra le giaciture: $\gamma_3 = 180° = \pi$ rad $= 3,14159265358$ rad

diedro $(180° - \gamma_3) = 0$

Icosaedro $\left(r_i = \ell\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right)$

$g_1 = \ell\left(\frac{\sqrt{5}+1}{6}\right)$; $\gamma_1 = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right)$

angolo fra le giaciture: $\gamma_1 = 41°\,48'\,37'',13 = 0,729727656$ rad.

diedro $(180° - \gamma_1) = 138°\,11'\,22'',87 = 2,411864997$ rad

$g_2 = \ell\left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)$; $\gamma_1 = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \text{arccos}\left(\frac{1}{3}\right)$

angolo fra le giaciture: $\gamma_2 = 70°\,31'\,43'',61 = 1,230959417$ rad

diedro $(180° - \gamma_2) = 109°\,28'\,16'',39 = 1,910633236$ rad

$g_3 = \ell\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}\right)$; $\gamma_3 = 2\,\text{arcsen}\sqrt{\frac{2}{3}} = \text{arccos}\left(-\frac{1}{3}\right)$

$g_3 = l\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}\right)$; $\gamma_3 = 2 \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{2}{3}} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

angolo fra le giaciture : $\gamma_3 = 109°28'16'',39 = 1{,}910633236$ rad.

diedro $(180° - \gamma_3) = 70°31'43'',61 = 1{,}230959417$ rad.

$g_4 = l\left(\frac{2+\sqrt{5}}{3}\right)$; $\gamma_4 = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

angolo fra le giaciture : $\gamma_4 = 138°11'22'',87 = 2{,}411864997$ rad.

diedro $= (180° - \gamma_4) = 41°48'37'',13 = 0{,}729727656$ rad

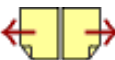
$g_5 = l\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right) = R = 2r_i$; $\gamma_5 = 2 \operatorname{arcsen}(1)$

angolo fra le giaciture : $\gamma_5 = 180° = \pi_{rad} = 3{,}1415926535$ rad

diedro $= (180° - \gamma_5) = 0$

Prospetto riepilogativo angoli nei solidi regolari

	ANGOLI	Tetraedro	cubo	ottaedro	dodecaedro	icosaedro
sulle facce	fra lati adiacenti	60°	90°	60°	108°	60°
	fra lato e d_1	—	45°	—	36°	—
	fra lato e d_2	—	—	—	72°	—
diedri fra facce (giaciture)	adiacenti su (g_1) D_1 (γ_1)	70° 31' 43",61 (109° 28' 16",39)	90° (90°)	109° 38' 16,39 (70° 31' 43",61)	116° 33' 54" (63° 26' 06")	138° 11' 23" (41° 48' 37")
	" (g_2) D_2 (γ_2)	—	0 (180°)	70° 31' 43",61 (109° 28' 16",39)	63° 26' 06" (116° 33' 54")	109° 28' 16",39 (70° 31' 43",61)
	" (g_3) D_3 (γ_3)	—	—	0 (180°)	0 (180°)	70° 31' 43",61 (109° 28' 16",39)
	" (g_4) D_4 (γ_4)	—	—	—	—	41° 48' 37" (138° 11' 23")
	" (g_5) D_5 (γ_5)	—	—	—	—	0 (180°)
angoli piani fra le direzioni dal centro ai vertici del solido (ed angoli fra direzioni e base)	su l - ω_1 β_1	109° 28' 16",39 (35° 15' 52")	70° 31' 43",61 (54° 44' 08")	90° (45°)	41° 48' 37" (69° 05' 41")	63° 26' 06" (58° 16' 57")
	" d_f - ω_2 β_2	—	109° 28' 16" (35° 15' 52")	—	70° 31' 43",61 (54° 44' 08")	—
	" d_1 - ω_3 β_3		180° (0)	180° (0)	109° 28' 16",39 (35° 15' 51",8)	116° 33' 54" (31° 43' 03")
	" d_2 - ω_4 β_4	—	—	—	138° 11' 23" (20° 54' 18")	180° (0)
	" d_3 - ω_5 β_5	—	—	—	180° (0)	—
[illegible] le facce [illegible]	μ_1	70° 31' 43",61	54° 44' 08"	54° 44' 08"	37° 22' 39"	37° 22' 39"

angoli piani fra direzioni-centro facce e direzioni-vertici	$\mu/1$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	$\mu/2$	180°	125° 15' 52"	125° 15' 52"	142° 37' 21"	142° 37' 21"
	$\mu/3$	—	—	—	79° 11' 16"	100° 48' 44"
	$\mu/4$	—	—	—	100° 48' 44"	79° 11' 16"
angoli diedri fra le facce dei poliedri angoloidi e (fra base e faccia)		120° (35° 15' 52")	120° (45°)	90° (54° 44' 08")	120° (58° 16' 57")	72° (69° 05' 42")

Angoli piani (μ) fra il raggio della sfera inscritta che va al centro faccia (rette di giacitura delle facce), ed il raggio della sfera circoscritta che collega il centro coi vertici del solido. $\mu = \arccos\left(\frac{r_i}{\rho_i}\right)$

Tetraedro: per tre vertici: $\mu_1 = \arccos \frac{\ell\sqrt{6}/12}{\ell\sqrt{6}/4} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70°\,31'\,44''$

per un vertice $\mu_2 = 180°$

Cubo

per 4 vertici: $\mu_1 = \arccos\left(\frac{\ell/2}{\frac{\ell}{2}\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \underline{54°\,44'\,08''}$

per 4 vertici: $\mu_2 = (180° - \mu_1) = \underline{125°\,15'\,52''}$

Ottaedro

per tre vertici $\mu_1 = \arccos\left(\frac{\ell/\sqrt{6}}{\ell/\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \underline{54°\,44'\,08''}$

per tre vertici $\mu_2 = (180° - \mu_1) = \underline{125°\,15'\,52''}$

dodecaedro

per 5 vertici $\mu_1 = \arccos\left(\frac{\frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}{\frac{\ell}{4}(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) = \underline{37°\,22'\,39''}$

per 5 vertici $\mu_2 = (180° - \mu_1) = \underline{142°\,37'\,21''}$

per 5 vertici $\mu_3 = \mu_1 + \omega_1 = 37°\,22'\,39'' + 41°\,48'\,37'' = \underline{79°\,11'\,16''}$

per 5 vertici $\mu_4 = (180° - \mu_3) = 100°\,48'\,44''$

Icosaedro

per 3 vertici $\mu_1 = \arccos \dfrac{\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})/\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}/\sqrt{2}} = \arccos\left(\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) = 37°22'39''$

per 3 vertici $\mu_2 = (180° - \mu_1) = 142°37'21''$

per 3 vertici $\mu_3 = \mu_1 + \omega_1 = 37°22'39'' + 63°26'06'' = 100°48'44''$ out.

per 3 vertici $\mu_4 = (180° - \mu_3) = 79°11'16''$

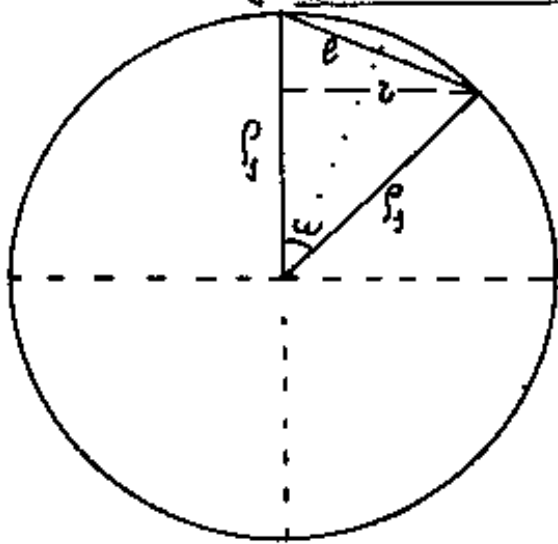
quadro riepilogativo dei solidi regolari

Elementi caratteristici	Simbolo	TETRAEDRO	CUBO	OTTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
Facce + Vertici = spigoli + 2	F+V=S+2	4 + 4 = 6 + 2	6 + 8 = 12 + 2	8 + 6 = 12 + 2	12 + 20 = 30 + 2	20 + 12 = 30 + 2
spigoli	l_1	$= \rho_1 \cdot 4/\sqrt{6}$ 1.63299316 $\cdot \rho_1$	$= \rho_1 \cdot 2/\sqrt{3}$ 1.15470054 ρ_1	$= \rho_1 \cdot \sqrt{2}$ 1.41421356 ρ_1	$= \rho_1 (\sqrt{5}-1)/\sqrt{3}$ 0.71364418 ρ_1	$= \rho_1 \sqrt{(10-2\sqrt{5})/5}$ 1.05146222 $\cdot \rho_1$
apotema di una faccia = $\overline{TM}$ =	a	$= \rho_1 \cdot \sqrt{2}/3$ 0.47140452 ρ_1	$= \rho_1 / \sqrt{3}$ 0.57735027 ρ_1	$= \rho_1 / \sqrt{6}$ 0.40824829 $\cdot \rho_1$	$= \rho_1 \sqrt{(5+\sqrt{5})/30}$ 0.49112347 $\cdot \rho_1$	$= \rho_1 \sqrt{(5-\sqrt{5})/30}$ 0.30353100 $\cdot \rho_1$
altezza di una faccia	h_f	$= \rho_1 \cdot \sqrt{2}$ 1.41421356 $\cdot \rho_1$	$= \rho_1 \cdot 2/\sqrt{3}$ 1.15470054 ρ_1	$= \rho_1 \cdot \sqrt{6}/2$ 1.22474487 $\cdot \rho_1$	$= \rho_1 \sqrt{(5+\sqrt{5})/6}$ 1.09818547 $\cdot \rho_1$	$= \rho_1 \sqrt{(15-3\sqrt{5})/10}$ 0.91059300 ρ_1
altezza del solido	H	$= \rho_1 \cdot 4/3$ 1.33333333 $\cdot \rho_1$	$= \rho_1 \, 2/\sqrt{3}$ 1.15470054 ρ_1	$= \rho_1 \cdot 2$ 2.00000000 ρ_1	$= \rho_1 2\sqrt{(5+2\sqrt{5})/15}$ 1.58930895 ρ_1	$= \rho_1 2\sqrt{(5+2\sqrt{5})/15}$ 1.58930895 ρ_1
distanza spigoli dal centro	$\overline{OM}$	$= \rho_1 / \sqrt{3}$ 0.57735027 ρ_1	$= \rho_1 \sqrt{2/3}$ 0.81649658 ρ_1	$= \rho_1 / \sqrt{2}$ 0.70710678 ρ_1	$= \rho_1 (\sqrt{5}+1)/2\sqrt{3}$ 0.93417236 ρ_1	$= \rho_1 \sqrt{(5+\sqrt{5})/10}$ 0.85065081 ρ_1
raggio sfera inscritta = $\overline{OT}$ =	r_i	$= \rho_1 / 3$ 0.33333333 ρ_1	$= \rho_1 / \sqrt{3}$ 0.57735027 ρ_1	$= \rho_1 / \sqrt{3}$ 0.57735027 ρ_1	$= \rho_1 \sqrt{(5+2\sqrt{5})/15}$ 0.79465447 ρ_1	$= \rho_1 \sqrt{(5+2\sqrt{5})/15}$ 0.79465447 ρ_1
distanza centri facce adiacenti	g_1	$= \rho_1 \cdot 2\sqrt{6}/9$ 0.54433105 ρ_1	$= \rho_1 \sqrt{2/3}$ 0.81649658 ρ_1	$= \rho_1 / 2$ 0.50000000 ρ_1	$= \rho_1 \sqrt{5}(\sqrt{5}+5)/15$ 0.83554916 ρ_1	$= \rho_1 (\sqrt{5+2\sqrt{5}})/6$ 0.51294786 ρ_1
freccia dei raggi ai centro spigoli	$\overline{MP}$	$= \rho_1 (1 - 1/\sqrt{3})$ 0.42264973 $\cdot \rho_1$	$= \rho_1 (1 - \sqrt{2/3})$ 0.18350342 ρ_1	$= \rho_1 (1 - 1/\sqrt{2})$ 0.29289321 ρ_1	$= \rho_1 (1 - (\sqrt{5}+1)/2\sqrt{3})$ 0.06582764 ρ_1	$= \rho_1 (1 - \sqrt{(5+\sqrt{5})/10})$ 0.14934919 $\cdot \rho_1$
freccia dei raggi ai centro faccia (r) $(\rho_1 - r_i) = a$	$\overline{Ta}$	$= \rho_1 (2/3)$ 0.66666666 ρ_1	$= \rho_1 (1 - 1/\sqrt{3})$ 0.42264973 ρ_1	$= \rho_1 (1 - 1/\sqrt{3})$ 0.42264973 ρ_1	$= \rho_1 (1 - \sqrt{(5+2\sqrt{5})/15})$ 0.20534552 ρ_1	$= \rho_1 (1 - \sqrt{(5+2\sqrt{5})/15})$ 0.20534552 ρ_1
angolo diedro facce adiacenti	⌐	= 70° 31' 44"	90°	109° 28' 16"	116° 33' 54"	138° 11' 23"
angolo fra raggi di vertici adiacenti	⌐	= 109° 28' 16"	70° 31' 44"	90°	41° 48' 37"	63° 26' 06"
angolo fra raggi vertice-centrofaccia	⌐	= 70° 31' 44"	54° 44' 08"	54° 44' 08"	37° 22' 39"	37° 22' 39"

I solidi derivati e le principali forme cristallografiche

Abbiamo già dimostrato che i solidi regolari sono solo cinque e non possono essere più di cinque. Per definizione i solidi regolari hanno facce che sono poligoni regolari; il che implica che gli spigoli siano tutti uguali fra loro, e che gli angoli fra spigoli adiacenti uscenti da uno stesso vertice siano uguali fra loro. Sempre per definizione gli angoloidi (angoli solidi) sono uguali fra loro.

I solidi regolari sono quindi inscrittibili in una sfera e circoscrivono un'altra sfera concentrica

Impostiamo matematicamente il problema in generale. Sia ρ_1 il raggio della sfera circoscritta, sia l lo spigolo del solido, sia r il raggio del cerchio, sezione della sfera circoscritta, sul quale terminano gli spigoli uscenti da uno stesso vertice, (cioè il cerchio dei vertici adiacenti.)

$$\omega = 2 \arcsen \left(\frac{\ell/2}{\rho_1} \right)$$

$$\cos \omega/2 = \cos \arcsen \left(\ell/2\rho_1 \right) = \frac{1}{\rho_1} \sqrt{\rho_1^2 - (\ell/2)^2}$$

$$\sen \omega/2 = \left(\ell/2\rho_1 \right)$$

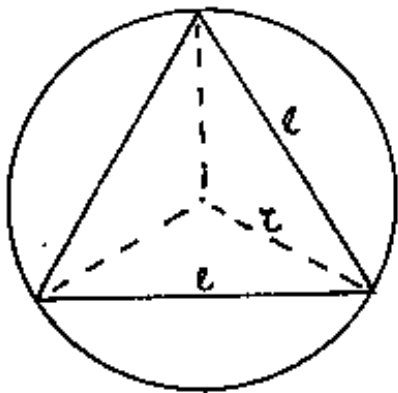
$$\sen \omega = 2 \sen \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} = \frac{\ell}{\rho_1^2} \sqrt{\rho_1^2 - (\ell/2)^2}$$

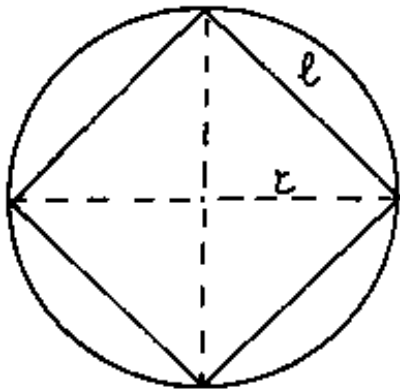
$$r = \rho_1 \sen \omega = \boxed{r = \frac{\ell}{\rho_1} \sqrt{\rho_1^2 - (\ell/2)^2}}$$

Nella circonferenza di raggio r possiamo inscrivere dei poligoni regolari. (Un vertice è il centro del cerchio)

Se inscriviamo un triangolo di lato ℓ si ha:

$$r = \frac{\ell}{\sqrt{3}} = \frac{\ell}{\rho_1}\sqrt{\rho_1^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} \quad \text{da cui:}$$

$$\boxed{\ell = 2\rho_1\sqrt{2/3}}$$

abbiamo calcolato che ciò si verifica per il tetraedro (se il lato del triangolo è $\ell\sqrt{2}$, si ha il cubo; se è $dp = \frac{\ell}{2}(\sqrt{5}+1)$ si ha il dodecaedro

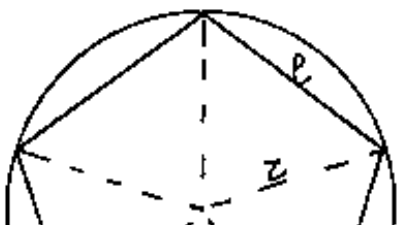
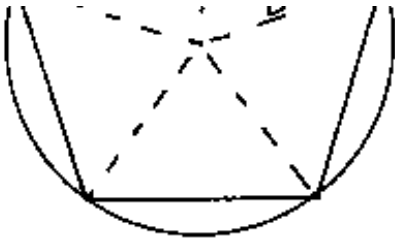
Se nel cerchio inscriviamo un quadrato di lato ℓ si ha: $r = \frac{\ell}{\sqrt{2}} = \frac{\ell}{\rho_1}\sqrt{\rho_1^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$

$$\rho_1 = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \qquad \boxed{\ell = \rho_1\sqrt{2}} \qquad \text{e questo}$$

si verifica per l'ottaedro.

Se nel cerchio inscriviamo un pentagono di lato ℓ abbiamo:

$$r = \ell\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \frac{\ell}{\rho_1}\sqrt{\rho_1^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$$

1 10 . ρ_1 (2)

$$(5+\sqrt{5})\rho_1^2 = 10\rho_1^2 - \frac{5}{2}\ell^2$$

$$\boxed{\ell = \rho_1 \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}$$

ciò vale per l'icosaedro

Se inscriviamo un esagono di lato ℓ avremmo:

$z = \ell = \frac{\ell}{\rho_1}\sqrt{\rho_1^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$; $\rho_1^2 = \rho_1^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ impossibile! vale solo per $\ell = 0$

Quindi solidi <u>convessi</u> inscrittibili in una sfera, aventi le facce triangoli equilateri sono solo tre: il <u>tetraedro</u>, <u>l'ottaedro</u>, <u>l'icosaedro</u>.

Consideriamo ora che agli estremi opposti dei tre spigoli uscenti da un vertice, vi sia una diagonale di faccia. Se la faccia è un quadrato, la diagonale è $\ell\sqrt{2}$ da cui $r = \frac{1}{\sqrt{3}}(\ell\sqrt{2}) = \frac{\ell}{\rho_1}\sqrt{\rho_1^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$ da cui: $\frac{2}{3}\rho_1^2 = \rho_1^2 - \frac{\ell^2}{4}$, $\Rightarrow$ $\boxed{\ell = 2\rho_1/\sqrt{3}}$ che si verifica per il <u>cubo</u>.

Se gli spigoli uscenti da un vertice sono 4 si ha: $r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ell\sqrt{2})$, cioè $r = \ell$ (che abbiamo riscontrato <u>impossibile</u>).

Consideriamo ora che agli estremi opposti dei tre spigoli uscenti da un vertice vi sia la diagonale di un pentagono $d_p = \frac{\ell}{2}(\sqrt{5}+1)$ da cui $r = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\ell}{2}(\sqrt{5}+1)\right) = \frac{\ell}{\rho_1}\sqrt{\rho_1^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{6+2\sqrt{5}}{12}\rho_1^2 = \rho_1^2 - \frac{\ell^2}{4}$ $\Rightarrow$ $\ell = \rho_1\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3}}$; $\boxed{\ell = \rho_1\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}\right)}$ che vale per il <u>dodecaedro</u>

Se agli estremi dei tre spigoli c'è la diagonale minore dell'esagono $d_6 = \ell\sqrt{3}$; $r = \frac{1}{\sqrt{3}}(\ell\sqrt{3})$; $r = \ell$

le minore dell'esagono $d_4 = l\sqrt{3}$; $r = \frac{1}{\sqrt{3}}(l\sqrt{3})$; $r = l$

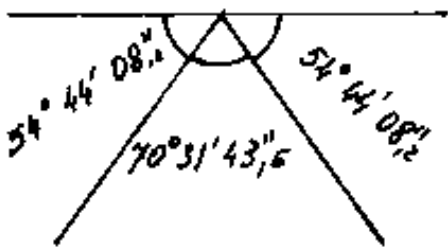
che abbiamo visto essere impossibile.

Quindi solidi convessi aventi gli spigoli tutti uguali ed inscrittibili in una sfera sono solo i solidi regolari

I solidi derivati inscrittibili e non inscrittibili in una sfera

Consideriamo un tetraedro inscritto in una sfera, prolunghiamo il segmento che unisce il centro della sfera con il centro della faccia del tetraedro fino ad incontrare la superficie sferica, e sia questo il vertice di una piramide che ha per base la faccia del tetraedro e per altezza: $(\rho_1 - r_i)$, ove ρ_1 ed r_i sono rispettivamente i raggi della sfera circoscritta ed inscritta nel tetraedro $\rho_1 = \frac{\ell}{4}\sqrt{6}$; $r_i = \frac{\ell}{12}\sqrt{6}$; $\boxed{(\rho_1 - r_i) = \frac{\ell}{\sqrt{6}}}$ detto ℓ_2 lo spigolo di queste piramidi abbiamo: $\ell_2^2 = \left(\frac{2}{3}\frac{\ell}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{\sqrt{6}}\right)^2 = \ell^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$ $\boxed{\ell_2 = \frac{\ell}{\sqrt{2}}}$ od anche: $\boxed{\ell = \ell_2\sqrt{2}}$ ciò implica che gli angoli al vertice, di queste piramidi, sono retti, e quindi queste piramidi aggiunte al tetraedro sono identiche alle porzioni di angoloide che costituiscono l'ottaedro. Ciò si è già visto, ed il solido che nasce è un cubo. Infatti i vertici del tetraedro

sono 4, i vertici che nascono dalle facce sono altri quattro, gli otto vertici sono equidistanti fra loro e dal centro sfera, o meglio gli spigoli a due a due formano angoli retti di cui lo spigolo del tetraedro è diagonale, cioè le facce sono quadrate.

L'angolo diedro fra la base e le facce di queste piramidi è: $\text{arctg}\left(\frac{S_1 - r_1}{\ell/6\sqrt{3}}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\ell/\sqrt{6}}{\ell\sqrt{3}/6}\right) = \text{arctg}\left(\frac{6}{3\sqrt{2}}\right) =$ $= \text{arctg}(\sqrt{2}) = 54°\,44'\,08'',2$; l'angolo diedro fra le facce del tetraedro è: $70°\,31'\,43'',6$, cosicché l'angolo fra le facce delle piramidi che hanno in comune alla base lo stesso spigolo del tetraedro sarà:

54° 44' 08",2 — 70°31'43",6 — 54° 44' 08",2

$$2(54°\,44'\,08'',2) + 70°\,31'\,43'',6 = 180°$$;

cioè le due facce sono allineate e formano una faccia quadrata del cubo.

Prima di proseguire ricordiamo il significato di alcuni termini. Il prefisso: "<u>Cis</u>", contrapposto al prefisso: "**trans**", significa: "**al di qua**"; mentre "trans" significa: "**al di là**". (per es. Cisalpina, transalpina).

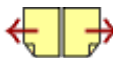
Nei solidi (riferendosi ad un solido regolare come base) si usa scrivere (per es.): "<u>triacistetraedro</u>" intendendo che: "<u>al di qua</u>" (al di sopra) delle facce del

intendendo che: "al di qua" (al di sopra) delle facce del tetraedro vi sono "tria" (tre facce); cioè il solido avrà: 4 x 3 = 12 facce. Analogamente il termine: "triacisottaedro" vuol dire che sopra le facce del=l'ottaedro si sono tre facce, cioè su ogni faccia vi è sovrapposta una piramide a base triangolare uguale alla faccia dell'ottaedro, ed il totale facce sarà: 3x8 = 24.

E' ovvio che questa terminologia è incompleta, perché le piramidi, a base triangolare identica alle facce del tetraedro, dell'ottaedro, dell'icosaedro, sono infinite; e fra esse vi sono quelle che hanno allineate le facce con la piramide adiacente, esattamente, come abbiamo visto ricoprendo il tetraedro con gli angoloidi (piramidi) che costituiscono l'ottaedro, ottenendo il cubo (sei facce e non 3×4=12). Analogamente ricoprendo l'ottaedro con gli angoloidi (piramidi) che costituiscono il tetraedro otte= niamo il rombododecaedro (12 facce e non 3×8=24).

Ricoprendo il cubo con piramidi a base quadra= ta otteniamo i tetracisesaedri (4×6=24 facce), ma se le piramidi a base quadrata sono quelle che costituiscono il cubo stesso, si ottiene ancora il "rombododecaedro" (12 facce e non 4×6=24). Ove il la= to del cubo è la diagonale minore del rombo e la dia= gonale di una faccia del cubo equivale alla diagonale

gonale di una faccia del cubo equivale alla diagonale maggiore del rombo, ed allo spigolo del tetraedro.

Per definire il "triacistetraedro" non possiamo avvalerci della condizione che sia inscrittibile in una sfera perché, come abbiamo visto, si ottiene un cubo; quindi definiremo il "triacistetraedro" il solido ottenuto sovrapponendo alle facce del tetraedro piramidi tali da sottostare ad altre condizioni.

IL TRIACISTETRAEDRO

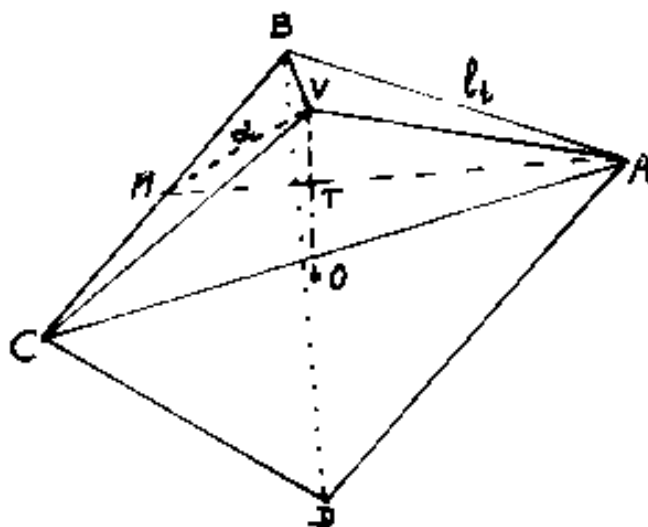
Consideriamo quindi il solido ottenuto dal tetraedro sovrapponendo, alle facce dello stesso, delle piramidi aventi per base, la faccia del tetraedro, e per vertice un punto "al di qua" della faccia stessa.

Queste dizioni non consentono di individuare un solido, perché le posizioni del vertice sono infinite. Vediamo di precisarle con alcune condizioni:

1) Le facce aggiunte, che saranno le facce del triacistetraedro debbono essere tutte uguali.

Ciò implica che il vertice V della piramide debba insistere sul prolungamento del raggio $r_i = OT$ della sfera inscritta nel tetraedro, ove T è il punto di tangenza con la faccia del tetraedro. Quindi $\overline{TV}$ è l'altezza della piramide aggiunta. Sia: $\boxed{\overline{TV} = K l_t}$ ove l_t è lo spigolo del tetraedro, e K un coefficiente numerico, con $K < 0$ il vertice è interno al tetraedro;

numerico, con $K<0$ il vertice è interno al tetraedro; $K=0$, si ha il tetraedro stesso, $K>0$ il vertice è esterno al tetraedro.

Consideriamo il nostro K come un parametro per individuare il solido, e calcoliamo in funzione di K gli elementi del triacistetraedro.

Sia ABCD il tetraedro,

ove: $l_t = AB = AC = AD = BC = BD = CD$

$\overline{OV_s} = \rho_s = l_t \sqrt{6}/4$ = sfera circoscritta

$\overline{OT} = r_i = l_t \sqrt{6}/12$ " inscritta

$\overline{TV} = K\, l_t$; $TV_s = l_t/\sqrt{6}$; $K_s = 1/\sqrt{6}$

$a = \overline{MV} = l_t\sqrt{K^2 + \frac{1}{12}}$; $\boxed{a = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{1+12K^2}{3}}}$

$s = \overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = \sqrt{\overline{VT}^2 + \overline{TA}^2} = l_t\sqrt{K^2 + \frac{1}{3}} = \boxed{s = l_t\sqrt{\frac{1+3K^2}{3}}}$

angoli piani delle facce:

al vertice $(B\hat{V}C) = 2 \arcsen\left(\frac{l_t/2}{s}\right) = 2 \arcsen\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{1+3K^2}}\right)$

alla base $(C\hat{B}V) = \arccos\left(\frac{l_t/2}{s}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{1+3K^2}}\right)$

angoli diedri:

fra faccia e base delle piramidi $= (V\hat{M}T) = \alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\overline{TV}}{\overline{TM}}\right) =$

$\boxed{\alpha_1 = \operatorname{arctg}(2K\sqrt{3})} = \operatorname{arctg}(K\sqrt{12})$

fra facce aventi in comune l_t:

$\hat{D} = 2\alpha_1$ + diedro del tetraedro

$\hat{\mathcal{D}}_{l_t} = 2\alpha_1 +$ diedro del tetraedro

$$\hat{\mathcal{D}}_{l_t} = 2\,\text{arctg}\left(K\sqrt{12}\right) + \text{arctg}\left(\sqrt{8}\right)$$

fra facce aventi in comune s:

$$\hat{\mathcal{D}}_s = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{l_t/2}{h_s}\right)$$

$\left(h_s = \text{altezza su } s:\ h_s = \frac{l_t \cdot a}{s} = \frac{l_t}{2}\,\frac{\sqrt{1+12K^2/3}}{l_t\sqrt{1+3K^2/3}}\right)$

$$\hat{\mathcal{D}}_s = 2\,\text{arcsen}\left(\sqrt{\frac{1+3K^2}{1+12K^2}}\right)$$

Ora possiamo imporre un'altra condizione che definisca univocamente il solido; (ciò equivale a definire un particolare K). Poniamo la condizione:

2) Gli angoli diedri siano uguali. $(\hat{D}_4 = \hat{D}_1)$

$$2\,\mathrm{arctg}(K\sqrt{12}) + \mathrm{arctg}(\sqrt{8}) = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\sqrt{\frac{1+3K^2}{1+12K^2}}\right) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right)$$

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right) - \mathrm{arctg}\left(K\sqrt{12}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\sqrt{8}) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

cioè: $\frac{1}{2}(\hat{D}_1 - \alpha_1) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{35^\circ\ 15'\ 51'',8}$

$$tg\,(\hat{D}_1 - \alpha_1) = \frac{tg\,\hat{D}_1 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1\, tg\,\hat{D}_1} = \frac{(\sqrt{1+3K^2}/3K) - (K\sqrt{12})}{1 + (K\sqrt{12})(\sqrt{1+3K^2}/3K)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sqrt{2}\sqrt{1+3K^2} - 6\sqrt{6} = 3K + 2\sqrt{3}K\sqrt{1+3K^2}$$

$(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}K)\sqrt{1+3K^2} = 3K + 6\sqrt{6}K^2$ elevando a quadrato e semplificando:

$180K^4 + 48\sqrt{6}K^3 - 9K^2 + 4\sqrt{6}K - 2 = 0$ (equazione di 4° grado)

scomponibile in: $(180K^2 + 15)\left(K^2 + \frac{4}{15}\sqrt{6}K - \frac{2}{15}\right) = 0$

Il primo fattore dà due radici immaginarie $\pm i\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$;

il secondo fattore dà due radici reali $K = \begin{cases} +\sqrt{6}/15 \rightarrow K^2 = \frac{2}{75} \\ -\sqrt{6}/\ldots \end{cases}$

$-\sqrt{6}/3 \rightarrow K^2 = \frac{2}{5}$

Verifichiamo l'equazione per $(K = \sqrt{6}/15)$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{81/75}}{\sqrt{6}/5}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 64°\,45'\,38'',15 = \left(\frac{1}{2}\hat{D}_s\right)$$

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{12}\,K\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{12}\cdot\frac{\sqrt{6}}{15}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{8}}{5}\right) = 29°\,29'\,46'',35 = (\alpha_1)$$

$$35°\,15'\,51'',8$$

angoli diedri:

alla base piramidi $= 2\alpha_1 = 58°,99241699$

spigolo tetraedro $= 70°,52877937$

$\hat{D}_{lt} = 129°,52119636$;

$\hat{D}_s = 2(64°\,45'\,38'',15)$

$\hat{D}_{lt} = 129°\,31'\,16'',30$
$\hat{D}_s = 129°\,31'\,16'',30$

verifichiamo l'equazione con la seconda radice $\left(K = \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ $K^2 = 2/3$

$$arctg\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right) = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{6}}\right) = arctg\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 144°,7356103 = \left(\frac{1}{2}\hat{D}_1\right)$$

$$arctg(\sqrt{12}\,K) = arctg\left(-\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = arctg(-\sqrt{8}) = 109°,4712206 = (\alpha_1)$$

$$35°,26438967 = 35°\,15'\,51'',8$$

angoli diedri

alla base delle piramidi $= (2\alpha_1) = 218°,9424413$

allo spigolo del tetraedro $= 70°,52877937$

$$\hat{D}_{l_t} = 289°,4712206$$

$$\hat{D}_{l_t} = 289°\,28'\,16'',3$$

$$\hat{D}_1 = 2(144°,7356103) = \hat{D}_1 = 289°\,28'\,16'',3$$

Trattandosi di angoli diedri maggiori di 180° sono angoli che presentano concavità verso l'esterno, del resto K negativo indica che il vertice V anziché sopraelevarsi sul punto T della faccia, entra nel tetraedro, altrimenti non avrebbe senso un'altezza $(\overline{TV} = Kl_t)$ negativa delle piramidi aggiunte. (Sottratte?) L'argomento sarà meglio chia

giunte. (sottratte?). L'argomento sarà meglio chiarito quando dimostreremo che fissati gli otto vertici di un triacistetraedro convesso, se togliamo gli spigoli del tetraedro iniziale e aggiungiamo i segmenti che uniscono i vertici delle piramidi, si ottiene un'altro triacistetraedro concavo avente gli stessi vertici, ma diverso K.

Calcoliamo gli elementi del triacistetraedro a diedri uguali. $\left(K = \sqrt{6}/15\right)$.

$\overline{TV} = \sqrt{6}/15 \; l_t$ ove l_t = lato o spigolo del tetraedro.

diedri: $\boxed{\hat{D}_{l_t} = \hat{D}_s = 129° \; 31' \; 16'',3}$ (convessi)

spigoli delle piramidi: $s = \sqrt{\overline{TA}^2 + \overline{TV}^2} = \sqrt{\left(\frac{l_t}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{l_t\sqrt{6}}{15}\right)^2} =$

$$s = \sqrt{l_t^2\left(\frac{25+2}{3 \cdot 25}\right)} \qquad \boxed{s = \frac{3}{5} l_t}$$

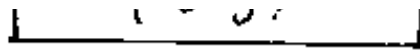
apotema delle facce: $a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_t}{2}\right)^2} = l_t\sqrt{\frac{9}{25} - \frac{1}{4}} =$

$$a = l_t\sqrt{\frac{36-25}{100}} \; ; \qquad \boxed{a = \frac{l_t}{10}\sqrt{11}}$$

distanza fra i vertici di due piramidi: $l_v = 2a \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{D}_{l_t}}{2}\right)$

$$l_v = 2\frac{l_t}{10}\sqrt{11} \operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = l_t\left(\frac{\sqrt{11}}{5}\right)\left(\frac{3/\sqrt{2}}{\sqrt{1 + (3/\sqrt{2})^2}}\right) =$$

$$l_v = l_t \frac{\sqrt{11}}{5} \frac{3}{\sqrt{2+9}} = l_t \frac{\sqrt{11}}{5} \frac{3}{\sqrt{11}} =$$

$$\boxed{l_v = \left(l_t \frac{3}{5}\right) = s}$$

Superficie laterale: $S = (12)\frac{1}{2}(l_t \cdot a) =$

$$S = l_t^2 \frac{6}{10}\sqrt{11} \qquad \boxed{S = l_t^2 \frac{3}{5}\sqrt{11}}$$

Volume: $V =$ volume tetraedro + volume 4 piramidi =

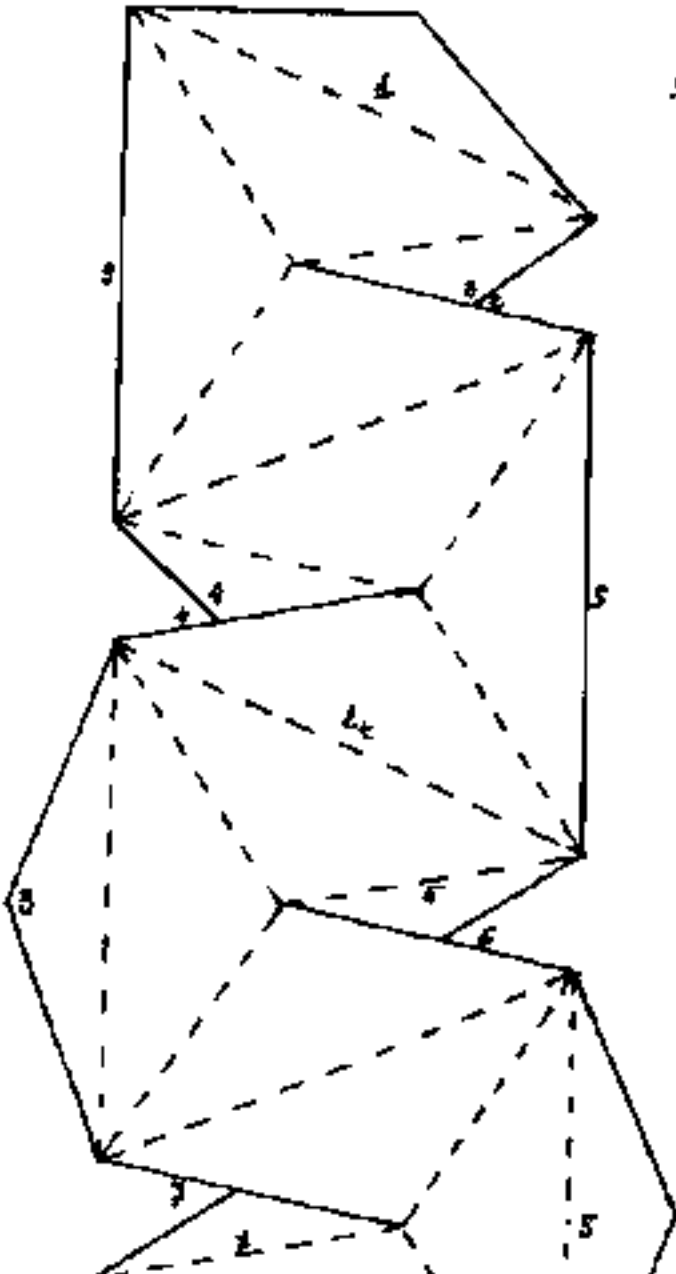
$$V = l_t^3\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right) + 4\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{l_t^2}{4}\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{15}l_t\right) = l_t^3\left(\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{15}\right) = l_t^3\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) =$$

$$\boxed{V = l_t^3 \frac{3}{20}\sqrt{2}}$$

angoli delle facce :

al vertice $2 \arcsin\left(\frac{l_t}{2l}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{5}{6}\right) = 112°,8853805$

$\hat{V} = 112° \, 53' \, 07'',37$

alla base $\arccos\left(\frac{5}{6}\right) = 33°,5573097\!6 = 30° \, 33' \, 26'',315$

Sviluppo del triacistetraedro a diedri uguali $(K = \sqrt{6}/15)$

tagliare lungo le linee intere, piegare lungo le linee tratteggiate, incollare le linguette facendo combaciare gli spigoli omonimi. (con lo steso numero).

1 2 3 4 5 6 l_t T

si è fatto anche lo sviluppo di

una delle 4 piramidi da sovrapporre al tetraedro. $\overline{TV} = K l_t$

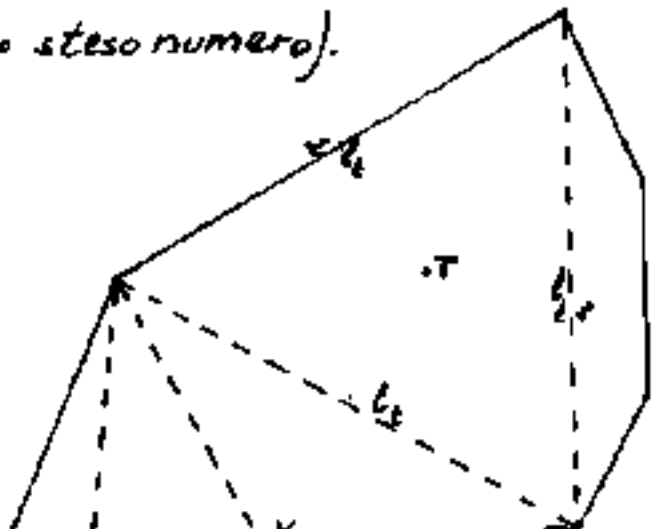
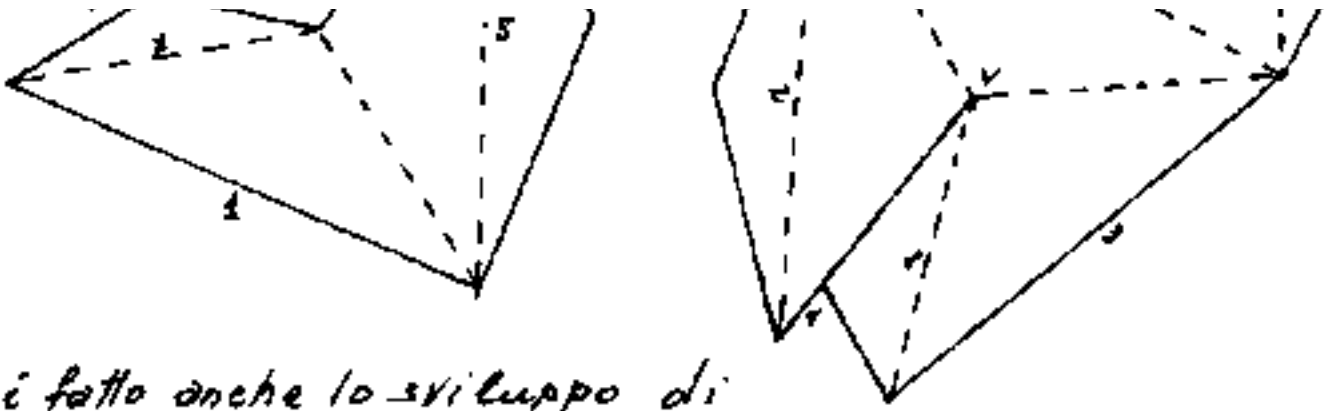
angoli delle facce :

al vertice $2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{l_t}{2l_s}\right) = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{5}{6}\right) = 112°,8853805$

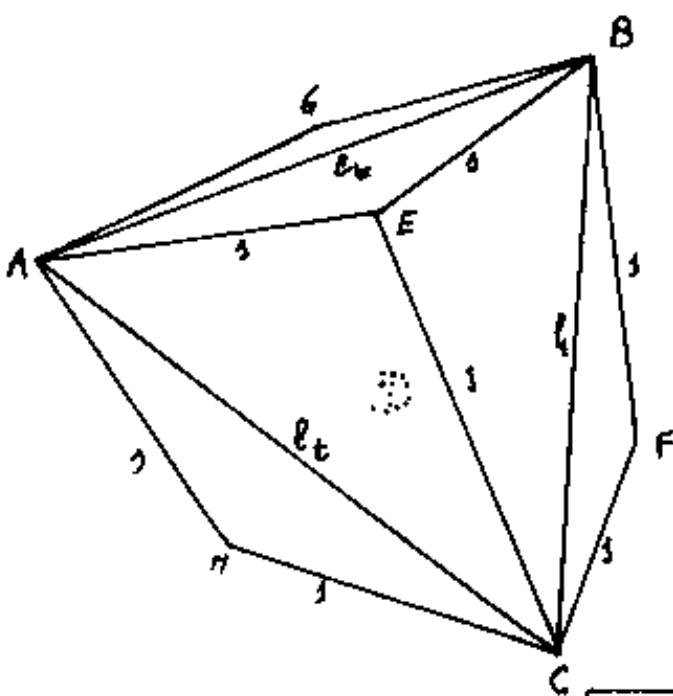
$\hat{V} = 112°\ 53'\ 07'',37$

alla base $\arccos\left(\frac{5}{6}\right) = 33°,5573096 = 30°\ 33'\ 26'',315$

Sviluppo del triacistetraedro a diedri uguali $(K = \sqrt{6}/15)$

tagliare lungo le linee intere, piegare lungo le linee tratteggiate, incollare le linguette facendo combaciare gli spigoli omonimi. (con lo steso numero).

si è fatto anche lo sviluppo di

una delle 4 piramidi da sovrapporre al tetraedro. $\overline{TV} = Kl_t$

Sovrapponendo alle facce del tetraedro le pirami- di angoloidi che costituiscono il tetraedro stesso, <u>otteniamo un nuovo triacistetraedro</u> in cui lo spigolo $s = \frac{3}{4}H$ (ove $H = \frac{l_t\sqrt{6}}{3}$ è l'altezza del tetraedro), cioè $\boxed{s = l_t\sqrt{6}/4}$ è lo spigolo delle piramidi sovrapposte.

L'altezza delle piramidi aggiunte $\overline{TV} = H/4 = \frac{l_t\sqrt{6}}{12}$ cioè: $\boxed{K = \frac{\sqrt{6}}{12}}$ gli angoli diedri $\boxed{\hat{D}_s = 120°}$; $\hat{D}_{l_t} = 2\frac{D_t}{2} + D_t$ ove $D_t = 70° 31' 44''$ è il diedro del tetraedro e $\frac{D_t}{2}$ il diedro fra la base e le facce delle piramidi aggiunte; $\boxed{D_{l_t} = 141° 03' 28''}$. Il volume del solido è ovviamente il doppio del volume del tetraedro $2\left(\frac{l_t^3\sqrt{2}}{12}\right) = \frac{l_t^3\sqrt{2}}{6}$; l'apotema $\boxed{a = \frac{l_t}{4}\sqrt{2}}$ l'area laterale è $\boxed{S' = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)l_t^2}$ gli angoli delle facce: $\boxed{\text{al vertice} = 109° 28' 16''}$ $\boxed{\text{alla base} = 35° 15' 52''}$. I quattro vertici delle pira-

midi aggiunte, in figura sono: E, F, G, H.

Aumentando gradatamente l'altezza delle piramidi aggiunte (aumentando K) aumenta l'angolo diedro $\hat{D}_{l_t}$ e diminuisce l'angolo diedro $\hat{D}_1$. Si è già visto che quando $\hat{D}_{l_t} = 180°$ il solido triacistetraedro diventa un cubo.

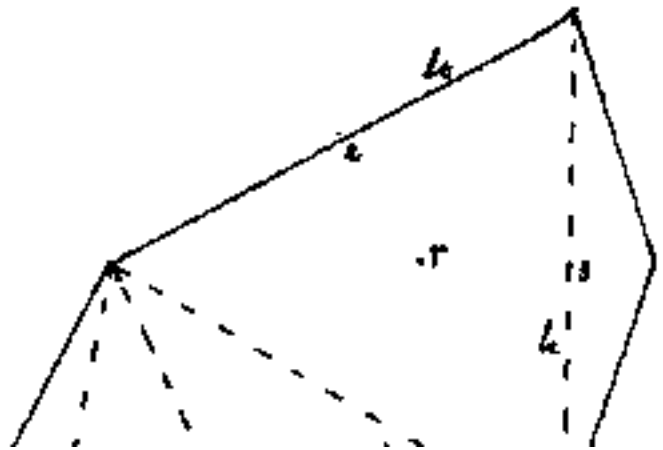
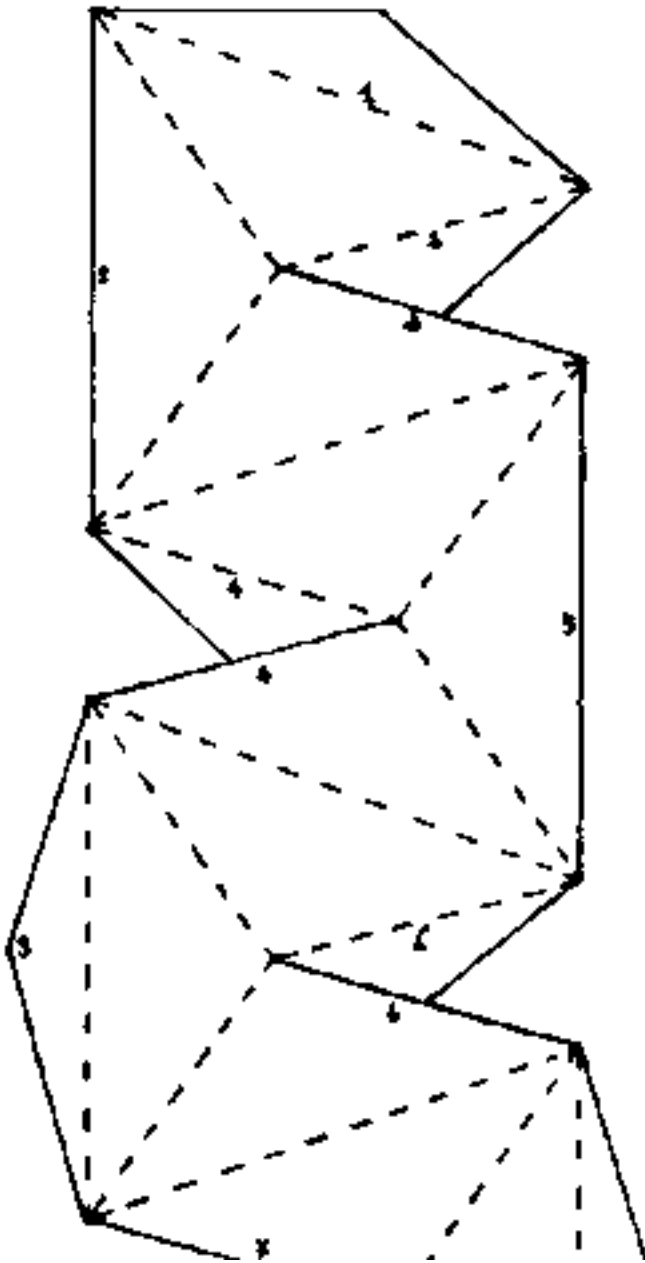
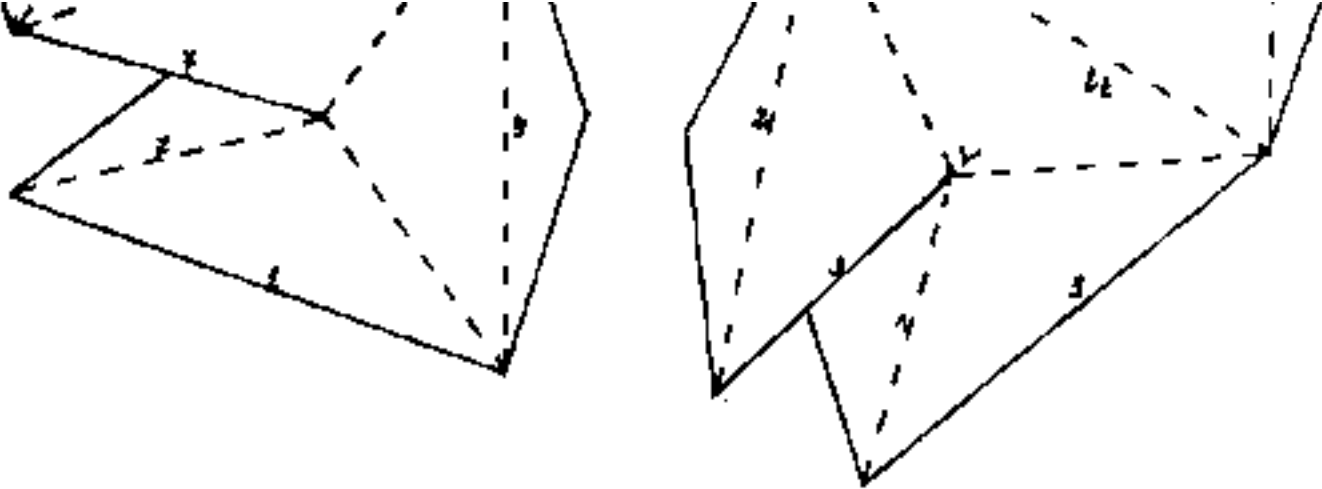
Sviluppo del triacistetaedro ottenuto con l'aggiunta delle piramidi angoloidi che costituiscono il tetraedro stesso. (Solido convesso dal volume doppio del tetraedro base). ($K = \frac{\sqrt{6}}{12}$)

Si disegna anche lo sviluppo di una delle quattro piramidi aggiunte, al tetraedro.

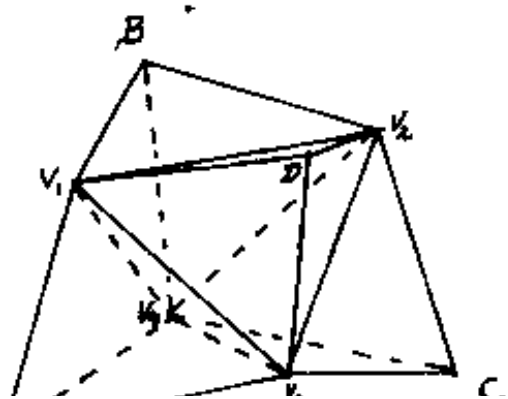
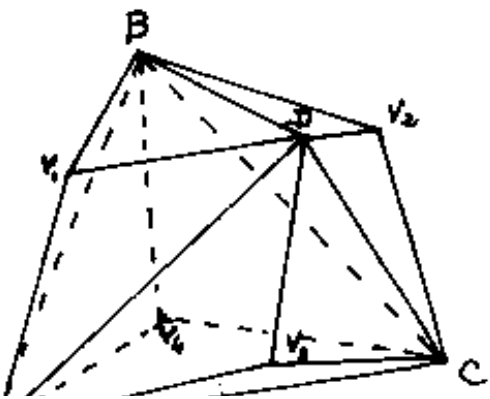
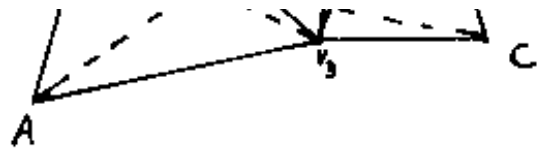
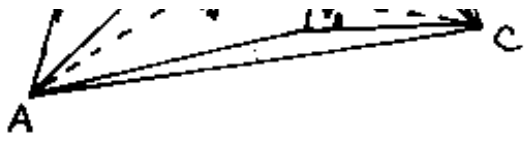
Facendo otto modellini di queste piramidi possiamo con 4 fare il tetraedro base e con le altre 4 aggiunte fare il triacistetaedro. Se aggiunte alle 8 facce di un ottaedro si ottiene il rombododecaedro.

Sviluppo del triacistetaedro ottenuto con l'aggiunta delle piramidi angoloidi che costituiscono il tetraedro stesso. (Solido convesso dal volume doppio del tetraedro base). ($K = \frac{\sqrt{6}}{12}$)

Si disegna anche lo sviluppo di una delle quattro piramidi aggiunte, al tetraedro.

Facendo otto modellini di queste piramidi possiamo con 4 fare il tetraedro base e con le altre 4 aggiunte fare il triacistetaedro. Se aggiunte alle 8 facce di un ottaedro si ottiene il rombododecaedro.

E' opportuno rilevare subito che, aggiunte le piramidi alle facce del solido base, fermi restando i vertici del solido base e delle piramidi aggiunte, cioè resa immutabile la loro reciproca posizione, se anziché congiungere tali vertici con gli spigoli del solido base, congiungiamo fra loro i vertici delle piramidi adiacenti, <u>otteniamo un altro solido che ha gli stessi vertici</u>, lo stesso numero di facce triangoli isosceli con gli stessi lati obliqui ma con diversa base (anziché lo spigolo del solido base, si ha la distanza fra due vertici). Se il solido base era un tetraedro anche i segmenti congiungenti i vertici delle piramidi danno un nuovo tetraedro (di dimensioni diverse).

B, V2, V1, D, V4, V3, C

B, V2, V1, D, V4, K, V3, C

Nelle due figure, al tetraedro di vertici A, B, C, D, si sono aggiunte le sue piramidi angoloidi ottenendo i vertici V_1, V_2, V_3, V_4; ferme restando le posizioni mutue di tutti i vertici, nella seconda figura si sono collegati fra loro i vertici delle piramidi, anziché i vertici del tetraedro base.

Riportiamo, lo sviluppo del solido di cui alla seconda figura, della prima ne abbiamo già dato lo sviluppo. (Abbiamo, per i due sviluppi, assunto lo stesso tetraedro base, per dimostrare che i vertici sono gli stessi). Quindi l_t, ed $s = l_t\sqrt{6}/4$, restano invariati. Sia l_v la distanza fra i vertici delle piramidi aggiunte cioè: $\overline{V_1V_2} = \overline{V_1V_3} = \overline{V_1V_4} = \overline{V_2V_3} = \overline{V_2V_4} = \overline{V_3V_4} = l_t \frac{2r_i}{\rho_1} =$ $\boxed{l_v = \frac{2}{3} l_t}$

Si noti che l_v è anche lo spigolo di un nuovo tetraedro, sulla base del quale calcoliamo le caratteristiche : $\boxed{s = l_v \frac{3}{8}\sqrt{6}}$; $\boxed{a = \frac{l_v}{3}\sqrt{3}}$

$\overline{TV} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_v}{\sqrt{3}}\right)^2} =$ $\boxed{\overline{TV} = \left(\frac{7}{24}\sqrt{6}\right) l_v}$; $\left(K = \frac{7}{24}\sqrt{6}\right) = 0{,}71443450$8

$\boxed{h_s = \frac{l_v}{3}\sqrt{\frac{12}{3}}}$ (altezza delle facce rispetto ad s)

Angoli delle facce

al vertice := $2 \arcsen\left(\frac{4}{\sqrt{54}}\right) = 65° 57' 28'',53$

alla base $= \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{54}}\right) = 57° \, 01' \, 15'',74$

Angoli diedri

$\hat{D}_4 = 2 \arcsen\left(\frac{6}{\sqrt{38}}\right) = 153° \, 28' \, 28'',7$ (concavo)

$\hat{D}_3 = 2 \arcsen\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{19}}\right) = 73° \, 10' \, 24'',78$

Tagliare lungo la linea intera, piegare concavo le linee a tratto e punto, piegare convesso le linee a tratteggio, incollare le linguette su spigoli omonimi.

Riportiamo, lo sviluppo del solido di cui alla seconda figura, della prima ne abbiamo già dato lo sviluppo. (Abbiamo, per i due sviluppi, assunto lo stesso tetraedro base, per dimostrare che i vertici sono gli stessi). Quindi l_t, ed $s = l_t\sqrt{6}/4$, restano invariati. Sia l_v la distanza fra i vertici delle piramidi aggiunte cioè: $\overline{V_1V_2} =$

$\overline{V_1V_3} = \overline{V_1V_4} = \overline{V_2V_3} = \overline{V_2V_4} = \overline{V V_4} = l_t \frac{2 l_t}{\ldots} =$ $\boxed{l_v = \frac{2}{3} l_t}$

Si noti che l_v è anche lo spigolo di un nuovo tetraedro, sulla base del quale calcoliamo le caratteristiche: $\boxed{s = l_v \frac{3}{8}\sqrt{6}}$; $\boxed{a = \frac{l_v}{3}\sqrt{\ldots}}$

$\overline{TV} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_v}{\sqrt{3}}\right)^2} =$ $\boxed{\overline{TV} = \left(\frac{17}{24}\sqrt{6}\right) l_v}$; $\left(K = \frac{7}{24}\sqrt{6}\right) = 0{,}714434508$

$\boxed{h_s = \frac{l_v}{4}\sqrt{\frac{19}{3}}}$ (altezza delle facce rispetto ad s)

Angoli delle facce

al vertice $= 2\arcsen\left(\frac{4}{\sqrt{51}}\right) = 65°57'28'',53$

alla base $= \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{51}}\right) = 57°01'15'',74$

Angoli diedri

$\widehat{D_4} = 2\arcsen\left(\frac{6}{\sqrt{38}}\right) = 153°28'28'',7$ (concavo)

$\widehat{D}_{\ldots} = 2\arcsen\left(\frac{3}{\ldots}\sqrt{\frac{2}{\ldots}}\right) = 73°10'24'',78$

6

14

$$\hat{D}_1 = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{19}}\right) = 73^\circ\ 10'\ 24'',18$$

Tagliare lungo la linea intera, piegare concavo le linee a tratto e punto, piegare convesso le linee a tratteggio, incollare le linguette su spigoli omonimi.

Abbiamo già trattato la condizione per cui quattro punti, nello spazio tridimensionale siano complanari. Nel nostro caso gli otto vertici: $A, B, C, D, V_1, V_2, V_3, V_4$ danno luogo ai seguenti quadrilateri: AV_1BV_2 ; AV_1CV_3 ; AV_2DV_3 ; BV_1CV_4 ; BV_2DV_4 ; CV_3DV_4 ; i cui lati sono gli spigoli "S" delle piramidi aggiunte, mentre le congiungenti vertici opposti sono l_t ed l_v. (Non possiamo chiamare diagonali l_t ed l_v perché i quadrilateri non sono piani). Quando, aumentando $\overline{TV}$ si ha: $l_t = l_v$ il solido triacistetraedro diventa un cubo, è inscrittibile in una sfera, ed è il limite dei <u>triacistetraedri convessi</u>. Continuando ad aumentare $\overline{TV}$ i solidi diventano <u>concavi</u>. (Ricordiamo che a parità di l_t, aumentare $\overline{TV}$ significa aumentare $K = \frac{\overline{TV}}{l_t}$) Cioè l_v è diventato maggiore di l_t; ed a parità di spigoli "S" (lati del quadrilatero) scambiare l_t con l_v significa passare da un triacistetraedro

l_t con l_v significa passare da un triacistetraedro <u>convesso</u> ad uno <u>concavo</u> o viceversa. (Dipende da K se $K \lesseqgtr \frac{1}{\sqrt{6}}$; ove $\frac{l_t}{\sqrt{6}} = \frac{l_v}{\sqrt{6}} = \overline{TV}$ del cubo). Cerchiamo la correlazione fra i K dei due solidi, a tal fine, detto K_1 il K del primo solido, avremo: $\overline{TV} = K_1 l_t$; $\overline{T_1A} = K_2 l_v$

$$l_v = 2a \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{TVT_2}}{2}\right) = 2a \operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\left(K_1\sqrt{12}\right) + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{12}}\right) = 2a \operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{K_1\sqrt{12} + 1/\sqrt{12}}{1 - K_1\sqrt{12}}\right)\right);$$

$$\tan\left(\hat{D}_{tr}/2\right) = \frac{K_1\sqrt{12} + 1/\sqrt{2}}{1 - K_1\sqrt{6}} \; ; \qquad \text{da cui:}$$

$$\operatorname{sen}\left(\hat{D}_{tr}/2\right) = \frac{\left(K_1\sqrt{12} + 1/\sqrt{2}\right)/\left(1 - K_1\sqrt{6}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{K_1\sqrt{12} + 1/\sqrt{2}}{1 - K_1\sqrt{6}}\right)^2}} = \frac{\left(K_1\sqrt{12} + 1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{1 + K_1^2\cdot 6 - 2K_1\sqrt{6} + K_1^2\cdot 12 + \frac{1}{2} + 2K_1\sqrt{6}}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\hat{D}_{tr}/2\right) = \frac{\left(K_1\sqrt{12} + 1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{18K_1^2 + 3/2}} = \frac{K_1\sqrt{24} + 1}{\sqrt{3}\sqrt{(K_1\sqrt{12})^2 + 1}} = \frac{2K_1\sqrt{6} + 1}{\sqrt{3}\sqrt{12K^2 + 1}} \; ;$$

$$a = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{12K_1^2 + 1}{3}} \quad \text{per cui:} \quad l_v = l_t\sqrt{\frac{12K_1^2 + 1}{3}} \cdot \frac{2K_1\sqrt{6} + 1}{\sqrt{3}\sqrt{12K_1^2 + 1}} =$$

$$\boxed{l_v = l_t\left(\frac{2K_1\sqrt{6} + 1}{3}\right)} \; ; \qquad \boxed{s = l_t\sqrt{\frac{1 + 3K_1^2}{3}}} \; ;$$

Le altezze delle nuove piramidi ottenute utilizzando l_v anziché l_t sono $\overline{T_2A} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_v}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{l_t^2}{3}(1 + 3K_1^2) - \frac{l_v^2}{3}} =$

$$\overline{T_2A} = \sqrt{\frac{l_t^2}{3}(1 + 3K_1^2) - \frac{1}{3}l_t^2\left(\frac{24K_1^2 + 1 + 4K_1\sqrt{6}}{9}\right)} = \frac{l_t}{3}\sqrt{3 + 9K_1^2 - \left(\frac{24K_1^2 + 4K_1\sqrt{6} + 1}{3}\right)} =$$

$$\overline{T_2A} = \frac{l_t}{3}\sqrt{K_1^2 - 2K_1\sqrt{\frac{8}{3}} + \frac{8}{3}} = \frac{l_t}{3}\left(\sqrt{\frac{8}{3}} - K_1\right) \supset \boxed{\overline{T_2A} = l_v\,\frac{\left(\sqrt{8/3} - K_1\right)}{\left(2K_1\sqrt{6} + 1\right)}}$$

perciò: $K = \overline{T_2A}$ ... $\left(\sqrt{\frac{8}{3}} - K_1\right)$ ...

perciò: $K_2 = \frac{I_2A}{\ell_V}$; $K_2 = \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - K_1\right)}{\left(2K_1\sqrt{6}+1\right)} = \boxed{K_2 = \frac{1}{3}\,\frac{\left(2\sqrt{6}-3K_1\right)}{\left(2\sqrt{6}\,K_1+1\right)}}$

calcoliamo K_2 per i diedri uguali.

$K_1 = \frac{\sqrt{6}}{15}$; $K_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}/5}{\frac{12}{15}+1}\right) = \frac{10\sqrt{6} - \sqrt{6}}{27} = \left(K_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

l'equazione portava a $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (negativo), Verifichiamo l'altro K_1

$K_1 = \frac{\sqrt{6}}{12}$; $K_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}/4}{1+1}\right) = \left(K_2 = \frac{7}{24}\sqrt{6}\right)$ (come già calcolato)

Consideriamo il solido con $K = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $K^2 = \frac{2}{3}$

$\overline{VT} = \frac{\sqrt{6}}{3} l_t$; $a = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{1+12\left(\frac{2}{3}\right)}{3}} = \frac{l_t}{2}\sqrt{3}$; $\boxed{a = \frac{l_t}{2}\sqrt{3}}$

$s = l_t\sqrt{\frac{1+2}{3}}$; $\boxed{s = l_t}$ $\boxed{h_s = a}$

<u>angoli piani delle facce</u>

al vertice: $2 \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

alla base: $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

<u>angoli diedri</u>

fra faccia e base piramidi: $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{12}\right) = \operatorname{arctg}(\sqrt{8}) = \underline{70° 31' 43'',61}$

fra facce su "l_t": $\hat{D}_{l_t} = (3)(70,52877937) = \hat{D}_{l_t} = \underline{211° 35' 10'',8}$

fra facce su "s": $\hat{D}_s = 2 \arcsen\left(\frac{l_t/2}{\frac{l_t}{2}\sqrt{3}}\right) = 2 \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; (2 risoluzioni)

$2 \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = $
- $2(35°,26438968) = \underline{70° 31' 43'',61}$
- $2(144°,7356103) = \underline{289° 28' 16'',39}$ (esplementare)

<u>Si tratta di un tetraedro cui sono aggiunti 4 tetraedri uguali.</u>

applicando la formula: $K_2 = \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - K_1\right)}{\left(2K_1\sqrt{6}+1\right)}$ abbiamo: $K_2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{6}}{3}}{4\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{6}+1}\right)$

$K_2 := \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{5} = \frac{\sqrt{6}}{15}$; torna l'altro K <u>iniziale</u>.

cioè dalla $K_2 = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} - K_1}{2K_1\sqrt{6}+1}$ risolvendo rispetto a K_1 abbiamo:

$K_2 \cdot 2K_1\sqrt{6} + K_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} - K_2$ cioè: $K_1 = \left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}} - K_2}{2K_2\sqrt{6}+1}\right)$ <u>identica</u>!

[illegible] $(2K_2\sqrt{6}+1)$ [illegible]

<u>Superficie laterale</u>: $S = 12 \frac{l_t^2}{4}\sqrt{3}$; $\boxed{S = l_t^2\, 3\sqrt{3}}$

<u>Volume</u> $= 5\frac{\sqrt{2}}{12} l_t^3$; $\boxed{V = l_t^3 \frac{5}{12}\sqrt{2}}$

Questo triacistetraedro è anche detto <u>Tetracedron elevatus</u>.

Siluppo del Tetracedron elevatus

$(K = \sqrt{6}/3)$

2

5

a

Nota.

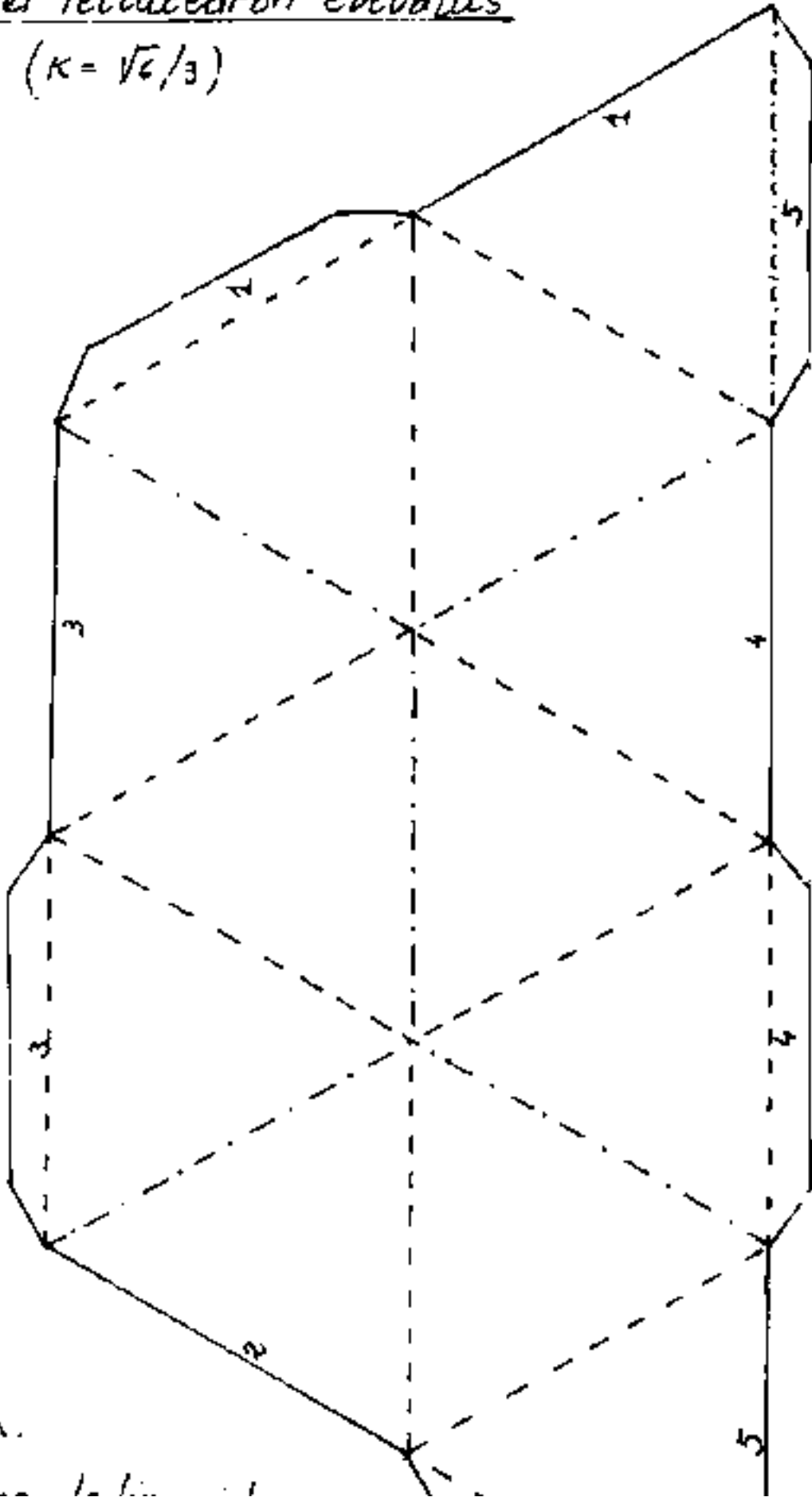
Tagliare lungo le linee intere,

piegare convesso le linee a trotti

piegare concavo le linee a tratto e punto

incollare le linguette in modo da far corrispondere gli spigoli omonimi.

Silupppo del Tetraedron elevatus

($K = \sqrt{6}/3$)

Nota.

Tagliare lungo le linee intere,

piegare convesso le linee a tratti

piegare concavo le linee a tratto e punto

incollare le linguette in modo da far corrispondere gli spigoli omonimi.

Inizialmente il tetraedro è inscritto in una sfera, i vertici del tetraedro restano sulla superficie sferica al crescere dell'altezza delle piramidi aggiunte i cui vertici inizialmente non arrivano a toccare la superficie sferica; quando si aggiungono le piramidi dei poliedri dell'ottaedro, si ha il cubo; sulla sfera vi sono, con i vertici del tetraedro, quelli delle piramidi aggiunte. Da questo punto in poi, sulla sfera circoscritta, vi saranno solo i vertici delle piramidi aggiunte.

Consideriamo ora il <u>triacistetraedro</u> con le piramidi dei poliedri costituenti <u>l'icosaedro</u>. Per l'icosaedro, il raggio della sfera inscritta (altezza delle piramidi $\overline{TV}$) $= r_i = \boxed{\frac{l_t}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)}$. Il raggio della sfera circoscritta (spigolo s delle piramidi) è: $\rho_s = \boxed{\frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}-1}}$ (ove l_t è il lato dell'icosaedro)

$$\underline{\underline{K}} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right) = \underline{\underline{0,755761314}}$$

$$a = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{1+12K^2}{3}} = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{1}{3}+4\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$a = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \boxed{a = \frac{l_t}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)}$$

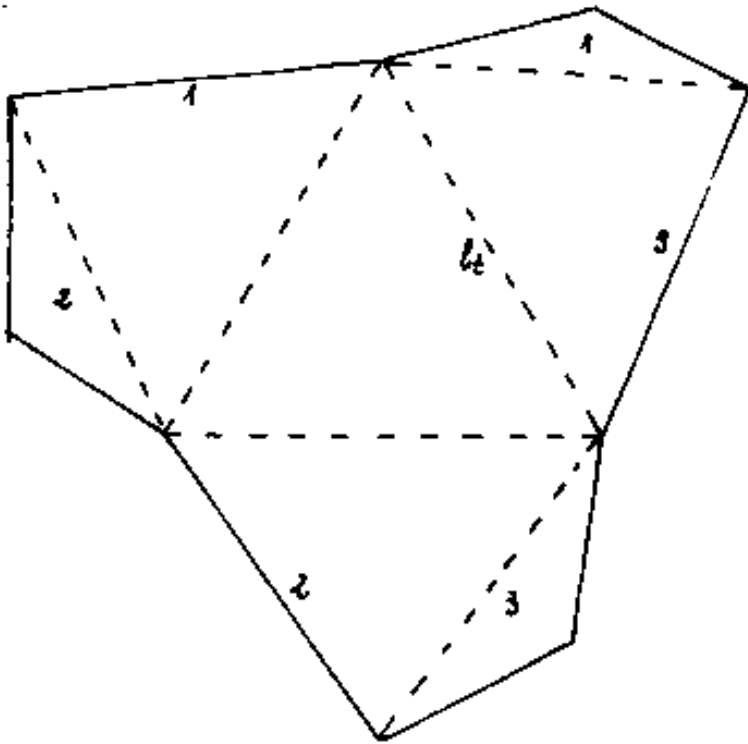
angoli delle facce : $h_3 = \frac{l_t}{2}\left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}\right)$

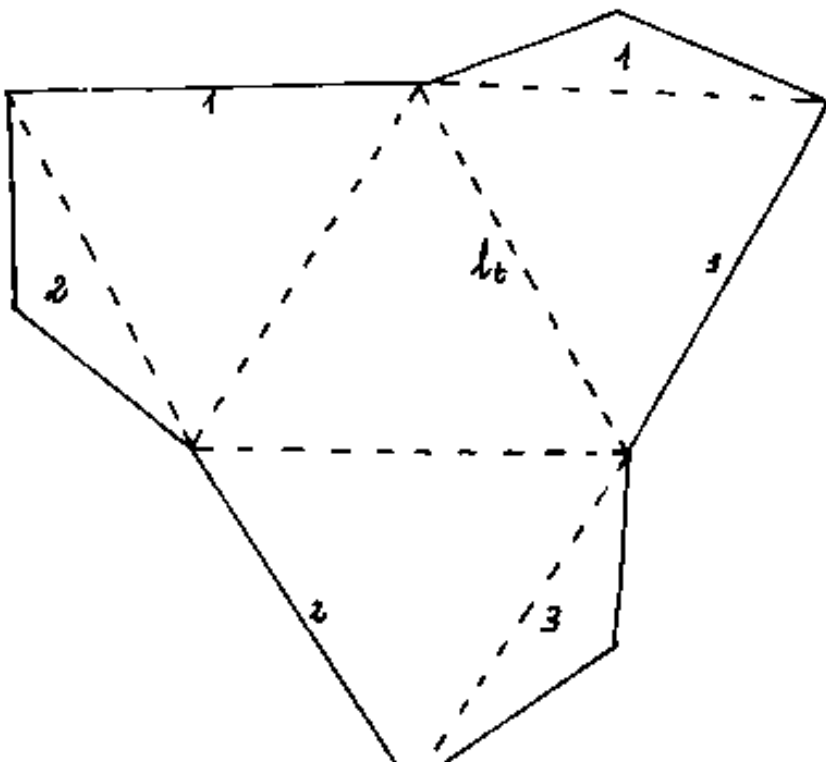
al vertice: $2\arcsin\left(\frac{l_t}{2h_3}\right) = 63°\ 26'\ 5'',82$

alla base : $\arccos\left(\frac{l_t}{2h_3}\right) = 58°\ 16'\ 57'',09$

Diedri : $\hat{D}_3 = 2\arcsin\left(\frac{l_t}{2h_3}\right) = 72°.00'\ 00''$

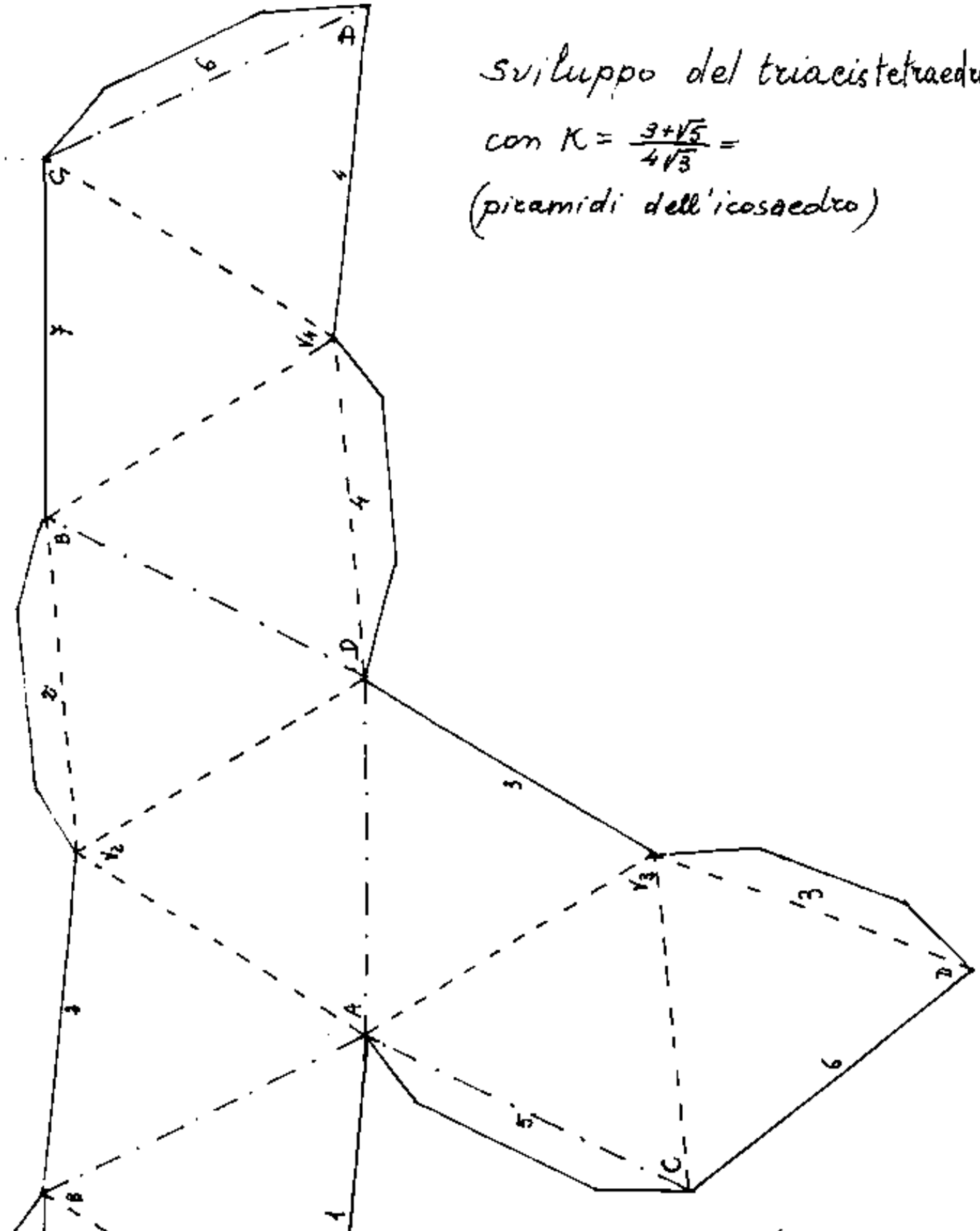
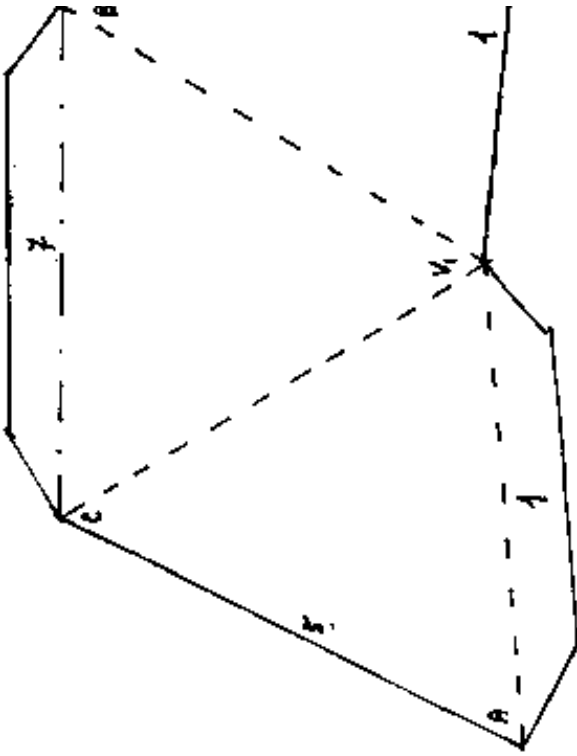
$\hat{D}_{l_t} = 208°\ 43'\ 06'',47 > 180°$ spazio interno

$D_{l_t} = -151°\ 16'\ 53'',5$ concavo verso l'esterno.

Sviluppo delle piramidi costituenti l'ottaedro, sovrapposte al tetraedro danno un cubo.

Sotto diamo lo schema di sviluppo delle piramidi angoloidi costituenti l'icosaedro. (per fare l'icosaedro ne occorrono venti, se con quattro di queste ricopriamo il tetraedro, otteniamo il triacistetraedro ora trattato, individuato dal $K = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right)$.

Puo' interessare il confronto.

Lo sviluppo completo per fare il modello di questo triacistetraedro lo diamo alla pagina seguente.

Il $K_2 = \left(\frac{\sqrt{6}/3 - K_1}{2\sqrt{2}K_1 + 1}\right)$ ove sostituendo si ha: $K_2 = \frac{8\sqrt{2} - \sqrt{5} - 3}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + 1\right)4\sqrt{3}}$

$- K_2 = \frac{16 - \sqrt{10} - 3\sqrt{2}}{(\sqrt{5} + \sqrt{2} + 3)4\sqrt{3}} = 0,186547467 \cong \sqrt{6}/13,13065131$.

Sviluppo del triacistetraedro

con $K = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} =$

(piramidi dell'icosaedro)

Tagliare lungo le linee intere, piegare concavo le linee a tratto e punto, piegare convesso le linee a tratteggio semplice, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli omonimi

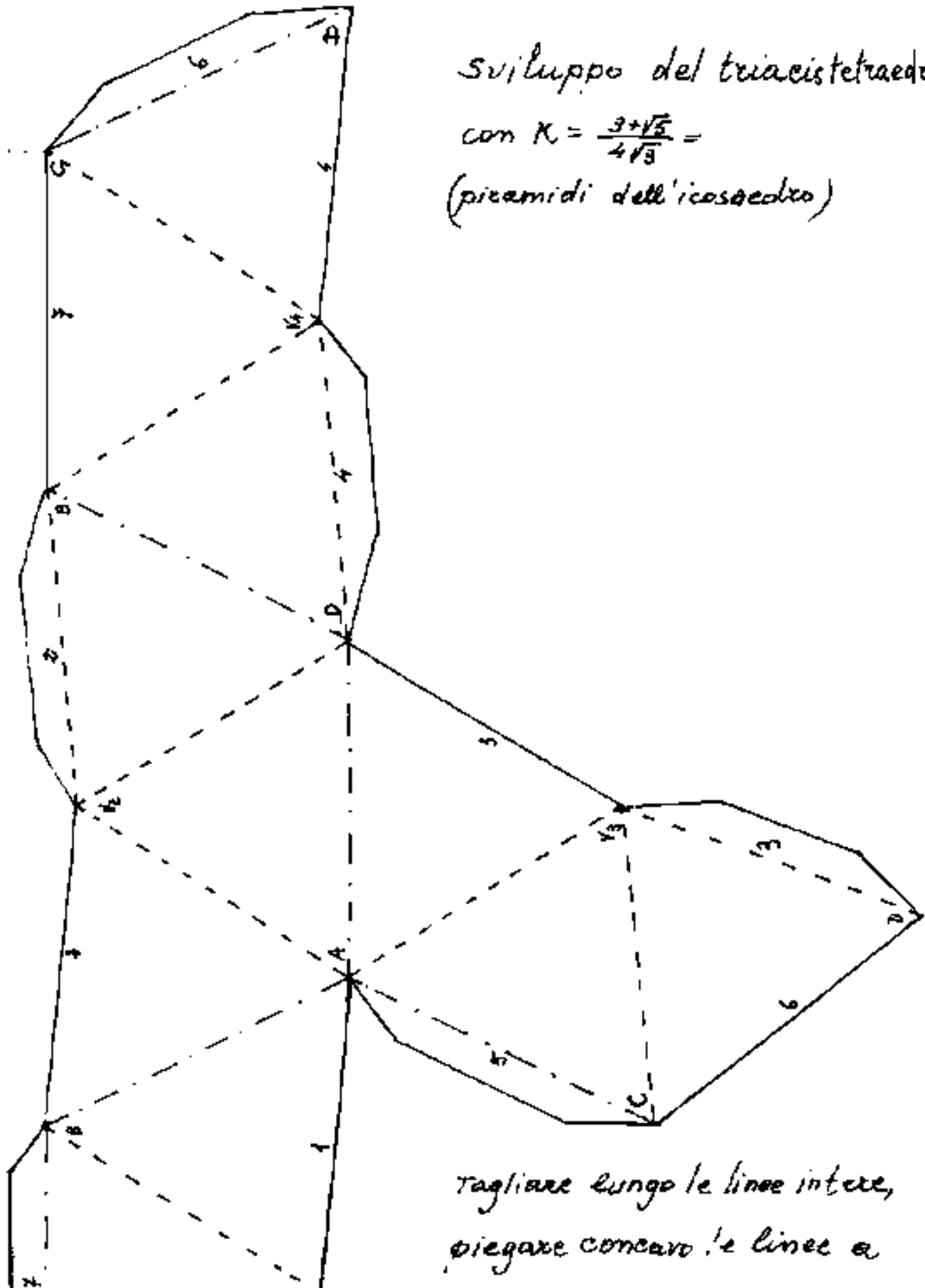
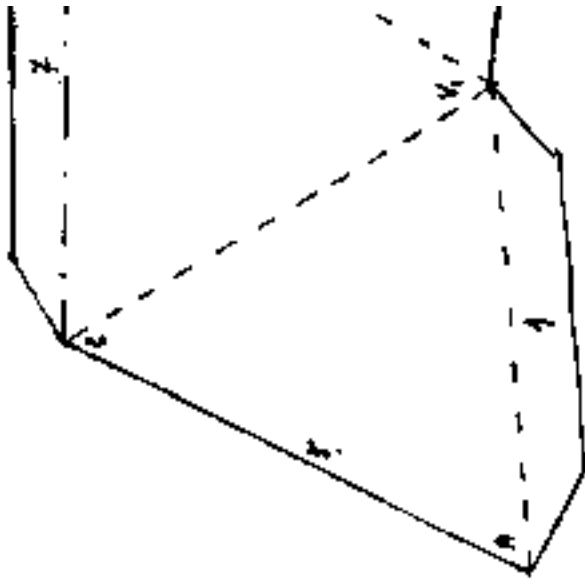
Sviluppo del triacistetraedro

con $K = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} =$

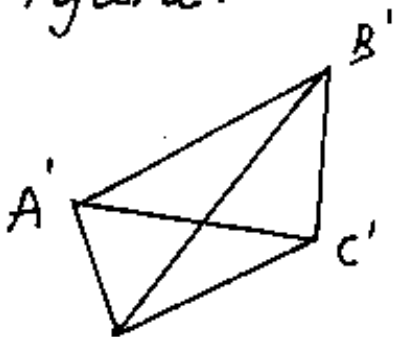
(piramidi dell'icosaedro)

A 6 5 4 m K4 4 B D 4 K2 5 K3 3 P 6 4 K1 C 4 B K

Tagliare lungo le linee intere,

piegare concavo le linee a

piegare concavo, e linee a
tratto e punto, piegare con=
vesso le linee a tratteggio
semplice, incollare le lin=
guette facendo corrispon=
dere gli spigoli omonimi

Anche per questo solido possiamo considerare immutata la posizione dei vertici, non collegare fra loro i vertici del tetraedro A, B, C, D, ed invece collegare fra loro i vertici V_1, V_2, V_3, V_4; delle piramidi aggiunte. Prima di fare ciò, è bene chiarire il problema <u>di quattro vertici non complanari</u>. Abbiamo già trattato il problema dei poligoni inscrittibili o non inscrittibili in una sfera, nel capitolo sulla misura degli angoli solidi. Ora invece riguardiamo quattro punti non complanari, indipendentemente da essere o meno inscrittibili in una sfera determinata.

Siano A, B, C, D i quattro punti, che in una certa proiezione possiamo vedere come in figura.

Siano date <u>le vere</u> distanze:

$\overline{AB} = l_1$; $\overline{BC} = l_2$; $\overline{CD} = l_3$

$\overline{DA} = l_4$; $\overline{AC} = l_5$; $\overline{BD} = l_6$

(non misurabili in proiezioni)

D'

Per primo calcolo possiamo prendere cinque vere distanze e calcolare la sesta, se questa sesta misura calcolata corrisponde alla vera distanza, il quadrilatero è piano, i quattro punti sono complanari. Se è diversa dalla vera, i quattro punti non sono complanari. Se non sono

complanari è sempre possibile far passare una sfera per quattro punti, ciò non implica che un solido sia inscrittibile infatti i punti vertice presi quattro a quattro possono dar luogo a sfere diverse.

Se ABCD è il perimetro (sulla sfera) ed $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ le diagonali, e supponiamo $\overline{BD} > \overline{AC}$, se i quattro punti rimangono sulla superficie di una semisfera la corda $\overline{BD}$ è più vicina al centro della corda $\overline{AC}$. In generale le 6 vere distanze possono considerarsi corde di cerchi massimi e saranno tanto più vicine al centro quanto più sono grandi.

Ogni tre punti si ha un piano perciò possiamo considerare le seguenti coppie di triangoli del quadrilatero:

ABC e ADC aventi in comune $\overline{AC}$ linea di piega (varia BD)
ABD e BDC " " $\overline{BD}$ " " (" AC)
ABC e ABD " " $\overline{AB}$ " " (" DC)
ABC e BCD " " $\overline{BC}$ " " (" AD)

ABC e BCD " " $\overline{BC}$ " " (" AD)

ABD e ACD " " $\overline{AD}$ " " (" BC)

ACD e BCD " " DC " " (" AB)

cioè se disponiamo in piano i due triangoli provocando una rotazione relativa intorno alla linea di piegatura, otteniamo un quadrilatero piano in cui risultano vere cinque dimensioni, ma risulta variata la sesta.

Calcolando questi quadrilateri come piani, risultano veri gli angoli opposti alla linea di piegatura e falsati quelli opposti alla distanza variata.

Questi calcoli sono necessari per fare lo sviluppo del solido in modo da poter dare lo schema per la costruzione di un mo=dellino in carta.

<u>Calcoliamo ora il triacistetraedro avente gli stessi vertici di quello ottenuto con le piramidi angoloidi dell'icosaedro</u>, ma ove è scambiato l_t con l_v.

Sia l_t lo spigolo comune del tetraedro e dell'ico=saedro; $s = \rho_i = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ = raggio della sfera circoscrit=ta all'icosaedro = <u>s = spigolo</u> piramidi aggiunte al tetrae=dro, = lato <u>o spigolo del nostro solido</u>; $r_{i_i} = \overline{TV} = \frac{l_t}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)$ = raggio della sfera inscritta nell'icosaedro = altezza delle piramidi aggiunte; $r_{i_t} = \frac{l_t}{12}\sqrt{6}$ = raggio della sfera inscritta nel tetraedro. Perciò $\overline{OV} = r_{i_i} + r_{i_t} = \left(\frac{l_t}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{l_t}{12}\sqrt{6}\right) = \rho_v =$

= distanza dei vertici V dal centro O del solido $= \frac{l_t}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

$V_1\widehat{O}V_2$ = angolo fra le direzioni dei centri faccia del tetraedro $V_1\widehat{O}V_2 = 109°\,28'\,16'',3$. La distanza: $\overline{V_1V_2} = l_v$, fra i due vertici e nuovo spigolo del solido sarà data:

$$l_v = 2\rho_v \,\text{sen}\, \frac{1}{2}(109°\,28'\,16'',3) = \frac{l_t}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\text{sen}\, 54°\,44'\,08'',192 =$$

$$l_v = \frac{l_t}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{2}{3}} = \boxed{l_v = l_t\left(3\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\right)/6} = \boxed{l_v = (1{,}567486391)\,l_t}$$

$$s_v = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = (0{,}951056516)\,l_t = \underline{(0{,}606739887)\,l_v}$$

I nuovi spigoli "l_v" formeranno triangoli equilateri che costituiranno il nuovo tetraedro. La sfera inscritta in questo tetraedro ha per raggio $r_{iv} = \frac{l_v}{12}\sqrt{6}$ cioè: $r_{iv} = \overline{OT_1} = \frac{l_t}{6}\left(\sqrt{2}\cdot 3 + \sqrt{10} + 2\right)\frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{l_t}{12}\left(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; l'altezza delle nuove piramidi che hanno i vertici in A, B, C, D, sarà: $\left(\int_t - r_{iv}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} l_t - \frac{l_t}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{l_t}{4}\left(\sqrt{6} - \frac{(3+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3\sqrt{3}}\right)$

cioè $= l_t(0{,}292410615)$ da cui $K = \frac{T_1A}{l_v} = \frac{l_t(0{,}292410615)}{l_t(1{,}567486335)}$

Le facce del solido saranno triangoli isosceli di base l_v e lati obliqui s. l'apotema delle facce

$$a_v = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_v}{2}\right)^2} = l_t\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right) - \left(\frac{8+3\sqrt{5}+3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{36}\right)} = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{45+9\sqrt{5}-16-6\sqrt{5}-6\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{18}}$$

$$a_v = \frac{l_t}{6}\sqrt{\frac{29+3\sqrt{5}-6\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{2}} = (0{,}538753283)\,l_t = (0{,}343705238)\,l_v$$

angoli delle facce

al vertice $= 2\arcsen\left(\frac{l_v}{2s}\right) = 110°\ 59'\ 23'',7$

alla base $= \arccos\left(\frac{l_v}{2s}\right) = 34°\ 30'\ 18'',14$

altezza relativa ad $s = h_s = \frac{a_v l_v}{s} = 0{,}566478725\, l_v$

angoli diedri

sullo spigolo s $\hat{D}_s = 2\arcsen\left(\frac{l_v}{2h_s}\right) = 123°\ 55'\ 34'',8$

sullo spigolo s $\hat{D}_s = 2\arcsen\left(\frac{\sqrt{v}}{2h_s}\right) = 123° \, 55' \, 34'',8$.

sullo spigolo l_v $\hat{D}_{l_v} =$ 2 diedri base + diedro tetraedro.

Diedro base = $\arccos\left(\frac{l_v}{2\sqrt{3}a}\right) = \arccos\left(\frac{l_t \cdot 1.567486391}{2\sqrt{3} \cdot 0{,}538753283 \cdot l_t}\right) = 32° \, 52' \, 16'',78$

Diedro base = $32° \, 52' \, 16'',78$; $\hat{D}_{l_v} = 65° \, 44' \, 33'',56 + 70° \, 31' \, 43'',61 =$

$\hat{D}_{l_v} = 136° \, 16' \, 17'',1$ $K = 0{,}186547467$.

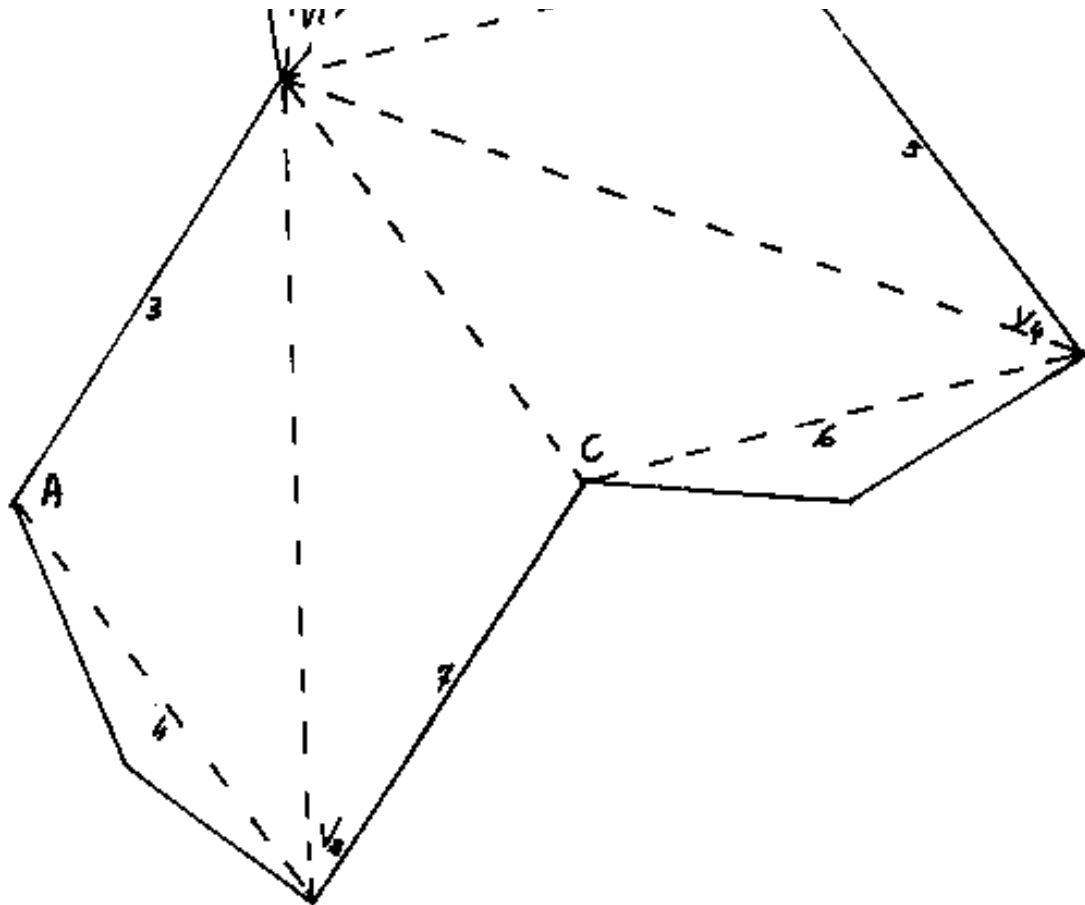
verifichiamo $K = K_2 = \frac{1}{3} \frac{(2\sqrt{6} - 3K_1)}{(\sqrt{6}K_1 + 1)}$ ove: $K_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} = 0{,}755761314$.

Schema di triacistetraedro avente gli stessi vertici di quello ottenuto sovrapponendo le piramidi dell'icosaedro però K = 0,186547467.

(convesso)

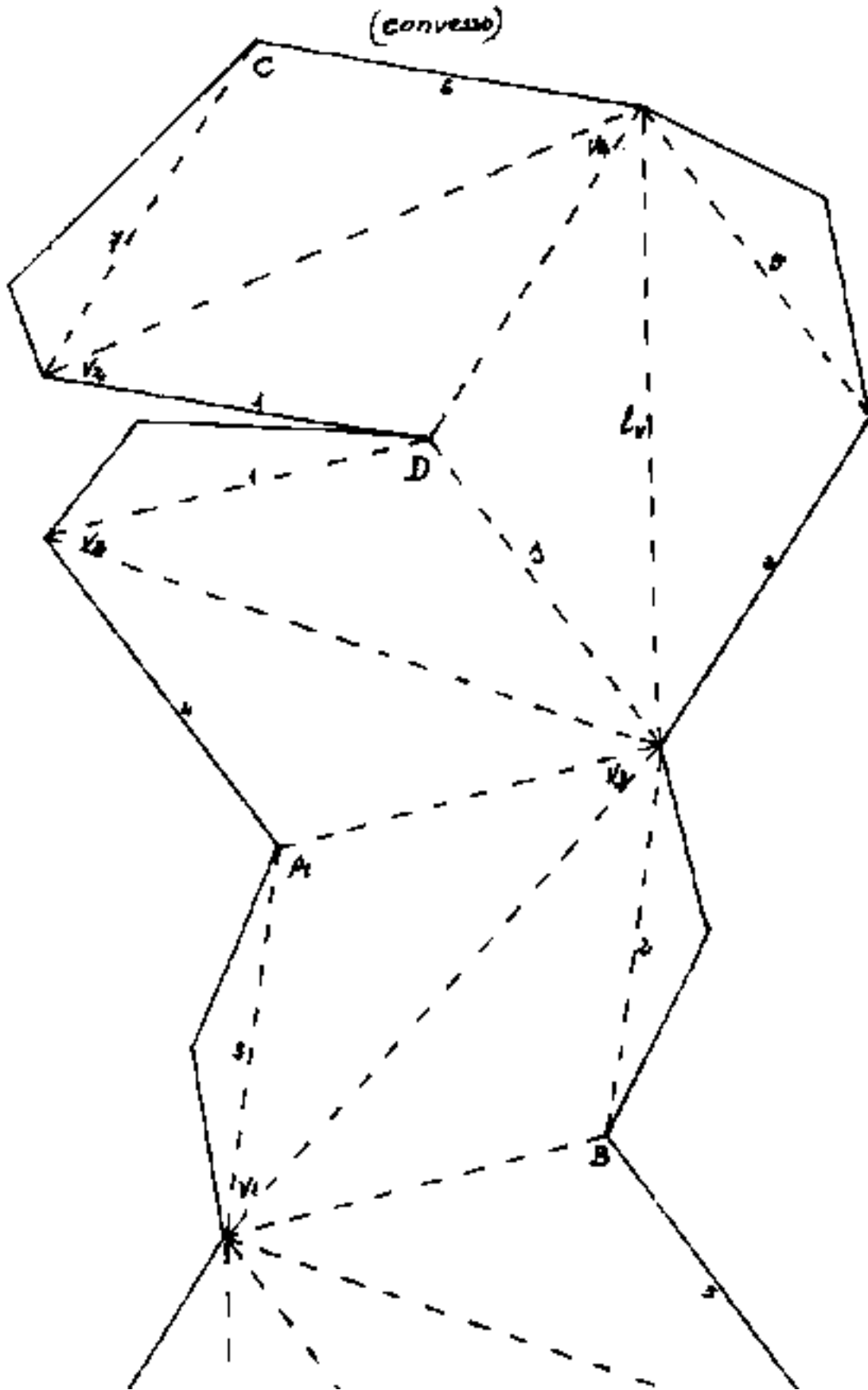
C 6 V4 5 7 V2 4 l_v D 1 V3 3 8 4 V3 A 2 3 V1 B

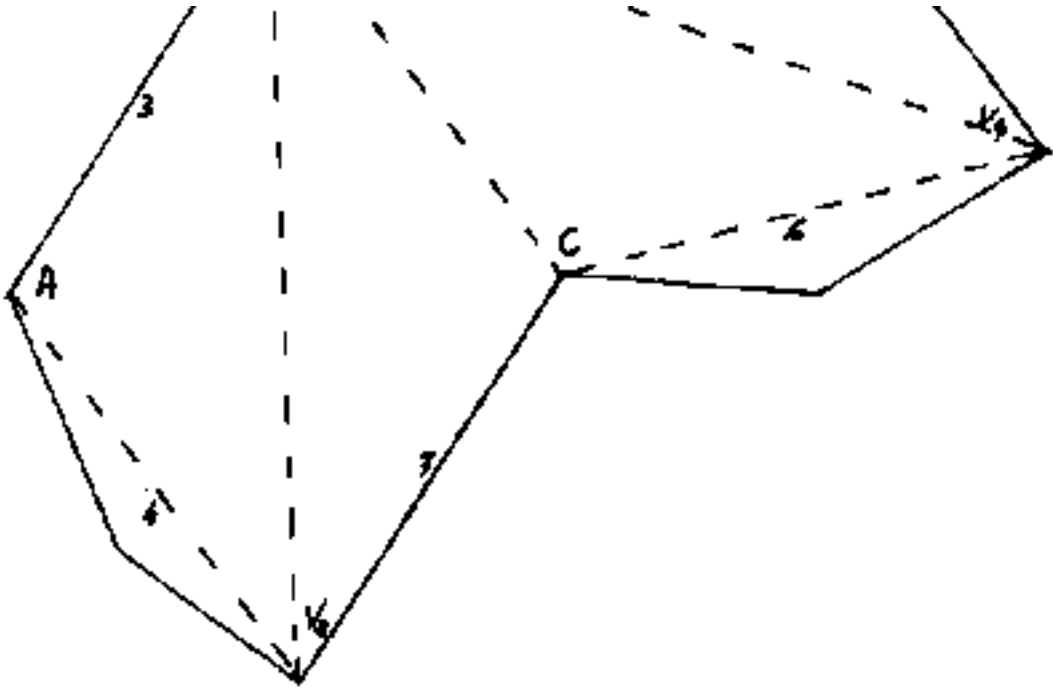
re, piegare lungo le linee tratteggiate, incollare le
adere gli spigoli omonimi.
lt ; V_1, V_2, V_3, V_4 = tetraedro di spigolo lv.

V₁ A C V₄ V₂ 3 4 7 6 9

Tagliare lungo le linee intere
linguette facendo corrispond
A,B,C,D = tetraedro di spigolo l=t

Schema di triacistetraedro avente gli stessi vertici di quello ottenuto sovrapponendo le piramidi dell'icosaedro però $K = 0{,}18654746$.

(convesso)

C, D, A, B, V_1, V_2, V_3, V_4, l_v, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

...nee intere, piegare lungo le linee tratteggiate, incollare le ...orrispondenti gli spigoli omonimi.

...li spigolo l_t ; V_1, V_2, V_3, V_4 = tetraedro di spigolo l_v.

Tagliare lungo le linee
linguette facendo cor
A, B, C, D = tetraedro di s

Considerazioni sul K. dei triacistetraedri.

Se per $K<0$ intendiamo $\overline{TV}$ penetrante nel tetraedro di spigolo l_t, non sarebbe più ortodosso il prefisso Cis = al di qua, in ogni caso: $(-\gamma_i) < K < 0$; $\left(-\gamma_i = \frac{\sqrt{6}}{12} = -0,204124\right)$. $(K_2 = \infty)$

Per $K \geqslant 0$ per ogni altezza $\overline{TV} = Kl_t$ si hanno 8 vertici i quali ammettono un'altro triacistetraedro il cui K è

$$K_2 = \frac{\sqrt{8/3} - K_1}{2\sqrt{6}K_1 + 1} = \frac{1}{3}\frac{(2\sqrt{6} - 3K_1)}{(2\sqrt{6}K_1 + 1)}.$$

Per $K_1 = 0$; $\rightarrow K_2 = \frac{2}{3}\sqrt{6} = 1,63299316$

per $K_1 = \frac{\sqrt{6}}{15} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}/5}{\frac{4}{5} + 1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{9\sqrt{6}}{9}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,81649658$

per $K_1 = \frac{\sqrt{6}}{12} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}/4}{1 + 1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{7\sqrt{6}}{8}\right) = \frac{7}{24}\sqrt{6} = 0,71443508$

per $K_1 = \frac{\sqrt{6}}{6} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}/2}{2 + 1}\right) = \frac{1}{3}\frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6} = 0,40824829$

per $K_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{6} - \frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}}{\frac{2\sqrt{6}(3+\sqrt{5})}{4\sqrt{3}} + 1}\right) = \frac{8\sqrt{2} - (3+\sqrt{5})}{4\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}(3+\sqrt{5}) + \sqrt{3}\right)} = \frac{16 - \sqrt{10} - 3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}(3+\sqrt{2}+\sqrt{5})} = 0,186547467$

per $K_1 = \sqrt{6}/3 \rightarrow K_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} + 1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{5}\right) = \frac{\sqrt{6}}{15} = 0,163299316$

per $K_1 = 1 \rightarrow K_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{6} - 3}{2\sqrt{6} + 1}\right) = 0,107305537$

per $K_1 = \frac{2}{3}\sqrt{6} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{6}}{8 + 1}\right) = 0$

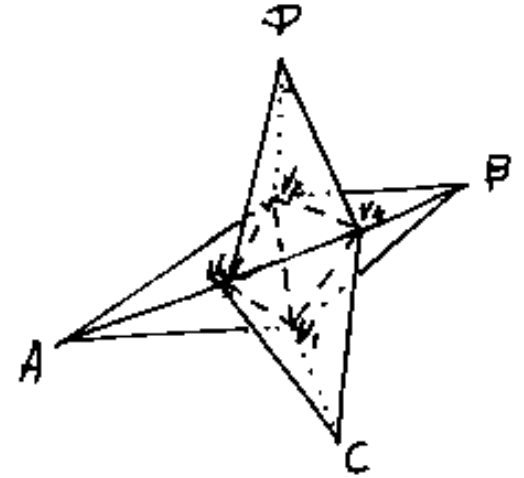
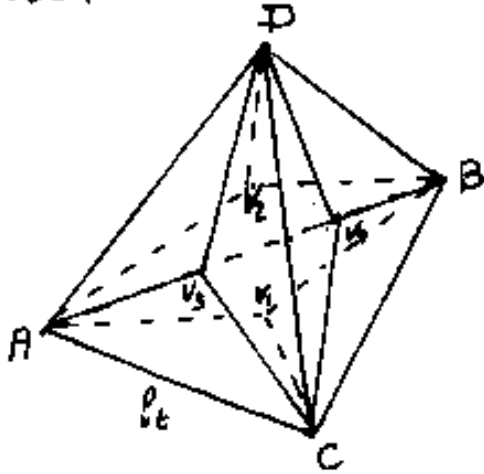
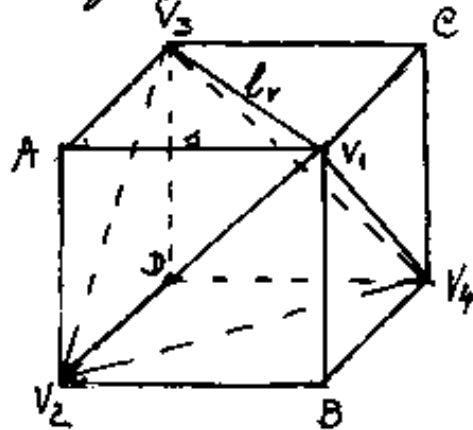
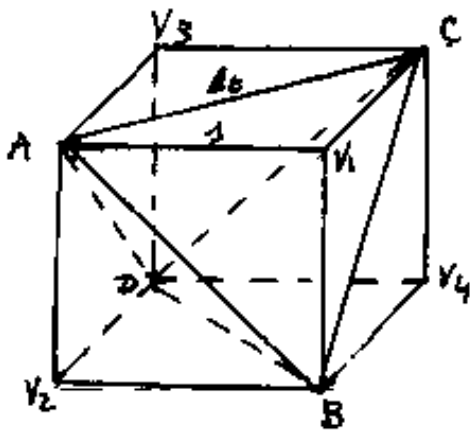
per $K_1 = \sqrt{6} \longrightarrow K_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{6} - 3\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{6} + 1}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{13}\right) = -0,0628$

$\lim_{K_1 \to \infty} \longrightarrow K_2 = -\frac{\sqrt{6}}{12} = -0,204124.$ (vedi sopra).

K quindi può variare da $-r_i = -\sqrt{6}/12 = -0{,}204124$ a più infinito. A due a due i K sono abbinati nel senso che con la stessa posizione dei vertici possiamo avere due triacistetraedri.

$K = -\frac{\sqrt{6}}{12}$ è tale che le piramidi sottratte arrivano col vertice al centro del tetraedro di cui rimangono i soli poliedri angoloidi. Il suo $K_2 = +\infty$ in cui, rispetto ad ∞, spariscono le dimensioni in campo reale e si hanno quattro semirette che sono le rette di giacitura dei piani paralleli alle facce del tetraedro, partono dal centro O ed hanno l'altro estremo V all'infinito.

Il campo dei K minori di zero ha abbinati i K che da ∞ scendono a $\frac{2}{3}\sqrt{6} = K = 1{,}63299316$ per $K = 0$ (caso limite) ove il solido è un tetraedro ove le piramidi aggiunte, essendo $\overline{TV} = 0$, si presentano con gli spi=

goli disegnati sulle facce del tetraedro stesso unendo i vertici col centro faccia. il K abbinato $(\frac{2}{3}\sqrt{2})$ porta ad un l_v pari alla distanza fra i centri faccia del tetraedro.

Il campo di maggior interesse è quello che va da $K = 0$ a $K = \frac{2}{3}\sqrt{6} = 1,63299316$. ove i K crescenti da 0 a $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ ed i corrispettivi K decrescenti da $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ a $\frac{\sqrt{6}}{6}$ trovano negli 8 vertici del cubo lo stesso solido con lo stesso K; dalle figure è possibile

vedere come $l_t = l_v$ siano le due diagonali delle facce del cubo ove riguardato come tria=cistetraedro essendo il diedro $\hat{D}_{l_v} = \hat{D}_{l_t} = 180°$ ogni faccia del cubo comprende due facce dei due triacistetraedri.

Oltre questo caso limite i due solidi aventi gli stessi vertici risultano uno convesso e l'altro

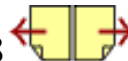
Concavo.

consideriamo ora alcuni valori caratteristici del parametro K, e raggruppiamo i risultati in una tabella.

TAVOLA dei TRIACISTETRAEDRI

$TV = K l_t$	s	$\hat{D}_{l_t}$	$\hat{D}_s$	angoli delle facce		NOTE
				al vertice	alla base	
0	$l_t/\sqrt{3}$	70° 31' 44"	180°	120°	30°	tetraedro a facce rigate
$(\sqrt{6}/15)\, l_t$ $0{,}1632993162 \cdot l_t$	$3/5\, l_t$ $0{,}6\, l_t$	129° 31' 16"	129° 31' 16"	112° 53' 07"	33° 33' 26"	TRIACISTETRAEDRO a diedri uguali
$(\sqrt{6}/12)\, l_t$ $0{,}204124145\, l_t$	$\sqrt{6}/4 \cdot l_t$ $0{,}612372436\, l_t$	141° 03' 28"	180°	109° 28' 16"	35° 15' 52"	Le piramidi aggiunte sono gli angoloidi del tetraedro stesso.
$(\sqrt{6}/6)\, l_t$ $0.408248290\, l_t$ $Kl_t = (\rho_1 - r_1)$ vertice sulla	$1/\sqrt{2}\; l_t$ $0{,}707106781\, l_t$ caso limite di solido convesso	180°	90°	90°	45°	CUBO con facce ri= gate da diagonali Le piramidi aggiunte sono gli angoloi del=

sfera.						e ottaedro.
$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right) l_t$ $0{,}755761314 \cdot l_t$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right) l_t$ $0{,}951056517 \cdot l_t$	208° 43' 07" concavo esternamente	72°	63° 26' 06"	58° 16' 57"	SOLIDO che presentá concavitá ottenuto sovrapponendo gli ango: loidi dell'icosaedro
$(\sqrt{6}/3)\, l_t$ $0{,}81649658 \cdot l_t$	$1 \cdot l_t$ $1{,}00000 \cdot l_t$	211° 35' 12" concavo esternamente	70° 31' 44"	60°	60°	TETRACEDRON ELEVATUS ottenuto sovrapponendo tetraedri stessi.

Il tetracisesaedro

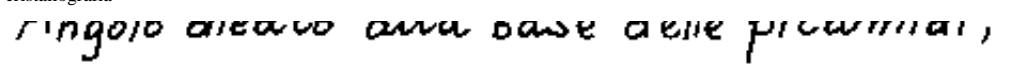
Consideriamo ora i solidi che nascono dal cubo (esaedro); se pensiamo di aggiungere al cubo piramidi a base quadrata avremo la classe di solidi detti: tetracisesaedri. $\begin{pmatrix} F & + & V & = S+2 \\ 24 & + & 14 & = 26+2 \end{pmatrix}$

Consideriamo il nostro cubo inscritto in una sfera e sia "l_c" lo spigolo del cubo ed $\rho_1 = \frac{l_c}{2}\sqrt{3}$ il raggio della sfera circoscritta. Se dal centro delle facce del cubo, tracciamo le perpendicolari fino ad incontrare la superficie sferica avremo che il segmento: $(\rho_1 - \frac{l_c}{2}) = \frac{l_c}{2}(\sqrt{3}-1)$, sarà l'altezza delle piramidi: $\overline{TV} = l_c(0,36602540З)$, che aggiunte al cubo danno il tetracisesaedro inscrittibile in una sfera.

Gli spigoli di tali piramidi saranno: $s = \sqrt{\overline{TV}^2 + (l_c/\sqrt{2})^2}$

$s = \sqrt{\left[\frac{l_c}{2}(\sqrt{3}-1)\right]^2 + \left[\frac{l_c}{2}\sqrt{2}\right]^2} = \boxed{\frac{l_c}{2}\sqrt{6-2\sqrt{3}}} = s = l_c(0,796225217)$.

L'apotema di una faccia: $a = \sqrt{s^2 - (\frac{l_c}{2})^2} = \boxed{\frac{l_c}{2}\sqrt{5-2\sqrt{3}} = a}$

$a = l_c(0,619656837)$. Angolo diedro alla base delle piramidi,

angolo diedro alla base delle piramidi;

fra base e faccia: $\hat{D}_b = \arccos\left(\frac{l}{2a}\right) = 36°\,12'\,21'',48$

diedro su $l_c = \hat{D}_{l_c} = \left(2\hat{D}_b + 90°\right)$; $\hat{D}_{l_c} = 162°\,24'\,43'',3$

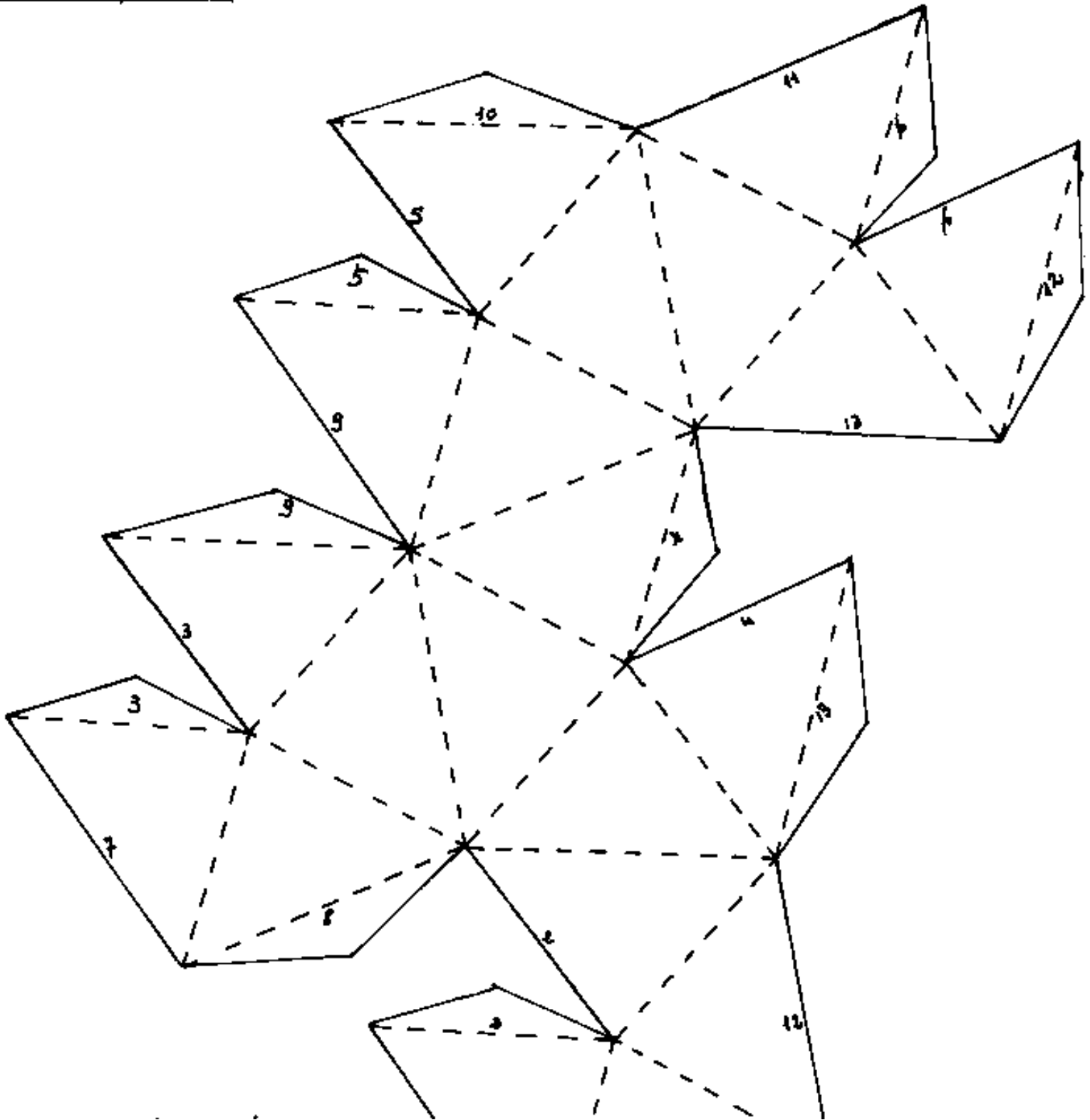
$h_s = \frac{l\,a}{s} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{7-\sqrt{5}}{3}} = l(0{,}7782431\ldots)$; diedro su $s =$

$= \hat{D}_s = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{l/\sqrt{2}}{h_s}\right) = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\sqrt{\frac{6}{9-\sqrt{5}}}\right) = 130°\,37'\,24'',3$

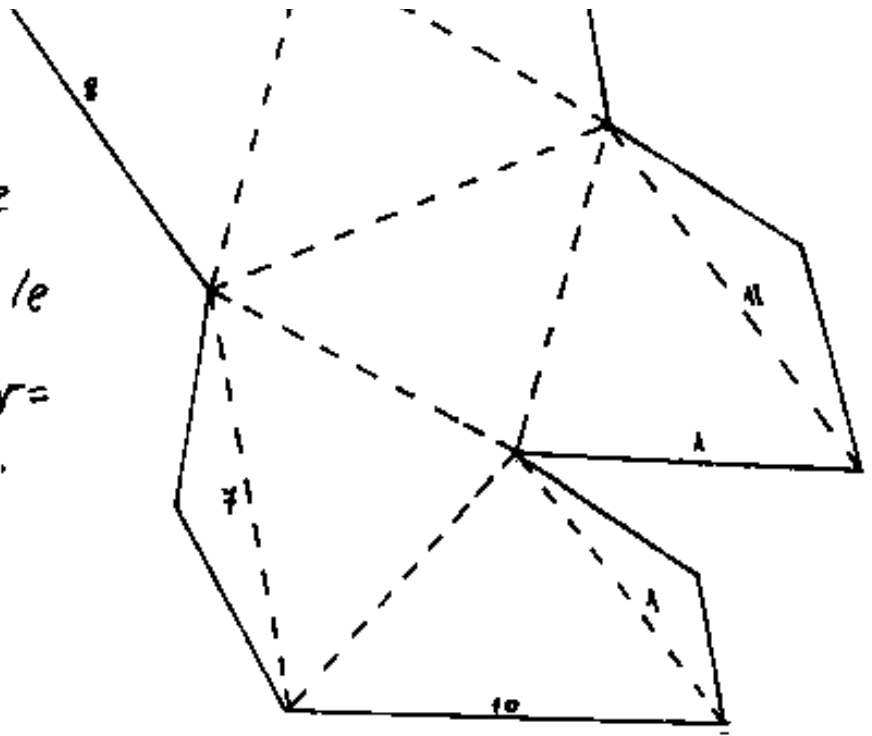
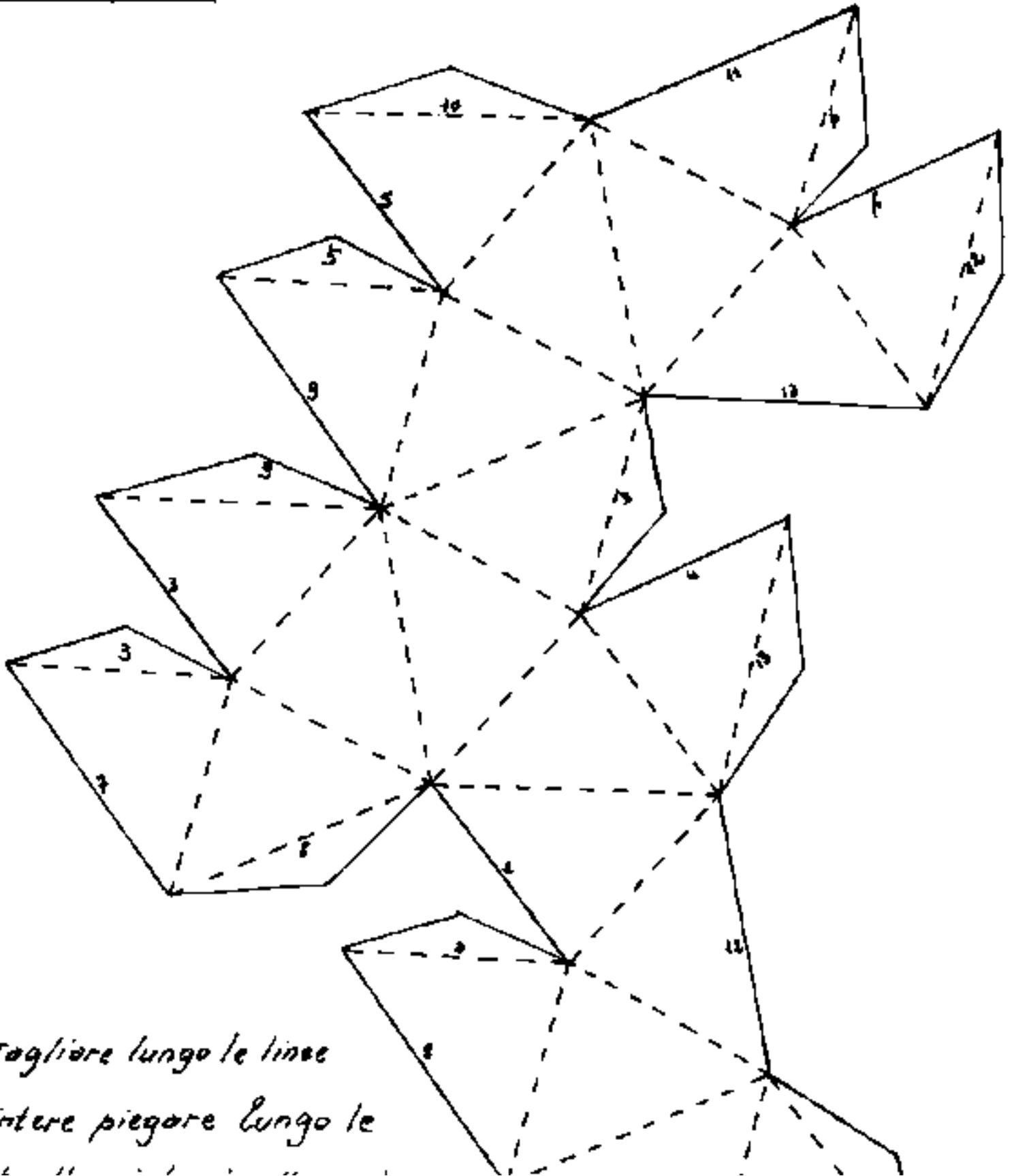
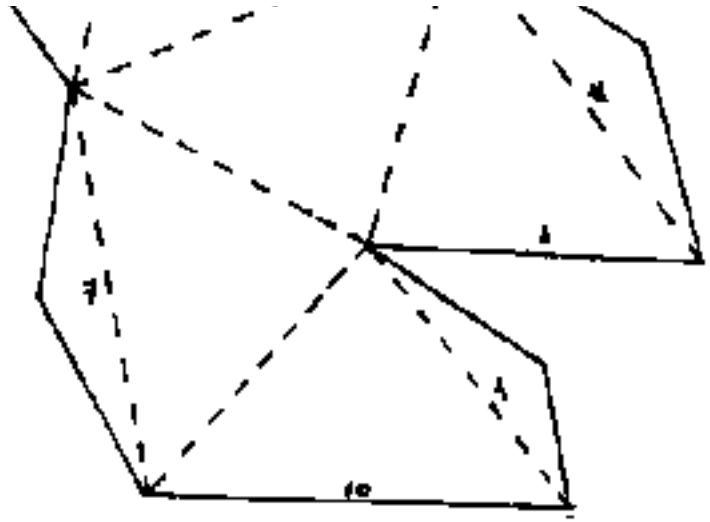
angoli delle facce:

al vertice $\hat{V} = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{l}{2s}\right) = 77°\,47'\,59'',19 \simeq 77°\,48'$

alla base $\alpha = \arccos\left(\frac{l}{2s}\right) = 51°\,06'\,00'',01 \simeq 51°\,06'$

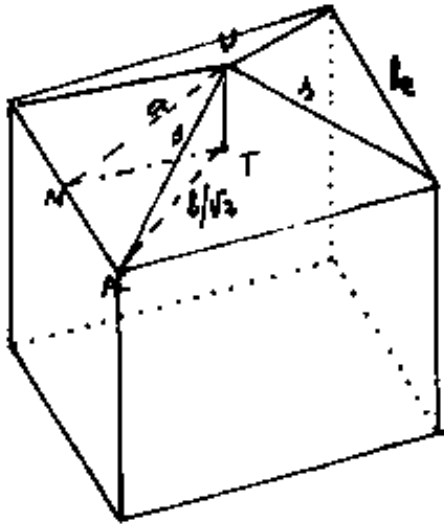
sviluppo del tetracisesaedro inscrittibile in una sfera (convesso)

Tagliare lungo le linee intere piegare lungo le tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli con gli stessi numeri.

sviluppo del tetracisesaedro inserittibile in una sfera (convesso)

Tagliare lungo le linee intere piegare lungo le

tratteggiate, incollare le
linguette facendo cor=
rispondere gli spigoli
con gli stessi numeri.

Analogamente a quanto abbiamo detto per il triacistetroedro, indichiamo con $l_c K = \overline{TV}$ l'altezza delle piramidi aggiunte. Su tale base calcoliamo gli elementi del <u>tetracisesaedro</u>.

$\overline{TV} = K l_c$

$\overline{NV} = a = l_c\sqrt{K^2 + \frac{1}{4}}$ $\qquad \boxed{a = \frac{l_c}{2}\sqrt{1 + 4K^2}}$

$\overline{AV} = s = l_c\sqrt{K^2 + \frac{1}{2}}$ $\qquad \boxed{s = \frac{l_c}{2}\sqrt{2 + 4K^2}}$

$\boxed{l_c = \frac{2s}{\sqrt{2 + 4K^2}}}$ (s = spigolo)

<u>Angoli delle facce</u>: =
- <u>al vertice</u> $= 2\,\text{arcsen}\left(\frac{l_c}{2s}\right) = \boxed{2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2+4K^2}}\right)}$
- <u>alla base</u> $= \boxed{\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2+4K^2}}\right)}$

<u>Area delle facce</u>: $= A_f = \frac{l a}{2} = \boxed{\frac{l^2\sqrt{1+4K^2}}{4}} = \boxed{\frac{s^2\sqrt{1+4K^2}}{(2+4K^2)}}$

<u>altezza relativa ad s</u> $= h_s = \frac{2A_f}{s} = \boxed{l_c\sqrt{\frac{1+4K^2}{2+4K^2}}}$

<u>Area della superficie del solido</u> $= \boxed{S = l^2\, 6\sqrt{1+4K^2}}$

<u>Volume di una piramide</u> $= \boxed{V_p = \frac{K l^3}{3}}$

volume del solido = $V = l_c^3(1+2K)$

Angoli diedri:

α_b = delle facce della piramide con la base = $\mathrm{arctg}\left(\frac{K l_c}{l_c/2}\right)$ = $\alpha_b = \mathrm{arctg}(2K)$

$\hat{D}_1$ = (fra le facce della piramide) = $2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{l/\sqrt{2}}{h_1}\right)$ = $\hat{D}_1 = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\sqrt{\frac{1+2K^2}{1+4K^2}}\right)$ =

$\hat{D}_1 = 2\,\mathrm{arccos}\left(\frac{2K}{\sqrt{2+8K^2}}\right)$; $\hat{D}_1 = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{K}\sqrt{\frac{1+2K^2}{2}}\right)$

$\hat{D}_{l_c} = (2\alpha_b + 90°)$ sullo spigolo l_c : $\hat{D}_{l_c} = 2\,\mathrm{arctg}(2K) + 90°$

Passiamo ora determinare K affinché il solido abbia angoli diedri uguali. (Cioè: $\hat{D}_1 = \hat{D}_{l}$), avremo:

$$2\,\text{aruotg}\left(\frac{1}{K}\sqrt{\frac{1+2K^2}{2}}\right) = 2\,\text{arctg}(2K) + 90°$$

$$\text{arctg}\left(\frac{1}{K}\sqrt{\frac{1+2K^2}{2}}\right) - \text{arctg}(2K) = 45° \quad ; \quad (\alpha-\beta) = 45°$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta} = \frac{\sqrt{\frac{1}{K^2}+1} - 2K}{1+2\sqrt{\frac{1+2K^2}{2}}} = 1 \; ; \; \frac{1}{K}\sqrt{\frac{1+2K^2}{2}} - 2K = 1 + 2\sqrt{\frac{1+2K^2}{2}}$$

$$\left(\frac{1-2K}{K}\right)\sqrt{\frac{1+2K^2}{2}} = 1+2K \; ; \; \left(\frac{1+2K^2}{2}\right) = \left(\frac{K+2K^2}{1-2K}\right)^2 ; \; (1+2K^2)(1-2K)^2 = 2(K)^2(1+2K)^2$$

$$(1+2K^2)(1+4K^2-4K) = 2K^2(1+4K^2+4K) \; ; \; 1+4K^2-4K-8K^3 = 8K^3$$

$16K^3 - 4K^2 + 4K - 1 = 0$; unica radice reale : $\underline{K = 0,25}$

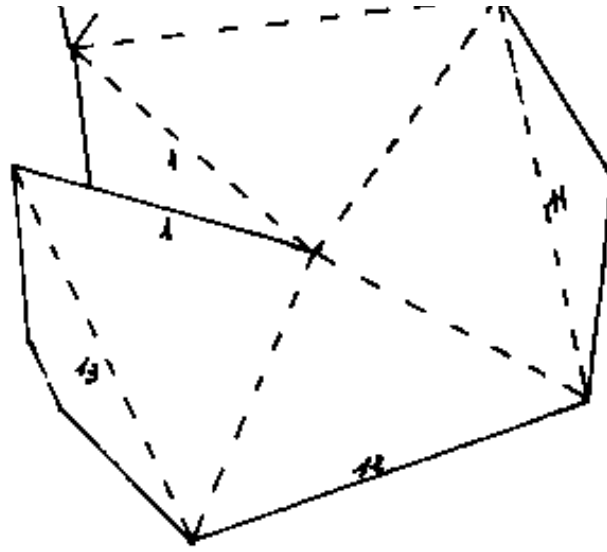
Riportiamo gli elementi del solido al variare di K

TABELLA dei TETRACISESAEDRI

K	s/l_c	$\hat{D}_{l_c}$	$\hat{D}_1$	angoli delle facce al vertice	angoli delle facce alla base	NOTE
0	$1/\sqrt{2}$	90°	180°	90°	45°	Cubo a facce rigate dalle diagonali
0,15	0,722841614	123° 33' 54",156	156° 33' 12"	87° 31' 55"	46° 14' 02"	
0,25	0,75	143° 07' 48",263	143° 07' 48",263	83° 37' 14"	48° 11' 22",86	TETRACISESAEDRO a diedri uguali
$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ 0,366025404	0,796622521	162° 24' 43",344	130° 37' 24",344	77° 47' 59",98	51° 06' 00"	TETRACISESAEDRD inscrittibile in

Schema di sviluppo del tetracisesaedro a diedri uguali.

o tratto continuo,
e a tratteggio,
te facendo com=
numerati.

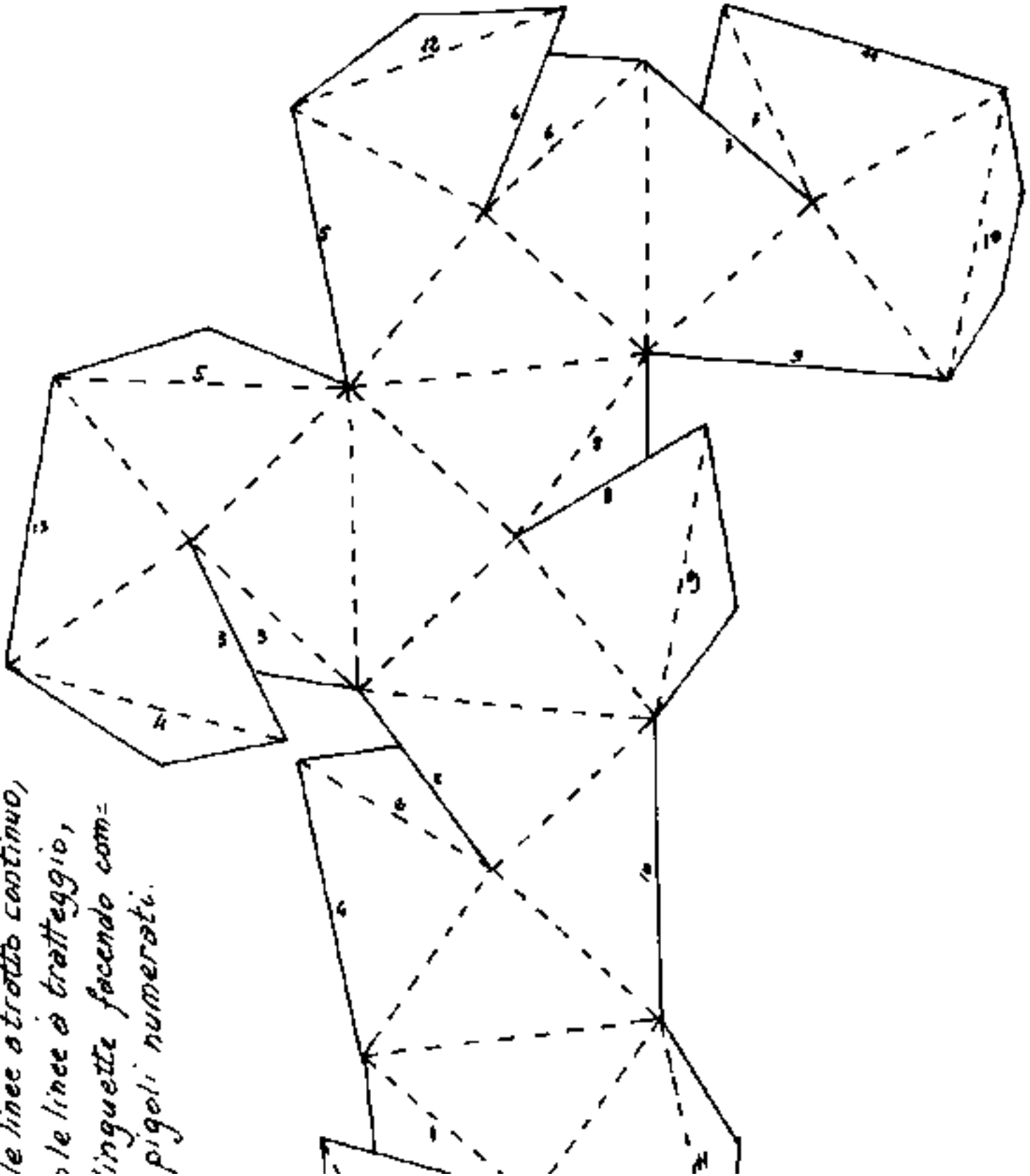
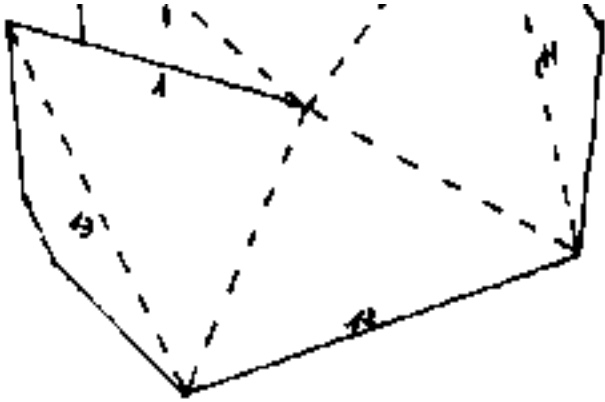
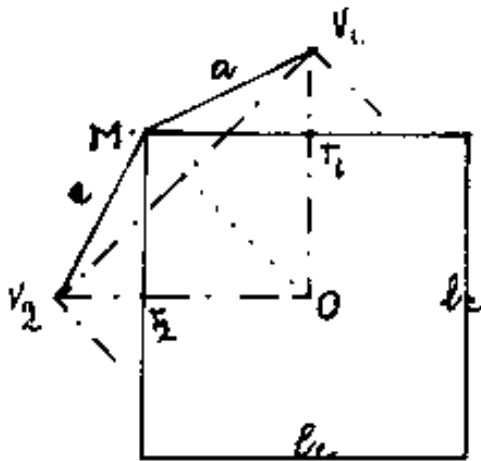
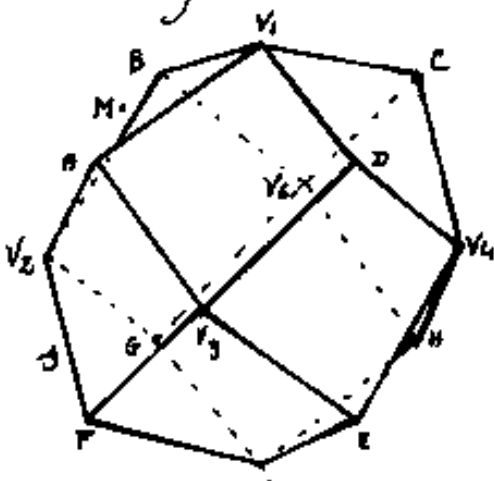
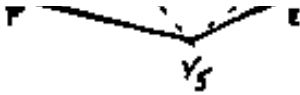
Tagliare lungo le linee a
piegare lungo le linee
incollare le linguette
baciare gli spigoli

1

11

13

11

Schema di sviluppo del tetracisesaedro a diedri uguali.

...le linee a tratto continuo,
...le linee a tratteggio,
...linguette facendo com-
...pigoli numerati.

Tagliare lungo le l
piegare lungo le
incollare le ling
baciare gli spig

Anche per il tetracisesaedro possiamo considerare immutata la posizione dei vertici e tracciare il segmento che congiunge i vertici delle piramidi anziché i lati di base delle piramidi. Se sezioniamo il solido con un piano parallelo alle facce del cubo e passante per il centro O del cubo stesso, noi tagliamo le facce del tetracisesaedro secondo le apoteme "a" = $\overline{MV_1} = \overline{MV_2}$.

Dalla figura notiamo che: $\overline{V_1V_2} = \overline{OV}\sqrt{2} = \ell_c(\frac{1}{2}+K)\sqrt{2} = \ell_v$, indicando con $\ell_v = \overline{V_1V_2}$ lo spigolo sostituito ad ℓ_c, mentre la lunghezza dello spigolo "s" resta invariata, e resta invariata anche la sua posizione in quanto congiunge vertici invariati. Si noti però che i vertici del cubo (indicati con

F E V_5

lettere) sono 8 (A, B, C, D, E, F, G, H), mentre i vertici delle piramidi aggiunte sono solo 6, (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6). ciò vuol dire che congiungendo i vertici delle piramidi aggiunte al cubo otteniamo un ottaedro e quindi il solido ottenuto con tutti i vertici scambiando l_c con l_v è un triacisottaedro ed il solido limite è il rombododecaedro.

Un tetracisesaedro concavo è un triacisottaedro convesso, e viceversa. Il rombododecaedro avendo due facce triangolari sullo stesso piano ha l'angolo diedro $\hat{D}_{l_a} = 180°$ che è il passaggio da solido concavo a convesso o viceversa.

Per i tetracisesaedri il K che da il rombododecaedro è $\boxed{K = 0,5}$.

Notiamo che per il triacistetraedro il solido di transizione è <u>il cubo</u> ed un <u>triacistetraedro</u> concavo diventa convesso o viceversa scambiando l_t con l_v, ma è sempre un triacistetraedro perché sia l'unione dei vertici lettere, sia l'unione dei vertici di piramidi aggiunte, si ha sempre un tetraedro, più grande o più piccolo, solo nel cubo i due tetraedri sono uguali. Per i triacistetraedri il K che da il cubo è $\boxed{K = \sqrt{6}/6}$

Ricordiamo che il cubo è ottenuto aggiungendo

al tetraedro le piramidi che sono gli angoloi poliedri che formano l'ottaedro.

Si noti come il rombododecaedro visto come solido di transizione acquisti notevole importanza.

"Lo spazio può essere in soli rombododecaedri senza soluzione di continuità, oppure in soli cubi, e nessun altro solido ha questa proprietà"

Il Rombododecaedro

Notiamo che non possiamo sovrapporre al cubo le piramidi dei poliedri angoloidi che costituiscono il tetraedro, l'ottaedro, l'icosaedro perché sono a base triangolare non sovrapponibile alla base quadrata del cubo. Lo stesso per il dodecaedro che ha facce (base delle piramidi) pentagonali. Non rimane quindi che sovrapporre le piramidi dei poliedri che costituiscono il cubo stesso; ed avremo: l_c = spigolo del cubo ; $\boxed{\rho_\Delta = \frac{l_c\sqrt{3}}{2} = s}$ = semidiagonale del cubo = raggio della sfera circoscritta = spigolo delle piramidi da sovrapporre ; $a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_c}{2}\right)^2}$ = apotema delle facce = $\boxed{a = \frac{l_c}{2}\sqrt{2}}$ = semidiagonale della faccia del cubo. Altezza delle piramidi: $\boxed{\overline{TV} = l_c/2}$. Angolo diedro fra le facce della piramide e la base $\boxed{\hat{D}_b = 45°}$; quindi l'angolo diedro su $l_c = \hat{D}_{l_c} = 2\hat{D}_b + \hat{D}_{cubo} = 2(45°) + 90° = \boxed{\hat{D}_{l_c} = 180°}$ cioè le due facce delle due piramidi risultano avere un angolo diedro di 180°, cioè sono complanari e

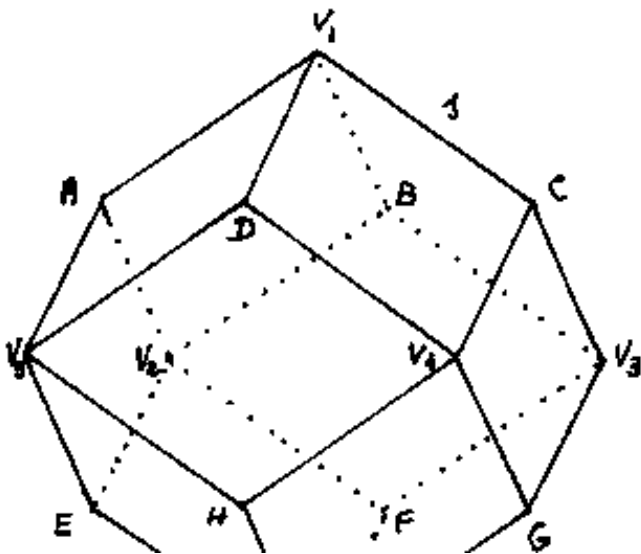
un angolo diedro di 180, cioè sono complanari e formano un'unica faccia rombica di lato $s = \frac{l_c\sqrt{3}}{2}$ di diagonale minore $= l_c$; di diagonale maggiore $= 2a = l_c\sqrt{2}$ = diagonale di faccia del cubo. Il solido (convesso) é un rombododecaedro (12 facce anziché 24 come i tetracisesaedri) (12 F + 14 V = 24 S + 2). Ultimo solido convesso al crescere dell'altezza delle piramidi.

Una ulteriore crescita di tali altezze porterebbe alla formazione di tetracisesaedri aventi concavo il diedro su l_t ($\hat{D}_{l_t}$); perchè le facce triangolari delle piramidi, superato l'allineamento sul piano per formare le facce del rombododecaedro, formerebbero concavità verso l'esterno. Nel rombododecaedro abbiamo:

Angoli diedri : $\hat{D}_s = 120°$; $\hat{D}_{l_t} = 180°$

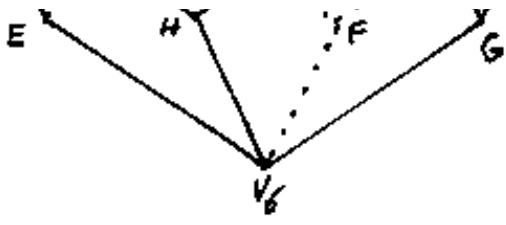
Angoli delle facce rombiche

al vertice delle triangolari $= 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 70° 31' 43'',61$

doppio angolo di basi triangolari affacciate $= 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2}) = 109° 28' 16'',3$

Il rombododecaedro non è inscrittibile in una sfera, infatti i vertici "V" da cui si dipartono i quattro spigoli "s", distano dal centro "O" del solido $\left(\rho_s = \frac{l_t}{2} + \overline{TV} = l_t\right)$;

E H F G

V_6

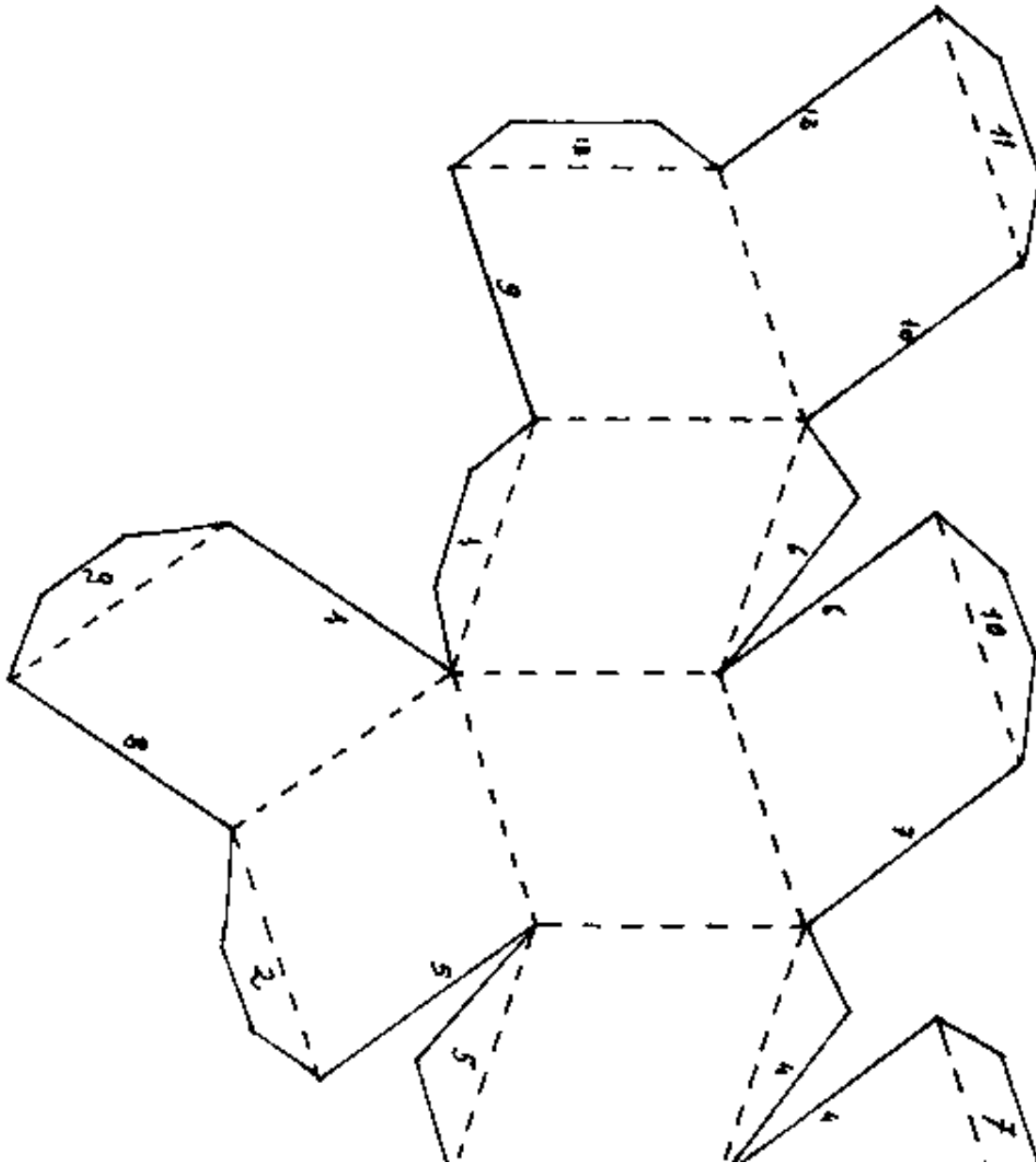
[illegible] $l_s = \frac{\ldots}{2}$ [illegible]

mentre i vertici da cui si dipartono tre spigoli distono dal centro $\frac{l_c}{2}\sqrt{3} = 0,8660254\, l_c < l_t$, e non possono quindi arrivare alla superficie sferica degli altri vertici.

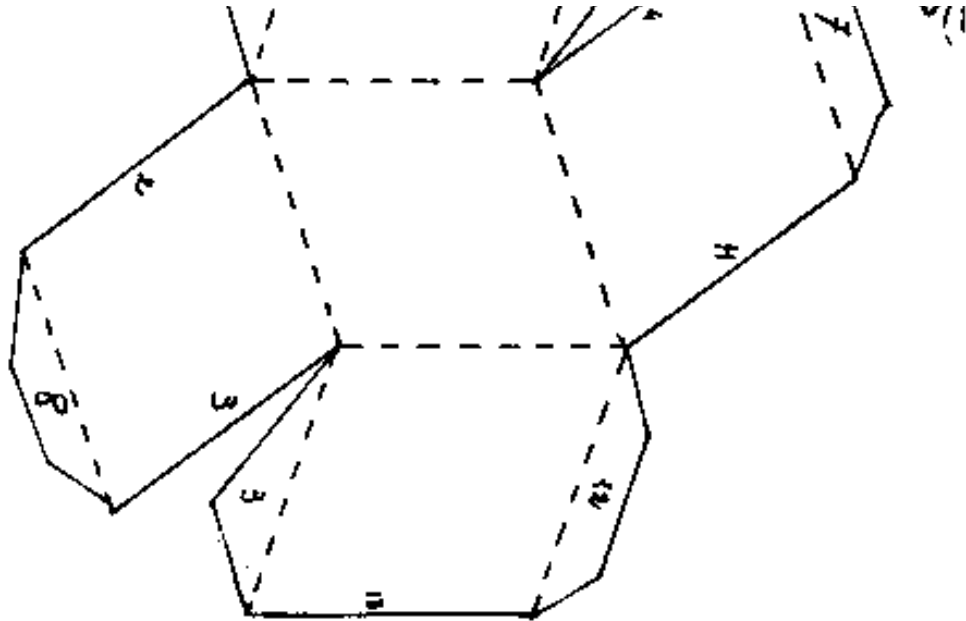
s = lato faccia del rombo $= \frac{l_c}{2}\sqrt{3}$; l_c = lato cubo = diagonale minore del rombo $= \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = \overline{HD} = \overline{GC} = \overline{FB}$; diagonale maggiore $= 2a = l_c\sqrt{2}$.

Area di una faccia $= \frac{S}{12} = \frac{l_c^2}{\sqrt{2}}$;

distanza fra due lati paralleli: $\left(l_c^2/\sqrt{2}\right)\left(2/l_c\sqrt{3}\right) = l_c\sqrt{\frac{2}{3}}$;

<u>Supeficie laterale del solido</u>: $S = l_c^2 \frac{12}{\sqrt{2}}$. $S = (6\sqrt{2})\,l_c^2$

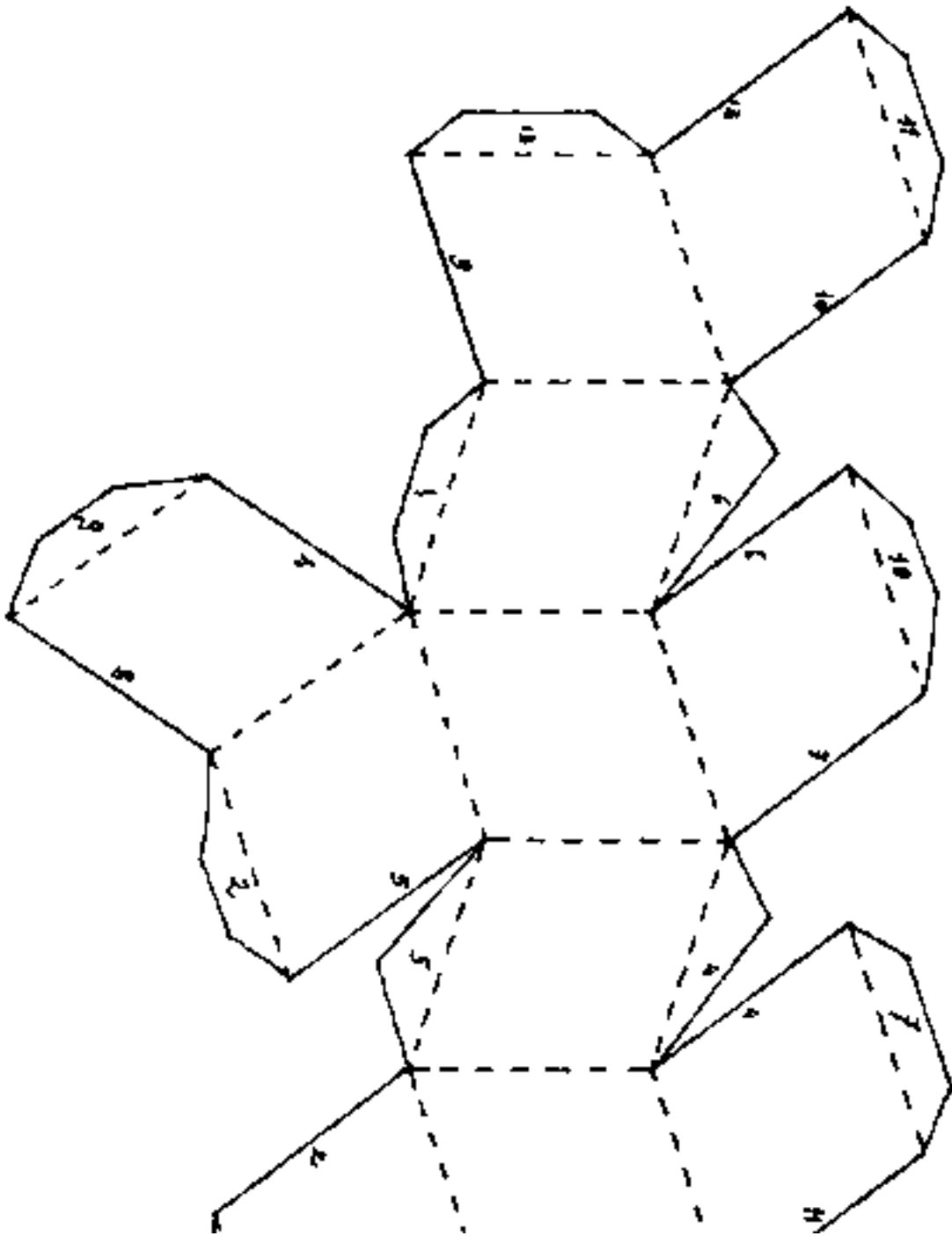
<u>Volume del solido</u> (doppio volume del cubo) $V = 2\,l_c^3$

<u>Schema di rombododecaedro</u>

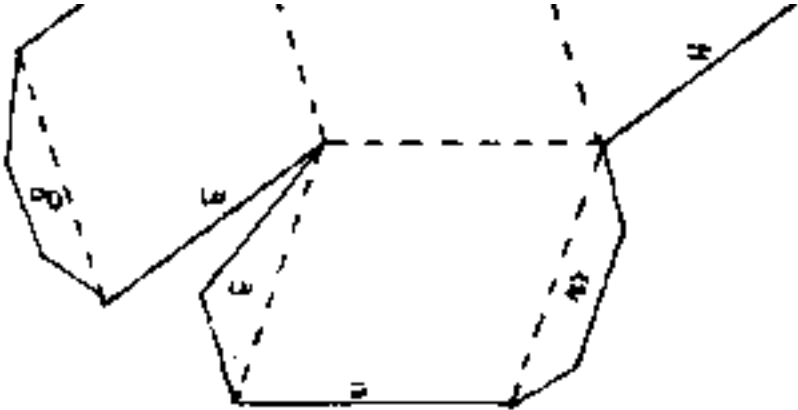
...ere, piegare le tratteggiate, incollare le linguette gli spigoli numerati.

NB. tagliare lungo le linee intere
facendo corrispondere gli

Area di una faccia $= \frac{S}{12} = \frac{l_c^2}{\sqrt{2}}$;

distanza fra due lati paralleli : $\left(l_c^2/\sqrt{2}\right)\left(2/l_c\sqrt{3}\right) = l_c\sqrt{\frac{2}{3}}$;

Superficie laterale del solido : $S = l_c^2 \frac{12}{\sqrt{2}}$. $S = (6\sqrt{2})\, l_c^2$

Volume del solido (doppio volume del cubo) $V = 2\, l_c^3$

Schema di rombododecaedro

le linee intere, piegate le tratteggiate, incollate le linguette, prendere gli spigoli numerati.

Il triacisottaedro

$(24F + 14V = 36S + 2)$

Consideriamo i solidi che nascono dall'ottaedro per sorrapposizioni di piramidi, cioè la classe dei solidi: triacisottaedri.

Per l'ottaedro sappiamo che il raggio della sfera circoscritta è: $\boxed{\rho_s = \frac{l_0}{\sqrt{2}}}$, (ove: l_0 = spigolo dell'ottaedro). Poichè il raggio della sfera inscritta è: $\boxed{r_i = \frac{l_0}{\sqrt{6}}}$ avremo che se: $\boxed{\overline{TV} = K l_0}$ è l'altezza delle piramidi aggiunte; affinchè anche il loro vertice sia sulla sfera circoscritta dovrà essere: $r_i + \overline{TV} = \rho_s$, cioè: $\boxed{\overline{TV} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) l_0}$ od anche: $K = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}29885849$ è il coefficiente dei triacisottaedri inscrittibili in una sfera.

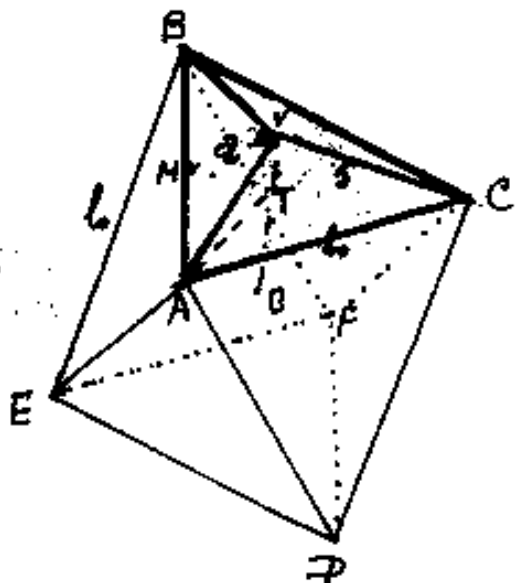
Sappiamo che addizionando all'ottaedro le piramidi dei poliedri angoloidi che formano il tetraedro si ottiene il rombododecaedro. L'altezza di tali piramidi è $\overline{TV} = \frac{l_0}{2\sqrt{6}}$, $\left(K = \frac{1}{2\sqrt{6}} = 0{,}20412414\right)$. Essendo il

[illegible] $\frac{\ldots}{2\sqrt{6}}$, ([illegible] $\frac{\ldots}{2\sqrt{6}}$ [illegible]). [illegible]

rombododecaedro anche solido di transizione fra i triacisottaedri convessi, ed i triacisottaedri concavi, ed essendo: 0,20412414 5 < 0,29885849, si ha che il triacisottaedro inscritto in una sfera è concavo.

Abbiamo già visto che un triacisottaedro concavo, ha gli stessi vertici di un tetracisesaedro convesso.

(vedi capitolo tetracisesaedri)

Analogamente agli altri solidi, cerchiamo di determinare gli elementi in funzione di K. ed indichiamo con l_o lo spigolo dell'ottaedro.

Si noti che le piramidi avendo la stessa base triangolare equilatera di quelle sovrapposte al tetraedro, quindi le espressioni in funzione di K saranno uguali, salvo il diedro $\hat{D}_{e,i}$ perché il diedro dell'ottaedro (109° 28' 16") è diverso dal diedro del tetraedro (70°31'44"). Avremo quindi: $\overline{VT} = K l_o$; $\overline{MV} = a = l_o\sqrt{K^2+\frac{1}{12}}$

$\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = s = l_o\sqrt{K^2+\frac{1}{3}}$; $h_s = \frac{l_o}{2}\sqrt{\frac{1+12K^2}{1+3K^2}}$

angoli delle facce:
- al vertice $= 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{K^2+\frac{1}{3}}}\right)$
- alla base $= \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{K^2+\frac{1}{3}}}\right)$

angoli diedri:

fra faccia e base delle piramidi: $\hat{D}_b = \operatorname{arctg}(2K\sqrt{3})$

fra facce su s : $\hat{D}_s = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{1+3K^2}{1+12K^2}}\right) = \hat{D}_s = 2\arccos\left(\frac{3K}{\sqrt{1+12K^2}}\right)$

$$\boxed{\hat{D}_s = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right)}$$

fra facce aventi in comune l_o = $\hat{D}_{l_o} = \left(2\hat{D}_b + \text{diedro dell'ottaedro}\right)$

$$\boxed{\hat{D}_{l_o} = 2\operatorname{arctg}(2K\sqrt{3}) + 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2})}$$

affinché gli angoli diedri siano uguali dovrà essere:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right) - \operatorname{arctg}\left(K\sqrt{12}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\right)$$

Il K che soddisfa l'equazione è: $K = 0,0990576457$;

$K^2 = 0,0098124172$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right) = 73^\circ\ 40'\ 30'',1802$$

$$\operatorname{arctg}\left(K\sqrt{12}\right) = 18^\circ\ 56'\ 21'',9830$$

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\right) = 54^\circ\ 44'\ 08'',1972 \quad \text{(Verificato)}$$

calcoliamo gli elementi del solido a diedri uguali ($K = 0,0990576457$); l_0 = spigolo ottaedro.

spigolo piramidi = $s = l_0(0,58578643\bar{7})$

apotema $a = l_0(0,305197887)$

angoli delle facce:

al vertice = $117^\circ\ 12'\ 02'',05$

al vertice = 117° 12' 02",05

alla base = 31° 23' 58",975

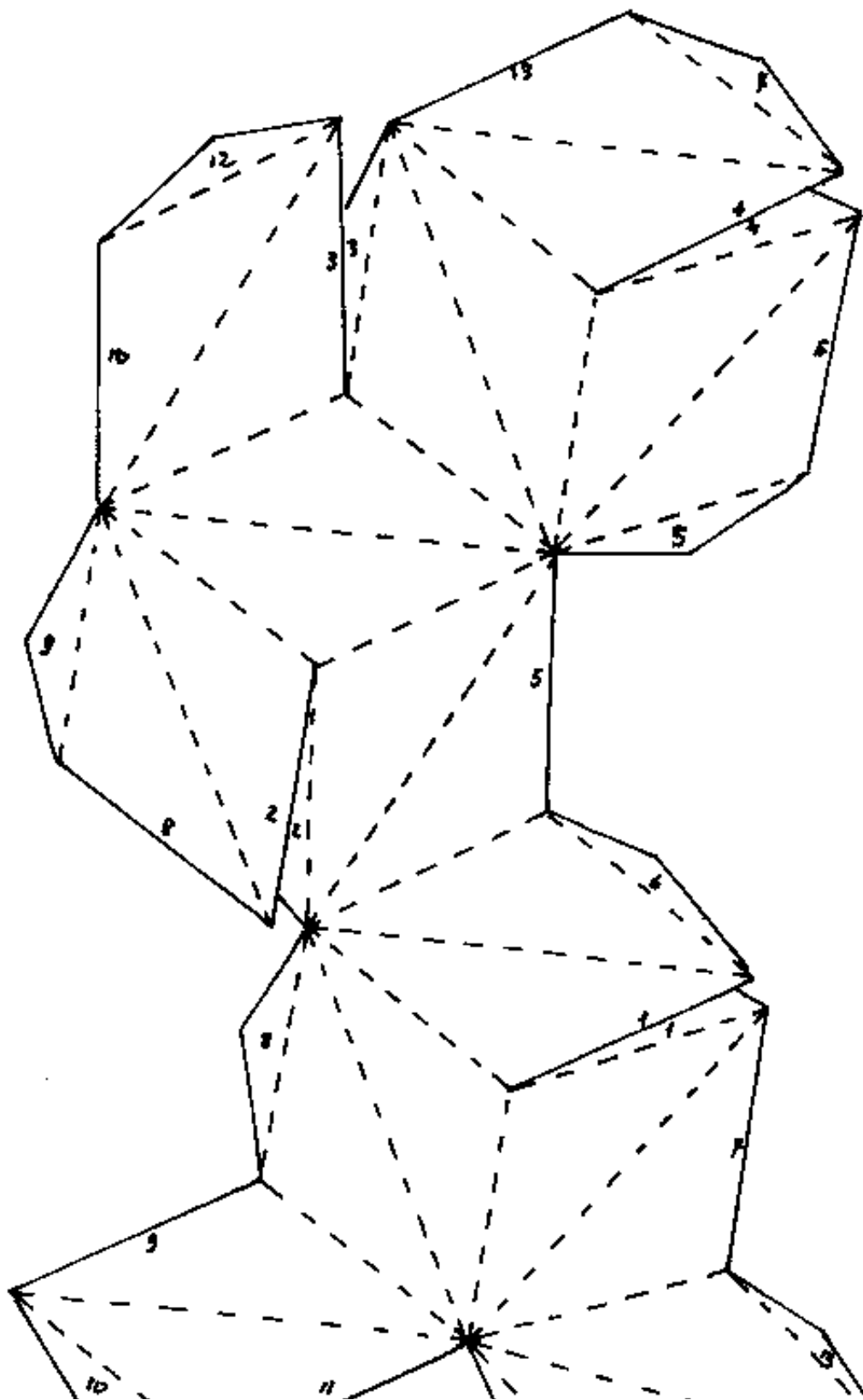
angoli diedri

$\hat{D}_3$ = 147° 21' 00",36 +

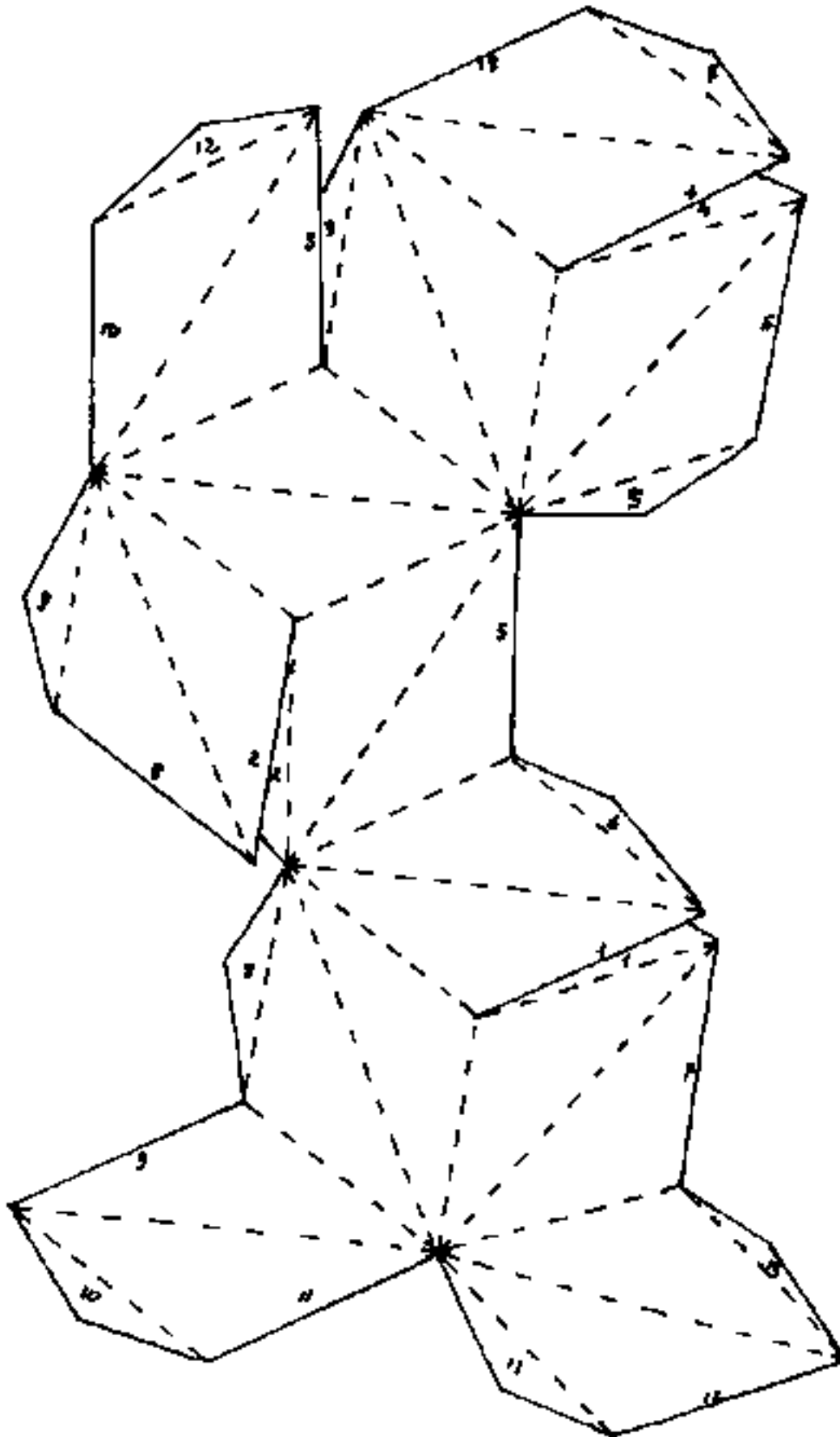
$\hat{D}_{l_0}$ = 37° 52' 43",97 + 109° 28' 16",39 = 147° 21' 00",36

Schema di triacisottaedro a diedri uguali

($K = 0,0990576457$)

10 11 11 12

Tagliare lungo le linee intere, piegare lungo le tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati.

Schema di triacisottaedro a diedri uguali

(K = 0,0990576457)

Tagliare lungo le linee intere, piegare lungo le tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati.

Abbiamo visto che l'altezza $\overline{TV}$ delle piramidi da aggiungere all'ottaedro, affinché tutti i vertici siano sulla sfera di raggio: $\rho_1 = \frac{l_0}{\sqrt{2}}$, è $\boxed{\overline{TV} = l_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)}$ $\boxed{\overline{TV} = l_0(0{,}29885849)}$ da cui, essendo le piramidi a base triangolare equilatera di lato l_0, avremo:

spigolo $= s = \sqrt{\overline{TV}^2 + \left(\frac{l_0}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) l_0^2} = \boxed{s = l_0\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}}$

apotema $= a = \sqrt{\overline{TV}^2 + \left(\frac{l_0}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4 \cdot 3}\right) l_0^2} = \boxed{a = \frac{l_0}{2}\sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{3}}{3}}}$

altezza rispetto ad s $= h_s = \frac{a\, l_0}{s} = \frac{l_0}{2}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{3-\sqrt{3}}\right)} = \boxed{h_s = \frac{l_0}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{3}}{2}}}$

Angoli piani

di una faccia:
- al vertice $= 2\arcsen\left(\frac{l_0/2}{s}\right) = 2\arcsen\left(\sqrt{\frac{3}{3-\sqrt{3}}}\,\frac{1}{2}\right) =$
- alla base $= \arccos\left(\frac{l_0/2}{s}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{3-\sqrt{3}}}\right) =$

al vertice $= 100°\ 32'\ 43'',046$

alla base $= 39°\ 43'\ 38'',48$

Angoli diedri

: fra faccia e base della piramide $= \widehat{D}_1$

$\widehat{D}_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\overline{TV}}{\frac{l_0\sqrt{3}}{6}}\right) = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \boxed{\widehat{D}_1 = 45°\ 59'\ 34'',70}$

$\widehat{D}_{e} = 2\widehat{D}_1 + D_{ottaedro} = (91°\ 59'\ 9'',4 + 109°\ 28'\ 16'',39) = \boxed{\widehat{D}_e = 201°\ 27'\ 25'',8}$

[illegible]

angolo concavo verso l'esterno: $(360° - \hat{D}_2) = 158° \; 32' \; 34'',2$

$$\hat{D}_s = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{l_o/2}{l_4}\right) = 2\,\text{arcsen}\left(\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{3}}}\right) \qquad \hat{D}_s = 102° \; 56' \; 40'',6$$

Se, fermi restando gli spigoli s delle piramidi, anziché unire i vertici dell'ottaedro uniamo i vertici delle piramidi, si ottiene un solido convesso di 24 facce triangolari. Detta l_v la distanza di tali vertici, calcoliamo l_v ed avremo:

$l_v = 2 l_t \, sen\left(\frac{70°31'43'',61}{2}\right) = l_o(0,81649658)$, ove $70°31'43'',61$ è l'angolo dei due raggi che dal centro vanno ai vertici delle piramidi: $(180° - 109°28'16'',39)$.

Oppure: $l_v = 2a \, sen\left(\frac{\hat{D}_4}{2}\right)$ cioè:

$$l_v = \frac{3 l_o}{2}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}} \, sen\left(\frac{158°33'34'',2}{2}\right) =$$

$$\boxed{l_v = l_o(0,81649658)}$$

Il solido che ne risulta è un tetracisesaedro inscrittibile in una sfera (ha gli stessi vertici del triacisottaedro ove si è scambiato l_v con l_o).

$l_v = l_c$ è lo spigolo del cubo base al quale sono sovrapposte piramidi a base quadrata. Lo spigolo delle piramidi è immutato: $s = l_o\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = l_o(0,650115167)$ e sostituendo: $l_o = l_v/0,81649658$ si ha $\boxed{s = l_v \frac{0,650115167}{0,81649658}}$

$\boxed{s = l_v(0,796225217)}$ valore che abbiamo già trovato trattando i solidi derivati dal cubo.

I 14 vertici che sono sulla superficie sferica

I 14 vertici che sono sulla superficie sferica (8 vertici del cubo e 6 vertici dell'ottaedro) corri= spondono al tetraedro inscritto nella sfera, (4 vertici) a cui aggiungiamo i raggi che dal centro vanno ai centro-faccia del tetraedro (4 vertici) ed i raggi che passano per il punto medio degli spigoli del tetraedro (6 vertici). I punti intercettati sulla superficie sferica <u>sono gli stessi vertici</u> del

TABELLA dei Triacisottaedri

K	s/l_0	$\hat{D}_{l_0}$	$\hat{D}_s$	angoli delle facce: al vertice	angoli delle facce: alla base	NOTE	TETRACIS ESAEDRI - Stessi Vertici: K	s/l_0	NOTE
0	$1/\sqrt{3}$ 0.577350269	109°28' 16"	180°	120°	30°	ottaedro a facce rigate	1	$\sqrt{2}/3$	cubo con sovrapposte piramidi alte $l_c = l$ concave
$\sqrt{3}-\sqrt{8/3}$ 0,0990576457	$2-\sqrt{2}$ 0.5857864376	147°21'00",36	147°21'00",36	117°12'02",05	31°23'59"	triacisottaedro a diedri uguali	$1/\sqrt{2}$ 0,707106781	$2-\sqrt{2}$ 0,585786	a facce equilatere exacedron elevatus
$\sqrt{6}/12$ 0,2041241452	$\sqrt{6}/4$ 0,6123724357	180°	120°	109°28'16",394	35°15'51",80	Rombododecaedro a facce rigate secondo la diagonale maggiore	$1/2$ 0,5	$1/\sqrt{2}$ 0,7071068	Rombododecaedro a facce rigate secondo la diagonale minore
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 0,2988584907	$\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ 0,6508516773	201°27'25",798 (concavo) 158°32'34",202	102°56'40",659	100°32'43",046	39°43'38",477	triacisottaedro con concavità inscrittibile in una sfera	$(\sqrt{3}-1)/2$ 0,3660254038	$\sqrt{2/3}$ 0,8164966	tetracisesaedro convesso inscrittibile in una sfera
$\frac{1}{\sqrt{6}}$ 0,40824829	$1/\sqrt{2}$ 0,707106781	218°56'32",7 (concavo) 141°03'27",3	90°	90°	45°	triacisottaedro a diedri retti e facce con angolo retto	$1/4$ 0,25	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 0,942809	Tetracisesaedro a diedri uguali (convesso)
$\sqrt{\frac{11}{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ 0,457777113	$\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ 0,736812879	225°00'00" (concavo) 135°00'00"	85°48'3",08	85°28'6",31	47°15'56",85	triacisottaedro avente $l_o = l_e$; l_o = spigolo ottaedro; l_e = " cubo	$\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}$ 0,2071067	1	tetracisesaedro avente $l_c = l_o$; l_c = spigolo cubo; l_o = " ottaedro
$\sqrt{\frac{2}{3}}$ 0,81649658	1	250°31'43",6 (concavo) 109°28'16",3	70°31'43",61	60°	60°	triacisottaedro con piramidi tetraedriche, intersezione di due tetraedri; Octaedrum elevatum.	0	$\sqrt{2}$ 1,414213	cubo a facce rigate dalle diagonali
1	$2/\sqrt{3}$ 1,154700538	257°16'01",17 (concavo) 102°43'58",82	67°22'48",49	51°19'04",13	64°20'27",94	triacisottaedro con piramidi alte l_o	−0,13030439	1,626105	cubo scavato dalle piramidi

Per ora il tetracisesaedro si mantiene convesso, mentre il triacisottaedro presenta diedri concavi, finché i due solidi si unificano nel rombododecaedro le 24 facce triangolari diventano 12 rombiche, di spigolo "s": $l_o = s\sqrt{\frac{8}{3}}$; $l_c = s\sqrt{\frac{4}{3}}$; solido convesso.

Nel rombododecaedro: $l_c/l_o = 1/\sqrt{2}$; fermo restando lo spigolo s, continuando a crescere lo spigolo l_o dell'ottaedro rispetto a quello del cubo, il triacisottaedro diventa convesso, il tetracisesaedro presenterá diedri concavi.

Quando i vertici del cubo stanno sui centri delle facce dell'ottaedro il triacisottaedro il cui $K_o = 0$ diventa un ottaedro a facce rigate, mentre il tetracisesaedro il cui $K_c = 1$ è un cubo con sovrapposte piramidi alte quanto lo spigolo l del cubo.

$l_o = s \cdot \sqrt{3}$; $l_c = s\sqrt{\frac{2}{3}}$;

Da qui in poi il K_o dell'ottaedro diventa nega=

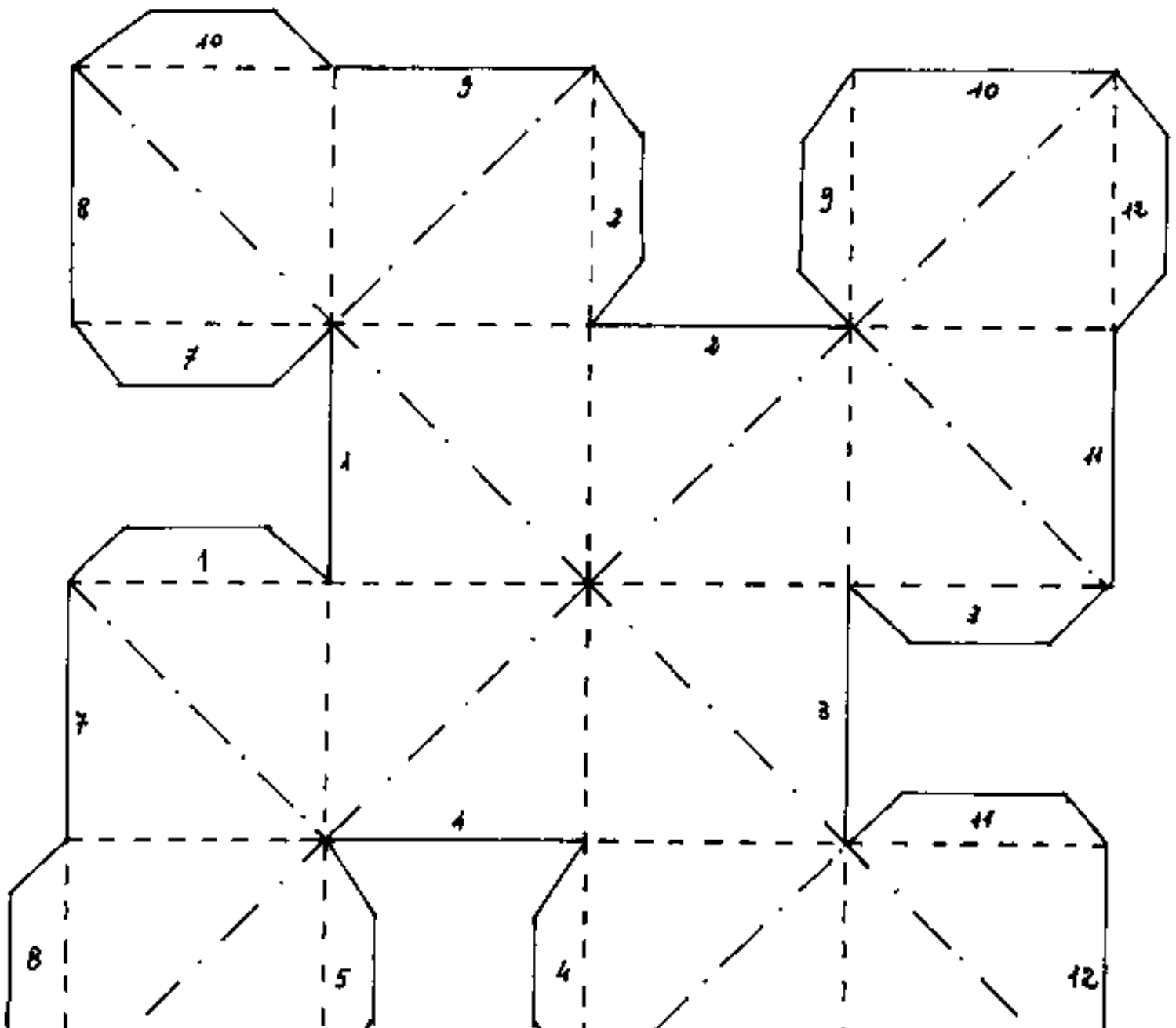
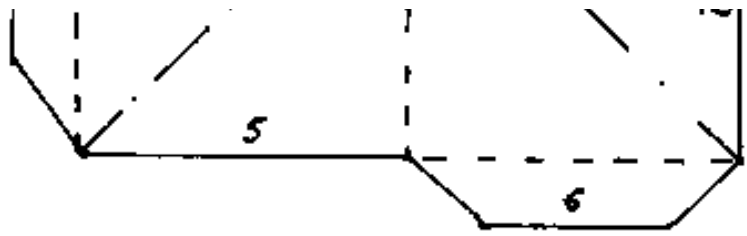
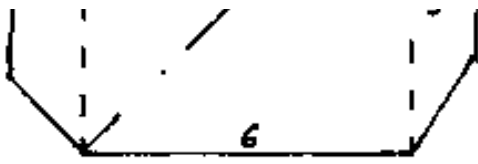
tivo $K_o < 0$, fino al limite: $K_o = \frac{-1}{\sqrt{6}}$; ove i vertici delle piramidi aggiunte (tolte) sono al centro dell'ottaedro; $l_o = -1\sqrt{2}$; $l_c = 0$; il cubo è divenuto puntiforme al centro dell'ottaedro svuotato, cui è rimasta la superficie degli angoloidi che lo compongono. $K_c = \infty$; il tetracisesaedro è ridotto a sei segmenti uscenti da un punto lunghi 1 e disposti come gli assi cartesiani $\pm x$; $\pm y$; $\pm z$.

Se consideriamo un sistema di assi cartesiani o, x, y, z, l'intersezione con una sfera al centro di raggio $\rho_1 = \frac{l_o}{\sqrt{2}}$, determina su ciascun asse un vertice dell'ottaedro.
Ma tali assi possono anche riguardarsi come le rette di giacitura dei piani delle facce del cubo.
La distanza s fra i vertici del cubo ed i vertici dell'ottaedro sono gli spigoli delle due classi di solidi (triacisottaedri e tetracisesaedri). Consideriamo fisso lo spigolo: $s = 1$; e sia inizialmente $l_o = 0$, cioè l'ottaedro è ridotto ad un punto al centro assi, il cubo avrà uno spigolo: $l_c = (\frac{2}{3}\sqrt{3})s$, ed il tetracisesaedro avrà $K_c < 0$ cioè $K_c = -\frac{l_c}{2}$; $\boxed{K_c = \frac{-1}{\sqrt{3}}}$.
Quando $K_c = 0$ i vertici dell'ottaedro giacciono al centro delle facce del cubo; $l_c = (\sqrt{2})s$; $l_o = s$; il triacisottaedro avrà: $K_o = \sqrt{\frac{2}{3}}$; il tetracisesaedro si identifica col cubo a facce rigate dalle diagonali.
Da questo punto in poi i vertici dell'ottaedro che

Da questo punto in poi i vertici dell'ottaedro che erano inizialmente interni al cubo ($K_c < 0$) diventano esterni; teniamo fisso lo spigolo s, arriveremo che lo spigolo l_o dell'ottaedro uguaglia lo spigolo l_c del cubo: $l_o = l_c = \frac{2s}{\sqrt{5-\sqrt{8}}}$, poi l_o diventa maggiore di l_c, si arriva al punto che i vertici dell'ottaedro e del cubo sono sulla stessa superficie sferica, ove:

$l_c/l_o = \sqrt{2/3}$; $l_o = s \cdot \sqrt{\frac{3}{3-\sqrt{3}}}$; $l_c = s\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{3}}}$.

Schema di triacisottaedro ($K_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$) avente gli stessi vertici (e lo stesso $s = 3$ cm.) del tetracisesaedro a diedri uguali ($K_0 = \frac{1}{4}$) (vedi cap. tetracisesaedri).

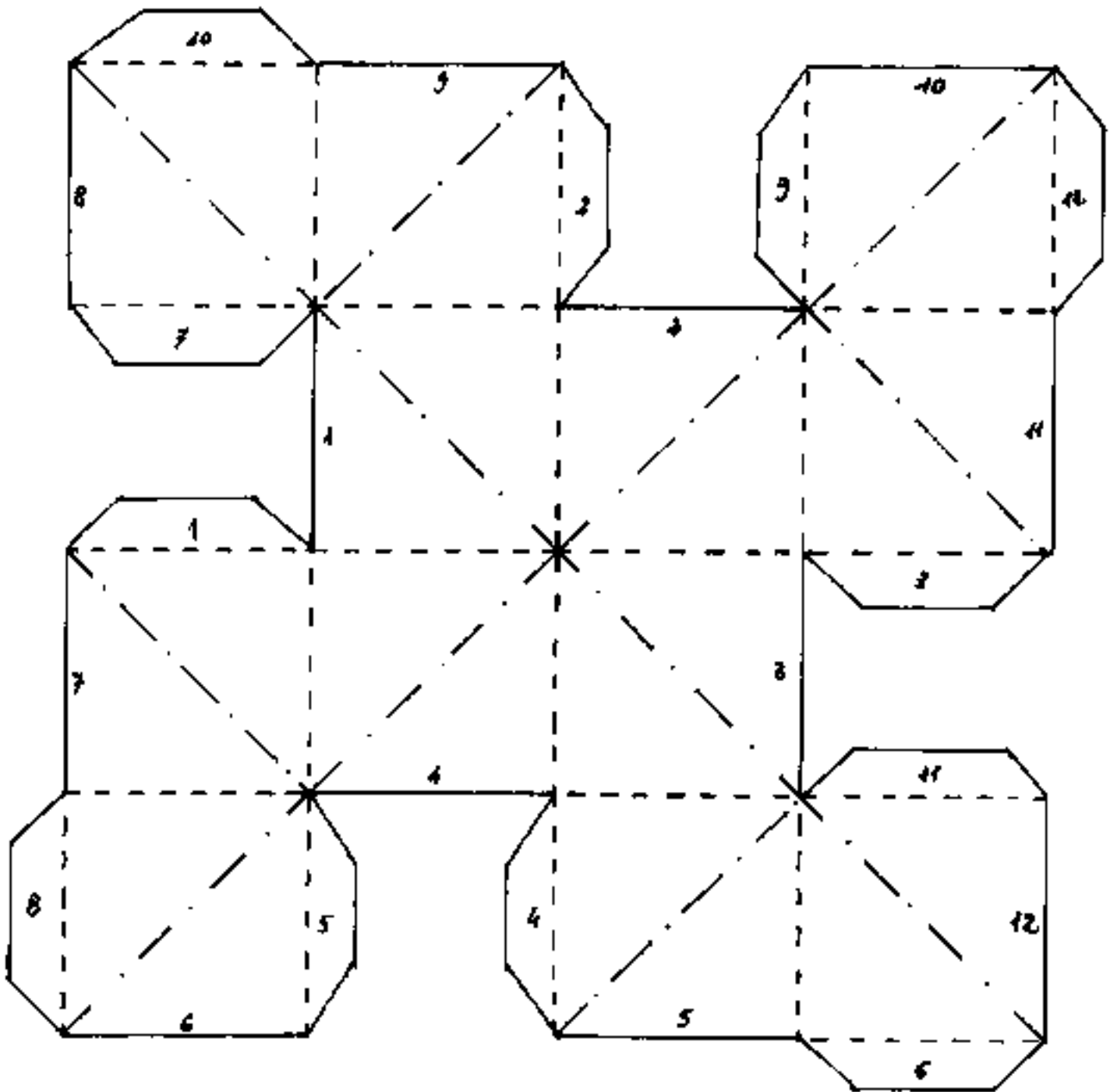
$s = l_0/\sqrt{2}$; $a = l_0/2$; Area $= 12\, l_0^2$; $V = \frac{l_0^3}{3}\left(\sqrt{3} + \frac{8}{\sqrt{6}}\right)$; $l_V = l = 4$ cm.

6

5

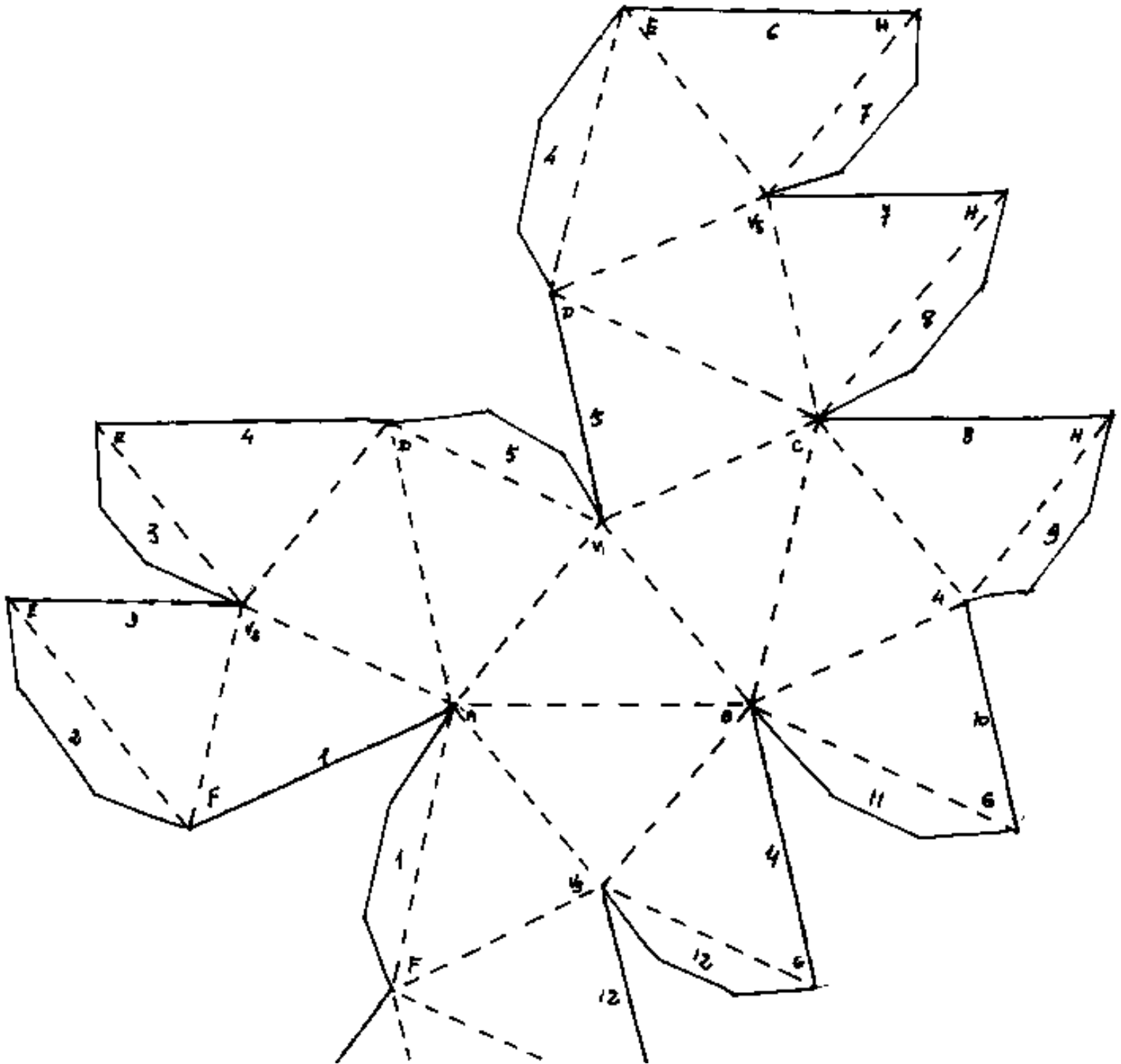
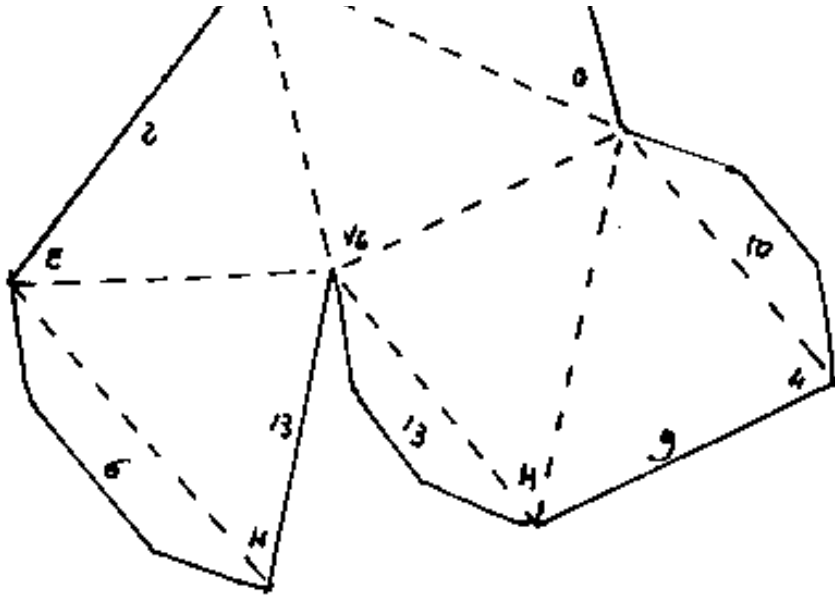
6

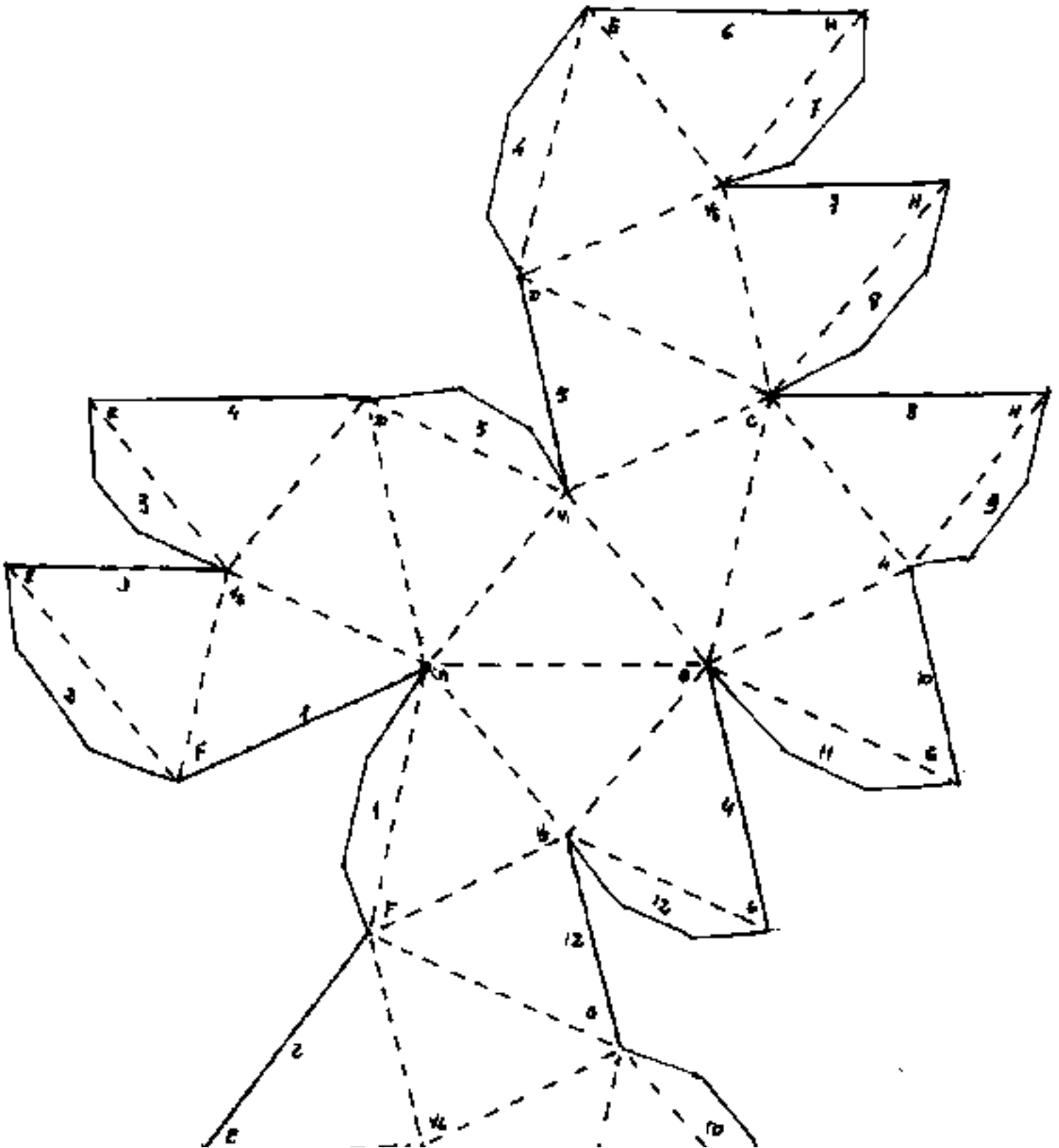
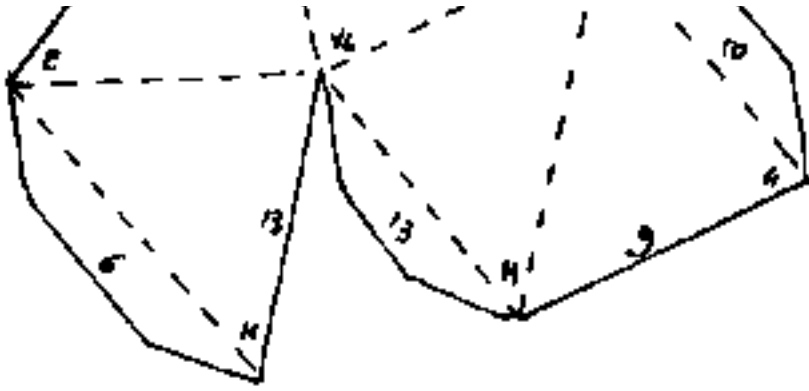
N.B. Tagliare lungo le linee intere, piegare convesso le linee a tratteggio semplice, piegare concavo le linee a tratto e punto, incollare le linguette facendo coincidere gli spigoli con lo stesso numero. Per avere piegature nitide incidere le linee dalla parte convessa.

Schema di triacisottaedro ($K_c = \frac{1}{4}$) avente gli stessi vertici (e lo stesso $s = 5$ cm.) del tetracisesaedro a diedri uguali ($K_c = \frac{1}{4}$) (vedi cap. tetracisesaedri).

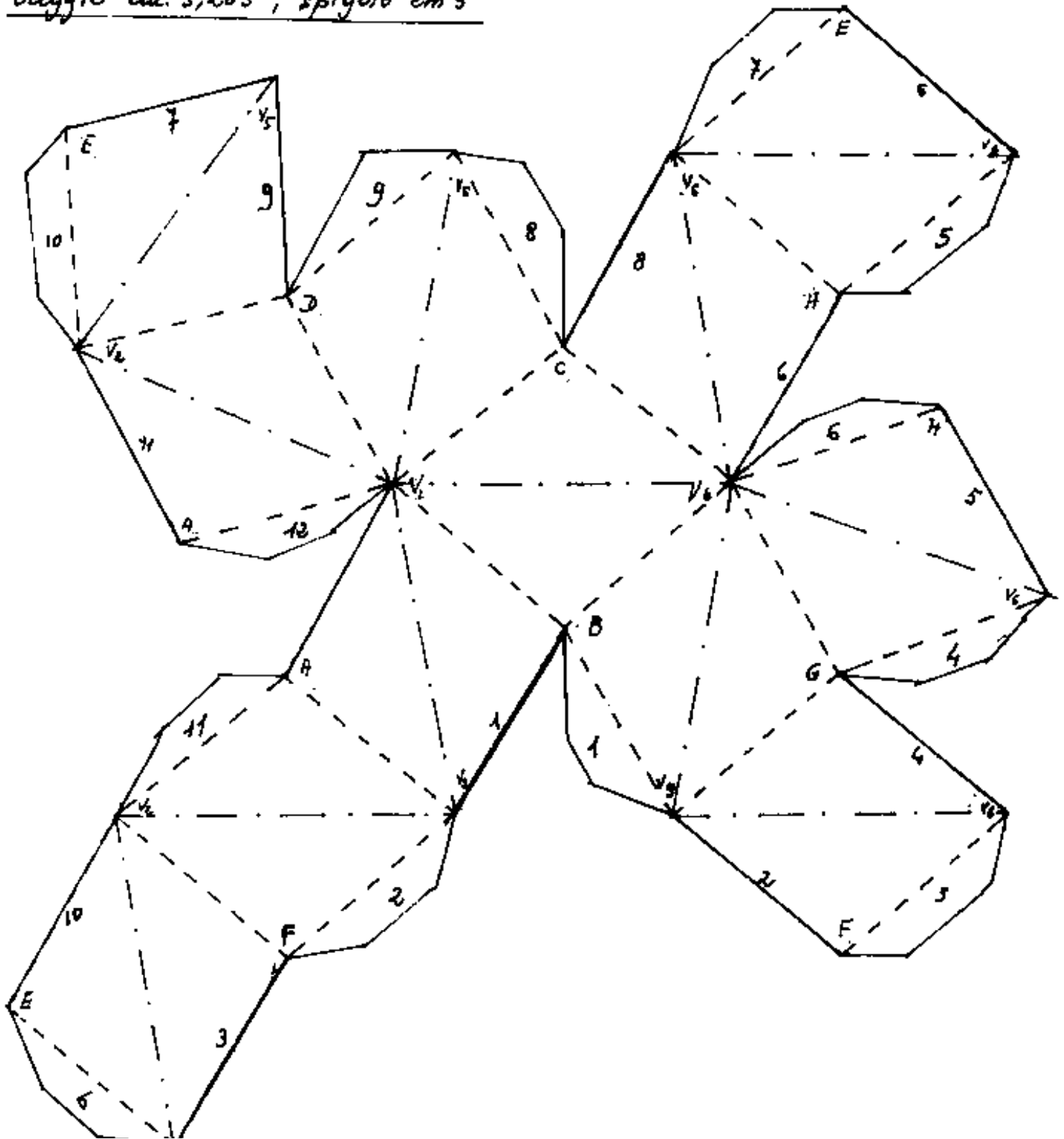
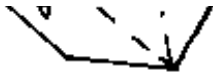
$s = l/\sqrt{2}$; $a = l/2$; Area $= 12\, l^2$; $V = \frac{l^3}{3}\left(\sqrt{2} + \frac{8}{\sqrt{6}}\right)$; $l_V = l = 4$ cm.

Tagliare lungo le linee intere, piegare convesso le linee a

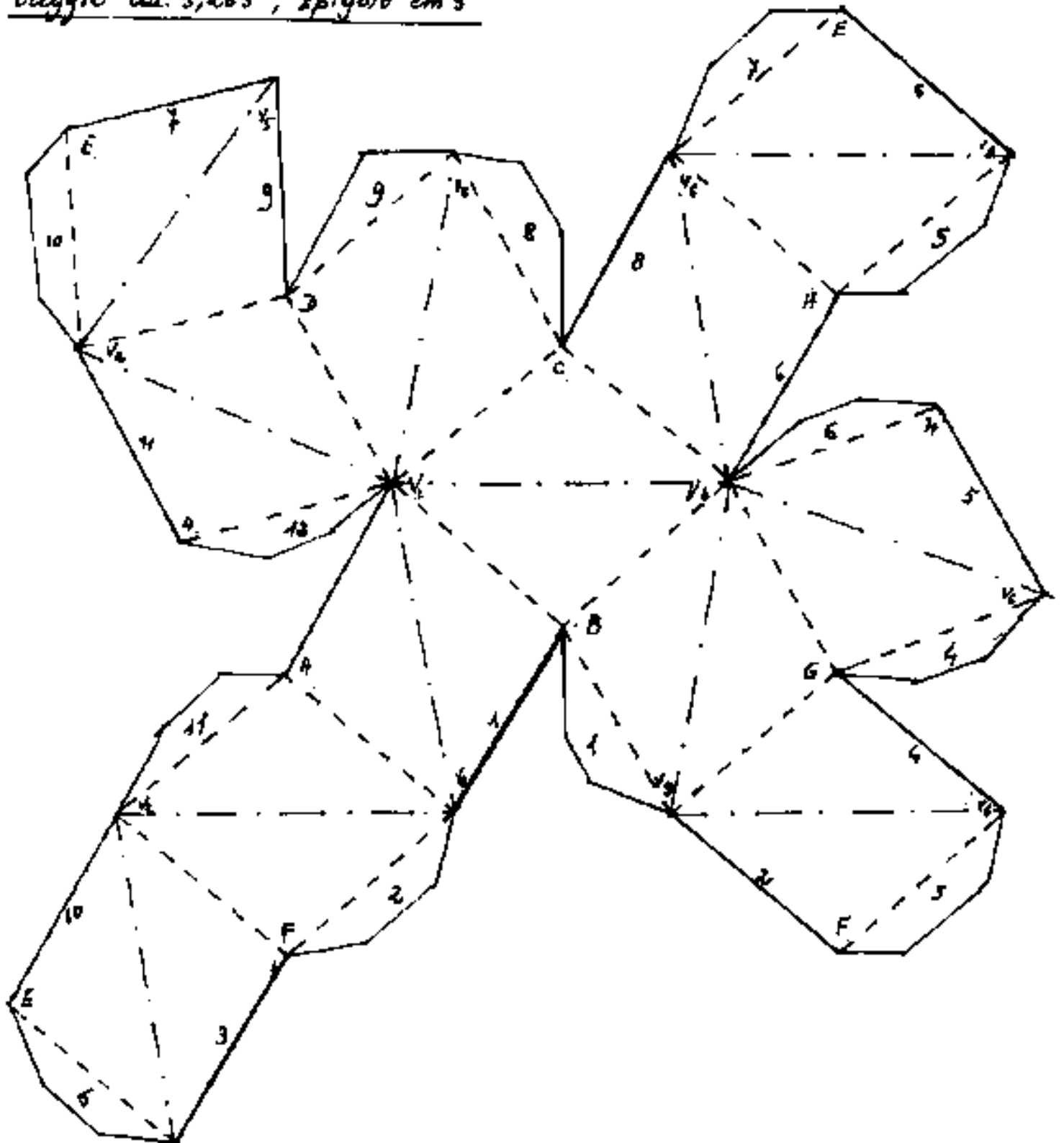
NB. Tagliare lungo le linee intere, piegare convesso le linee a tratteggio semplice, piegare concavo le linee a tratto e punto, incollare le linguette facendo coincidere gli spigoli con lo stesso numero. Per avere piegature nitide incidere le linee dalla parte convessa

Schema di tetracisesaedro inscrittibile in una sfera di raggio cm 3,263 ; spigolo cm 3

Tagliare lungo le linee intere, piegare le tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati. (Stessi vertici del triacisottaedro r.)

Schema di tetracisesaedro inscrittibile in una sfera

di raggio cm 3,263 ; spigolo cm 3

Tagliare lungo le linee intere, piegare le tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati. (Stessi vertici del triacisottaedro r.)

Schema di triacisottaedro inscrittibile in una sfera di raggio cm. 3,263 ; spigolo cm 3

N.B - tagliare lungo le linee intere, piegare convesso le linee a semplice tratteggio, piegare concavo le linee a tratto e punto, incollare le linguette facendo coincidere gli spigoli portanti lo stesso numero. (piegature più nitide si hanno se incidiamo col rifilatore le linee dalla parte convessa) (stessi vertici del tetracisesaedro V.)

Schema di triacisottaedro inscrittibile in una sfera di raggio cm. 3,263 ; spigolo cm 3

N.B – tagliare lungo le linee intere, piegare convesso le linee

N.B - tagliare lungo le linee intere, piegare convesso le linee a semplice tratteggio, piegare concavo le linee a tratto e punto, incollare le linguette facendo coincidere gli spigoli portanti lo stesso numero. (piegature più nitide si hanno se incidiamo col rifilatore le linee dalla parte convessa) (stessi vertici del tetracisesaedro V.)

Il Pentacisdodecaedro

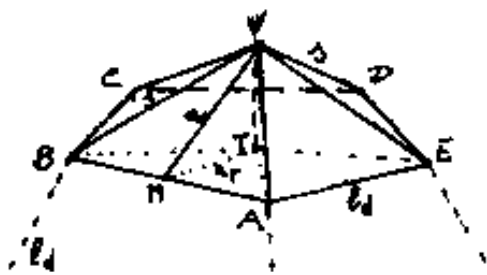
Aggiungendo piramidi pentagonali alle facce del dodecaedro, si ha la classe dei solidi detta dei pentacisdodecaedri. Sono solidi di $5 \times 12 = 60$ facce; $20 + 12 = 32$ vertici; $30 + 5 \times 12 = 90$ spigoli; $(F + V = S + 2)$ $(60 + 32 = 90 + 2)$.

A seconda dell'altezza $\overline{TV}$ delle piramidi aggiunte, si possono avere solidi con caratteristiche particolari, determinati dalle condizioni imposte:

1) <u>a diedri uguali</u> (solido convesso)

2) <u>inscrittibile in una sfera</u> (" ")

3) <u>facce rombiche</u> (diedro 180° - 30 facce di due triangoli)

4) <u>facce triangolari equilatere</u> (solido concavo detto anche: Duodecedron Elevatus Solidus.)

l_d = spigolo del dodecaedro

$\overline{TV} = K l_d$ = altezza piramidi

$\overline{NT} = a_m = \frac{l_d}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

$$\overline{NT} = a_p = \frac{l_d}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\overline{MV} = a = \sqrt{\overline{TV}^2 + \overline{NT}^2} = \boxed{a = \frac{l_d}{2}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}+4K^2}}$$

$$\overline{AT} = R_p = l_d\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

$$\overline{AV} = s = \sqrt{\overline{TV}^2 + \overline{AT}^2} \qquad \boxed{s = l_d\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + K^2}}$$

diagonale del pentagono $= \overline{AC} = d_p = l_d\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

altezza relativa allo spigolo s $= h_s = \frac{l_d \cdot a}{s} =$ $\boxed{h_s = l_d\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}+20K^2}{10+2\sqrt{5}+20K^2}}}$

Angoli delle facce

al vertice $= 2 \arcsin\left(\frac{l_d}{2 s}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + K^2}}\right)$

alla base $= \arccos\left(\frac{l_d}{2 s}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + K^2}}\right)$

Angoli diedri

Del dodecaedro $= \hat{D}_1 = \operatorname{arctg}(-2) = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = 116° 33' 54'', 18$

$\hat{D}_1/2 = 1,017221968 \text{ rad} = 58° 16' 57'', 09$

Alla base delle piramidi $= \hat{D}_2 = \hat{VMT} = \operatorname{arctg}(\overline{TV}/\overline{MT}) =$

$\hat{D}_2 = \operatorname{arctg}\left(2K\sqrt{5-\sqrt{20}}\right)$

Fra le facce delle piramidi $= \hat{D}_3 = 2 \arcsin\left(\frac{d_p}{2 h_1}\right)$

$\hat{D}_3 = 2 \arcsin\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\sqrt{\frac{10+\sqrt{20}+20K^2}{5+\sqrt{20}+20K^2}}\right)$

$\hat{D} = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3,2}+(3+\sqrt{5})K^2}{\ldots}}\right.$

$$\hat{D}_s = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3,2}+(3+\sqrt{5})K^2}{(5-\sqrt{5})K^2}}\right)$$

Sullo spigolo del dodecaedro $= \hat{D}_{l_d} = (\hat{D}_1 + 2\hat{D}_2)$

$$\hat{D}_{l_d} = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + 2 \operatorname{arctg}\left(2K\sqrt{5-\sqrt{20}}\right)$$

La condizione di uguaglianza dei diedri: $(\hat{D}_s = \hat{D}_{l_d})$ porta all'equazione: (dividendo per 2)

condizione: a diedri uguali

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3,2}+(3+\sqrt{5})K^2}{(5-\sqrt{5})K^2}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(2K\sqrt{5-\sqrt{20}}\right)$$

che può scriversi: $\frac{\hat{D}_1}{2}-\hat{D}_b=\hat{D}_d/2$

poiché:

$$\tan\left(\frac{\hat{D}_1}{2}-\hat{D}_b\right)=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

cioè:

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3,2}+(3+\sqrt{5})K^2}{(5-\sqrt{5})K^2}}\right)-\left(2K\sqrt{5-\sqrt{20}}\right)}{1+\left(2K\sqrt{5-\sqrt{20}}\right)\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3,2}+(3+\sqrt{5})K^2}{(5-\sqrt{5})K^2}}\right)}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

L'equazione risulta soddisfatta per $K=0,2515255344147$

sostituendo si ha:

angoli delle facce < al vertice 68° 37' 7",395 ; alla base 55° 41' 26",302

angoli diedri: $\hat{D}_1$ = 156° 43' 06",79

$\hat{D}_b$ = 20° 04' 36",3 → $2\hat{D}_b$ = 40° 09' 12",61

$$\hat{D}_4 = 116° \; 33' \; 54'',18$$

$$\hat{D}_4 = 156° \; 43' \; 06'',79$$

che verifica : $\hat{D}_3 = \hat{D}_4$

$a = l_4 (0,732715423)$; $s = l_4 (0,887057998)$;

Calcoliamo il pentacisdodecaedro inscrittibile in una sfera.

raggio della sfera circoscritta al dodecaedro $= \rho_2 = l_d\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\right)$

raggio della sfera inscritta nel dodecaedro $= r_i = \frac{l_d}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$

altezza delle piramidi: $\overline{TV} = (\rho_s - r_i) = \frac{l_d}{2}\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\right)$

$K = 0{,}28774217 4$

apotema del pentagono $= a_p = \frac{l_d}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{20}}{5}} = (0{,}68819096)\,l_d$

apotema delle facce $= a = \sqrt{\overline{TV}^2 + a_p^2} = \boxed{a = (0{,}7459238 27)\,l_d}$

spigolo delle piramidi $= s = \sqrt{a^2 + \left(\frac{l_d}{2}\right)^2} = \boxed{s = (0{,}897999084)\,l_d}$

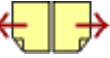
angoli delle facce
- al vertice $= 2\arcsen\left(\frac{l_d}{2s}\right) = \boxed{67°\ 40'\ 7'',19}$
- alla base $= \arccos\left(\frac{l_d}{2s}\right) = \boxed{56°\ 09'\ 56'',41}$

Angoli diedri (del dodecaedro $= \hat{D}_d = 116°\ 33'\ 54'',1$)

alla base delle piramidi $= \hat{D}_b = \operatorname{arctg}\left(\frac{\overline{TV}}{a_p}\right) = \boxed{\hat{D}_b = 22°\ 41'\ 25'',73}$

sullo spigolo delle piramidi $= \hat{D}_s = 2\arcsen\left(\frac{d_p}{2h_s}\right) = \boxed{\hat{D}_s = 153°\ 47'\ 22''}$

sulle facce adiacenti l_d $= \hat{D}_{l_d} = \hat{D}_d + 2\hat{D}_b = \boxed{\hat{D}_{l_d} = 161^\circ 56' 45''}$

Essendo diversi gli angoli diedri $\hat{D}_3$ e $\hat{D}_{l_d}$ non può esistere la sfera inscritta nel solido.

Calcoliamo ora la condizione che le facce adiacenti lo spigolo l_d siano complanari, cioè che: $\hat{D}_{l_d} = 180° = (\hat{D}_d + 2\hat{D}_b)$;

ed anche: $\hat{D}_b = \frac{1}{2}(180 - D_d) =$ $\boxed{\hat{D}_b = 31° 43' 02'',908}$

ed essendo: $\frac{\overline{TV}}{a_p} = \frac{K l_d}{0,68819096\, l_d} = tg(\hat{D}_b) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

avremo:

$$K = (0,68819096)\, tg(31° 43' 02'',908)$$

$$\boxed{K = 0,425325404} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{10+\sqrt{20}}{5}}$$

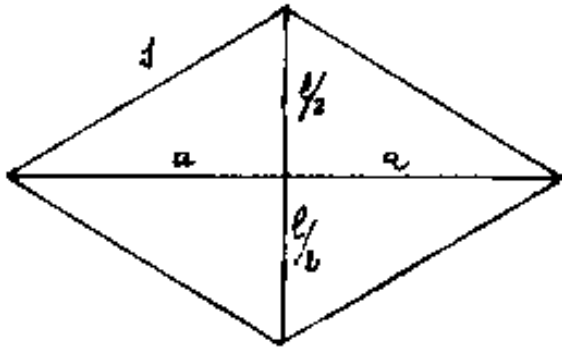
$\overline{TV} = K l_d$; $s = \sqrt{R_p^2 + \overline{TV}^2}$; ove R_p = raggio del pentagono

$R_p = l_d\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = (0,850650808)\, l_d$; $\boxed{s = l_d\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = l_d(0,951056516)}$

$a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_d}{2}\right)^2}$ $\boxed{a = l_d(0,809016994)} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$

In questo solido s = lato delle facce rombiche

l_d = diagonale minore dei rombo

$2a$ = diagonale maggiore dei rombo

angoli delle facce:

$2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\ell_d}{2a}\right) = 63° 26' 5'',82$

$2 \operatorname{arctg}\left(\frac{2a}{\ell_d}\right) = 116° 33' 54'',1$

angoli diedri

$h_1 = \frac{\ell_d a}{1} = (0,850650808)\ell_d$

$\hat{D}_1 = 2 \arcsin\left(\frac{d_e}{2h_1}\right) \Rightarrow \hat{D}_1 = 144°$

$\delta_{\ell_d} = 180°$

La condizione che le facce siano triangoli equilateri, si traduce in: $s = l_4$

$$\overline{TV} = \sqrt{l_4^2 - R_p^2} = l_4\sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \overline{TV} = l_4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$K = 0{,}52573112 \quad = \left(\frac{\overline{TV}}{l_4}\right)$$

$$a = \sqrt{\overline{TV}^2 + a_p^2} = l_4\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} + \frac{5+2\sqrt{5}}{20}} = l_4\sqrt{\frac{10+5}{20}} = l_4\sqrt{\frac{3}{4}} = a = \frac{l_4}{2}\sqrt{3}$$

$h_s = a = \frac{l}{2}\sqrt{3}$;

angoli delle facce: al vertice = alla base = 60°

angoli diedri :

alla base delle piramidi $\hat{D}_b = \text{arctg}\left(\frac{\overline{TV}}{a_p}\right) = \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})2}{5+2\sqrt{5}}}\right)$

$$\hat{D}_b = \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{10-\sqrt{20}}{5+\sqrt{20}}}\right) = \text{arctg}\left(\sqrt{14-3\sqrt{20}}\right) = \text{arctg}\left(3-\sqrt{5}\right) = \hat{D}_b = 37°\,22'\,38'',53$$

$$\hat{D}_{l_4} = 2\hat{D}_b + \hat{D}_d = 74°\,45'\,17'',05 + 116°\,33'\,54'',18 = \hat{D}_{l_4} = 191°\,19'\,11'',2$$

(angolo > 180°) perciò concavo (− 168° 40' 48'',8).

$$\hat{D}_s = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{d_p}{2a}\right) = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\right) =$$

$$\hat{D}_s = 138°\,11'\,22'',8 \quad \text{(convesso)}$$

Il presente solido è anche chiamato
"Duodecedron Elevatus Solidus"

Determinati i vertici di un pentacisdodecaedro, ci domandiamo, fermi restando gli spigoli uscenti dai vertici delle piramidi, cosa avviene se invece di unire col segmento l_d i vertici del dodecaedro, uniamo i vertici delle piramidi col segmento l_v.

Per calcolare "l_v" ricordiamo che l'angolo γ formato dalle due rette normali a due facce consecutive del dodecaedro (rette di giacitura, uscenti dal centro O) è supplementare del diedro delle facce.

Per il dodecaedro $\gamma = \text{arctg}(2) = 63°26'05,82''$ supplementare a $\hat{D}_I$.

La distanza dei vertici delle piramidi dal centro sarà: $\overline{OV} = \overline{OT} + \overline{TV}$

$\overline{OV} = r_i + TV = \left(\frac{l_d}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} + K l_d\right)$; perciò: $l_v = 2\overline{OV}\,\text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

$\frac{\gamma}{2} = \text{arcsen}\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)$; $l_v = l_d\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{10} + 2K\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)$

$$l_v = l_d\left(1,170820393 + K(1,051462224)\right)$$

Pentacisdodecaedro

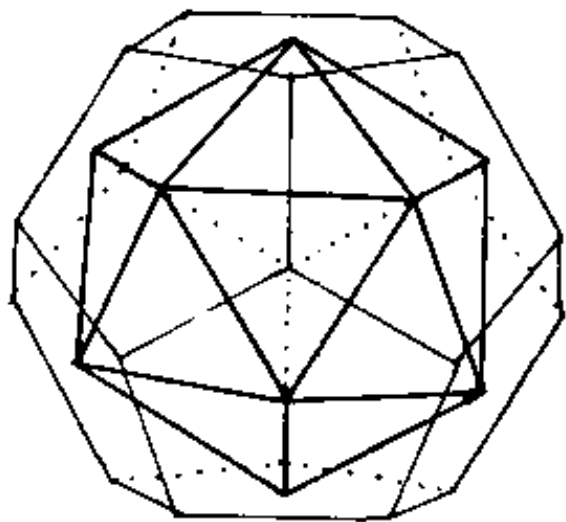
<u>a diedri uguali</u> : $K = 0{,}251525534$; $l_V = l_d(1{,}43528939)$

<u>inscrittibile in una sfera</u>: $K = 0{,}287742174$; $l_V = l_d(1{,}473370419)$

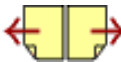
<u>a facce rombiche</u> : $K = 0{,}425325404$; $l_V = l_d(1{,}618033988)$

<u>facce triangoli equilateri</u> $K = 0{,}525731112$; $l_V = l_d(1{,}23606797)$

Ma noi sappiamo che ad ogni faccia del dodeca=
edro (e quindi ad ogni vertice di piramide aggiunta),

corrisponde un vertice dell'icosaedro, ed alle facce dell'icosaedro corrispondono i vertici del dodecaedro. Quindi i segmenti che uniscono i vertici delle piramidi poste sulle facce del dodecaedro <u>sono gli spigoli di un icosaedro</u>; in questo caso <u>$l_v = l_i$</u>, ove, con l_i si indica lo spigolo dell'icosaedro esterno. Ma anche unendo i centro faccia del dodecaedro si ottiene un icosaedro, ove è facile vedere come aggiungendo piramidi a base triangolare alle facce dell'icosaedro i vertici di queste piramidi sono i vertici di un dodecaedro. Questo triacisicosaedro è concavo, mentre il pentacisdodecaedro è convesso ed è al limite $K_1 = 0$.

Aumentando K_4, cioè l'altezza $\overline{TV_4}$ delle piramidi aggiunte al dodecaedro si arriva al caso limite di facce

rombiche ove gli spigoli dell'icosaedro e del dodecaedro ne sono le diagonali. Aumentando ancora $\overrightarrow{TV_d}$ il penta=cisdodecaedro diventa concavo ed il triacisicosaedro convesso.

Si noti che una volta fissato il K_d del penta=cisdodecaedro, resta univocamente determi=nato il K_i dell'icosaedro e viceversa.

Siano l_d ed l_i gli spigoli del dodecaedro e dell'icosaedro, solidi base del pentacisdodecaedro e del triacisicosaedro. Questi solidi derivati abbiano gli stessi vertici, e quindi la stessa lunghezza "s" degli spigoli delle piramidi aggiunte.

per la piramide pentagonale: $s = l_d \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + K_d^2}$

per la piramide triangolare: $s = l_i \sqrt{\frac{1+3K_i^2}{3}}$

ed essendo: $l_i = l_v = l_d \left(\frac{3\sqrt{5}+5}{10} + 2K_d \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right)$

$$\sqrt{\frac{1+3K_i^2}{3}} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + K_d^2}}{\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{10} + 2K_d \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \right)}$$

da cui:

$K_d = 0{,}251525534$	→	$K_i = 0{,}2205281797$
$K_d = 0{,}287742174$	→	$K_i = 0{,}195295202$
$K_d = 0{,}425325404$	→	$K_i = 0{,}1102610898$
$K_d = 0{,}52573112$	→	$K_i = 0{,}0572190827$

La discussione sarà completata al capitolo del triacisicosaedro.

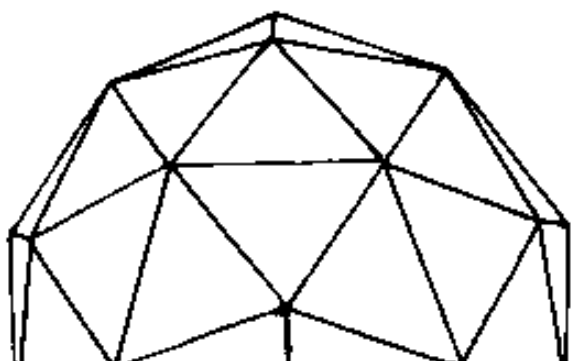
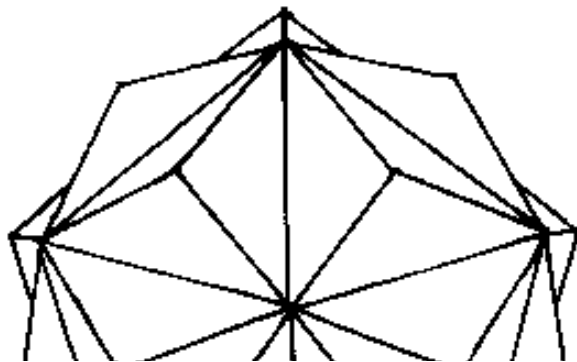
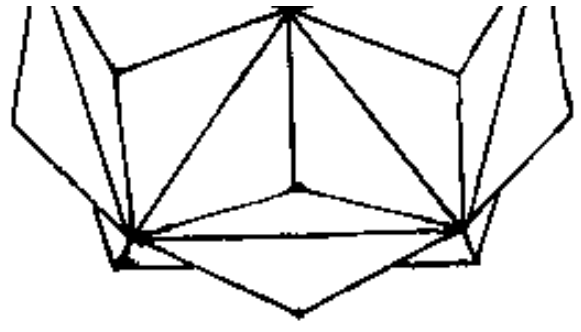
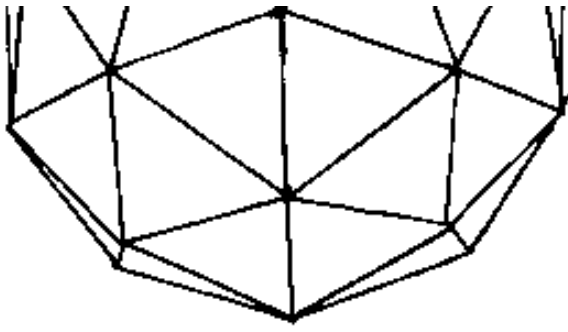
Quando i solidi base: dodecaedro ed icosaedro sono inscritti nella stessa sfera, si ha che i vertici sulla superficie sferica sono comuni al pentacisdodecaedro inscrittibile in una sfera e al triacisicosaedro inscrittibile in una sfera.

Indicizzando con "d" e con "i" rispettivamente gli elementi sul dodecaedro e sull'icosaedro, abbiamo: $\rho_{1(d)} = \rho_{1(i)} =$ raggio della sfera circoscritta:

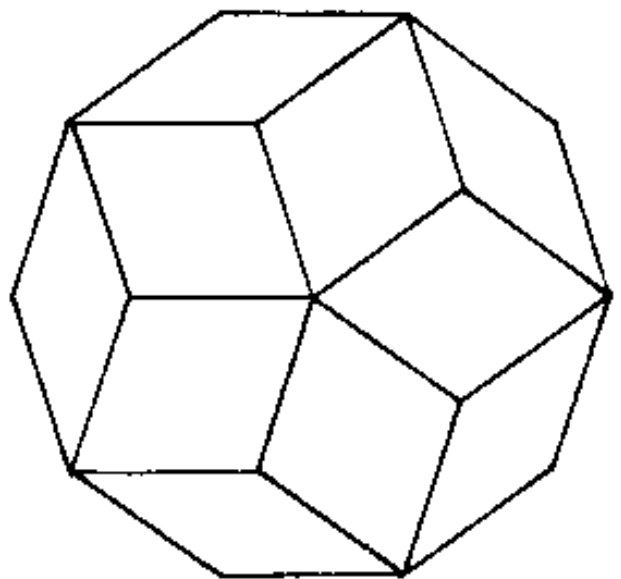
$$\rho_{1(d)} = \frac{l_d}{4}(\sqrt{5}+1)\sqrt{3} = (1,401258537)l_d \; ; \quad \rho_{1(i)} = \frac{l_i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = (0,951056517)l_i$$

per cui:

$$l_i = (1,473370418)\,l_d$$

I due solidi:

pentacisdodecaedro triacisicosaedro

rispettivamente convesso e concavo, pur avendo gli stessi vertici assumono aspetti assai diversi. Notare che gli spigoli "3" sono gli stessi nelle due figure.

Quando il quadrilatero di quattro vertici consecutivi diventa piano, il pentacisdodecaedro ed il triacisicosaedro si unificano nel romboedro a 30 facce detto triancontaedro rombico, ove, la diagonale minore delle facce rombiche è lo spigolo del dodecaedro e figura nel pentacisdodecaedro con diedri di 180°. La diagonale maggiore delle facce rombiche è lo spigolo dell'icosaedro e figura nel triacisicosaedro con diedri di 180°.

Si è fatta una sola figura di romboedro a 30 facce senza disegnare le diagonali che nei due casi rigano le facce e cioè la diagonale minore nel pentacisdodecaedro e

la diagonale maggiore nel triacisicosaedro.

Abbiamo già calcolato gli elementi del romboedro come caso limite di solido convesso di pentacisdodecaedro (K_d = 0,425325404)
I calcoli saranno ripetuti trattando i triacis=icosaedri, ed effettueremo i confronti in tabella.

Schema di romboedro a 30 facce

(caso limite dei pentacisdodecaedri convessi)

l_1 = lato dodecaedro, s = lato delle facce $s = l_1\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

d = diagonale maggiore delle facce $l_1\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = d_1$

d_2 = diagonale minore delle facce $d_2 = l_1$.

$\alpha = 63°,4349488$ = angolo minore facce.

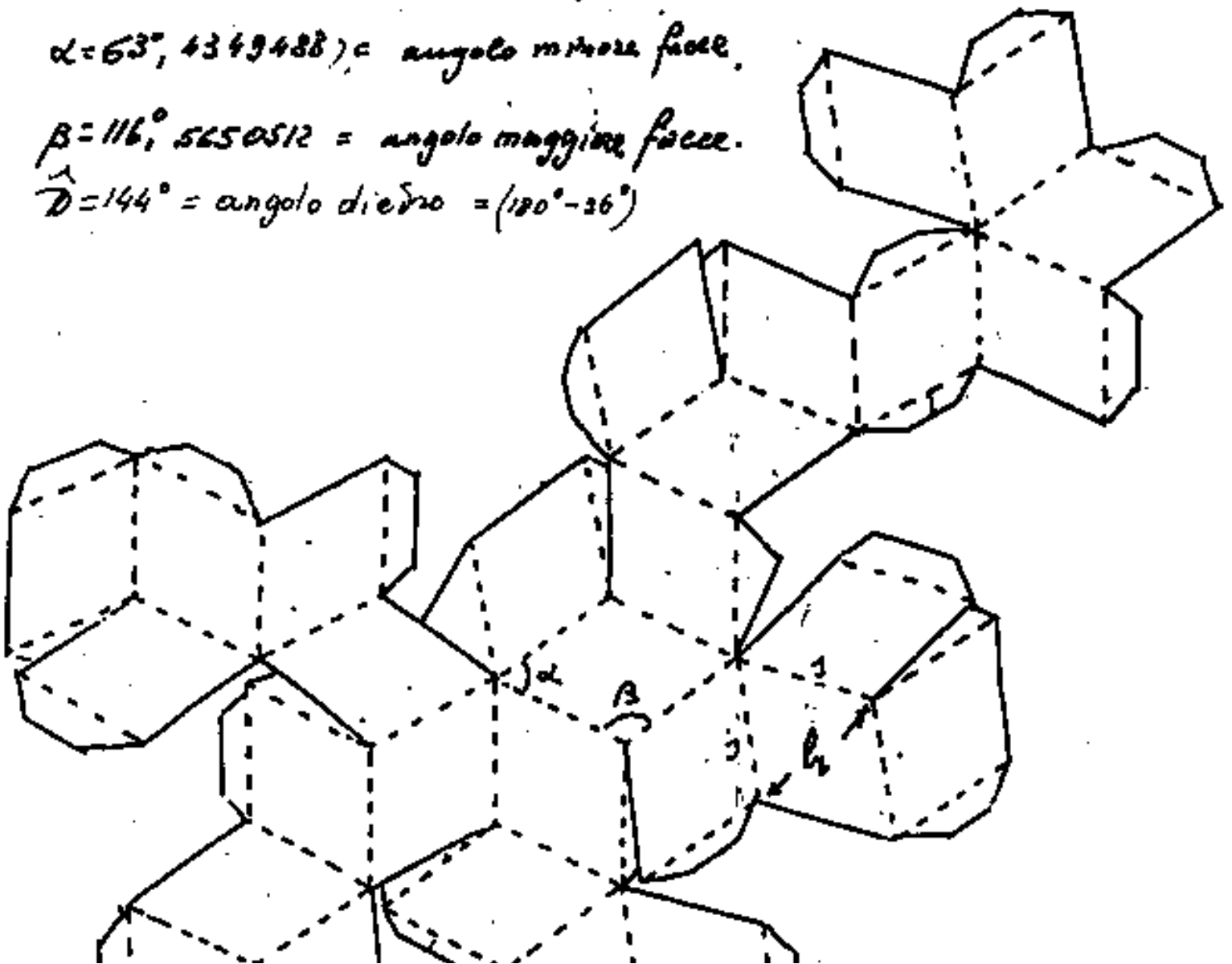
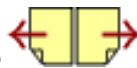
$\beta = 116°,5650512$ = angolo maggiore facce.

$\hat{D} = 144°$ = angolo diedro $= (180° - 36°)$

α

β

s

l_1

Conviene ingrandire il disegno.

Schema di romboedro a 30 facce

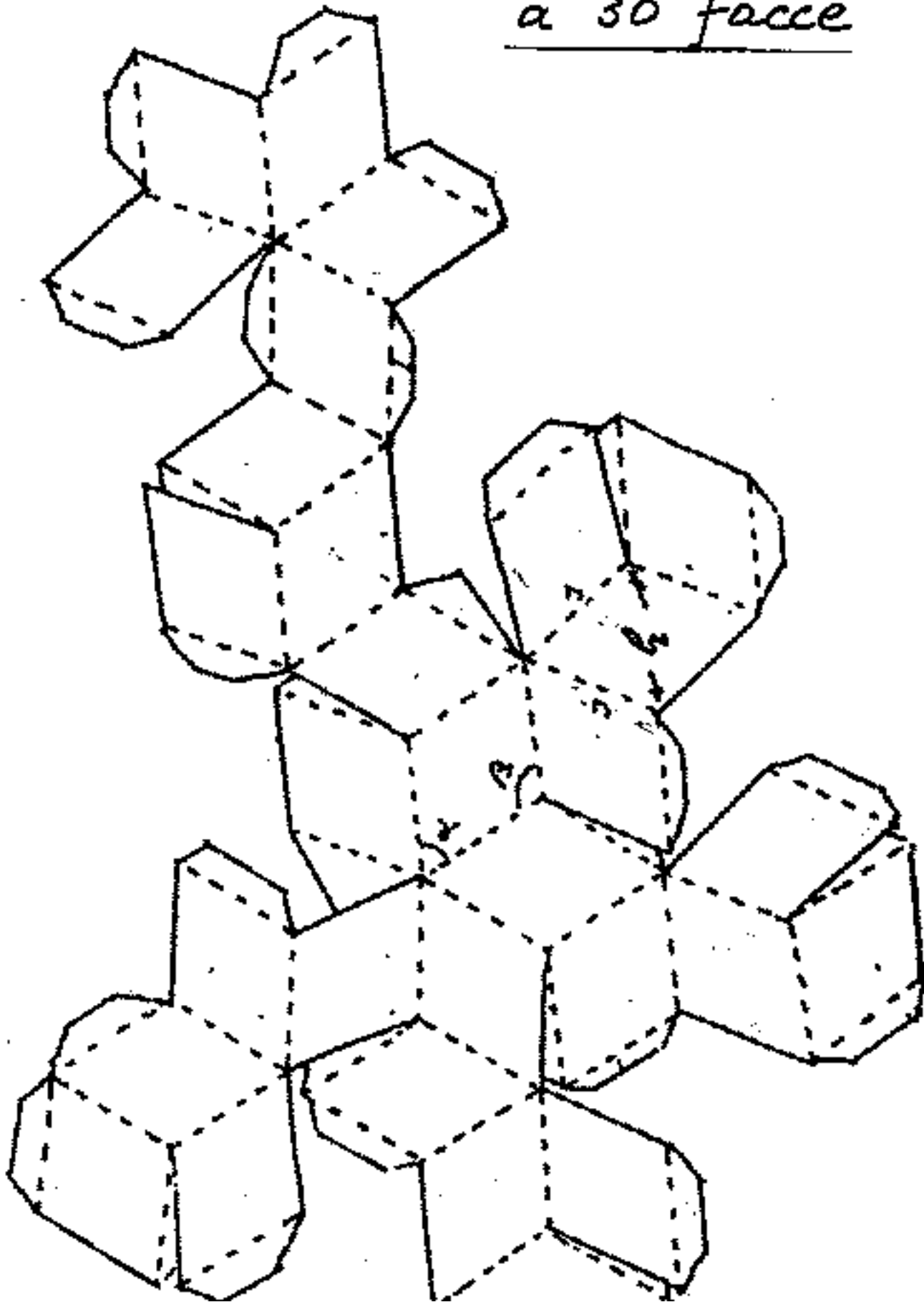
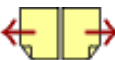



TABELLA dei Pentacisdodecaedri

K	$1/l_4$	$\hat{D}_{l_4}$	$\hat{D}_1$	angoli delle facce al vertice	angoli delle facce alla base	NOTE
0	0,850650808	116° 33' 54"	180°	72°	54°	Dodecaedro a facce rigate dai raggi per i vertici
0,1	0,8565084926	133° 06' 01",64	170° 18' 10",3	71° 25' 53",88	54° 17' 03",04	Pentacisdodecaedro a piccola TV. (convesso)
0,251525534	0,8870579981	156° 43' 06",113	156° 43' 06",113	68° 37' 07",335	55° 41' 26",202	Pentacisdodecaedro a diedri uguali
0,287742175	0,8979990852	161° 56' 45",644	153° 47' 22",65	67° 40' 07",107	56° 09' 56",406	inscrittibile in una sfera 60 facce (convesso)
0,425325404	0,9510565162	180°	144°	63° 26' 05",816	58° 16' 57",092	Romboedro a 30 facce rigate secondo la diagonale minore
0,525731112	1	191° 19' 11",235 concavo	138° 11' 22",846	60°	60°	Duodecedron Elevatus solidus (Leonardo da Vinci e Luca Pacioli) Solido concavo con 60 facce equilatere.

Il Triacisicosaedro

Operando allo stesso modo con l'icosaedro, cioè aggiungendo piramidi alle sue facce, abbiamo la classe dei triacisicosaedri, anche qui occorrono ulteriori condizioni per definirli.
Se l'altezza $\overline{TV}$ delle piramidi è nulla abbiamo un icosaedro le cui facce sono rigate dagli spigoli delle piramidi che si sono sovrapposti ai segmenti che vanno dal centro faccia ai vertici; Poi via, via, che cresce l'altezza delle piramidi avremo, al solito, diedri uguali, oppure solido inscrittibile in una sfera, ma i diedri sugli spigoli dell'icosaedro, ad un certo momento diventeranno piani ed avremo il romboedro a 30 facce, e continuando a crescere l'altezza $\overline{TV}$, i triacisicosaedri diventeranno concavi.
Ma, come abbiamo visto, possiamo avere i triacisicosaedri dai pentacisdodecaedri

aventi gli stessi vertici e la stessa lunghezza
degli spigoli delle piramidi, basta nel quadri=
latero (non piano) che ha per lati gli spigoli
delle piramidi unire due vertici opposti
anziché gli altri due (se fosse piano diremmo di
tracciare una diagonale anziché l'altra).

Triacisicosaedro inscrittibile in una sfera

altezza delle piramidi: $\overline{TV} = (\rho_{s_i} - r_{s_i})$ = differenza fra i raggi delle sfere circoscritta ed inscritta all'icosaedro: $\overline{TV} = \left(\frac{l_i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{l_i}{4}\left(\frac{\sqrt{5}+3}{3\sqrt{3}}\right)\right) =$

$\overline{TV} = l_i\,(0{,}951056516 - 0{,}755761314) =$ $\boxed{\overline{TV} = l_i\,(0{,}195295202)}$

$\boxed{K = 0{,}195295202}$

spigolo delle piramidi: $s = \sqrt{\overline{TV}^2 + \left(\frac{l_i}{\sqrt{3}}\right)^2} =$ $\boxed{s = l_i\,(0{,}609486299)}$

apotema delle facce: $a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_i}{2}\right)} =$ $\boxed{a = l_i\,(0{,}348530556)}$

altezza sullo spigolo: $h_s = \frac{l_i \cdot a}{s} =$ $\boxed{h_s = l_i\,(0{,}571843135)}$

Angoli delle facce

al vertice $= 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{l_i}{2s}\right) = 2\,\mathrm{arcsen}(0{,}820362985) = 110°\ 14'\ 32'',2$

alla base $= \arccos\left(\frac{l_i}{2s}\right) = \arccos(0{,}820362985) = 34°\ 52'\ 43'',87$

Angoli diedri

dell'icosaedro $\hat{D}_i = 138°\ 11'\ 22'',8$

alla base delle piramidi: $\hat{D}_b = \mathrm{arcsen}\left(\frac{\overline{TV}}{a}\right) = \mathrm{arcsen}(0{,}560338824)$

alla base delle piramidi: $\hat{D}_b = \arcsin\left(\frac{[illegible]}{a}\right) = \arcsin(0{,}560338824)$

$$= 34^\circ\ 04'\ 45'',24$$

sullo spigolo l_i: $\left(\hat{D}_{l_i} = \hat{D}_i + 2\hat{D}_b\right)$

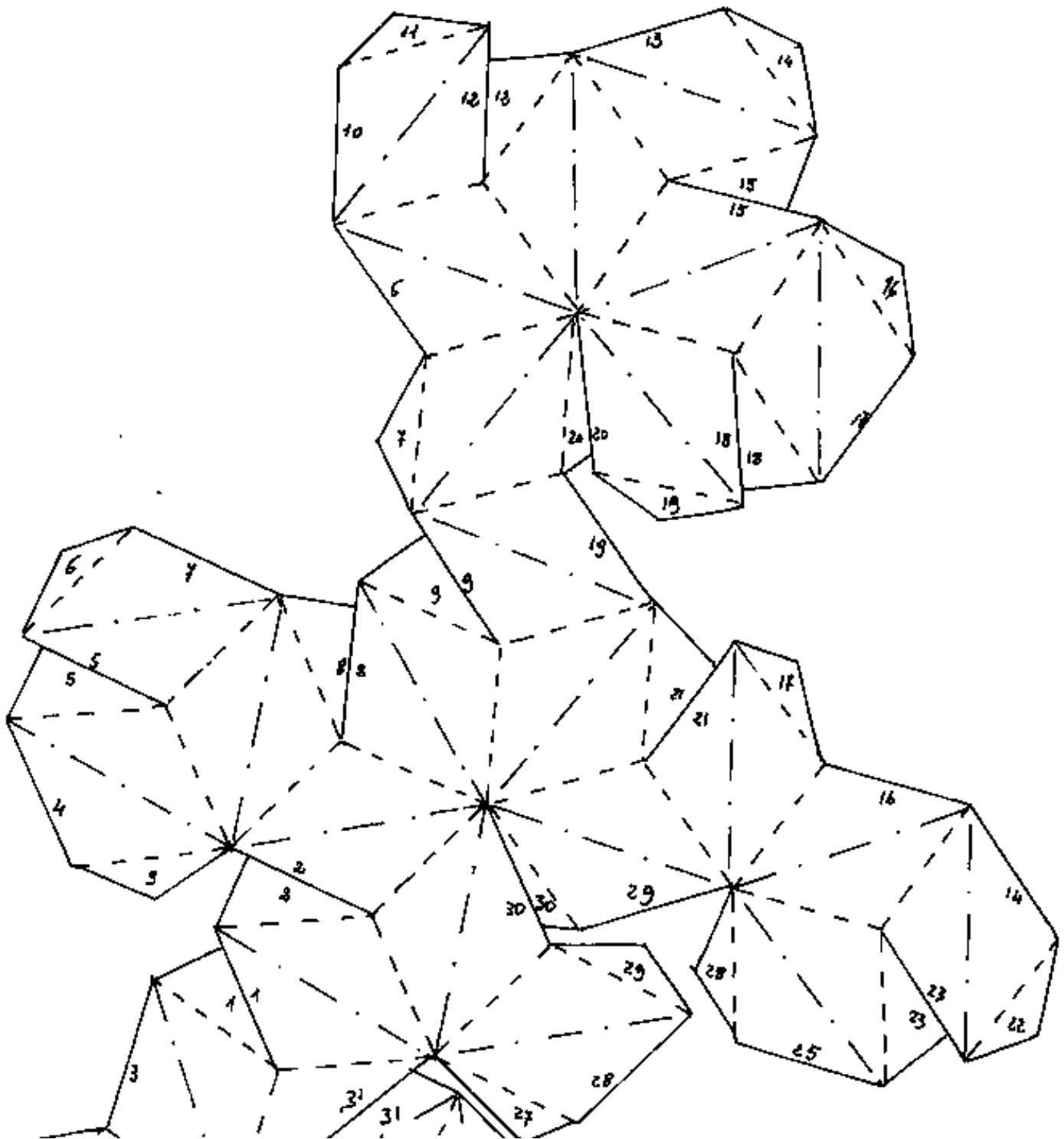
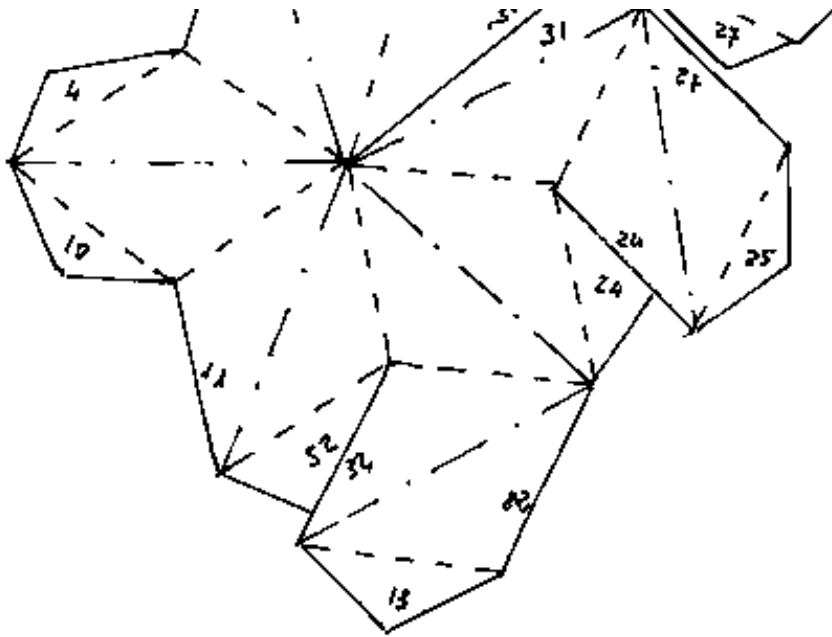
$$\hat{D}_{l_i} = \left(138^\circ\ 11'\ 22'',8 + 2(34^\circ\ 04'\ 45'',24)\right)$$

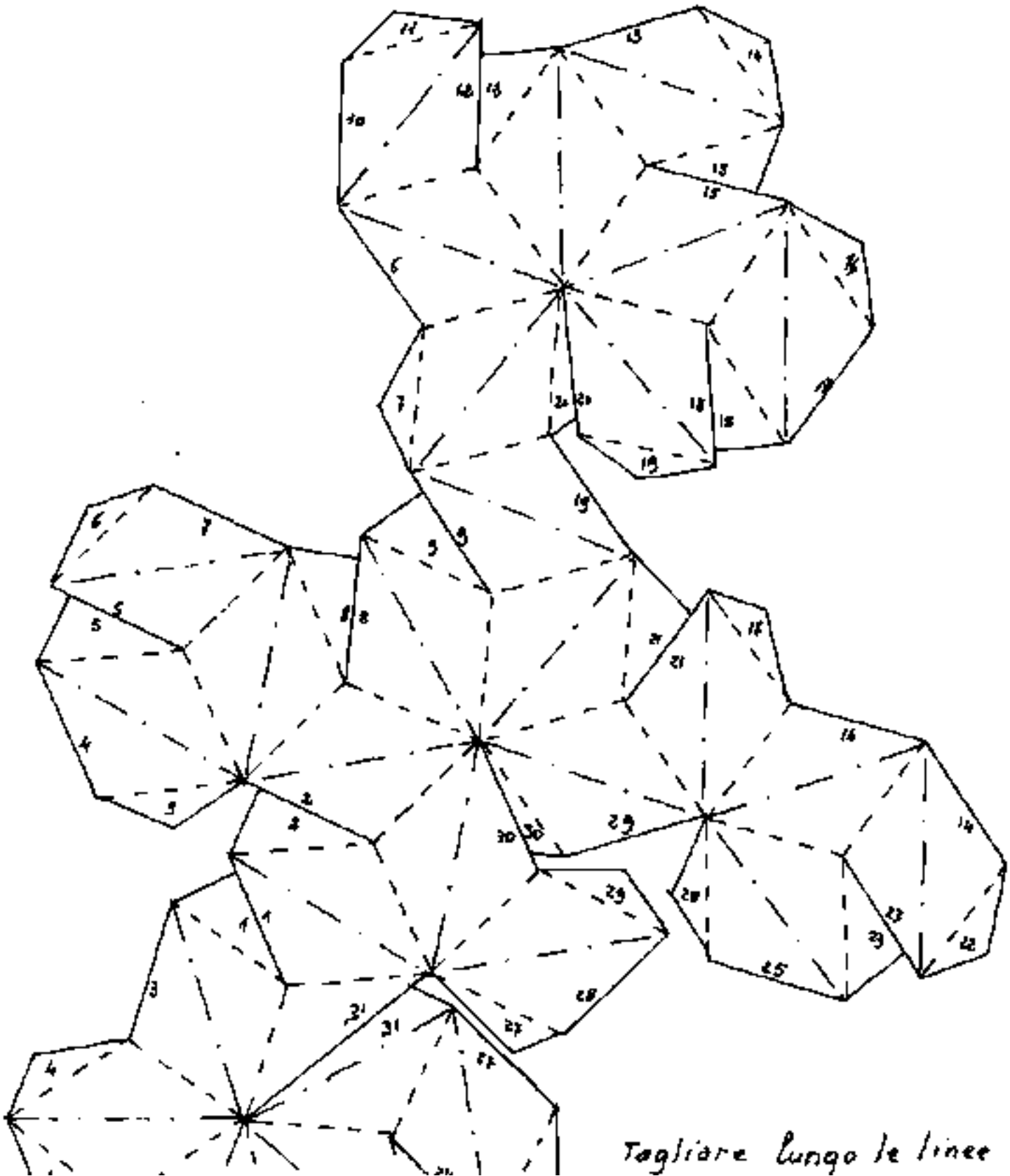
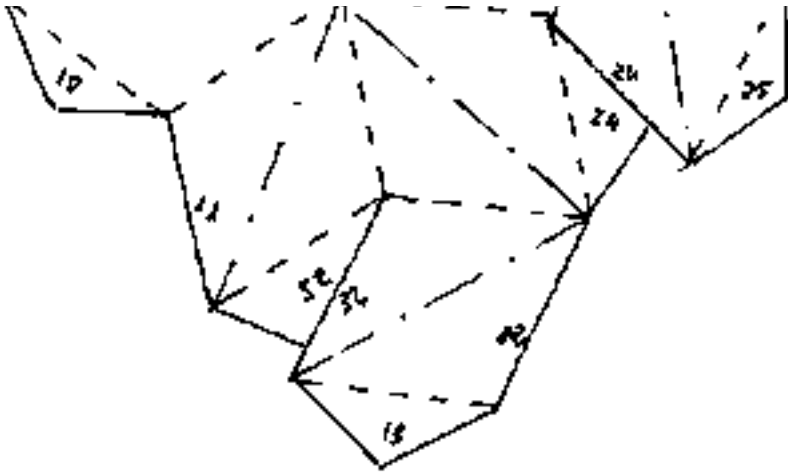
$$\hat{D}_{l_i} = 206^\circ\ 20'\ 53'',28 \quad > 180^\circ$$

angolo concavo di $\hat{D}_{l_i} = -153^\circ\ 39'\ 06'',72$

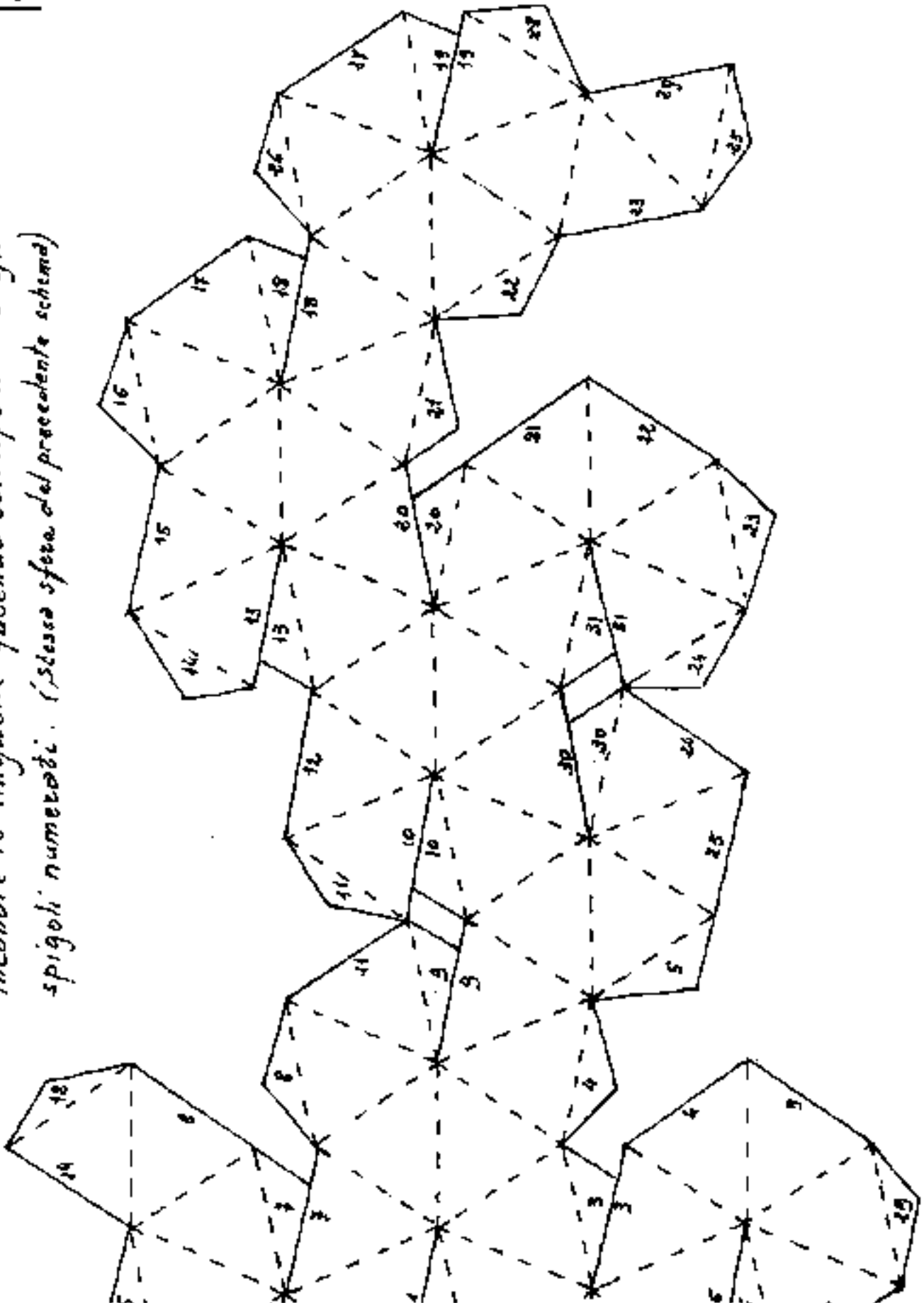
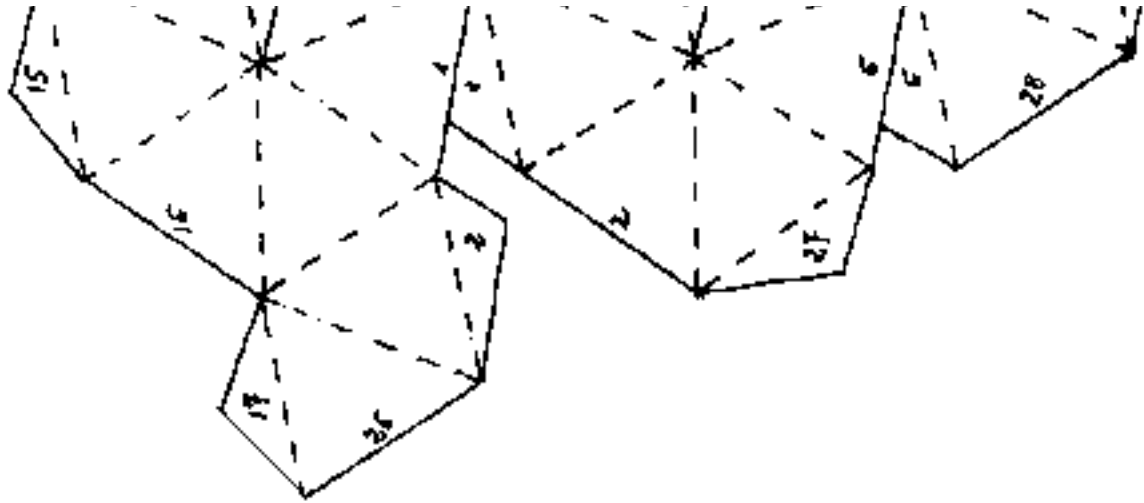
sullo spigolo s: $\hat{D}_s = 2\arcsin\left(\frac{l_i}{2h_{l_i}}\right) = 121^\circ\ 56'\ 23'',9$

Schemo di triacisicosaedro inscrittibile in una sfera (stessa sfera del pentacisdodecaedro che segue)

4 10 11 5 31 27 27 24 24 25 52 34 13 24

Tagliare lungo le linee intere, piegare concavo le linee a tratto e punto, piegare convesso le linee a tratteggio semplice, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati.

Schema di triacisicosaedro inscrittibile in una sfera (stessa sfera del pentacisdodecaedro che segue)

Tagliare lungo le linee inte

Tagliare lungo le linee intere, piegare concavo le linee a tratto e punto, piegare convesso le linee a tratteggio semplice, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati.

Schema di pentacisdodecaedro inscrittibile in una sfera

Tagliare lungo le linee intere, piegare le tratteggiate, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati. (stessa sfera del precedente schema)

Il confronto fra questi due solidi inscritti nella stessa sfera, conferma il rapporto: $\frac{l_i}{l_d} = 1,473370418$; non sono possibili confronti angolari perche' i piani delle facce giacciono su piani diversi, anche se gli spigoli s sono gli stessi. Infatti l'angolo fra due spigoli di una stessa piramide che e' l'angolo al vertice nelle facce dei pentacisdodecaedri non esiste nei triacisicosaedri, e viceversa.

Triacisicosaedro a diedri uguali

$(\hat{D}_{l_i} = \hat{D}_s)$ Abbiamo gia' visto che detta $\overline{TV}$ l'altezza delle piramidi aggiunte $(\overline{TV} = K\,l)$; (l_i per l'isocoedro)

$s = l\sqrt{\frac{1+3K^2}{3}}$ (per facce triangolari di lato l)

$a = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{1+12K^2}{3}} = l\sqrt{K^2+\frac{1}{12}}$. " "

$h_s = \frac{a\,l}{s} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{1+12K^2}{1+3K^2}}$ " "

Diedri: $\hat{D}_b = \text{arctg}(K\sqrt{12})$ (base piramidi)

" $\hat{D}_i = \text{arctg}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ (dell'icosaedro) $= 2\,\text{arctg}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

" $\hat{D}_{l_i} = 2\,\text{arctg}(K\sqrt{12}) + \text{arctg}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ sul lato l_i

" $\hat{D}_1 = 2\,\text{arcsen}\left(\sqrt{\frac{1+3K^2}{1+12K^2}}\right) = 2\,\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right)$

da cui la relazione:

$$\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+3K^2}}{3K}\right) - \text{arctg}\left(2K\sqrt{3}\right) = \text{arctg}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 69°\,05'\,41'',43$$

che risulta soddisfatta per

$$K = 0{,}05721908277$$

Gli elementi del triacisicosaedro a diedri uguali sono:

$\overline{TV} = l_i\,(0{,}057219082\,77)$

$s = (0{,}580178728)\,l_i$; $l_i = (1{,}723606798)\,s$;

$a = (0{,}294291278)\,l_i$; $a = (0{,}507242448)\,s$;

$h_s = (0{,}507242448)\,l_i$; $h_s = (0{,}874286532)\,s$;

angoli delle facce.

al vertice $\alpha_v = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{l}{2s}\right) = 119°\ 02'\ 21'',66$

alla base $\alpha_b = \arccos\left(\frac{l}{2s}\right) = 30°\ 28'\ 49'',17$

Diedri:

dell'icosaedro : $\hat{D}_i = \text{arctg}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = 2\,\text{arctg}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 138°\ 11'\ 22'',8$

alla base piramidi : $\hat{D}_b = \text{arctg}\left(\frac{\overline{TV}}{\frac{1}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2}}\right) = \text{arctg}\left(\frac{0{,}05721908277}{\sqrt{3}/6}\right) = 11°\ 12'\ 41'',16$

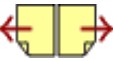
sullo spigolo s : $\hat{D}_s = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{l_i}{2h_s}\right) = 160°\ 36'\ 45'',1$

sullo spigolo l_i : $\hat{D}_{l_i} = \hat{D}_i + 2\hat{D}_b = (138°\ 11'\ 22'',8) + 2(11°\ 12'\ 41'',16) = 160°\ 36'\ 45'',1$

sullo spigolo ℓ_i: $D_{e_i} = D_i + 2D_1 = (138°11'22'',8) + 2(11°12'41'',16) = 160°36'42'',1$

La distanza fra i vertici delle piramidi "ℓ_v" è:

$\ell_v = 2a\,\text{sen}(\widehat{D_{ei}}/2) = 2\frac{a\,\ell_i}{2h_1} = s$ cioè $\boxed{\ell_v = s}$

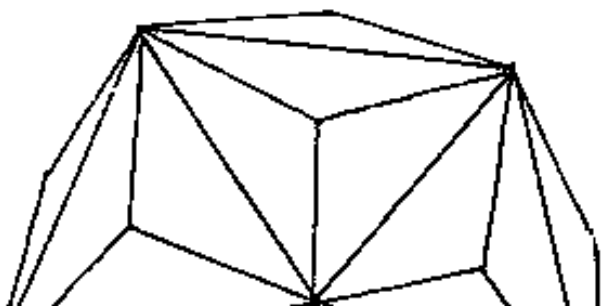
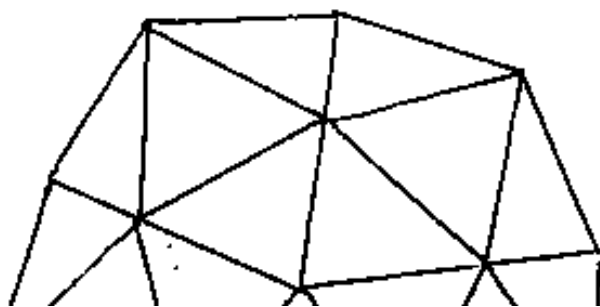
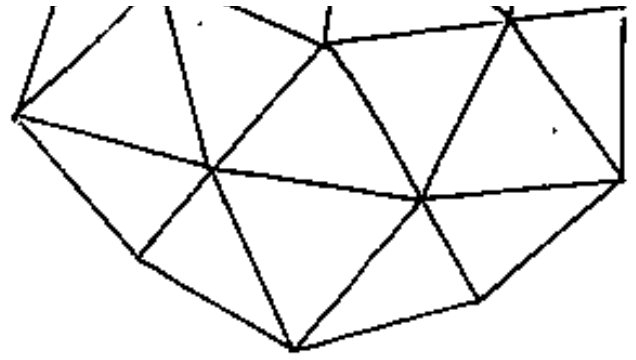
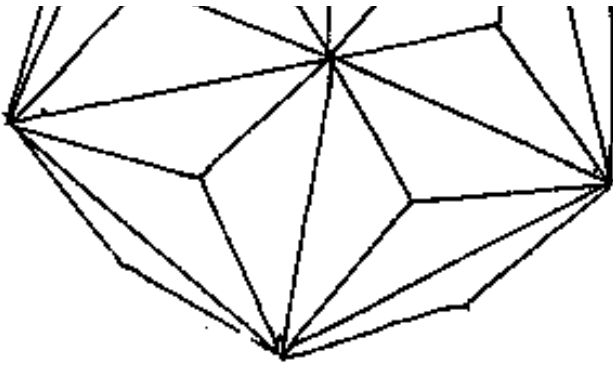
essendo a diedri uguali ℓ_v equivale s. (vale solo per facce triangolari del solido base)

Sostituendo $l_v = l_d$ ad l_i otteniamo il pentacis dodecaedro che ha gli stessi vertici e lo stesso "s" del triacisicosaedro a diedri uguali.

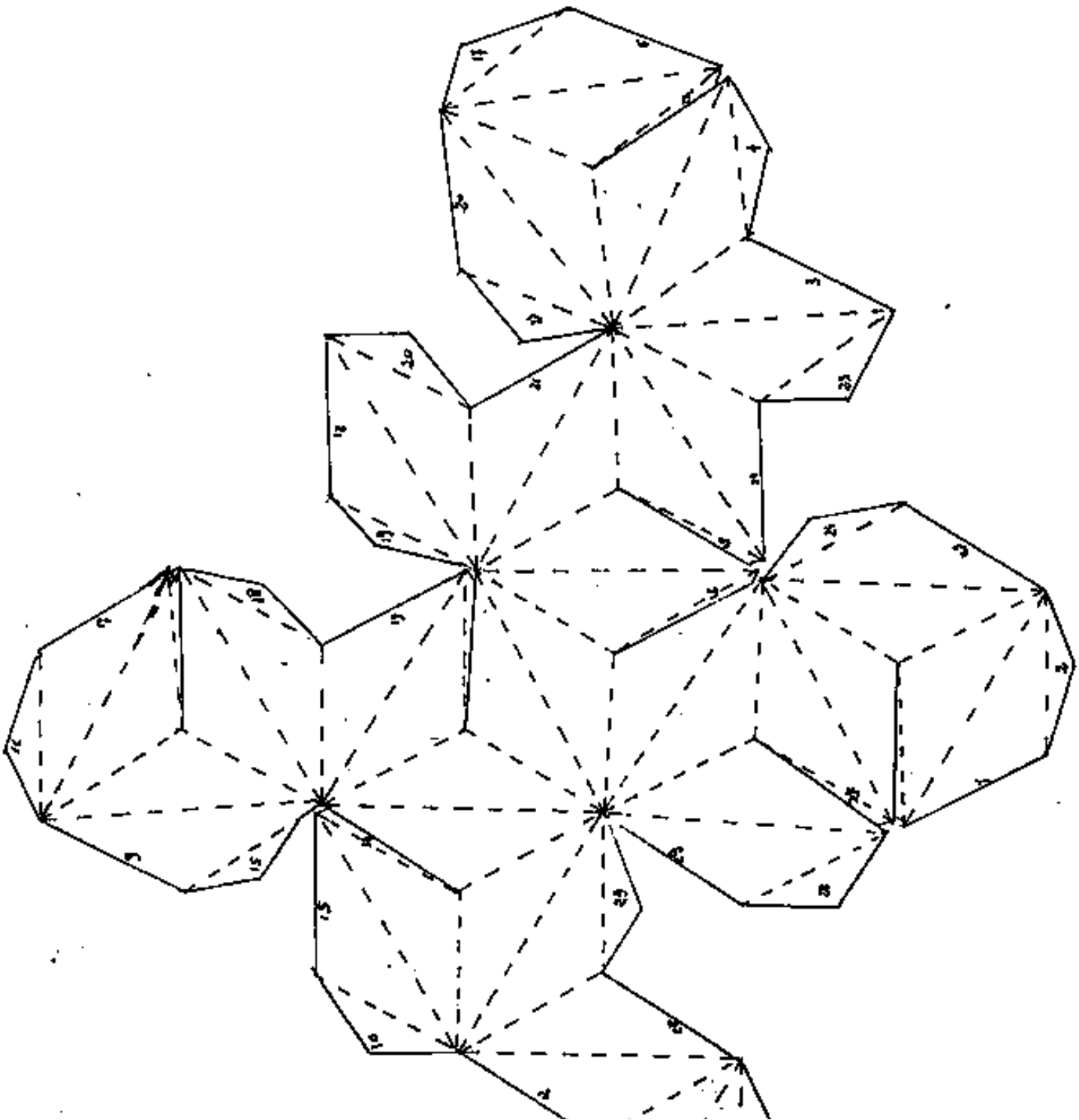
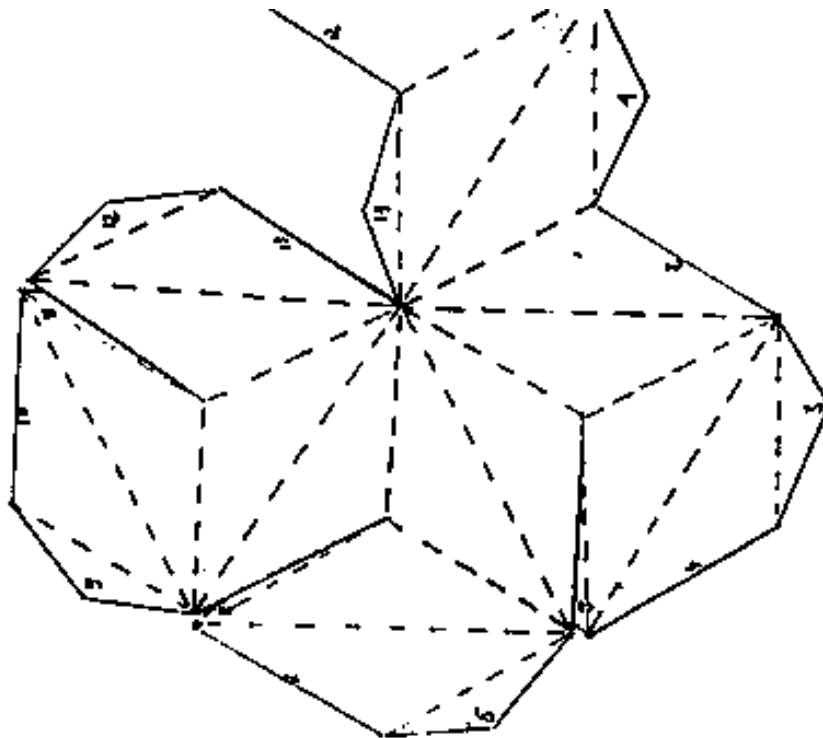
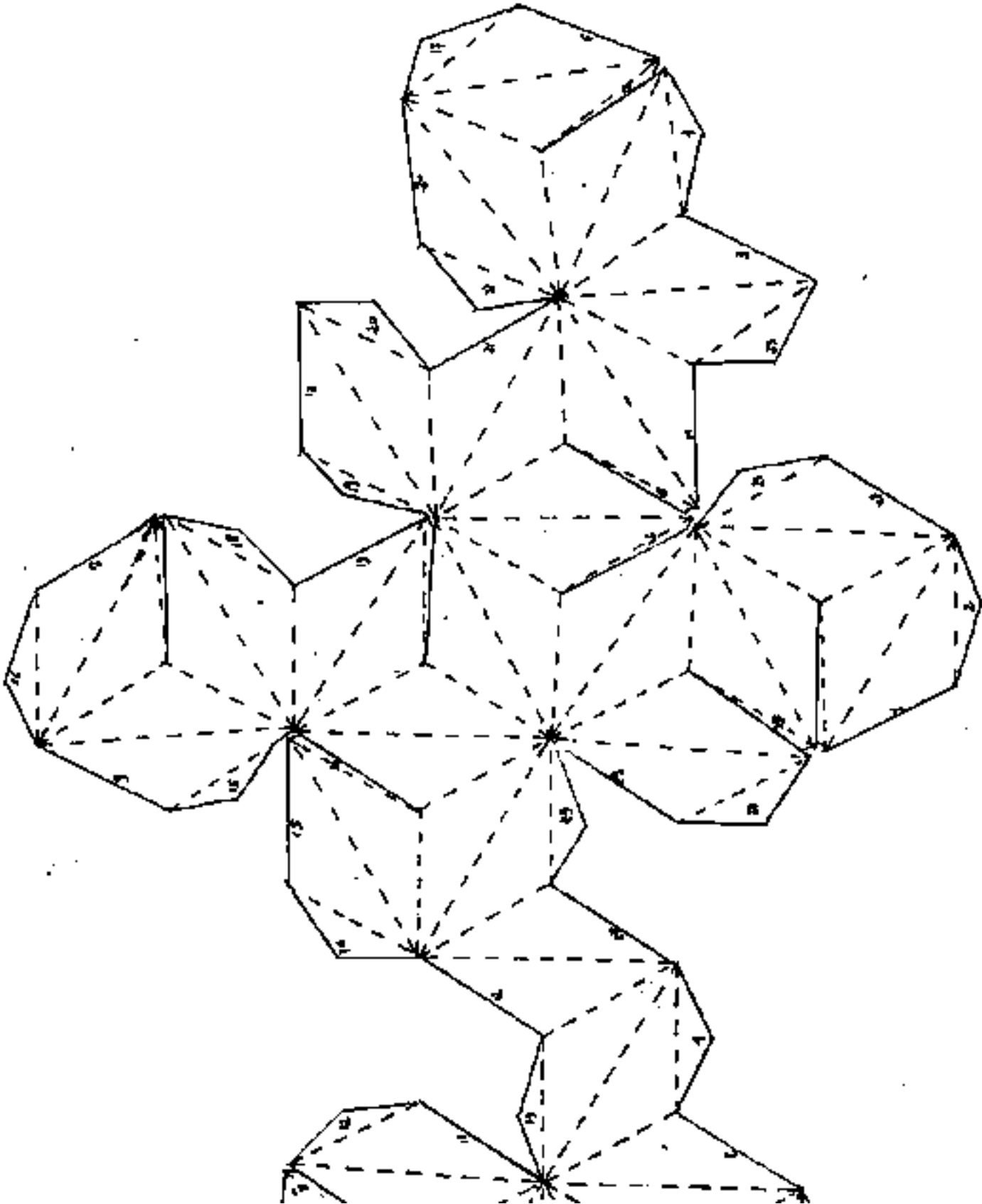
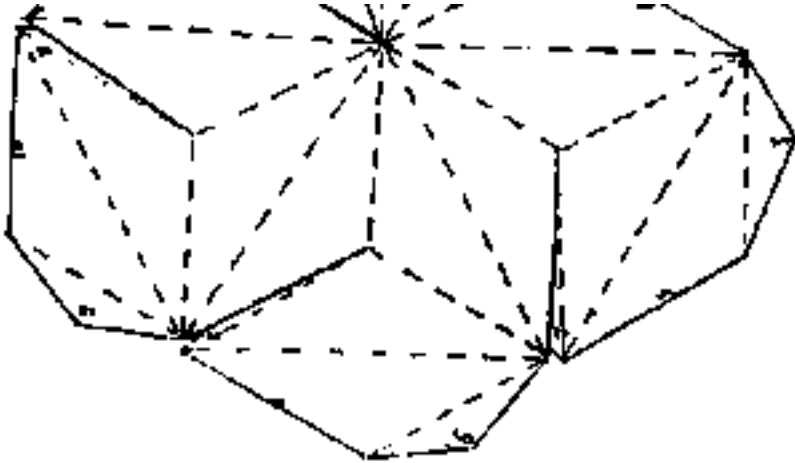
Tale pentacisdodecaedro, avendo $l_d = l_v =$ "s", è a facce equilatere, è il solido che viene chiamato: "Duodecedron Elevatus solidus" di cui abbiamo già calcolato gli elementi.

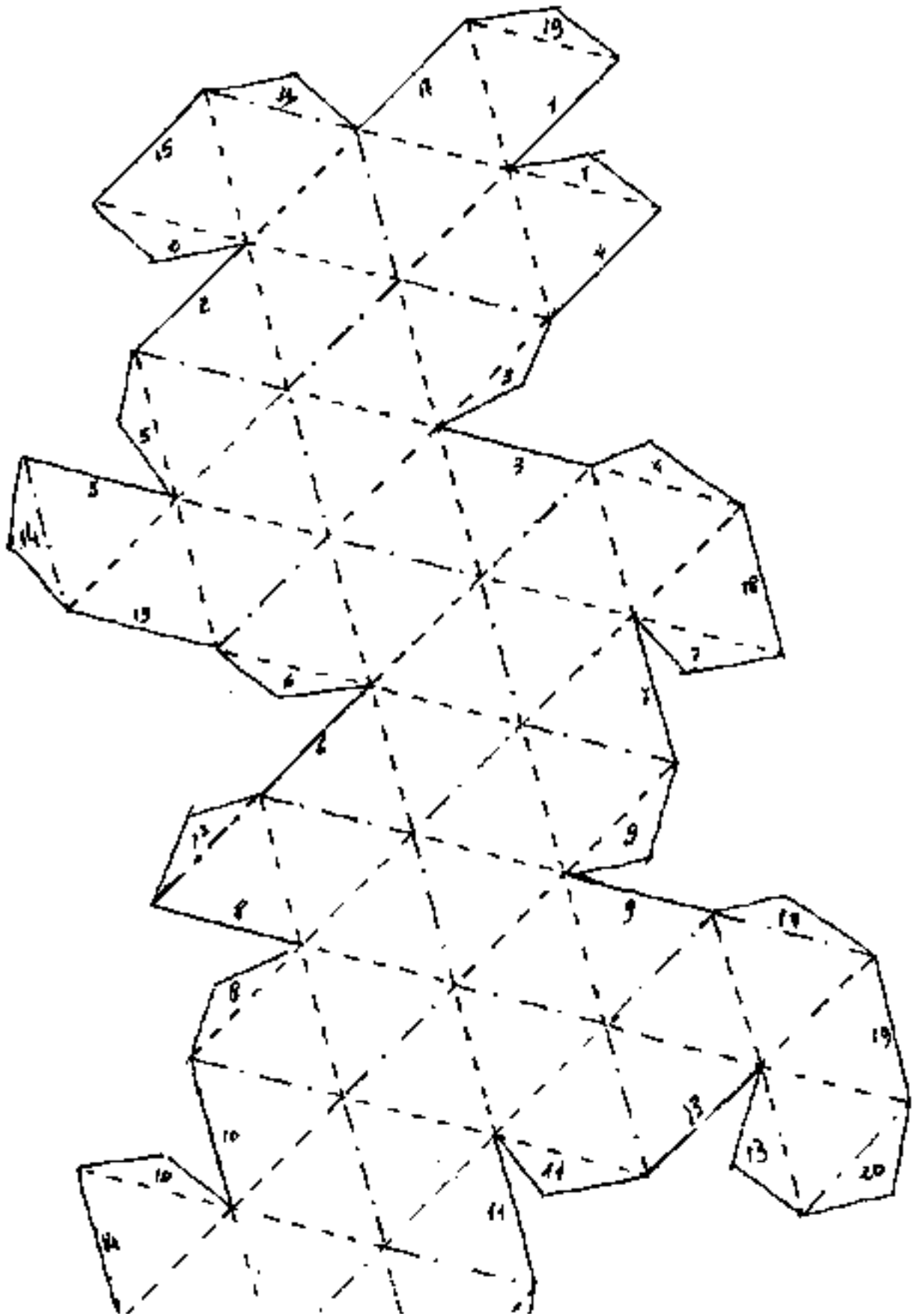
$K_d = 0,525731112$; $s = l_d$; $h_s = a = \frac{l_d}{2}\sqrt{3} = (0,866025403) l_d$

angoli delle facce: $60° = \alpha_b = \alpha_v$.

Diedri: $\hat{D}_s = 138°\ 11'\ 22'',8$ (convesso)

$\hat{D}_d = 191°\ 19'\ 11'',2 = -168°\ 40'\ 48'',8$ (concavo)

Triacisicosaedro (convesso) — Pentacisdodecaedro (concavo)

I due solidi hanno gli stessi vertici e stessi s.

Schema di sviluppo di TRIACISICOSAEDRO a diedri uguali

Schema di sviluppo di TRIACISICOSAEDRO
a diedri uguali

Pentacisdodecaedro avente gli stessi vertici del triacisicosaedro a diedri costanti.

go le linee intere, piegare convesso le tratteggiate,
avo le linee a tratto e punto, incollare le linguette
ispondere gli spigoli numerati.

Lo scambio fra i due solidi aventi spigoli uguali (spigoli delle piramidi aggiunte) e stessi vertici, si unificano in un solido identico quando il quadrilatero degli spigoli 1 è piano. Si ha un romboedro a trenta facce che tratteremo più diffusamente al capitolo: romboedri.

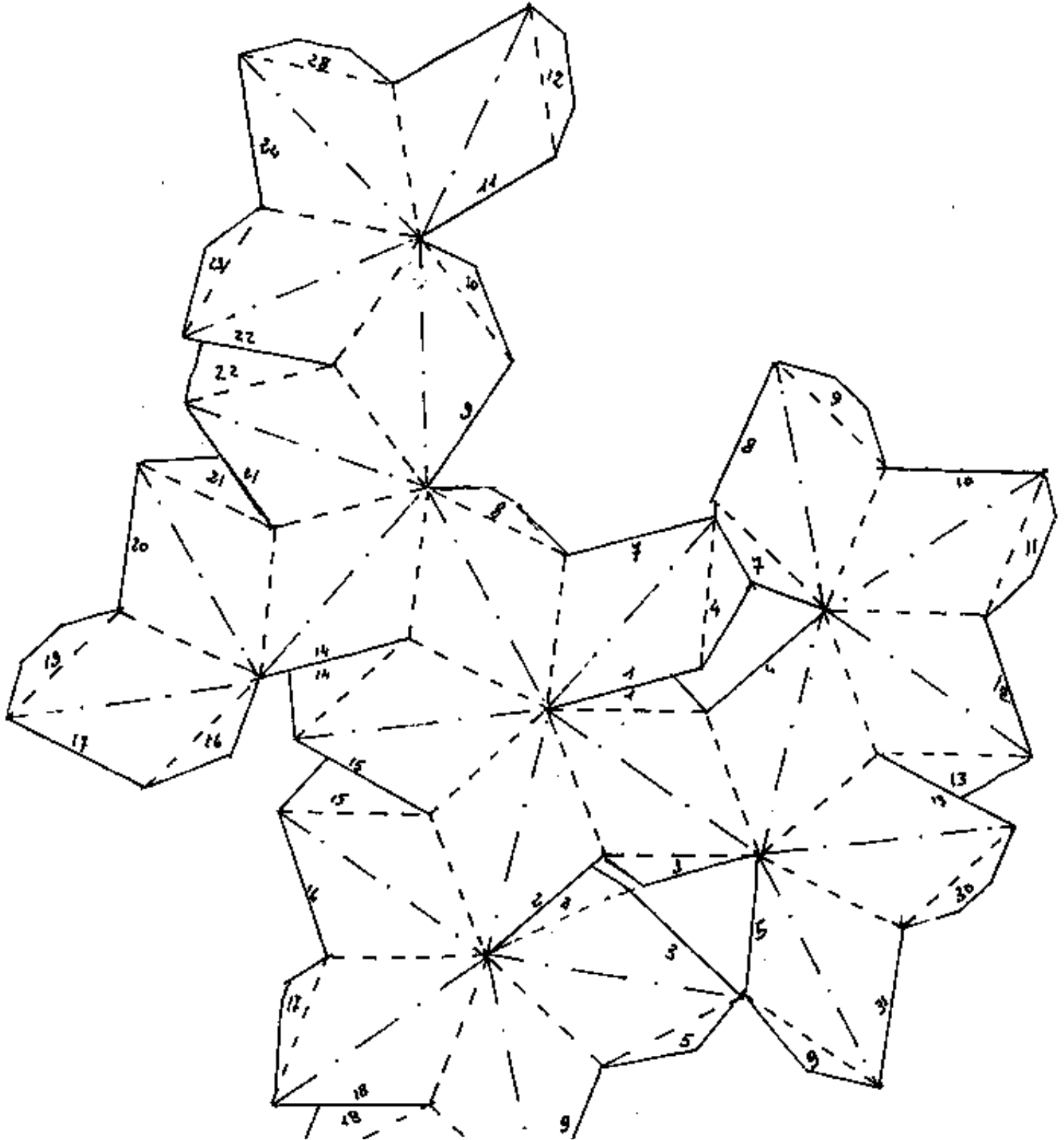
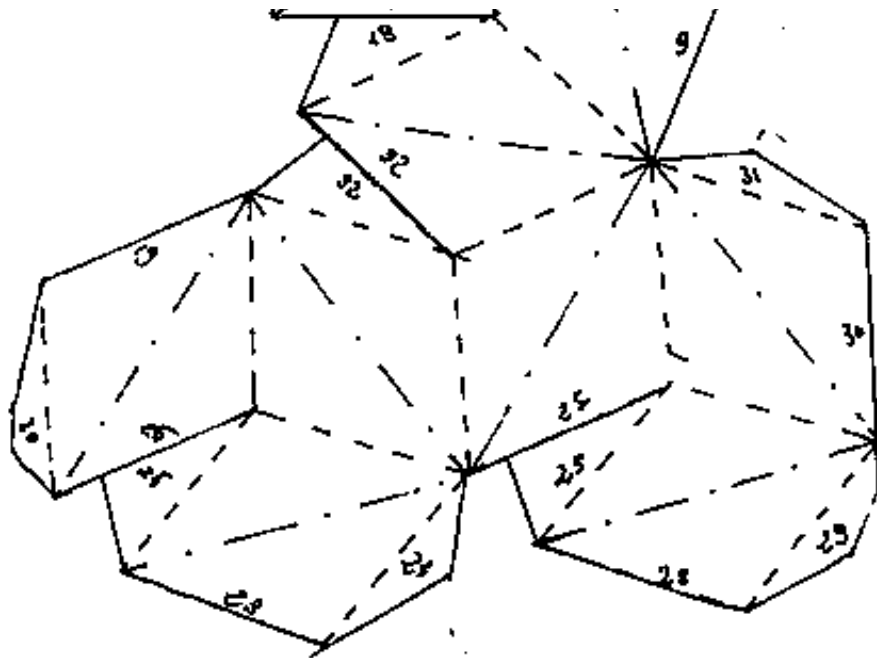
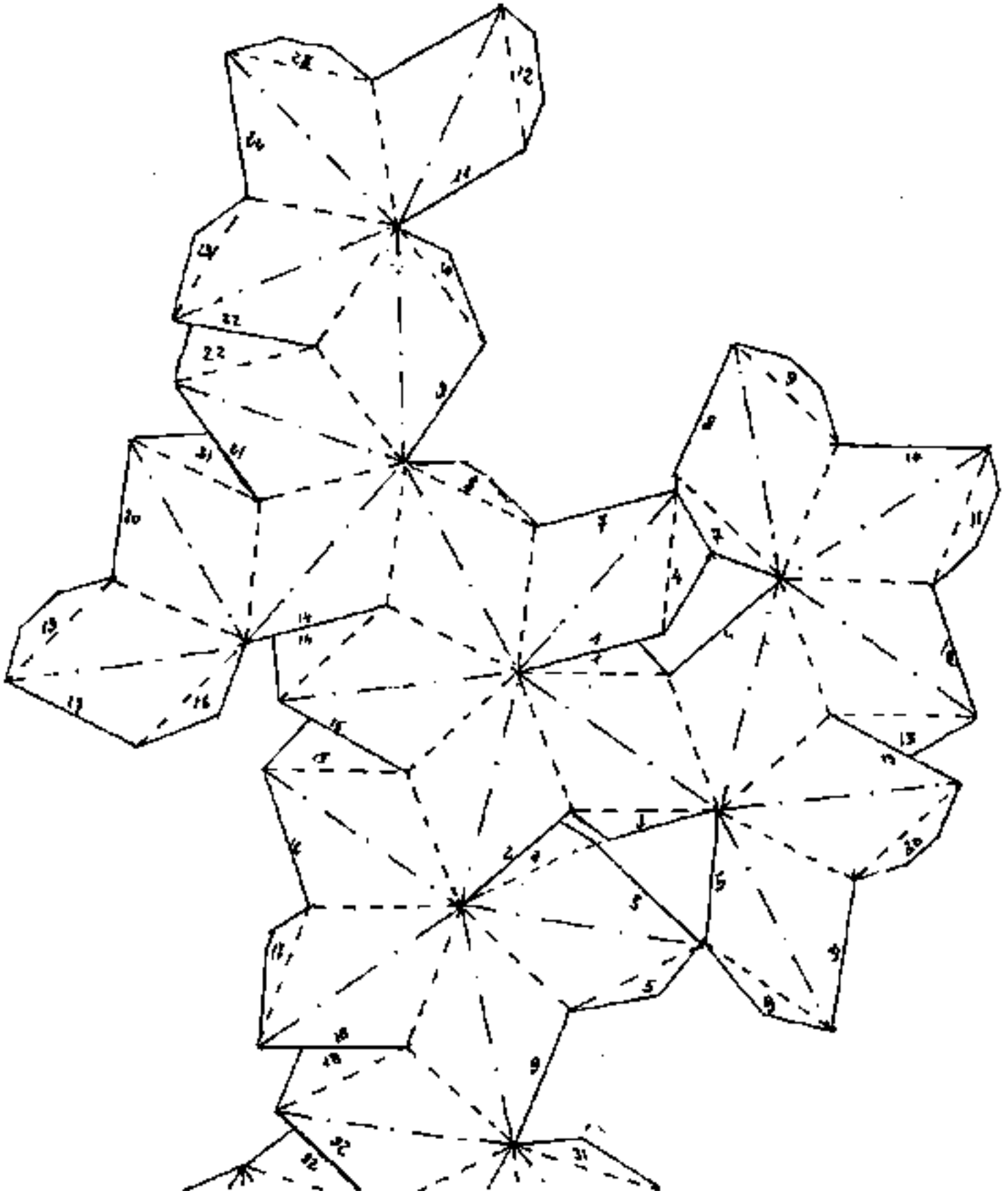
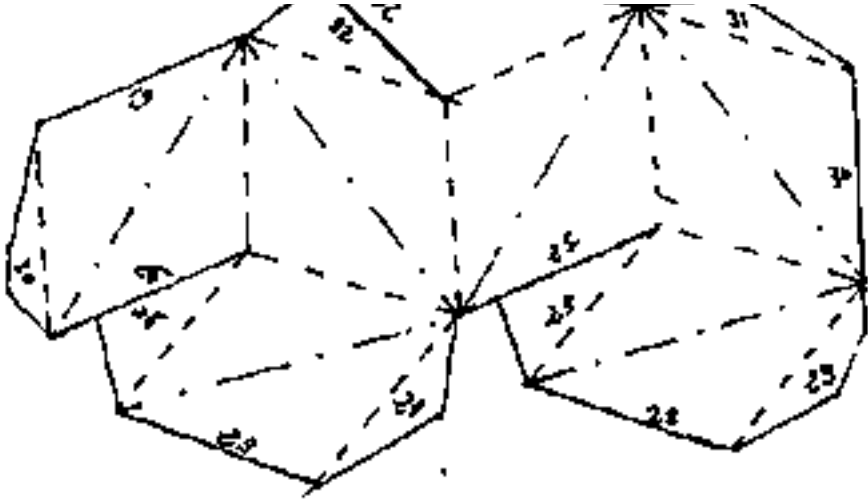
Ora invece ci interessa trattare il triacistetraedro che nasce dal pentacisdodecaedro a diedri uguali problema che abbiamo rimandato a questo capitolo nel trattare i pentacisdodecaedri.

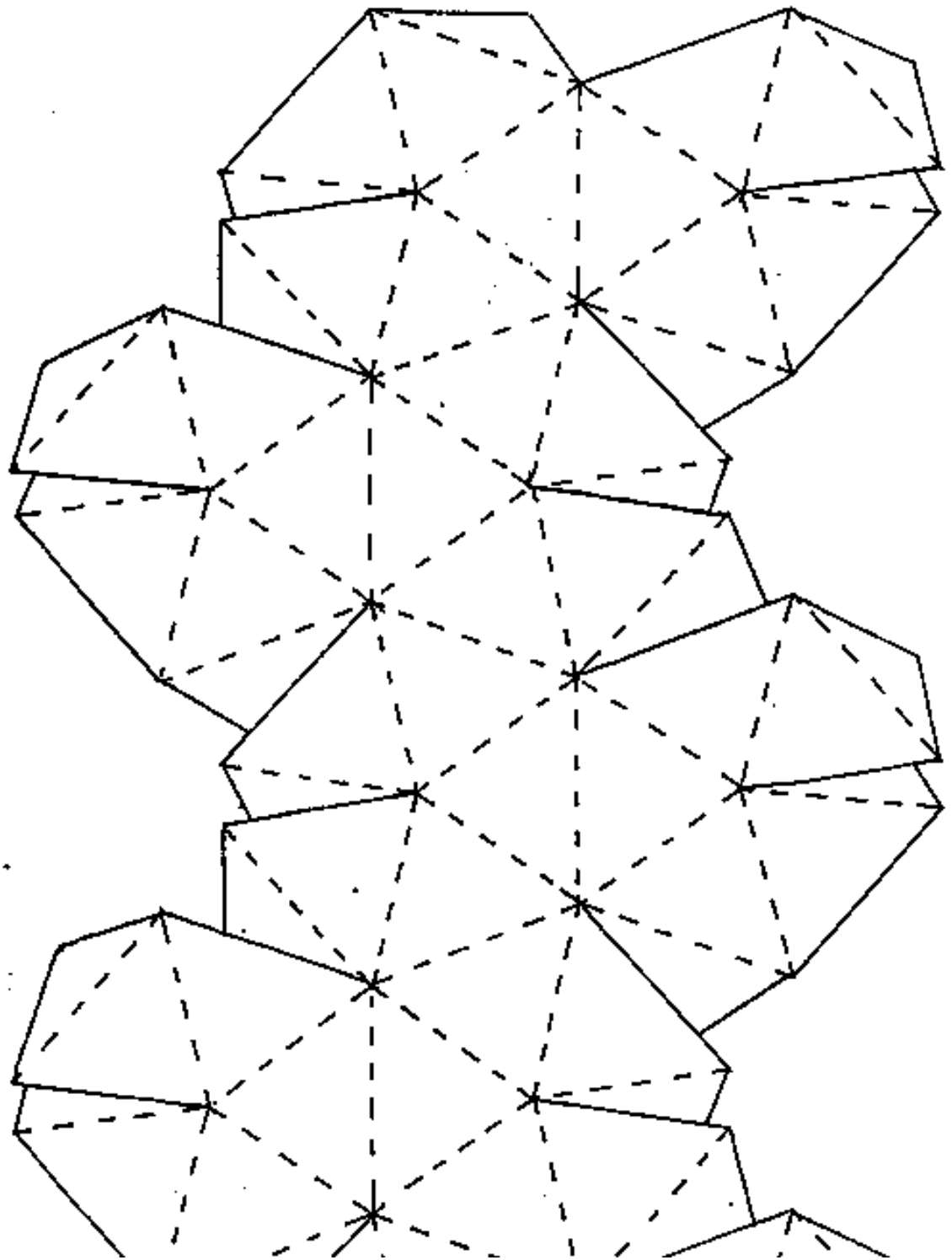
Avevamo accertato che per le caratteristiche dei due solidi base: dodecaedro e icosaedro esistevano una serie di corre=

lazioni, in particolare si era ricavata
la relazione fra K_d e K_i nei vari casi.
Lo scambio dei segmenti che uniscono i
vertici opposti nel quadrilatero non piano
è una relazione mutua, cioè si può at-
tribuire una caratteristica ad una classe
di solidi e vedere cosa succede all'altra.

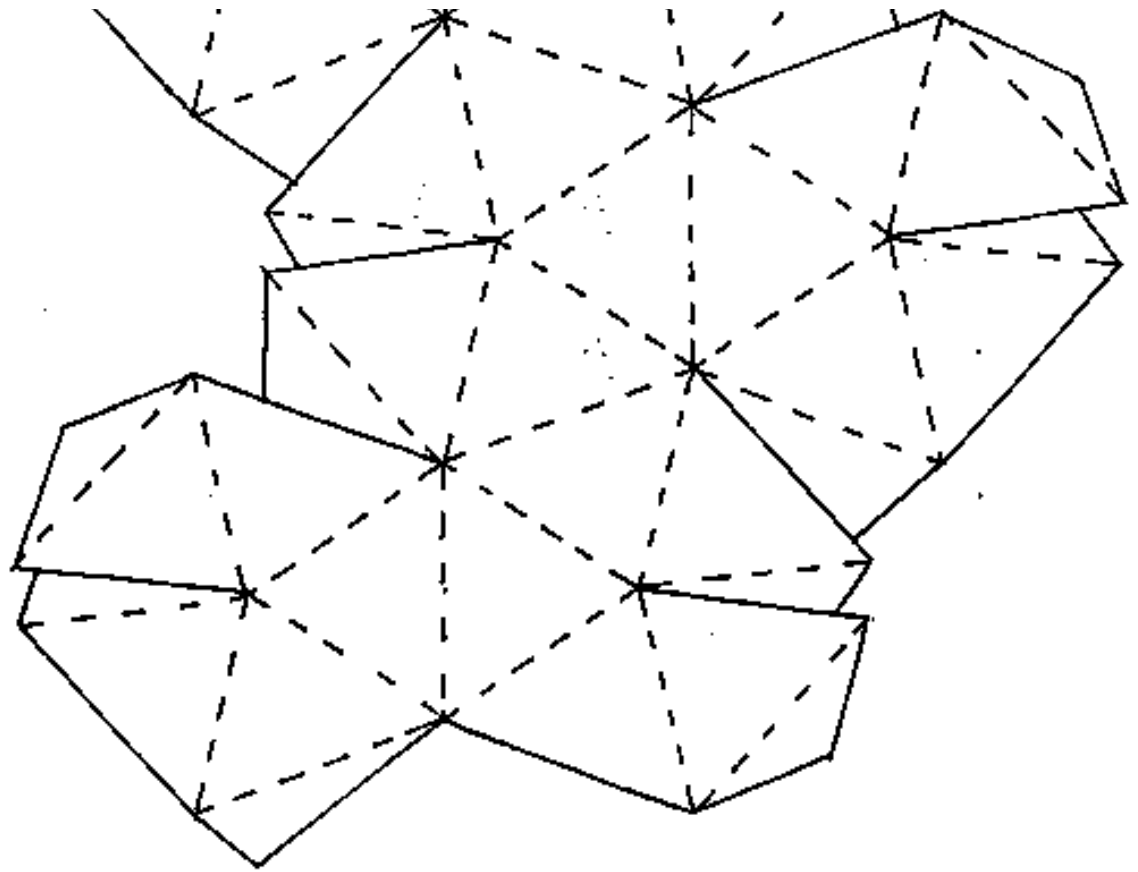
TABELLA dei Triacisicosaedri

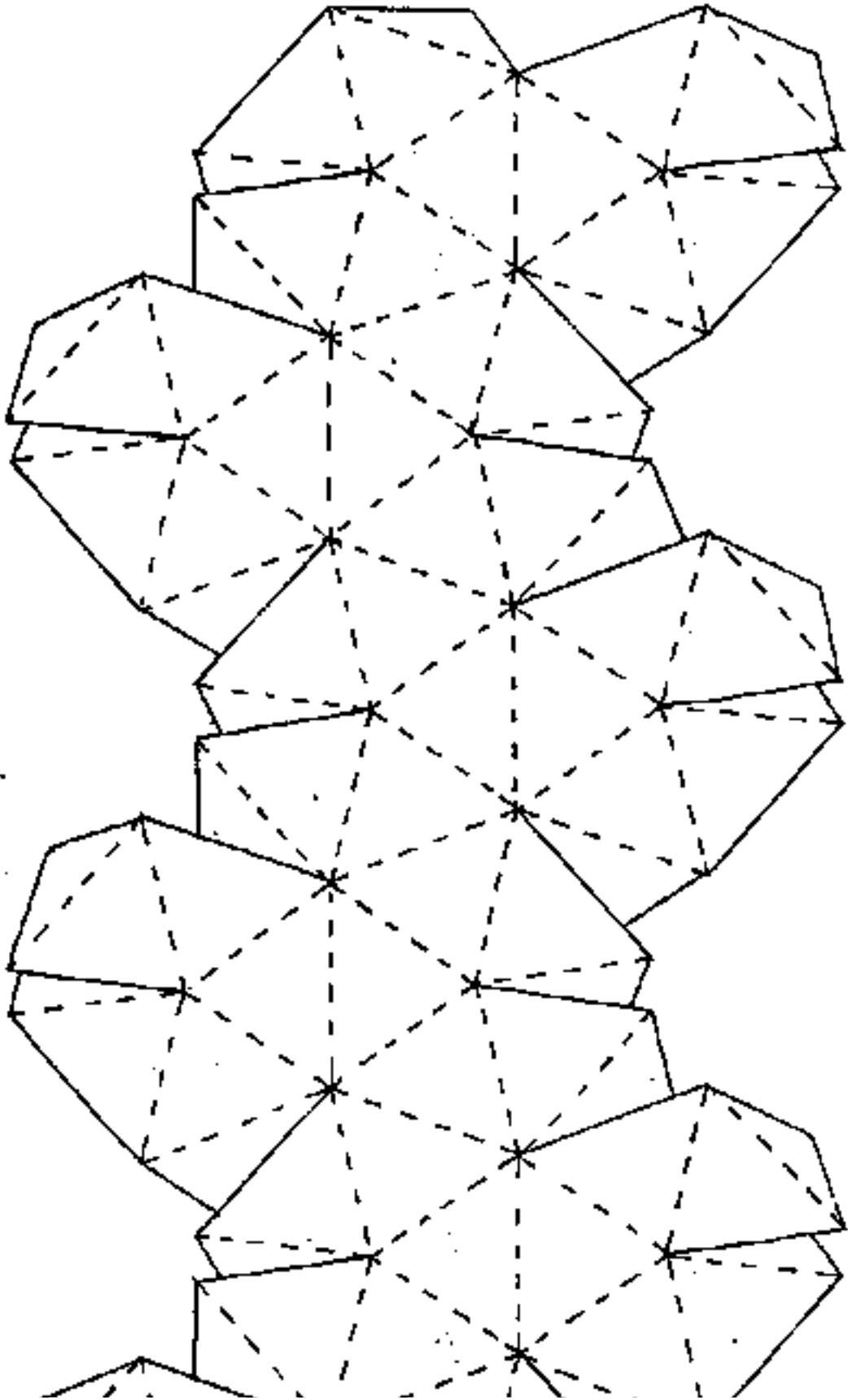
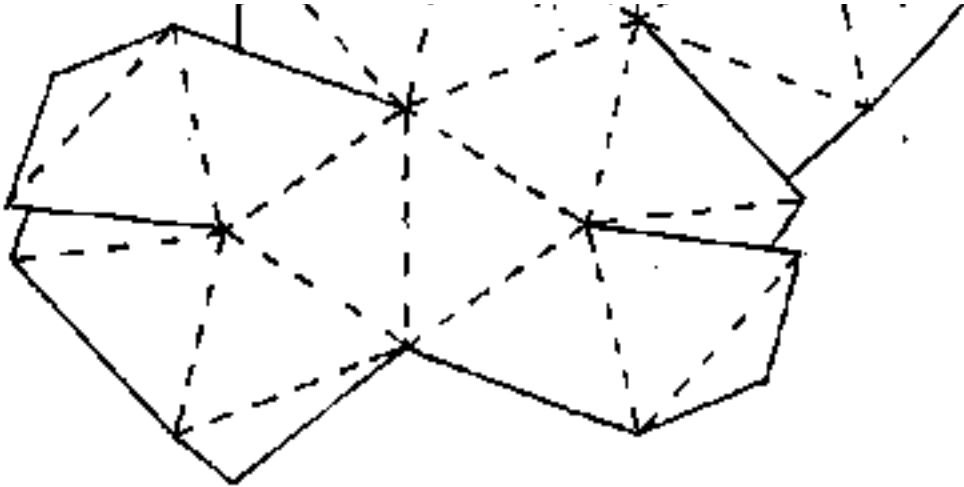
K	$1/l_i$	$\hat{D}_{l_i}$	$\hat{D}_s$	angoli delle facce		NOTE
				al vertice	alla base	
0	$1/\sqrt{3}$ 0,577350269	138° 11' 22",8	180°	120°	30°	Icosaedro con 20 facce rigate
0,0572190827	0,580178728	160° 36' 45",188	160° 36' 45",188	119° 02' 21",663	30° 28' 49",1685	TRIACISICOSAEDRO 60 facce a diedri uguali
stessi vertici del pentacisdodecaedro (K=0,525731112) a facce equilatere –						
$\left(\frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{27}}\right)$ 0,1102640897	0,5877852523	180°	144°	116° 33' 54",184	31° 43' 02",9079	ROMBOEDRO (30 facce) rigate secondo la diagonale maggiore
stesso solido del pentacisdodecaedro (K=0,425325404) romboedro con facce rigate secondo la diagonale minore						
0,195295203	0,6094862998	206° 20' 53",2 –153° 39' 06",8 (concavo)	121° 56' 23",93	110° 14' 32",25	34° 52' 43",87	TRIACISICOSAEDRO (60 facce) inscrittibile in una sfera
stessi vertici del pentacisdodecaedro (K=0,287742174) inscrittibile in una sfera						
0,204124145	0,6123724356	208° 43' 06",432 concavo	120°	109° 28' 16",395	35° 15' 51",802	TRIACISICOSAEDRO ottenuto sovrapponendo angoloidi del tetraedro
0,2205281797	0,618033988	212° 56' 39",9 –147° 03' 20",08 concavo	116° 33' 54",1	108°	36°	TRIACISICOSAEDRO ottenuto da vertici del pentacisdodecaedro a diedri uguali
stessi vertici del pentacisdodecaedro (K=0,251525534) a diedri uguali						

Schema di triacisicosaedro avente gli stessi vertici del pentacisdodecaedro a diedri uguali

Schema di triacisicosaedro avente gli stessi vertici del pentacisdodecaedro a diedri uguali

Pentacisdodecaedro a diedri uguali

(vedi solido triacisicosaedro con stessi vertici)

le linee intere, piegare le linee tratteggiate

guette.

Tagliare lungo le
incollare le lingu

Pentacisdodecaedro a diedri uguali

(vedi solido triacisicosaedro con stessi vertici)

Tagliare lungo le linee intere, piegare le linee tratteggiate
incollare le linguette.

Le facce del triacisicosaedro, che otteniamo tracciando l_v anziché l_d, sono triangoli isosceli con base: $l_{li} = l_v$ e lati obliqui gli spigoli "s".
L'icosaedro su cui poggiano le piramidi aggiunte, ha facce triangolari equilatere di lato $l_i = l_v$; quindi possiamo fare i calcoli in funzione di s. Indicheremo con l'indice "i" gli elementi dell'icosaedro e con l'indice "li" gli elementi del triacisicosaedro.

Elementi delle facce

$$l_i = (1{,}618033988)\, s \qquad \boxed{l_i = \left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right) s}$$

$$a_{l_i} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_i}{2}\right)^2} = \boxed{a_{l_i} = (0{,}587785252)\, s}$$

angolo al vertice: $\alpha_v = 2 \arcsen\left(\frac{l_i/2}{s}\right) = 2 \arcsen(0{,}809016994)$.

$$\alpha_v = 2 \arcsen\left(\frac{\sqrt5+1}{4}\right);\ 2 \arccos\left(\sqrt{(5-\sqrt5)/8}\right);\ 2 \arctg\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{20}}{5}}\right);$$

$$\boxed{\alpha_v = 108^\circ} \qquad \boxed{a_{l_i} = s\sqrt{(5-\sqrt5)/8}}$$

angoli alla base: $\alpha_b = \arccos\left(\frac{l_i/2}{s}\right) = \arccos(0{,}809016994)$

$$\alpha_b = \arcsen\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{8}}\right);\ \alpha_b = \arccos\left(\frac{\sqrt5+1}{4}\right);\ \alpha_b = \arctg\sqrt{5-2\sqrt5};$$

$$\alpha_s = 36^\circ \quad = (\pi/5)\ !$$

Elementi delle piramidi

$$\overline{TV} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{l_i}{\sqrt{3}}\right)^2} = s\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} = (0,356822089)\,s \rightarrow \overline{TV} = (0,220528179)\,l_i$$

$$\overline{TV} = l_i\left(\frac{\sqrt{27}-\sqrt{15}}{6}\right) \quad \overline{TV} = l_i(0,220528179) \quad \cdot\ h_s = \frac{a_e l_i}{3} = l_i\sqrt{(5-\sqrt{5})/8}$$

$$K = 0,22052817941653 58$$

Diedro alla base $\hat{D}_b = \operatorname{arctg}\left(\frac{\overline{TV}}{l_i}2\sqrt{3}\right) = 37^\circ\ 22'\ 38'',53$

Diedro su s: $\hat{D}_s = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{l_i}{2h_s}\right) = 116^\circ\ 33'\ 54'',1$; $\left(\hat{D}_i = 138^\circ\ 11'\ 22'',87\right)$

L'Esacistetraedro

Nei solidi, abbiamo considerato il pen= nello di raggi uscenti dal centro, avente per direziòne assiale il centro faccia, e delimitato dalla piramide che ha per spigoli i raggi diretti ai vertici; è l'angoloide che, sezionato da un piano normale all'asse determina una faccia del solido.

Abbiamo studiato solidi derivati, ottenuti prolungando il raggio del centro faccia e con= siderando su di esso il vertice di una piramide esterna, aggiunta al solido ed avente per fac= cia di base la stessa faccia del solido.

Abbiamo rilevato che gli stessi vertici collegati diversamente danno luogo a solidi diversi.

Torniamo al nostro tetraedro, l'angoloide

triedro, uscente dal suo centro "O", determina sulla sfera circoscritta un triangolo sferico di area $\rho_s^2 \pi = \frac{3}{8} l_t^2 \pi$ con l_t = spigolo del tetraedro ABCD.

Se dividiamo a metà i lati del triangolo sferico, cioè se consideriamo i punti di mezzo oltre che gli estremi dei lati del

triangolo sferico, nonché il suo punto centrale sulla sfera, (ottenuto dal raggio prolungato passante per il centro faccia del tetraedro) e ripetiamo il procedimento per i quattro triangoli sferici, otteniamo i vertici dell'esacistetraedro inscritto in una sfera.

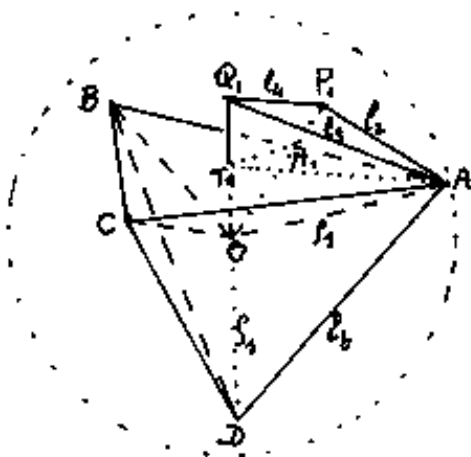
Sia O il centro della sfera; sia: A, B, C, D, un tetraedro di spigoli: $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = \ell_t$.

Sia: $\boxed{\rho_1 = \ell_t \frac{\sqrt{6}}{4}} = \overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OD}$, il raggio della sfera circoscritta; sia M_1 il punto medio di $\overline{AB}$, e quindi:

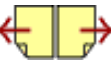
$$\overline{OM_1} = \sqrt{\rho_1^2 - \overline{M_1A}^2} = \boxed{\overline{OM_1} = \frac{\ell_t}{4}\sqrt{2}}$$

Prolungando $\overline{OM_1}$ fino ad incontrare la superficie sferica in P_1, avremo: $\overline{OP_1} = \rho_1$; $\overline{MP_1} = \rho_1 - \overline{OM_1}$

$$\boxed{\overline{MP_1} = \frac{\ell_t}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$\overline{AP_1} = \overline{BP_1} = \ell_2 = \sqrt{\left(\frac{\ell_t}{2}\right)^2 + \left(\overline{MP_1}\right)^2} \qquad \boxed{\ell_2 = \frac{\ell_t}{2}\sqrt{3 - \sqrt{3}}}$$

[illegible] $l_2 = \sqrt{\left(\frac{l_t}{2}\right)^2 + (MT_1)^2}$ $\boxed{l_2 = \frac{l_t}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}}$

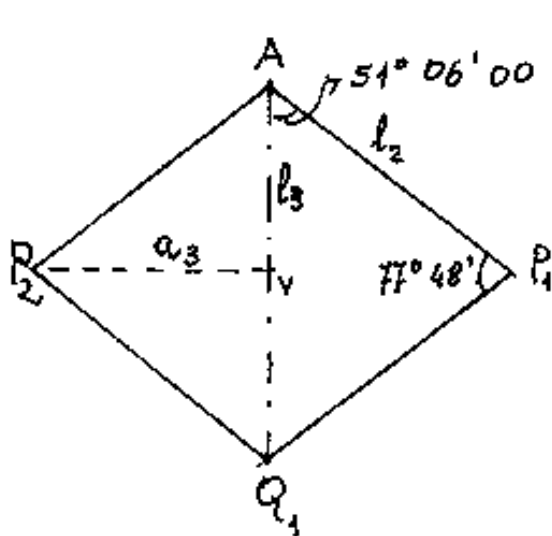
Prolungando il segmento $\overline{OT_1}$ che dal centro O della sfera va al centro T_1 della faccia ABC del tetraedro, si trova il punto Q_1 sulla superficie sferica: $\overline{OQ_1} = \rho_s = \overline{OQ_i}$; $\overline{TQ_i} = (\rho_s - r_i)$; ove "$r_i$" = raggio della sfera inscritta, $r_i = \frac{l_t\sqrt{6}}{12}$; per cui $\boxed{\overline{TQ_i} = l_t/\sqrt{6}}$

Unendo Q_1 con A, B, C, ove: $\overline{AQ_1} = \overline{BQ_1} = \overline{CQ_1} = l_3 = \sqrt{\overline{TA}^2 + \overline{TQ_1}^2}$

$\ell_3 = \sqrt{\frac{\ell_t^2}{3} + \frac{\ell_t^2}{6}} = \boxed{\ell_3 = \ell_t/\sqrt{2}}$ cioè: $\ell_3 = \ell_c$ = spigolo del cubo

Unendo $\overline{Q_1P_1} = \ell_4 = 2\rho_1 \operatorname{sen}\left(\frac{P_1\hat{O}Q_1}{2}\right) = 2\left(\frac{\ell_t}{4}\sqrt{6}\right)\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} = \boxed{\ell_4 = \frac{\ell_t}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}}$

Notevole che $\ell_4 = \ell_2$. Le funzioni dell'angolo: $Q_1\hat{O}P_1 =$
$= \underline{T_1\hat{O}M_1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\ell_t\sqrt{3}/6}{\ell_t\sqrt{6}/12}\right) = \underline{\operatorname{arctg}\sqrt{2} = 54°\,44'\,08''}$.

$\cos(Q_1\hat{O}P_1) = 1/\sqrt{3}$; per cui $\operatorname{sen}\left(\frac{Q\hat{O}P}{2}\right) = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}$; $\frac{Q\hat{O}P_1}{2} = 27°\,22'\,04''$.

Le facce dell'esacistetraedro inscritto in una sfera sono quindi triangoli isosceli. L'altezza relativa ad ℓ_3 sia a_3, $a_3 = \sqrt{\ell_2^2 - \left(\frac{\ell_3}{2}\right)^2}$

$a_3 = \ell_t\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{8}} = \boxed{a_3 = \frac{\ell_t}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{2}}}$

Area di una faccia: $A = \frac{a_3\,\ell_3}{2}$

$\boxed{A = \frac{\ell_t^2}{8}\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$ area della superficie laterale del solido:

$\boxed{S = 3\ell_t^2\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$; Angolo al vertice di una faccia $= 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{\ell_3/2}{\ell_2}\right) = \underline{77°\,48'\,00''}$

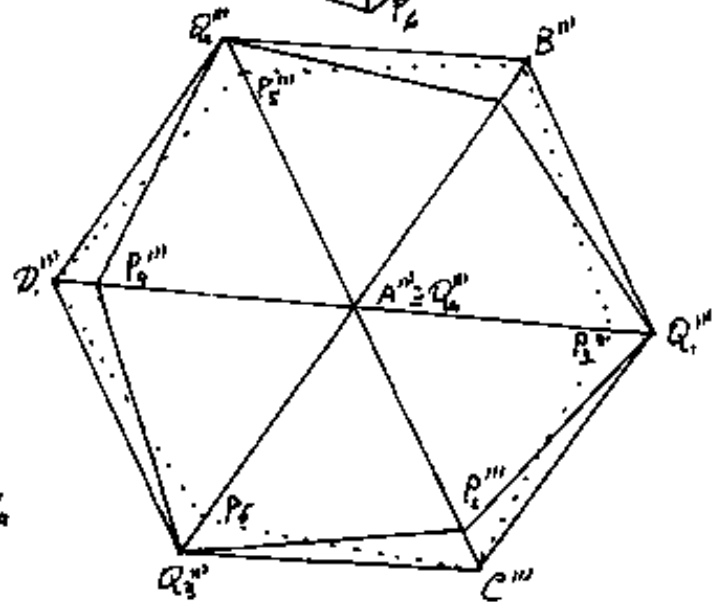
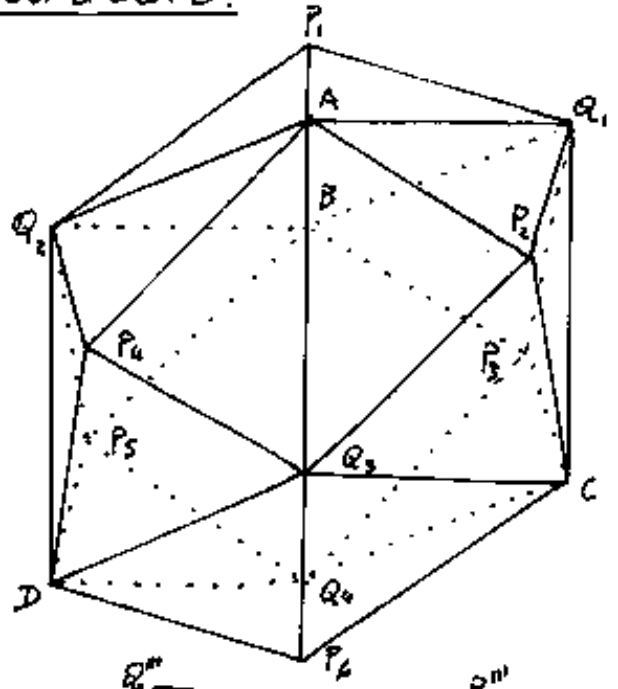
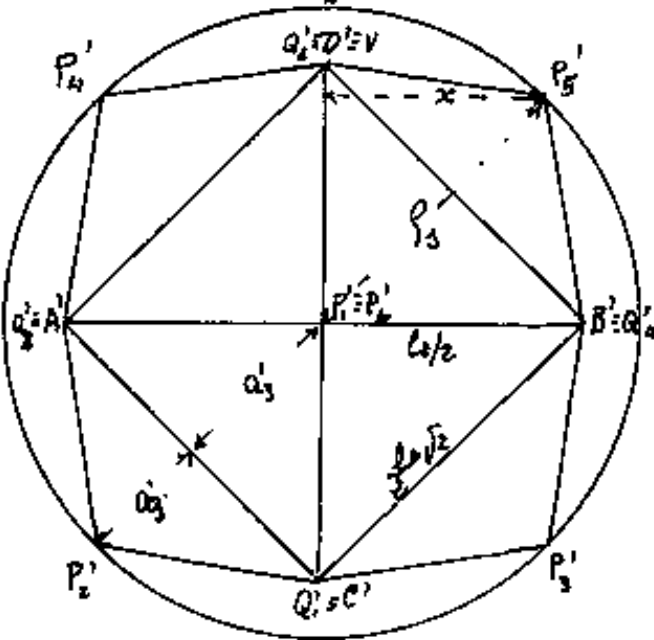
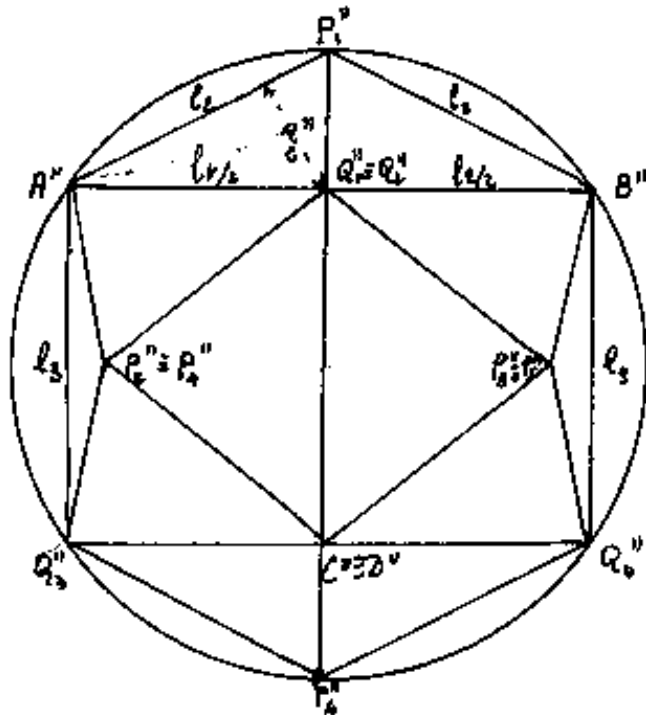
alla base = 51° 06' 00" ; $a_2 = \frac{2A}{l_2} = a_2 = l_t \frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}/4}{\sqrt{3-\sqrt{3}}/2}$

$a_2 = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{9-\sqrt{3}}{6}}$; angolo diedro su $l_2 = \hat{D}_{l_2}$

$\hat{D}_{l_2} = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{l_t/2}{a_2}\right) = 2\,\mathrm{arcsen}\sqrt{\frac{6}{9-\sqrt{3}}}$; $\hat{D}_{l_2} = 130°\, 37'\, 24{,}37''$

Dalla prima proiezione : $x = \overline{P_4'P_5'}/2 = \overline{P_1P_2}/2$;

$x : \rho_1 = \frac{l_t}{2} : \frac{l_t}{\sqrt{2}}$; $x = \rho_1 \frac{l_t/2}{l_t/\sqrt{2}}$; $= \overline{P_1P_2}/2 = \left(\frac{l_t}{4}\sqrt{6}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\frac{\overline{P_1P_2}}{2} = \frac{l_t\sqrt{3}}{4}$

Proiezioni dell'esacistetraedro:
(convesso)

Se V = punto medio di $\overline{P_1P_2}$ si ha:

$$P_2\hat{V}P_1 = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\overline{P_1P_2}/2}{a_3}\right) = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\ell_6\sqrt{3}/4}{\ell_6\sqrt{5-2\sqrt{3}}/8}\right) =$$

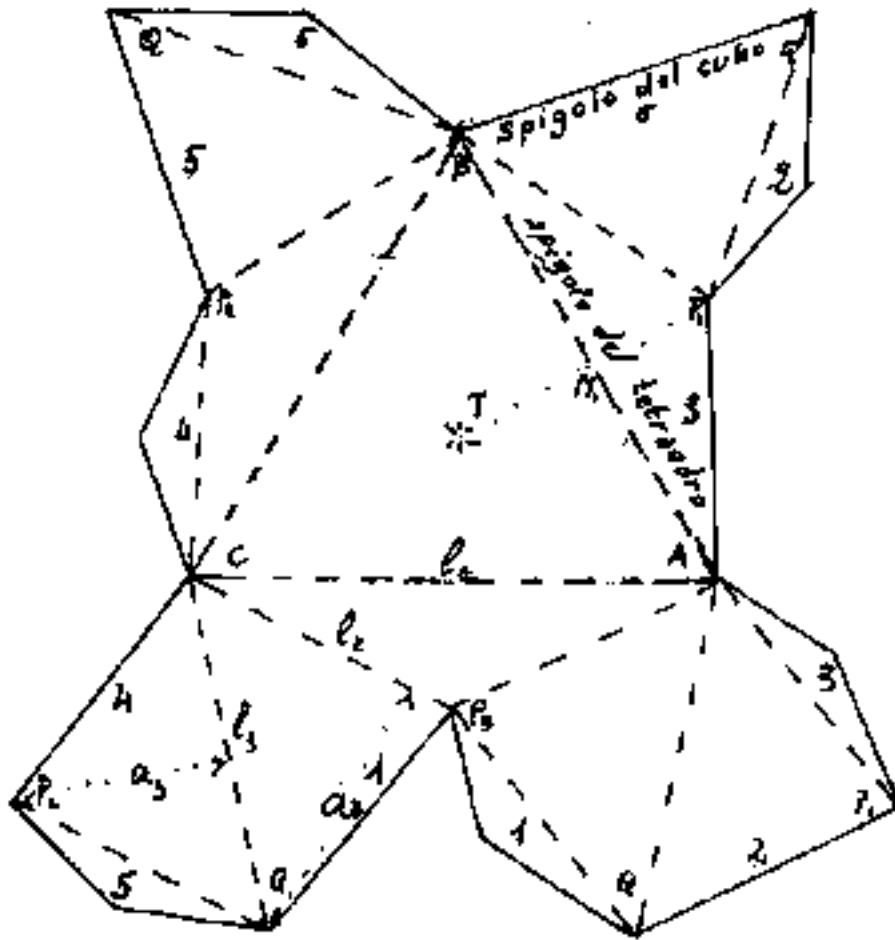
$$P_2\hat{V}P_1 = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5-2\sqrt{3}}}\right) = 2(81°\,12'\,21'',68) = \hat{D}_{\ell_3}$$

$$\text{diedro su } \ell_3 : \boxed{\hat{D}_{\ell_3} = 162°\,24'\,43'',366} = \hat{D}_{\ell_6}$$

si noti che il solido è identico ad un tetracisesaedro inscrittibile in una sfera, ove ℓ_3 è il lato del cubo su cui è impostato il tetracisesaedro, (solido che abbiamo già trattato)

Disegnamo la parte da aggiungere ad ogni faccia del tetraedro per ottenere l'esacistetraedro identico al tetracisesaedro convesso. Occorrono 4 modelli, come lo sviluppo a fianco, da aggiungere su ciasuna faccia del tetraedro, per ottenere il solido completo.

Abbiamo calcolato la vera distanza: $\overline{P_1P_2} = \frac{l_4}{2}\sqrt{3}$, (cioé l'altezza del triangolo equilatero che ha per facce il tetraedro) perció, ferma restando "l_2", non tracciamo "l_3", ma uniamo $\overline{P_1P_2}$ ecc. che chiameremo "l_4", otteniamo cosí le parti da aggiungere al tetraedro per avere

parti da aggiungere al tetraedro per avere
un esacistetraedro concavo, identico ad un
triacisottaedro concavo che avrebbe potuto ot=
tenersi scambiando l_c con l_v nell' tetracisesaedro
convesso sopra descritto. (ove $l_c = l_3$; $l_v = l_4 = l_0\sqrt{3}/2 = l_0$)
Disegnamo lo sviluppo delle parti da

Disegnamo la parte da aggiungere ad ogni faccia del tetraedro per ottenere l'esacistetraedro identico al tetracisesaedro convesso. Occorrono 4 modelli, come lo sviluppo a fianco da aggiungere su ciascuna faccia del tetraedro, per ottenere il solido completo.

spigolo del cubo
spigolo tetraedro

piegare le linee a tratteggio ed incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati

aggiungere alle facce del tetraedro per ottenere il solido (triacisottaedro concavo). Occorrono 4 modellini.

I solido ha 24 facce triangolari isosceli, aventi per base $l_4 = l_0$, e per lati obliqui

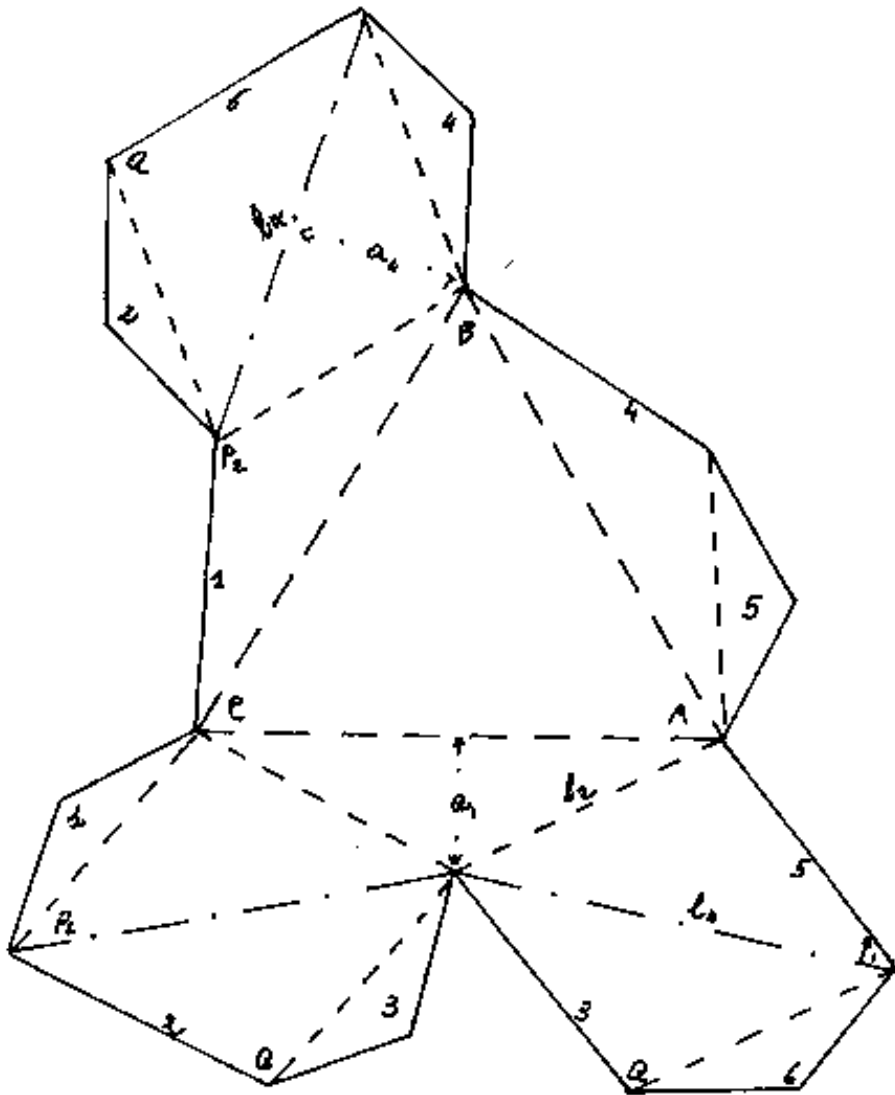
$$l_2 = \frac{l_4}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}} = s$$

L'angolo al vertice delle facce è:

$$2\,\text{arcsen}\left(\frac{l_4/2}{l_2}\right) = 100^\circ\, 32'\, 43'',046$$

Notiamo che i valori sono identici al triacisottaedro inscrittibile in una sfera e di cui

(Tagliare le linee intere, piegare convesso le tratteggiate, piegare concavo le linee a tratto e punto, incollare).

abbiamo già dato anche lo schema costrut=

abbiamo già usato anche lo schema costru=
tivo che risulta identico a quello che si ot=
tiene addizionando 4 parti (soprasviluppate)
sulle facce del tetraedro.

Questo ripetersi di solidi uguali ci porta ad unificare il modulo di riferimento.

Consideriamo come modulo base R_i il raggio della sfera circoscritta, avremo:

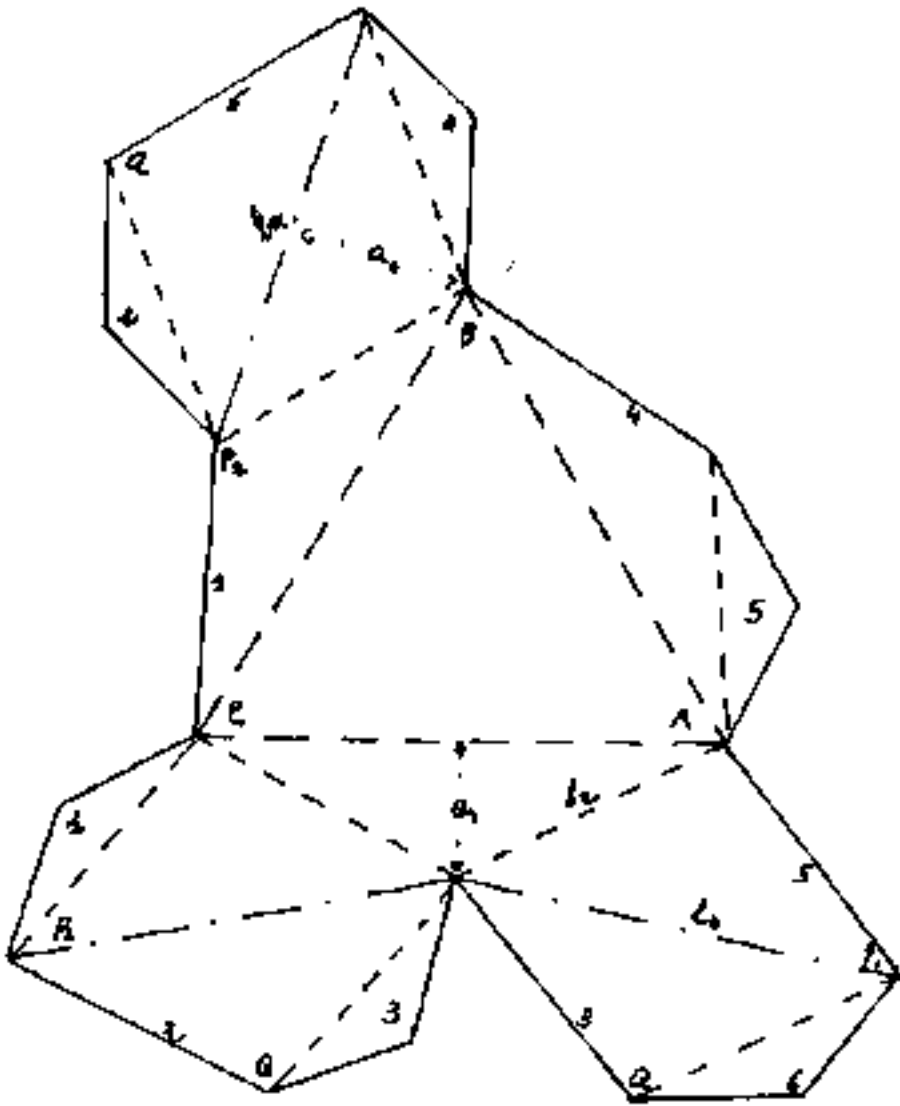
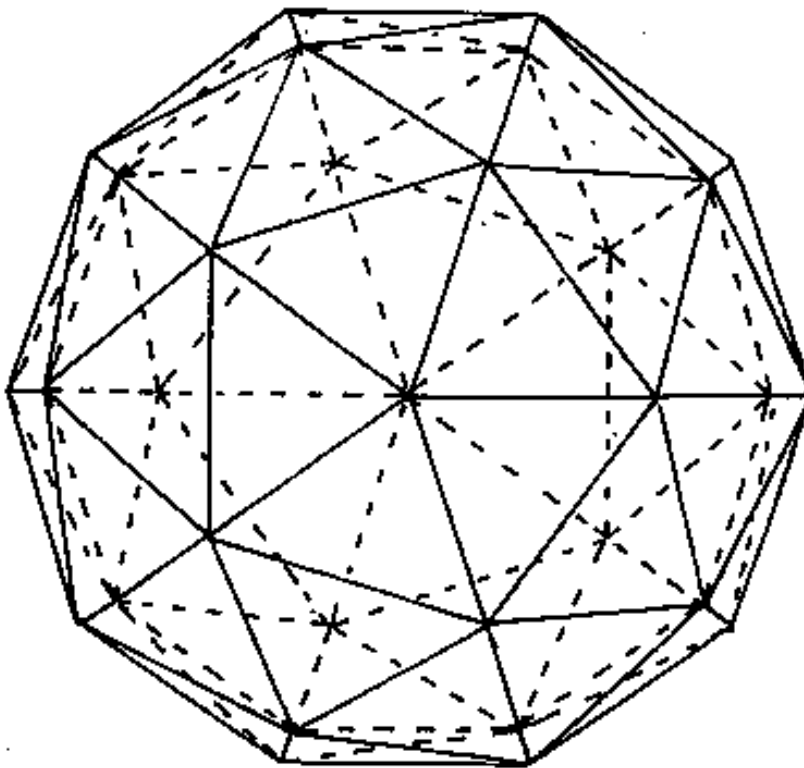
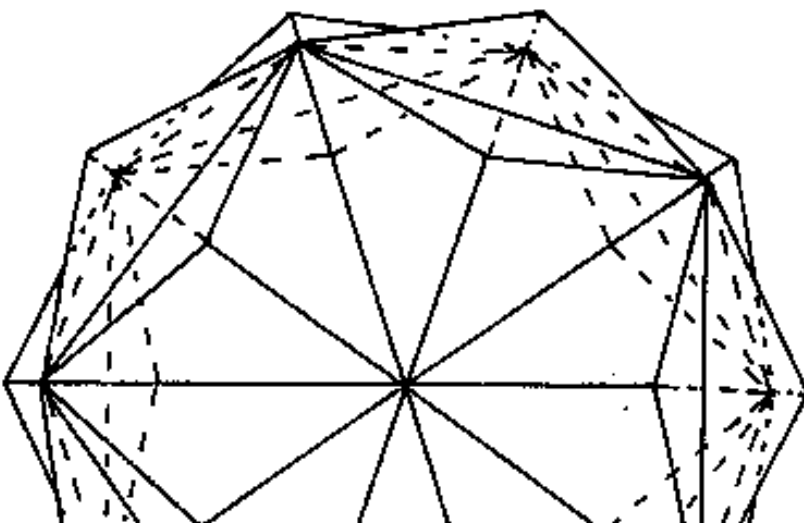
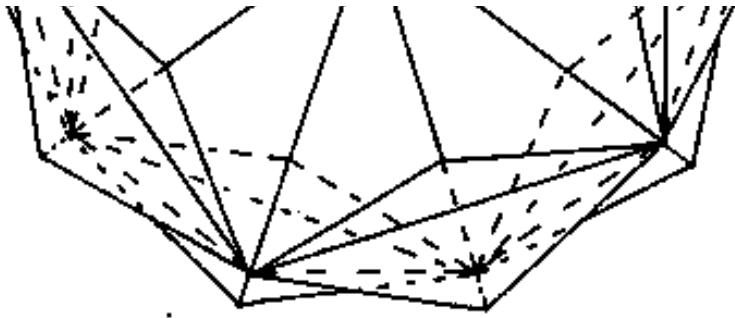
Disegnamo lo sviluppo delle parti da aggiungere alle facce del tetraedro per ottenere il solido (triacisottaedro concavo). Occorrono 4 modellini.

(Tagliare le linee intere, piegare convesso le tratteggiate, piegare concavo le linee a tratto e punto, incollare).

TABELLA di SOLIDI inscritti in una sfera

	Denominazione	K	facce	F	V	S	l/ρ_1	$1/\rho_1$	NOTE
Solidi regolari	Tetraedro	0	T. equil.	4	4	6	$\sqrt{\frac{8}{3}} = 1{,}632993162$	–	
	Cubo	0	quadrati	6	8	12	$\sqrt{\frac{4}{3}} = 1{,}154700538$	–	
	Ottaedro	0	T. equil.	8	6	12	$\sqrt{2} = 1{,}414213562$	–	
	Dodecaedro	0	pentagoni	12	20	30	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}} = 0{,}713644179$	–	
	Icosaedro	0	T. equil.	20	12	30	$\sqrt{\frac{10-\sqrt{20}}{5}} = 1{,}05146224$	–	
	Triacistetraedro	$1/\sqrt{6}$	quadrati rigati	12	8	18	$\sqrt{\frac{8}{3}} = 1{,}632993162$	$\frac{4}{\sqrt{3}} = 2{,}3094010$	è un cubo a facce rigate
	"	scambiando l_e con l_v si ottiene un cubo identico salvo facce rigate con l'altra diagonale							
	Tetracisesaedro	$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$	T. isosceli	24	14	36	$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}154700538$	$\sqrt{\frac{2(3-\sqrt{3})}{3}} = 0{,}919401$	convesso. – Scambiando l_e con l_v si ha il triacisottaedro inscritto
	Triacisottaedro	$(\sqrt{2}-\sqrt{6})$	T. isosceli	24	14	36	$\sqrt{2} = 1{,}414213562$	id	concavo – scambiando l_e con l_v si ha il tetracisesaedro inscritto.
	Pentacisdodecaedro	0,287742174	T. isosceli	60	32	90	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}} = 0{,}713644179$	0,640851819	convesso – scambiando l_e con l_v si ha il triacisicosaedro inscritto.
	Triacisicosaedro	0,195295205	T. isosceli	60	32	90	$\sqrt{\frac{10-\sqrt{20}}{5}} = 1{,}05146224$	id.	concavo – scambiando l_e con l_v si ha il pentacisdodecaedro inscritto.
	Esacistetraedro	(non sono piramidi)	T. isosceli	24	14	56	$\sqrt{\frac{8}{3}} = 1{,}632993162$	–	Questo solido si identifica col
		tetracisesaedro e scambiando l_e con l_v diventa il triacisottaedro inscritto.							

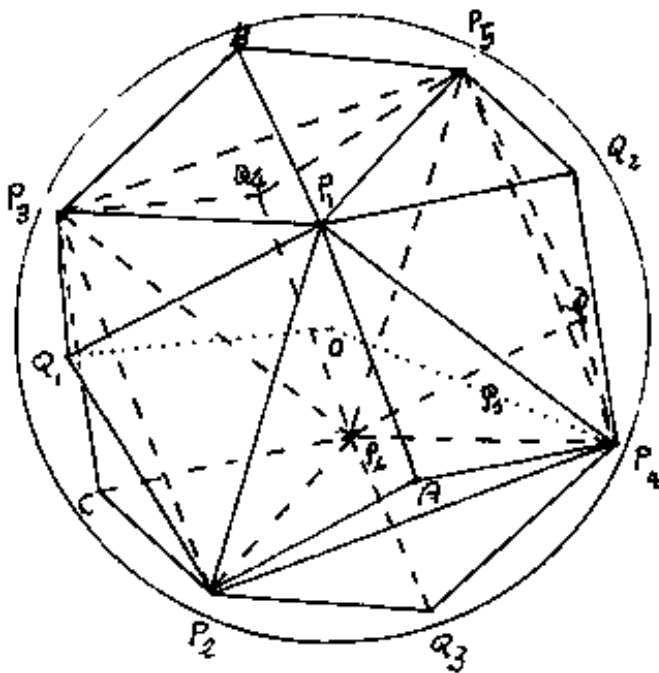
Confrontiamo le prime proiezioni di un triacisicosaedro e di un pentacisdodecaedro aventi gli stessi vertici e inscritti nella stessa sfera.

Pentacisdodecaedro (convesso)

Nella tabella abbiamo considerato solo solidi inscrittibili in una sfera che abbiamo già trattato.
Fra i solidi non inscrittibili in una sfera, possiamo ricordare il "rombododecaedro", che può ottenersi in più modi, come abbiamo visto, come caso particolare sia del tetracisesaedro, che del triacisottaedro. Altro solido non inscrittibile in una sfera è il romboedro a 30 facce, caso particolare sia del pentacisdodecaedro, che del triacisicosaedro.

Sono inscrittibili in una sfera i cinque solidi regolari: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro ed i solidi ricavati da essi aggiungendo piramidi sulle facce, le cui altezze sono tali da raggiungere coi vertici la superficie sferica. (cioè pari alla differenza fra il raggio della sfera circoscritta ed il raggio della sfe

raggio della sfera circoscritta ed il raggio della sfera inscritta nel solido base: $h = (\rho_1 - r_1)$

Dobbiamo ancora trattare vari solidi per cui l'argomento sarà completato in seguito.

Proiezione dell'esacistetraedro

(concavo)(inscritto in una sfera)

I vertici A, B, C, D, sono di un tetraedro (vedi calcolo), ma anche i vertici Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sono di un altro tetraedro opposto, cioè tale che gli otto vertici: $AQ_1 BQ_2 DQ_3 CQ_4$, sono i vertici del cubo inscritto nella sfera. I sei vertici: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, sono i vertici dell'ottaedro inscritto nella sfera.

Complessivamente abbiamo 14 vertici sulla superficie sferica, che possono ottenersi dal tetraedro inscritto, costruendo L'ESACISTETRAEDRO; oppure dal cubo inscritto nella stessa sfera, costruendo il TETRACISESAEDRO; oppure dall'ottaedro inscritto,

costruendo il TRIACISOTTAEDRO.

Nella proiezione non sono stati riportati gli spigoli del tetraedro, e gli spigoli del cubo, sono visibili invece gli spigoli dell'ottaedro e quindi del triacisottaedro che coincide col solido disegnato, cioè l'esacistetra=edro concavo.

Calcoliamo gli elementi del solido

sia: ρ_1 = raggio della sfera inscritta.

spigoli dei tetraedri $= \ell_t = \overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_1Q_3} = \overline{Q_1Q_4} = \overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_2Q_4} = \overline{Q_3Q_4}$

$\ell_t = \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$

spigoli del cubo $:= \ell_c = \overline{AQ_1} = \overline{AQ_2} = \overline{AQ_3} = \overline{BQ_1} = \overline{BQ_2} = \overline{BQ_4} = \overline{CQ_1} = \overline{CQ_3} = \overline{CQ_4} = \overline{DQ_2} =$

$= \overline{DQ_3} = \overline{DQ_4}$

spigoli dell'ottaedro $= \ell_o = \overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3} = \overline{P_1P_4} = \overline{P_1P_5} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_2P_4} = \overline{P_2P_6} =$

$= \overline{P_3P_5} = \overline{P_3P_6} = \overline{P_4P_5} = \overline{P_4P_6} = \overline{P_5P_6}$.

$\boxed{\ell_t = \rho_1 \frac{2}{3}\sqrt{6}}$; $\boxed{\rho_1 = \frac{\ell_t}{4}\sqrt{6}}$; $\boxed{\ell_t = \ell_c\sqrt{2}}$; $\boxed{\ell_t = \ell_o \frac{2}{3}\sqrt{3}}$;

$\boxed{\ell_c = \rho_1 \frac{2}{3}\sqrt{3}}$; $\boxed{\rho_1 = \frac{\ell_c}{2}\sqrt{3}}$; $\boxed{\ell_c = \frac{\ell_t}{2}\sqrt{2}}$; $\boxed{\ell_c = \frac{\ell_o}{3}\sqrt{6}}$;

$\boxed{\ell_o = \rho_1\sqrt{2}}$; $\boxed{\rho_1 = \frac{\ell_o}{2}\sqrt{2}}$; $\boxed{\ell_o = \frac{\ell_t}{2}\sqrt{3}}$; $\boxed{\ell_o = \frac{\ell_c}{2}\sqrt{6}}$;

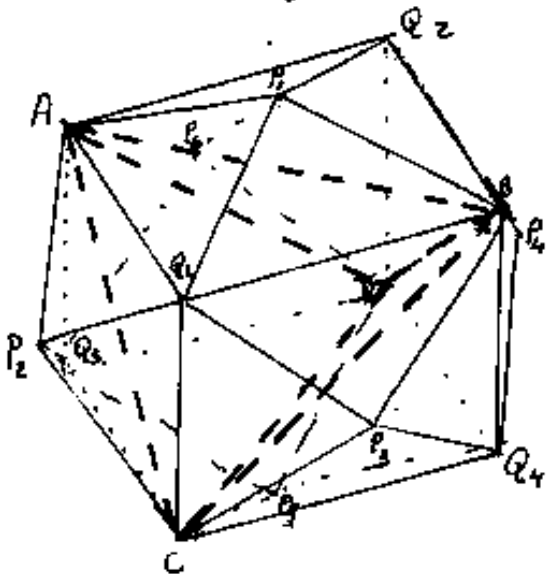
Conviene fare una tabella di confronto. Indichiamo con: r_t, r_c, r_o, i raggi delle sfere inscritte nel

tetraedro, nel cubo, nell'ottaedro; mentre S_1 è comune. Lo spigolo del solido indicato anche con l_2 lo indicheremo con "S" = $\overline{AP_1} = l_4$; $l_c = l_3 = \overline{Q_1A}$; $l_o = \overline{P_1P_2} = l_v$ del tetracisesaedro. (come l_c è l_v del triacisottaedro)
Se in un quadrilatero non piano del tipo $AP_1Q_1P_2$, anziché collegare $\overline{AQ_1}$ (come si è fatto per l'esacisottaedro convesso = tetracisesaedro), si collega $\overline{P_1P_2}$ (come in figura) si ottiene l'esacistetraedro concavo = triacisottaedro.

Tavola degli elementi dell'esacistetraedro ; (del tetracisesaedro; del triacisottaedro)

	ρ_s	l_t	l_c	l_o	r_t	$r_c = r_o$	s	a_{s_o} (concavo)	a_{s_c} (convesso)	a_c	a_o	
ρ_s	$\rho_s = \frac{l_o l_c}{l_t}$	$l_t \frac{\sqrt{6}}{4}$ 0,612372436	$l_c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,866025404	$l_o \frac{\sqrt{2}}{2}$ 0,707106781	$r_t \cdot 3$ 3,000000	$r_c \sqrt{3}$ / $r_o \sqrt{3}$ 1,732050808	$s \cdot \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}$ 1,087663874	$a_{s_o} \sqrt{\frac{4}{5-\sqrt{3}}}$ 1,106349510	$a_{s_c} \sqrt{\frac{4}{9-\sqrt{3}}}$ 1,42735379	$a_c \sqrt{\frac{3}{5-2\sqrt{3}}}$ 1,397588716	$a_o \sqrt{\frac{6}{9-4\sqrt{3}}}$ 1,701774648	raggio sfera circoscritta
l_t	$\rho_s \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6}$ 1,632993162	l_t	$l_c \cdot \sqrt{2}$ 1,414213562	$l_o \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 1,154700539	$r_t \cdot 2\sqrt{6}$ 4,898979486	$\frac{r_c}{r_o} 2\sqrt{2}$ 2,828427135	$s \cdot \sqrt{\frac{6+2\sqrt{3}}{3}}$ 1,776147668	$a_{s_o} 4\sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{33}}$ 1,806661184	$a_{s_c} \sqrt{\frac{24}{9-\sqrt{3}}}$ 1,817187244	$a_c \sqrt{\frac{8}{5-2\sqrt{3}}}$ 2,282252817	$a_o \frac{4}{\sqrt{9-4\sqrt{3}}}$ 2,779986963	spigolo tetraedro
l_c	$\rho_s \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 1,154700538	$l_t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ 0,707106781	l_c	$l_o \frac{\sqrt{6}}{3}$ 0,816496581	$r_t \cdot 2\sqrt{3}$ 3,464101614	$r_o \cdot 2 = r_c \cdot 2$ 2,000000	$s \sqrt{\frac{6+2\sqrt{3}}{6}}$ 1,255926060	$a_{s_o} \frac{4}{\sqrt{3(5-\sqrt{3})}}$ 1,277302375	$a_{s_c} \sqrt{\frac{12}{9-\sqrt{3}}}$ 1,284845423	$a_c \sqrt{\frac{2}{5-2\sqrt{3}}}$ 1,613796443	$a_o \sqrt{\frac{8}{9-4\sqrt{3}}}$ 1,965040102	spigolo cubo
l_o	$\rho_s \cdot \sqrt{2}$ 1,414213563	$l_t \frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,866025403	$l_c \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$ 1,224744872	l_o	$r_t \cdot 3\sqrt{2}$ 4,242640686	$\frac{r_c}{r_o} \sqrt{6}$ 2,449489743	$s \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}$ 1,538189001	$a_{s_o} \sqrt{\frac{30+4\sqrt{3}}{11}}$ 1,564614481	$a_{s_c} \sqrt{\frac{18}{9-\sqrt{3}}}$ 1,573730317	$a_c \sqrt{\frac{6}{5-2\sqrt{3}}}$ 1,976488917	$a_o \sqrt{\frac{18}{9-4\sqrt{3}}}$ 2,406672788	spigolo ottaedro
r_t	$\rho_s \frac{1}{3}$ 0,333333	$l_t \frac{\sqrt{6}}{12}$ 0,204124145	$l_c \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$ 0,288675135	$l_o \cdot \frac{\sqrt{2}}{6}$ 0,235702261	r_t	$\frac{r_c}{r_o} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ 0,577350269	$s \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{3}}$ 0,362554622	$a_{s_o} \frac{2}{3\sqrt{5-\sqrt{3}}}$ 0,368783170	$a_{s_c} \frac{1}{\sqrt{9-\sqrt{3}}}$ 0,370931793	$a_c \frac{1}{\sqrt{15-6\sqrt{3}}}$ 0,465862906	$a_o \sqrt{\frac{2}{27-12\sqrt{3}}}$ 0,567258216	raggio sfera inscritta
$r_c = r_o$	$\rho_s \frac{\sqrt{3}}{3}$ 0,577350269	$l_t \frac{\sqrt{2}}{4}$ 0,353553391	$l_c/2$ 0,5000000	$l_o \frac{\sqrt{6}}{6}$ 0,408248290	$r_t \cdot \sqrt{3}$ 1,732050808	$r_c = r_o$	$s \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}$ 0,627963103	$a_{s_o} \frac{2}{\sqrt{15-3\sqrt{3}}}$ 0,638751187	$a_{s_c} \sqrt{\frac{3}{9-\sqrt{3}}}$ 0,642473712	$a_c \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$ 0,806898221	$a_o \sqrt{\frac{2}{9-4\sqrt{3}}}$ 0,982580052	"
s	$\rho_s \cdot \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}$ 0,919401687	$l_t \frac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}$ 0,563016250	$l_c \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}$ 0,796225217	$l_o \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$ 0,650115167	$r_t \sqrt{18-6\sqrt{3}}$ 2,758305059	$\frac{r_c}{r_o} \sqrt{6-2\sqrt{3}}$ 1,592450434	s	$a_{s_o} \frac{4}{\sqrt{12+2\sqrt{3}}}$ 1,017179605	$a_{s_c} \sqrt{\frac{6}{4+\sqrt{3}}}$ 1,023105948	$a_c \sqrt{\frac{12}{9-\sqrt{3}}}$ 1,284945423	$a_o \sqrt{\frac{8}{5-\sqrt{3}}}$ 1,564614481	spigolo delle piramidi aggiunte
a_{s_o}	$\rho_s \frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{3}}$ 0,903873497	$l_t \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15-3\sqrt{3}}{2}}$ 0,553507215	$l_c \frac{1}{4}\sqrt{15-3\sqrt{3}}$ 0,782777410	$l_o \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{3}}{2}}$ 0,639135079	$r_t \frac{3}{2}\sqrt{5-\sqrt{3}}$ 2,711620490	$\frac{r_c}{r_o} \frac{1}{2}\sqrt{15-3\sqrt{3}}$ 1,565554820	$s \cdot \frac{1}{4}\sqrt{12+2\sqrt{3}}$ 0,983110549	a_{s_o}	$a_{s_c} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{21-2\sqrt{3}}{33}}$ 1,005826250	$a_c \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(9+5\sqrt{3})}{13}}$ 1,263243400	$a_o \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}$ 1,538189001	altezza rispetto ad S (concavo)
a_{s_c}	$\rho_s \frac{1}{3}\sqrt{9-\sqrt{3}}$ 0,898637808	$l_t \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9-\sqrt{3}}{6}}$ 0,550301024	$l_c \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9-\sqrt{3}}{3}}$ 0,778243171	$l_o \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9-\sqrt{3}}{2}}$ 0,635432988	$r_t \sqrt{9-\sqrt{3}}$ 2,695913424	$\frac{r_c}{r_o} \sqrt{\frac{9-\sqrt{3}}{3}}$ 1,556486341	$s \sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{6}}$ 0,977415859	$a_{s_o} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{21+2\sqrt{3}}{11}}$ 0,994207498	a_{s_c}	$a_c \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}$ 1,255926060	$a_o \sqrt{\frac{2(23+9\sqrt{3})}{33}}$ 1,529279039	altezza rispetto ad S (convesso)
a_c	$\rho_s \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}$ 0,715518084	$l_t \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{8}}$ 0,438163557	$l_c \frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ 0,619656837	$l_o \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{6}}$ 0,505947689	$r_t \, 3\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}$ 2,146554251	$\frac{r_c}{r_o} \sqrt{5-2\sqrt{3}}$ 1,239313675	$s \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9-\sqrt{3}}{3}}$ 0,778243171	$a_{s_o} \sqrt{\frac{38-10\sqrt{3}}{33}}$ 0,791613081	$a_{s_c} \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}$ 0,796225217	a_c	$a_o \sqrt{\frac{2(21+2\sqrt{3})}{33}}$ 1,217650535	altezza su lato (convesso)
a_o	$\rho_s \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}$ 0,587621869	$l_t \frac{1}{4}\sqrt{9-4\sqrt{3}}$ 0,359843436	$l_c \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{2}}$ 0,508895467	$l_o \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}}$ 0,415511408	$r_t \, 3\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}$ 1,762865608	$\frac{r_c}{r_o} \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{2}}$ 1,017790933	$s \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{3}}{2}}$ 0,639135079	$a_{s_o} \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$ 0,650115167	$a_{s_c} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(13-3\sqrt{3})}{13}}$ 0,653902901	$a_c \sqrt{\frac{21-2\sqrt{3}}{26}}$ 0,821253699	a_o	altezza su lato concavo

Le apoteme "a" delle facce sono indicizzate rispetto allo spigolo di riferimento: (c = cubo; o = ottaedro)

L'esacistetraedro a diedri uguali è il tetracisesa= edro a diedri uguali di cui abbiamo già trattato. Quattro vertici non adiacenti (cioè distanti una diagona= le) del cubo, sono i vertici del tetraedro, poniamo A, B, C, D. Anche i vertici aggiunti sulle normali ai centri faccia T del tetraedro insistono sulla superficie sfe= rica. (Cioè: $\overline{TQ} = \rho_1 - r_i$) e non possiamo ora porre: $K l_4 = \overline{TQ}$ perché K sarebbe costante, infatti i vertici Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sono gli altri quattro vertici del cubo e sono anche vertici dell'altro tetraedro. Variano invece i raggi $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \overline{OP_3}$ .. ecc.

Nello schizzo a fianco si è evidenziato tratteggiandolo il tetraedro A B C D ove sulla faccia ABC vi sono le sei facce: AQ_1P_1, P_1Q_1B, BQ_1P_3,

C

P_3Q_1C, CQ_1P_2, P_2Q_1A.

Dal disegno si rileva anche l'identità col tetracisesaedro, a cui rimandiamo.

Cerchiamo ora dei criteri per modulare la classe degli esacistetraedri. Fermi restando, sulla superficie sferica i vertici A, B, C, D, del tetraedro, possiamo variare i segmenti

$\overline{TQ_i} = K\ell_t$ ed i segmenti $\overline{MP_i} = \lambda \ell_t$.

Allo scopo di evidenziare l'influenza dei due parametri: K e λ considereremo separatamente variabile solo K, cioè facciamo restare sulla superficie sferica anche i punti P_i, mentre si scosteranno da esso i punti Q_i, e viceversa.

Sulla base dei calcoli già effettuati per l'esacistetraedro inscritto in una sfera abbiamo:

$\rho_3 = \ell_t \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}$; $\overline{ON_i} = \ell_t \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\overline{M_1P_1} = \boxed{\overline{M_iP_i} = \lambda \ell_t}$; $\overline{TM} = \ell_t \frac{\sqrt{3}}{6}$;

$\overline{AP_1} = \overline{BP_1} = \ell_2 = s = \sqrt{\left(\frac{\ell_t}{2}\right)^2 + \overline{M_1P_1}^2} = \ell_2 = \boxed{s = \frac{\ell_t}{2}\sqrt{1+4\lambda^2}}$;

$\overline{OT_1} = \overline{OT_i} = r_i = \ell_t \frac{\sqrt{6}}{12}$; $\boxed{\overline{T_iQ_i} = K\ell_t}$; $\overline{T_1A} = \ell_t \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$\overline{AQ_1} = \overline{BQ_1} = \overline{CQ_1} = \ell_3 = \sqrt{\overline{TA}^2 + \overline{TQ_1}^2} = \sqrt{\frac{\ell_t^2}{3} + K^2\ell_t^2}$; $\boxed{\ell_3 = \ell_t\sqrt{\frac{1+3K^2}{3}}}$

per $K = \frac{1}{\sqrt{6}}$ si ha $\ell_3 = \ell_t/\sqrt{2} = \ell_c$ = (spigolo del cubo)

$\overline{Q_1P_1} = \overline{Q_1P_2} = \overline{Q_1P_3} = \ell_4 = \sqrt{\overline{Q_1E}^2 + \overline{EP_1}^2} = \sqrt{\left(\overline{Q_1T} - \overline{M_1P_1}\cos(T\hat{O}M)\right)^2 + \left(\overline{TM} + \overline{M_1P_1}\,\mathrm{sen}(T\hat{O}M)\right)^2}$

Q3 Q1 ℓ4 P1 E Kℓt

$$\ell_4 = \sqrt{\left[K\ell_t - \lambda\ell_t\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^2 + \left[\ell_t\frac{\sqrt{3}}{6} + \lambda\ell_t\sqrt{\frac{2}{3}}\right]^2}$$

E
$K\ell_t$
M_1
T
$\lambda \ell_t$
$54° 44' 08''$
O

$$\ell_4 = \ell_t \sqrt{\left[K^2 + \frac{\lambda}{3}^2 - \frac{2K\lambda}{\sqrt{3}}\right] + \left[\frac{1}{12} + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{\lambda\sqrt{2}}{3}\right]}$$

$$\ell_4 = \ell_t \sqrt{K^2 + \lambda^2 - \frac{2K\lambda}{\sqrt{3}} + \lambda\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{12}}$$

Come si vede ℓ_4 non è più uguale ad ℓ_2, le facce del solido sono, in generale, triangoli scaleni.

Affinché $\ell_2 = \ell_4 = s$ (facce triangoli isosceli) avremo la relazione fra i parametri K e λ:

$$\lambda^2 + \frac{1}{4} = K^2 + \lambda^2 - 2K\lambda/\sqrt{3} + \lambda\sqrt{2}/3 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6} = K^2 - 2K\lambda/\sqrt{3} + \lambda\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{1}{2} = 3K^2 + (\sqrt{2} - 2K\sqrt{3})\lambda$$

$$\lambda = \frac{1 - 6K^2}{2(\sqrt{2} - 2K\sqrt{3})} = \frac{(1 - \sqrt{2}\sqrt{3}K)(1 + \sqrt{2}\sqrt{3}K)}{2\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}\sqrt{3}K)}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1 + \sqrt{6}K}{2\sqrt{2}}} \qquad (\lambda = 1,219578795\,K)$$

Qualora imponessimo che il solido fosse inscrittibile in una sfera avremo: $3 - \sqrt{3} = 1 + 4\lambda^2$ da cui:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} = \lambda = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0,258819045}$$

$$\overline{TQ} = l_t/\sqrt{6} = K l_t \qquad \boxed{K = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,40824290}$$

$$\frac{\lambda}{K} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\sqrt{6} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} = 0,633974597$$

Notiamo che il precedente rapporto $\lambda/K = 1,2195787795$ è diverso. Però, se nella condizione $l_2 = l_4$ poniamo $K = 1/\sqrt{6}$ (che è il K del solido inscritto in una sfera), notiamo che: $(-2K\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0$ cioè che l'identità è verificata per qualunque valore di λ. Ciò vuol dire che se prendiamo Q_i sulla superficie sferica facendo variare P_i (ove $\overline{HP_i} = \lambda l_t$) si ha sempre $l_2 = l_4 = 1$.

Per esempio per $\lambda = 1$; $K = \frac{1}{\sqrt{6}}$; si ha: $l_2 = \frac{l_t}{2}\sqrt{5}$;

$$l_4 = l_t\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{12}+\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}} = l_t\sqrt{\frac{3}{3}+\frac{3}{12}} = l_t\sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{l_t}{2}\sqrt{5} = l_2$$

Ma, come abbiamo visto, lasciare Q_i sulla superficie sferica significa avere 8 punti: $A, B, C, D, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ che formano i vertici di un cubo le cui diagonali delle facce sono gli spigoli di due tetraedri intrecciati: A, B, C, D e Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, perciò variare solo P_i significa espletare la classe dei tetracisesaedri, cioè i tetracisesaedri sono gli esacistetraedri con $K = \frac{1}{\sqrt{6}}$; da cui l'uguaglianza: $l_2 = l_4 = s$. indipendente da λ che diventa per $\sqrt{2}$ il K del tetracisesaedro. $\lambda l_t = \lambda l_c\sqrt{2} = \overline{TP} = K l_c = \overline{M_iP_i}$

Ma per $K = \frac{1}{\sqrt{6}}$ la condizione $l_2 = l_4$ porta alla condizione: $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707106781 > 0,258819045$, cioè i "$P_i$" sono esterni alla sfera. Cioè la semplificazione elidendo la divisione per zero riporta λ ad essere definito.

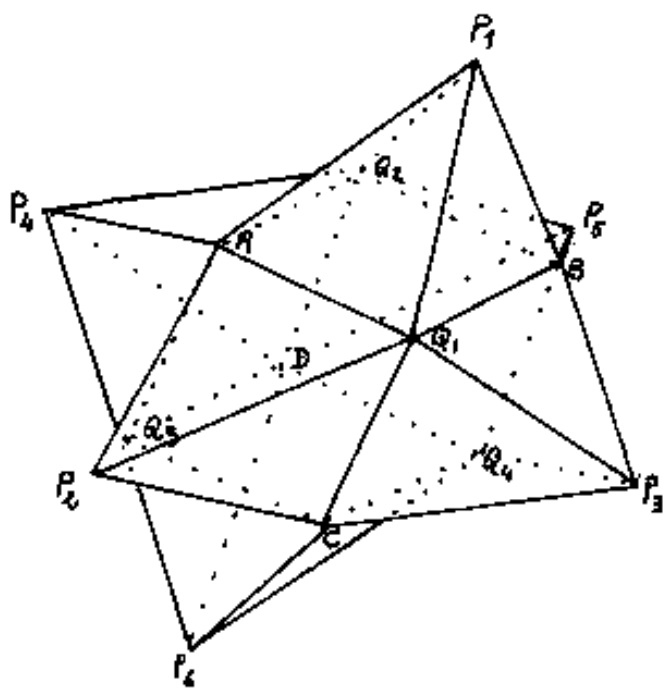
Calcoliamo il solido:

$$l_2 = l_t \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; l_3 = l_t \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; l_4 = l_t \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{12}}$$

$$l_4 = l_t \sqrt{\frac{2+6+1}{12} - \frac{2}{6} + \frac{1}{3}} = l_t \sqrt{\frac{9}{12}} = \underline{l_4 = \frac{l_t}{2}\sqrt{3} = l_2} = s$$

Gli angoli alla base dei triangoli isosceli l_2, l_3, l_4 $(l_2 = l_4)$ sono dati da: $\arccos\left(\frac{l_3/2}{l_2}\right) = \arccos\left(\frac{l_3/2}{s}\right) = \arccos\left(\frac{(l_t/\sqrt{2})2}{2 l_t \sqrt{3}}\right)$ $= \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right) = 65° \, 54' \, 18'',57$.

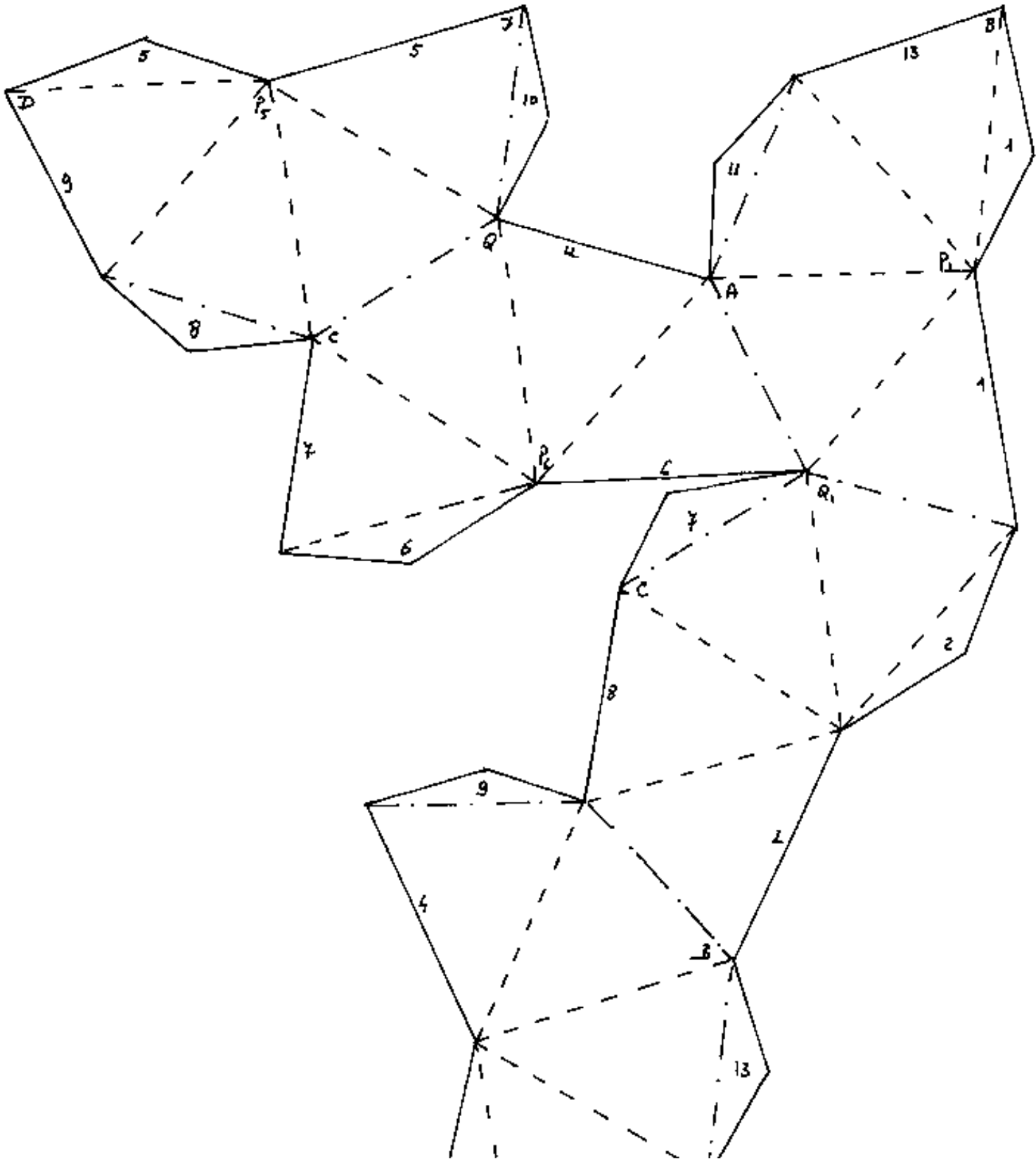
Poiché le facce sono 6 che hanno vertice comune

in Q, avremo 6 arccos.$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ = 395° 21' 51",4 , ciò vuol dire che il solido non può essere convesso e che presenterà angoli diedri concavi su l_3.

Abbiamo schizzato il solido in figura. A, B, C, D sono i vertici del tetraedro; Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 insieme ad A, B, C, D, formano i vertici del cubo; P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 sono i vertici delle piramidi aggiunte al cubo.... come si vede anche questo esacistetraedro è un tetracisesaedro, (infatti $K_t = 1/\sqrt{6}$)

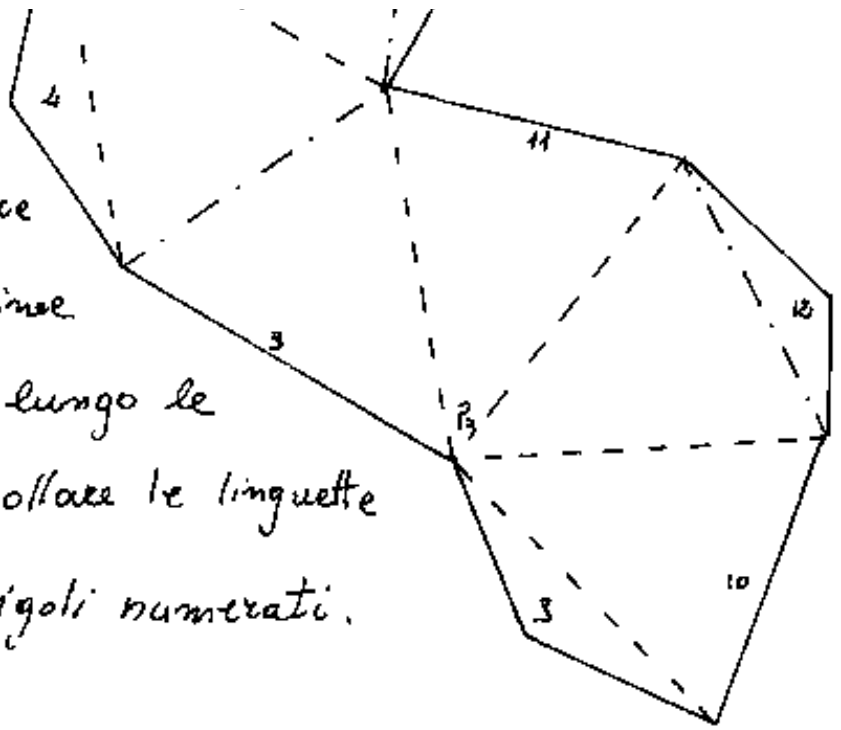
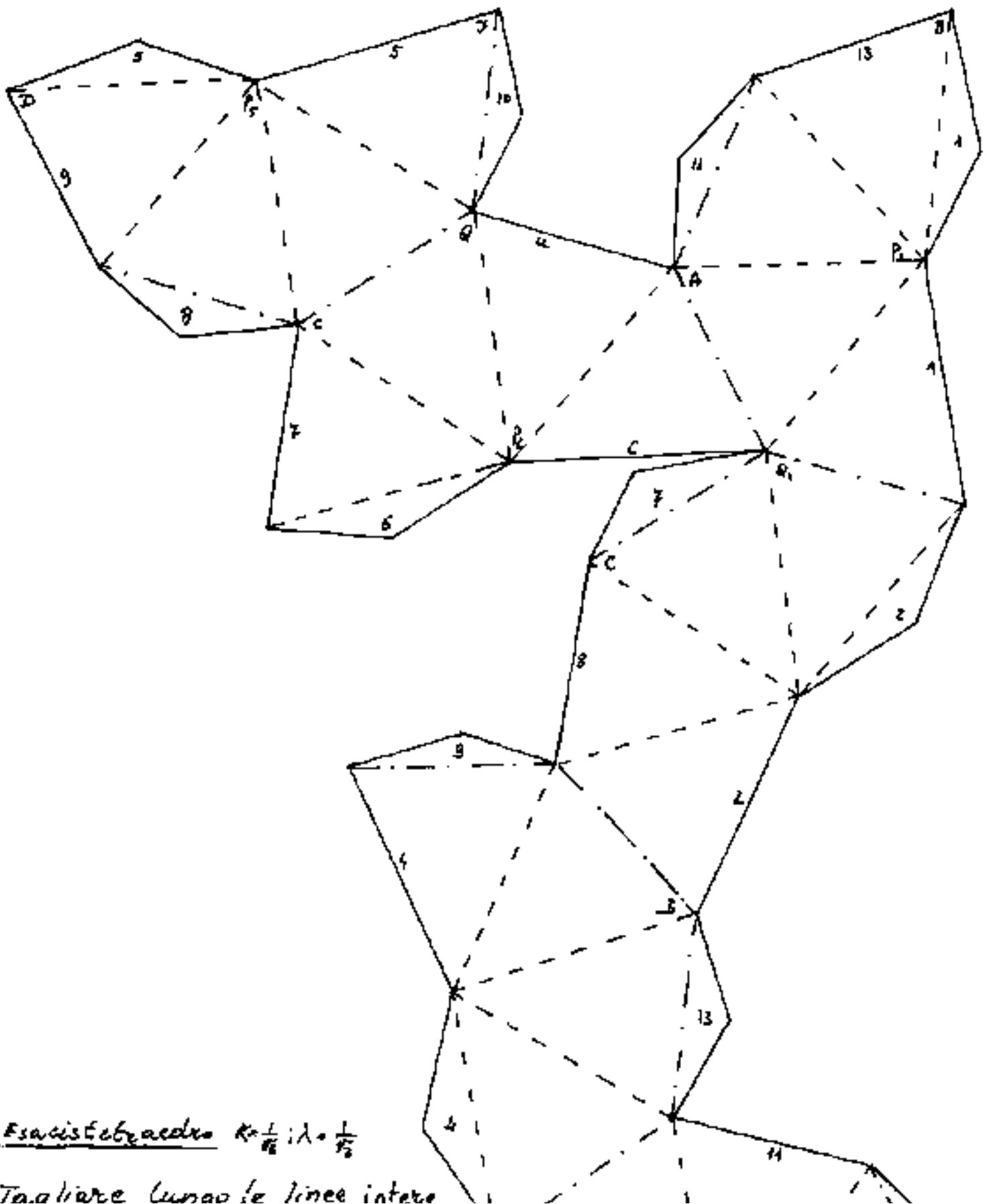
Quindi la classe dei tetracisesaedri è data dalla classe degli esacistetraedri quando $K_t = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

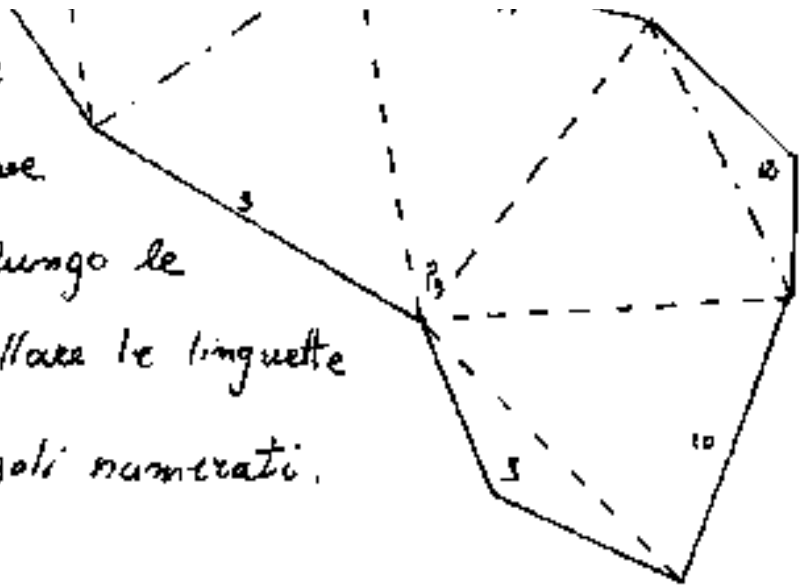
Riportiamo lo schema per il modellino dell'esa=

cistetraedro con $K_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Notare che unendo i vertici P_i abbiamo un ottaedro; e si può dimostrare che ogni tetra= cisesaedro con $K > 0$ è uguale ad un esacisottaedro con $K < 0$. Se invece uniamo i vertici P_i disegnando gli spigoli di un ottaedro, ma non disegnamo gli spigoli $l_3 = l_c$ del cubo, il solido diventa un tria= cisottaedro.

Esacistetraedro $K = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Tagliare lungo le linee intere piegare convesso lungo le linee a tratto, piegare concavo lungo le linee a tratto e punto, incollare le linguette facendo corrispondere gli spigoli numerati.

Esacistetraedro $K = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Tagliare lungo le linee intere

Tagliare lungo le linee intere
piegare convesso lungo le linee
a tratto, piegare concavo lungo le
linee a tratto e punto, incollare le linguette
facendo corrispondere gli spigoli numerati.

Sulla nostra sfera vi sono fissi i 4 vertici del tetra= edro, fissare un K; (K_t) significa fissare altri 4 punti sui raggi passanti per i centro faccia del tetraedro. Cioè ad ogni K corrisponde, (per $\lambda = 0$) un tria= cistetraedro; (vedasi tabella dei triacistetraedri), quindi gli esacistetraedri possono dedursi dai tria= cistetraedri quando $\lambda \neq 0$.

Come si è già rilevato, per $K = l_t \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{l_t}{\sqrt{6}}$ il triacistetraedro degenera in un cubo e la conseguente classe degli esacistetraedri coin= cide con la classe dei tetracisesaedri; ove per $\lambda = 0$ si ha il cubo, attenzione: $\lambda = \frac{M_i P_i}{l_t}$; ma l_t = spigolo del tetraedro = $l_c \sqrt{2}$, ove l_c = = spigolo del cubo, per cui: $\lambda = \frac{M_i P_i}{l_c \sqrt{2}} = \frac{K_c}{\sqrt{2}}$ dei tetra= cisesaedri. Quando $K_t = \frac{TQ}{l_t} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,408248290$, avremo: (vedi tabella dei tetracisesaedri

$\lambda = 0$ cubo

$\lambda = 0$ → cubo

$\lambda = \frac{0,25}{\sqrt{2}} = 0,176776695$ → esacistetraedro a diedri uguali

$\lambda = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = 0,258819045$ → " inscrittibile in una sfera

$\lambda = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = 0,35355339\,1$ → rombododecaedro (limite solidi convessi)

$\lambda = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0,5$ → esacistetraedro a facce equilatere (solido con concavità)

Possiamo per ogni $K_1 = \frac{\overline{TQ}}{\ell_4}$, fare una tabella dei vari λ. Naturalmente sarebbe opportuno scegliere le variabili K e λ per solidi caratteristici.

Ma possiamo anche invertire le nostre tabelle, cioè per ogni $\lambda = \frac{\overline{M_i P_i}}{\ell_t}$ fare una tabella dei vari K.

Considerare P_i sulla superficie sferica significa considerare un ottaedro inscritto. Sia P_i sulla superficie sferica e sia Q variabile: $\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$;

$\lambda^2 = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)$; $\lambda = 0{,}258819045$.

$\ell_2 = \ell_t \frac{1}{2}\sqrt{1+4\left(\frac{8+2\sqrt{12}}{16}\right)} = \frac{\ell_t}{2}\sqrt{1+2-\sqrt{3}}$; $\boxed{\ell_2 = \frac{\ell_t}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}}$

$\boxed{\ell_3 = \ell_t\sqrt{\frac{1+3K^2}{3}}}$; $\ell_4 = \ell_t\sqrt{K^2+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}-K\left(\frac{2}{4}\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{12}}$;

$\ell_4 = \ell_t\sqrt{K^2-\frac{K}{\sqrt{6}}\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)+\frac{5}{12}-\frac{\sqrt{3}}{12}}$; $\boxed{\ell_4 = \ell_t\sqrt{K^2-K\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\right)+\frac{5-\sqrt{3}}{12}}}$

per $K = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $\ell_4 = \ell_t\sqrt{\frac{2}{12}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2}{12}+\frac{5}{12}-\frac{\sqrt{3}}{12}} = \frac{\ell_t}{2}\sqrt{\frac{9-3\sqrt{3}}{3}} =$

$\left(\ell_4 = \frac{\ell_t}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)$ torna

Notiamo che ℓ_2 è indipendente da K.

Notiamo che r_2 è indipendente da K.

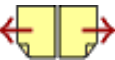
l_3 ammette un minimo per $K=0$; $(\overline{QT}=0)$; $l_4=\frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{3}}{3}}$; $l_3=\frac{l_t}{\sqrt{3}}$

$l_4=\overline{Q_1P_1}$ ammette pure un minimo: $l_{4_{min}}=\rho_1 \operatorname{sen}(\widehat{QOP_1})=\frac{l_t}{4}\sqrt{6}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=$

$$=\boxed{l_{4_{min}}=\frac{l_t}{2}}$$

Se poniamo: $\left[K^2-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\right)K+\left(\frac{5-\sqrt{3}}{12}\right)\right]=0$

risolvendo: $K=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}}\pm\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{24}-\frac{5-\sqrt{3}}{12}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2\sqrt{6}}$

(radici immaginarie essendo $\Delta<0$.)

Per $l_4 = l_{4min} = \frac{l_t}{2} = l_t \sqrt{K^2 - K\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{5-\sqrt{3}}{12}}$

$$K^2 - K\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{2-\sqrt{3}}{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}} \pm \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{12} - \frac{2-\sqrt{3}}{12}}$$

$$\boxed{K = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}}}$$

$$K^2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{24} = \frac{2-\sqrt{3}}{12} \quad \Rightarrow \quad l_3 = l_t \sqrt{\frac{1+\frac{2-\sqrt{3}}{12}}{3}} = l_t \sqrt{\frac{6-\sqrt{3}}{12}}$$

$$\boxed{l_3 = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{6-\sqrt{3}}{3}}}$$

verifica: $l_4 = l_t \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{5-\sqrt{3}}{12}} = l_t \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{12} - \frac{4-2\sqrt{3}}{12} + \frac{5-\sqrt{3}}{12}}$

$$l_4 = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}-4+2\sqrt{3}+5-\sqrt{3}}{3}} = \frac{l_t}{2}\sqrt{\frac{3}{3}} =$$

$$\boxed{l_4 = \frac{l_t}{2}} \quad ; \quad \boxed{l_2 = \frac{l_t}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}}$$

In questo solido Q_1 si trova sullo stesso piano di P_1, P_2, P_3 ; piano parallelo alla faccia del tetraedro e distante da esso $\overline{TQ} = K\, l_t = l_t\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{6}}\right) = 0{,}149429245\, l_t$

Anche questo solido presenta angoli diedri concavi su l_3. Occorre, per fissare le idee, rendersi conto che se teniamo fissi i quattro vertici del tetraedro A, B, C, D, e variabili: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 e $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, abbiamo la generalità degli esacistetraedri, se teniamo fissi sulla superficie sferica gli 8 vertici: A, Q_1, B, Q_2, C, Q_3, D, Q_4, varierà solo λ e

si hanno i tetracisesaedri. Se invece teniamo fissi i sei vertici: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, e facciamo variare A, B, C, D, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, ed imponiamo che A, B, C, D, e Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 restino su raggi perpendicolari alle facce dell'ottaedro di vertici P_i, e che varino con lo stesso parametro K, avremo la classe dei triacisottaedri.

Poiché si hanno due parametri $(\lambda; K)$ per definire un esacistetraedro, e divengono abbastanza complesse le espressioni in funzione di λ e K; conviene, calcolati gli spigoli: l_2, l_3, l_4;

$$\frac{\overline{Q_1 Q_2}}{2} = l_t\left(\frac{1}{6} + K\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \quad ; \quad \frac{\overline{P_1 P_2}}{2} = l_t\left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$$

dette h_2, h_3, h_4 le altezze relative agli spigoli: l_2, l_3, l_4; detti $\hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4$ gli angoli opposti ad l_2, l_3, l_4; avremo:

$$\hat{A}_2 = \arccos\left(\frac{l_3^2 + l_4^2 - l_2^2}{2 l_3 l_4}\right); \quad \hat{A}_3 = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_4^2 - l_3^2}{2 l_2 l_4}\right);$$

$$\hat{A}_4 = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_3^2 - l_4^2}{\ldots}\right)$$

$$\hat{A}_4 = \arccos\left(\frac{\ell_2^2 + \ell_3^2 - \ell_4^2}{2\,\ell_2\,\ell_3}\right)$$

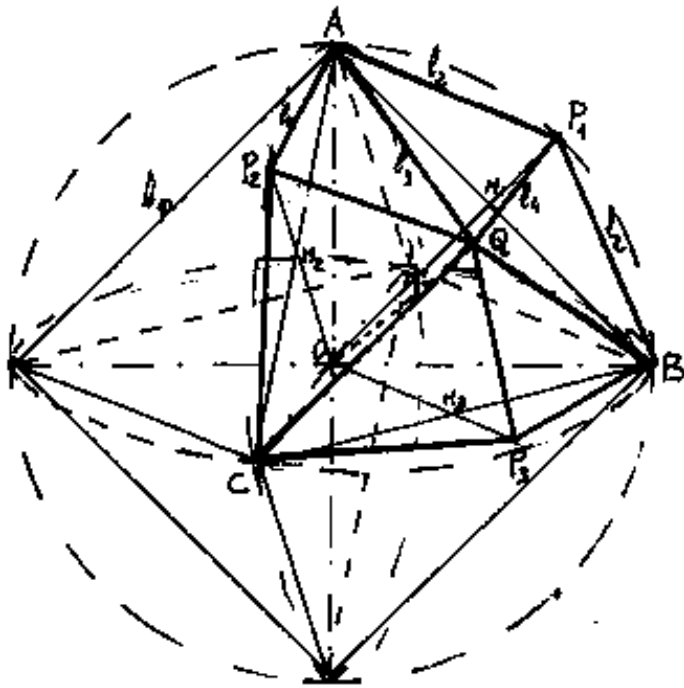
$$h_2 = \ell_4 \operatorname{sen}\hat{A}_3 = \ell_3 \operatorname{sen}\hat{A}_4 \; ; \quad h_3 = \ell_2 \operatorname{sen}\hat{A}_4 = \ell_4 \operatorname{sen}\hat{A}_2 \; ; \quad h_4 = \ell_3 \operatorname{sen}\hat{A}_2 = \ell_2 \operatorname{sen}\hat{A}_3 \; ;$$

Detti: $\hat{D}_2$, $\hat{D}_3$, $\hat{D}_4$ gli angoli diedri sugli spigoli ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4:

$$\hat{D}_2 = \frac{\overline{Q_1Q_2}/2}{h_2} \qquad \hat{D}_3 = \frac{\overline{P_1P_2}/2}{h_3} \qquad \hat{D}_4 = \frac{\ell_2/2}{h_4}$$

utilizzare via via gli elementi calcolati.

L'esacisottaedro

Analogamente a quanto detto per l'esacistetraedro, prolunghiamo, dal centro O dell'ottaedro, il raggio diretto alla metà M_1 dello spigolo $\overline{AB}$, fino ad incontrare la superficie della sfera circoscritta in P_1. (Analogamente per gli spigoli $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ dai punti medi M_2 ed M_3, ai punti sulla superficie sferica P_2 e P_3). Sia T il centro della faccia ABC dell'ottaedro, e Q un punto sulla superficie sferica ottenuto prolungando $\overline{OT}$; Sia l_0 lo spigolo dell'ottaedro;

$$\boxed{\rho_1 = l_0/\sqrt{2}}$$

ρ_1 = raggio della sfera circoscritta all'ottaedro; (vedi figura).

$$l_2 = \overline{AP_1} = \sqrt{\overline{AM_1}^2 + \overline{M_1P_1}^2} = \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + \left(\rho_1 - \overline{OM_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + \left[\frac{l_0}{\sqrt{2}} - \frac{l_0}{2}\right]^2}$$

$l_2 = \frac{l_0}{2}\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2} =$

$$l_2 = \frac{l_0}{2}\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \boxed{l_2 = l_0\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \underline{l_2 = (0{,}54119610)\,l_0}$$

l_2 = lato ottagono inscritto nel cerchio max della sfera.

$$\overline{AQ} = l_3 = 2\rho_1 \operatorname{sen}\left(\frac{A\hat{O}Q}{2}\right) = 2\left(\frac{l_0}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{(3-\sqrt{3})/6} = \boxed{l_3 = l_0\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}}$$

$$\boxed{l_3 = l_0\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}} = \underline{l_3 = (0{,}65011516 7)\,l_0}$$

$$\overline{P_1Q} = l_4 = 2\rho_1 \operatorname{sen}\left(\frac{P_1\hat{O}Q}{2}\right) = 2\left(\frac{l_0}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{M_1\hat{O}T}{2}\right) = 2\left(\frac{l_0}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{1-\cos(M_1\hat{O}T)}{2}} \;;$$

(Il triangolo MOT è retto in T ed $(M\hat{O}T) = 35°\,15'\,52''$)

$l_4 = l_0 \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 - \overline{OT}/\overline{OM_1}}{2}}$; $l_4 = l_0 \sqrt{1 - \overline{OT}/\overline{OM_1}}$;

$l_4 = l_0 \sqrt{1 - \frac{l_0/\sqrt{6}}{l_0/2}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{6}}} =$ $\boxed{l_4 = l_0 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{6}}{3}}}$

$\boxed{l_4 = l_0 \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}}$ $\quad l_4 = (0,42837299)\, l_0$

I triangoli M_1OM_2 ed P_1OP_2 sono equilateri

$M_1\hat{O}M_2 = 60°$; $\overline{OM_1} = \overline{OM_2} = \overline{M_1M_2} = l_0/2$; per cui $\overline{P_1P_2} = \rho_6 = \frac{l_0}{\sqrt{2}}$.

Il quadrilatero AP_2QP_1 ha i vertici sulla superficie sferica, ma, non essendo inscrittibile in una circonferenza, non è piano, cioè non può essere la faccia di un solido.

Infatti calcoliamo gli angoli interni; sappiamo:

$l_2 = l_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = (0,54119610)\, l_0 = \overline{AP_1} = \overline{AP_2}$

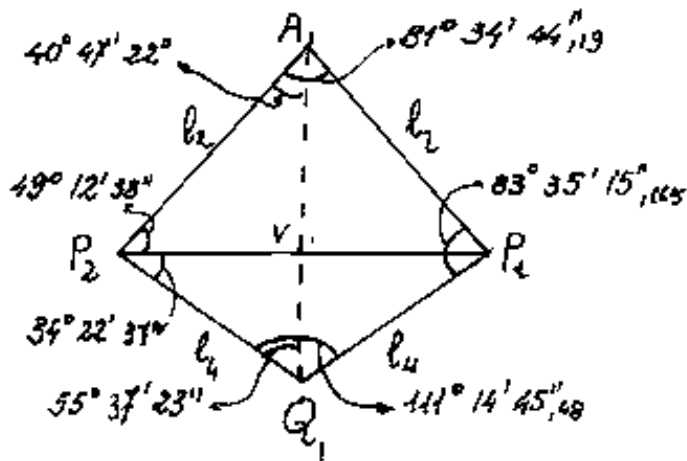
$l_4 = l_0 \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}} = (0,42837299)\, l_0 = \overline{P_2Q} = \overline{QP_1}$

$l_3 = l_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = (0,65011517)\, l_0 = \overline{AQ}$ (non consideriamo l_3 per ora)

$\overline{P_1P_2} = \rho_6 = l_0/\sqrt{2} = (0,70710678)\, l_0$ (consideriamo valido $\overline{P_1P_2}$)

$\overline{P_1P_2} = \rho_1 = l_0/\sqrt{2} = (0,70710678)\, l_0$ (consideriamo valido $\overline{P_1P_2}$ per il quadrilatero piano $A_1P_1Q_1P_2$)

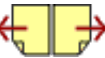
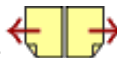
A_1
$40°47'22''$
$81°34'44'',19$
l_2
l_2
$49°12'38''$
$83°35'15'',145$
P_2
V
P_1
$34°22'37''$
l_4
l_4
$55°37'23''$
Q_1
$111°14'45'',48$

$$\widehat{P_1A_1P_2} = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{\overline{P_1P_2}/2}{l_2}\right) = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{l_0/2\sqrt{2}}{l_0\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right) = \underline{81°34'44'',19}$$

$$\widehat{P_1Q_1P_2} = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{\overline{P_1P_2}/2}{l_4}\right) = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{l_0/2\sqrt{2}}{l_0\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}}\right)$$

$$= 2\,\mathrm{arcsen}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{8}}\right) = \underline{111°14'45'',48}$$

$$81°34'44'',19 + 111°14'45'',48 = 192°49'29'',67$$

Poiché $\widehat{P_1A_1P_2} + \widehat{P_1Q_1P_2} \neq 180°$ il quadrilatero non è inscrittibile in

una circonferenza e pertanto i quattro punti $P_1 A P_2 Q$ sulla superficie sferica non sono complanari.

$$\underline{A_1\hat{P_2}Q_1} = A_1\hat{P_2}P_1 + P_1\hat{P_2}Q_1 = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right) + \arccos\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{8}}\right) =$$

$$= 49°\,12'\,37'',905 + 34°\,22'\,37'',26 = \underline{A_1\hat{P_2}Q_1 = 83°\,35'\,15'',165}$$

$$A_1\hat{P_2}Q_1 + A_1\hat{P_1}Q_1 = 2\,(83°\,35'\,15'',165) = \underline{167°\,10'\,30'',33}$$

verifichiamo la somma degli angoli interni come se il quadrilatero fosse piano, cioè definito solo da l_2, l_2, l_4, l_4, $\overline{P_1P_2}$ escludendo l_3. abbiamo: $167°\,10'\,30'',33 + 192°\,49'\,29'',67 = 360°$ (verificato)

Calcoliamo quanto è $\overline{A_1Q_1}$ cioè l_3^* se il quadrilatero fosse piano: Poichè il quadrilatero è simmetrico su $\overline{A_1Q_1}$ possiamo scrivere:

$$\overline{A_1Q_1} = \overline{A_1V} + \overline{VQ_1} = \sqrt{l_2^2 - \left(\frac{\overline{P_1P_2}}{2}\right)^2} + \sqrt{l_4^2 - \left(\frac{\overline{P_1P_2}}{2}\right)^2} =$$

$$\overline{A_1Q_1} = l_0\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}\right) = l_0\left(\sqrt{\frac{7}{8}-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{2}{3}}}\right) = l_0\left(0,40974775 + 0,24137480\right)$$

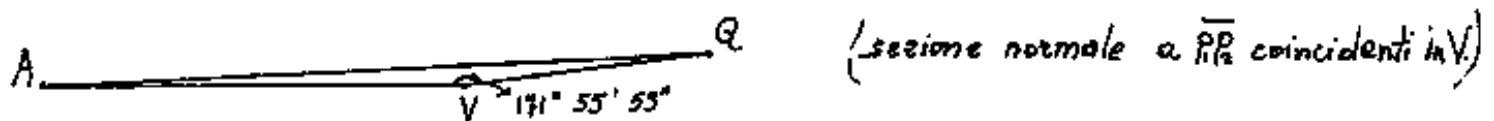
$$\underline{\overline{A_1Q_1} = (0,65112255)\,l_0 > l_3 = (0,65011517)}\,l_0 = \overline{AQ}$$

Essendo: $\overline{P_1P_2} > \overline{AQ}$ ed il piano della corda $\overline{AQ}$ biseca $\overline{P_1P_2}$ in V che è il punto di $\overline{P_1P_2}$ più lontano dalla circonferenza, ciò vuol dire che $\overline{P_1P_2}$ è più verso il centro della sfera della corda $\overline{AQ}$. Per cui se oltre i quattro lati

della corda $\overline{AQ}$. Per cui se oltre i quattro lati utilizziamo il segmento $\overline{P_1P_2}$ avremo un solido con diedro <u>concavo</u> su $\overline{P_1P_2}$, se invece utilizziamo il segmento $\overline{AQ}$ avremo un solido <u>convesso</u>

Consideriamo tracciato il segmento $\overline{P_1P_2}$; la rotazione dei triangoli: P_2AP_1 e P_2QP_1 in modo che

i punti A e Q si avvicinino rispetto al quadrilatero piano:
$A_1 P_2 Q_1 P_1$; $\overline{AQ} = \ell_3 = \ell_0 (0,65011517) < \overline{A_1 Q_1} = \ell_0 (0,65162255)$.
Consideriamo il triangolo (vero) AVQ, ove: $\overline{AV} = \overline{A_1 V}$
e $\overline{VQ} = \overline{VQ_1}$ e calcoliamo l'angolo diedro $\widehat{AVQ}$
fra le facce adiacenti $\overline{P_1 P_2}$, avremo:

A — V — Q   171° 55' 53"   (sezione normale a $\overline{P_1 P_2}$ coincidenti in V)

$$\widehat{AVQ} = \arccos\left(\frac{\overline{AV}^2 + \overline{VQ}^2 - \overline{AQ}^2}{2(\overline{AV})(\overline{VQ})}\right) =$$

$$\widehat{AVQ} = \arccos\left(\frac{\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2}{\sqrt{6}}}{2\sqrt{\frac{49}{64} - \frac{7}{8}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}}}\right) =$$

$$\widehat{AVQ} = \arccos\left(\frac{3\sqrt{6}/4 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2}{\sqrt{\frac{147}{8} - \frac{7\sqrt{6}}{2}(\sqrt{3}+2) + 8\sqrt{3}}}\right) = \arccos\left(\frac{-0,480719938}{0,48552637}\right) =$$

$$\widehat{AVQ} = \arccos(-0,990100574) \quad ; \quad \underline{\widehat{AVQ} = 171°\ 55'\ 52'',8 = \hat{D}_{P_1 P_2}}$$

diedro concavo sullo spigolo $\overline{P_1 P_2}$ del solido.

Area della faccia $AP_1P_2 = \frac{1}{2}\overline{P_1 P_2} \cdot \overline{AV} = \frac{\ell_0^2}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} =$

$$S_{AP_1P_2} = \frac{\ell_0^2}{8}\sqrt{7 - 4\sqrt{2}} = \underline{(0,144867706)\,\ell_0^2}$$

$$S_{AP_1P_2} = \frac{\ldots}{8}\sqrt{7-4\sqrt{2}} = \underline{(0,144867700)\,l_0}$$

L'altezza relativa ad $l_2 = a_2 = \frac{2\,S_{AP_1P_2}}{l_2} = \frac{l_0}{4}\sqrt{(7-4\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$

$$\boxed{a_2 = \frac{l_0}{4}\sqrt{6-\sqrt{2}}} = l_0(0,535361236)\,; \quad \overline{P_1P_4} = \overline{P_1P_2}\sqrt{2} = l_0 = \rho_3$$

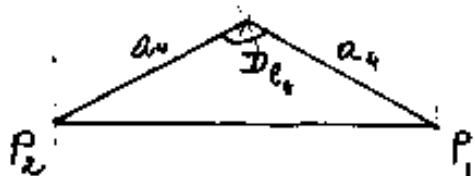
Possiamo ora calcolare l'angolo diedro delle facce su l_2; avremo il triangolo isoscele di lati a_2 e base $\overline{P_1P_4} = l_0$: $\hat{D}_{l_2} = 2\arcsen\left(\frac{l_0/2}{a_2}\right)$

$$\hat{D}_{l_2} = 2\arcsen\left(\frac{1}{2}\,\frac{4}{\sqrt{6-\sqrt{2}}}\right) = \underline{138°\ 07'\ 04'',62}$$

Area della faccia: $P_2QP_1 = S_{P_2QP_1} = \frac{1}{2}\overline{P_1P_2}\cdot\overline{VQ} =$

$$S_{P_2QP_1} = \frac{l_0^2}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = l_0^2(0,08551565 6)$$

L'altezza relativa a $\overline{P_2Q} = l_4$ è $a_4 = \frac{2 S_{P_2QP_1}}{l_4} =$

$$a_4 = l_0\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(3+\sqrt{6}\right)} = \frac{l_0}{4}\sqrt{5-\sqrt{6}} = l_0(0,399257925)$$

Calcoliamo l'angolo diedro su l_4: $\hat{D}_{l_4} = 2\arcsen\left(\frac{P_1P_2/2}{a_4}\right)$

a_4 a_4 D_{l_4} P_2 P_1

$$\hat{D}_{l_4} = 2\arcsen\left(\frac{l_0\sqrt{2}/2}{\frac{l_0}{4}\sqrt{5-\sqrt{6}}}\right) = 2\arcsen\left(\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{6}}}\right) = 124°\,37'\,57'',7 = \hat{D}_{l_4}$$

Abbiamo calcolato i diedri del solido concavo (cioè abbiamo assunto come spigolo $\overline{P_1P_2}$ e non $\overline{AQ}$.

L'area della superficie laterale di questo solido sarà: $S = 24\left(S_{AP_1P_2} + S_{P_2QP_1}\right) = l_0^2\,24\left(0,144867706 + 0,08551565 6\right)$

$$\boxed{S = l_0^2(5,529200688)} = \rho_1^2(11,0584011)$$

area della sfera circoscritta $4\rho_2^2\pi = \rho_1^2(12,5663706)$

Consideriamo ora l'esacisottaedro convesso

so, che ha gli stessi vertici sulla sfera circo=
scritta. Cioè del quadrilatero non piano
AP_1QP_2 consideriamo ora lo spigolo $\overline{AQ} = \ell_3$
anziché $\overline{P_1P_2}$.

Rendiamo piano il quadrilatero facendo
ruotare intorno ad $AQ = \ell_3$ i triangoli: AP_1Q ed AP_2Q.

ove P_1 e P_2 finiranno in P_1' e P_2'. Abbiamo così due triangoli scaleni congruenti $AP_1'Q$ ed $AP_2'Q$.

Calcoliamo gli angoli interni di questo nuovo quadrilatero.

40° 52' 48"
A
81° 45' 36"
l_2
l_2
l_3
83° 20' 36",55
P_2'
P_1'
l_4
l_4
Q

$$\widehat{P_2'AQ} = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_3^2 - l_4^2}{2\, l_2\, l_3}\right)$$

$$\widehat{P_2'AQ} = \arccos\left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \sqrt{\frac{3}{3}}}{2\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}\right) = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}}\right)$$

$$\widehat{P_2'AQ} = \arccos(0{,}756082087) = 40°\ 52'\ 47'',963$$

angolo leggermente superiore ad $\widehat{P_2A_1Q_1}$

$$\widehat{P_2'AP_1'} = 81°\ 45'\ 36''$$

$$\widehat{AP_2'Q} = \widehat{AP_1'Q} = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_4^2 - l_3^2}{2\, l_3\, l_4}\right) = \arccos\left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}}\right) =$$

$$\widehat{AP_2'Q} = \widehat{AP_1'Q} = \arccos(0{,}115916896) = 83°\ 20'\ 36'',553$$

$$\widehat{P_2'QA} = \arccos\left(\frac{l_3^2 + l_4^2 - l_2^2}{2\, l_3\, l_4}\right) = \arccos\left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}}{2\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}}\right) =$$

$P_2'\hat{Q}A = \arccos(0{,}562422224) = 55°\ 46'\ 35'',484$

verifica:

$P_2'\hat{A}Q = 40°\ 52'\ 47'',963$

$A\hat{P}_2'Q = 83°\ 20'\ 36'',553$

$P_2'\hat{Q}A = 55°\ 46'\ 35'',484$

$180°\ 00'\ 00'',000$ (torna)

Confrontiamo ora la distanza $\overline{P_1P_2}$ con $\overline{P_1'P_2'}$.

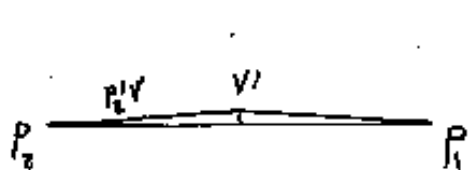
$$\overline{P_2'P_1'} = \overline{P_2'V'} + \overline{V'P_1'} = 2\,\overline{P_2'V'} = 2\,l_2 \,\mathrm{sen}\, \widehat{P_2'AQ} = 2 l_0 \left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) \mathrm{sen}(40°52'47'',9)$$

$$\overline{P_2'P_1'} = 2\, l_0 (0{,}54119610)(0{,}654476796) = 2 l_0 (0{,}35420029)$$

$$\overline{P_2'P_1'} = l_0 (0{,}708400580) > \overline{P_1P_2} = 0{,}70710678\, l_0$$

calcoliamo l'angolo diedro: $\widehat{P_2V'P_1} = \hat{D}_{l_3}$

P_2 — $P_2'V'$ — V' — P_1

$$\hat{D}_{l_3} = 2 \,\mathrm{arcsen}\left(\frac{\overline{P_2P_1}/2}{\overline{P_2'V'}}\right) =$$

$$= 2\,\mathrm{arcsen}(0{,}998173634)$$

$$\hat{D}_{l_3} = 2(86°\ 32'\ 11'',904)$$

$$\boxed{\hat{D}_{l_3} = 173°\ 04'\ 23'',808}$$ (convesso)

Area del triangolo AP_2Q $= S_{AP_2Q} = \frac{1}{2} l_3 \cdot \overline{P_2'V'} = \frac{1}{2}\, 0{,}230270981\, l_0^2$

$$\boxed{S_{AP_2Q} = 0{,}11513549\, l_0^2}$$

altezza su $l_2 = a_2' = \dfrac{2 S_{AP_2Q}}{l_2} = \dfrac{l_0^2\, 0{,}230270981}{l_0\, 0{,}54119610} = 0{,}425485294\, l_0$

altezza su $l_4 = a_4' = \dfrac{2 S_{AP_2Q}}{l_4} = \dfrac{l_0^2 (0{,}230270981)}{l_0 (0{,}42837299)} = 0{,}537547852\, l_0$

angolo diedro su l_2 = $\hat{D}_{l_2} = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\dfrac{\overline{Q_1Q_2}/2}{a_2}\right)$

$\overline{Q_1Q_2} = 2 \rho\, \mathrm{sen}(35°\ 15'\ 52'') = 2\, \dfrac{l_0}{\ldots} \cdot \dfrac{1}{\ldots} = l_0\, {}^2/\!\sqrt{\ldots} = l_0 (0{,}8164965 8)$

$$\overline{Q_1Q_2} = 2\rho_1 \operatorname{sen}(35°\,15'\,52'') = 2\frac{l_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = l_0\,2/\sqrt{6} = l_0(0{,}81649658)$$

$$\hat{D}_{l_2} = 2\arcsen\left(\frac{0{,}40824829}{0{,}425485294}\right) = \hat{D}_{l_2} = 2(73°\,38'\,07'',71)$$

$$\boxed{\hat{D}_{l_2} = 147°\,16'\,15'',4}$$

angolo diedro su l_4 = $\hat{D}_{l_4} = 2\arcsen\left(\frac{l_0/2}{a_4}\right) =$

$$\hat{D}_{l_4} = 2\arcsen\left(\frac{1}{2(0{,}537547852)}\right) = 2\arcsen(0{,}930149749) =$$

$$\hat{D}_{l_4} = 2(68°\,27'\,29'',41) \qquad \boxed{\hat{D}_{l_4} = 136°\,54'\,58'',8}$$

Solido convesso con area della superficie laterale

$S = 48 S_{ARQ} = 48(0{,}11513549)\, l_0^2 = \boxed{(5{,}5265035 44) l_0^2 = S}$

$S = l_0^2 (11{,}05300709)$ leggermente inferiore all'area del solido concavo.

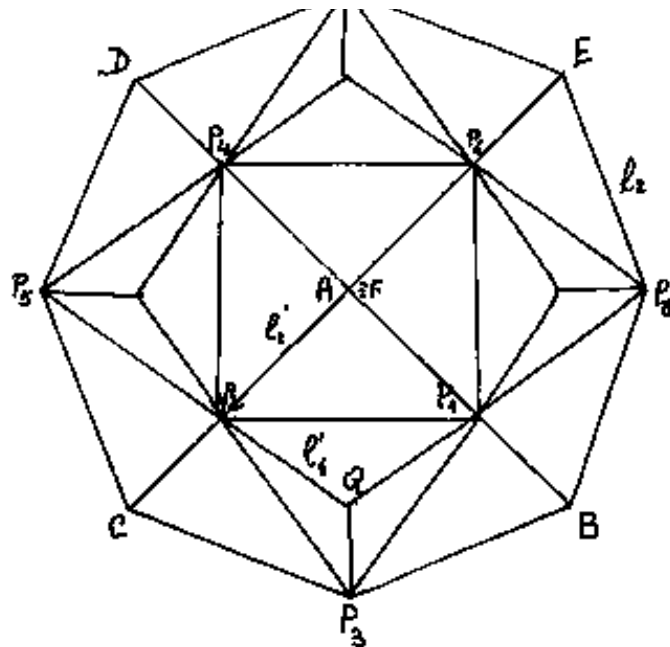
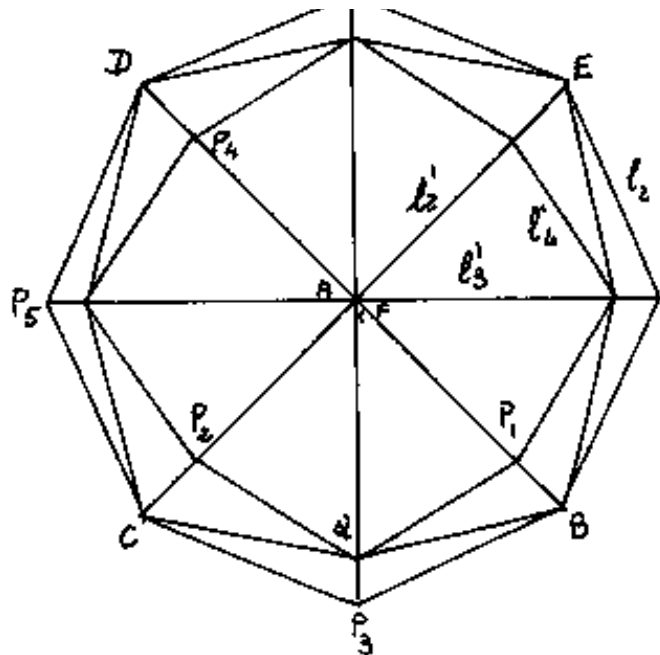
I due solidi esacisottaedri, uno concavo ed uno con= vesso, che hanno per vertici gli stessi punti della superficie sferica in cui sono inscritti, mettono a fuoco il proble= ma del quadrilatero P_2AP_1Q, non piano.

Nasce così il problema del trapezoedro, che può ot= tenersi in modi diversi e cioè:

1) Fermi restando i punti P_2, A, P_1 sulla sfera, abbassiamo Q in modo da rendere piatto il diedro concavo $\hat{D}_{P_1P_2}$

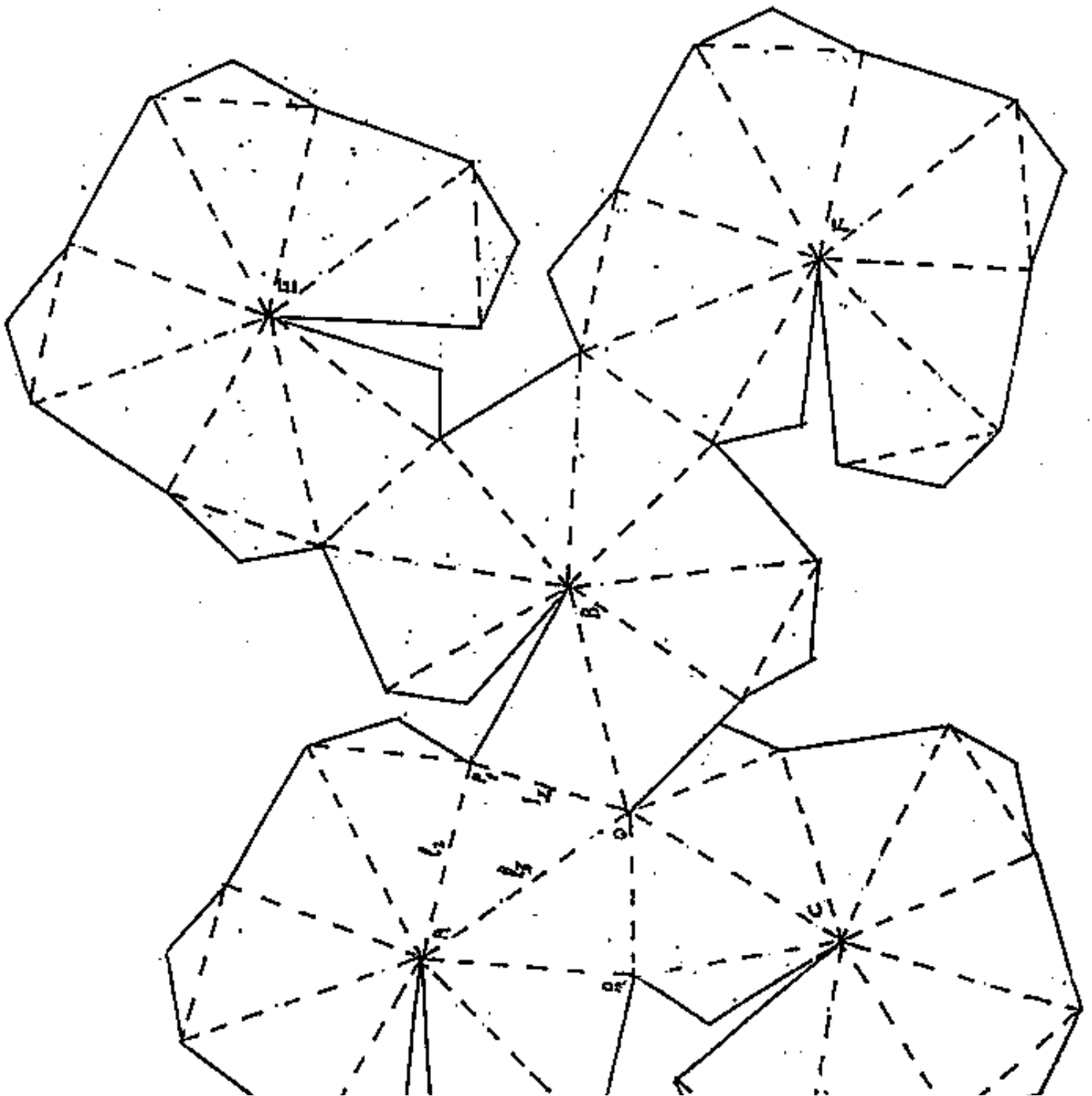
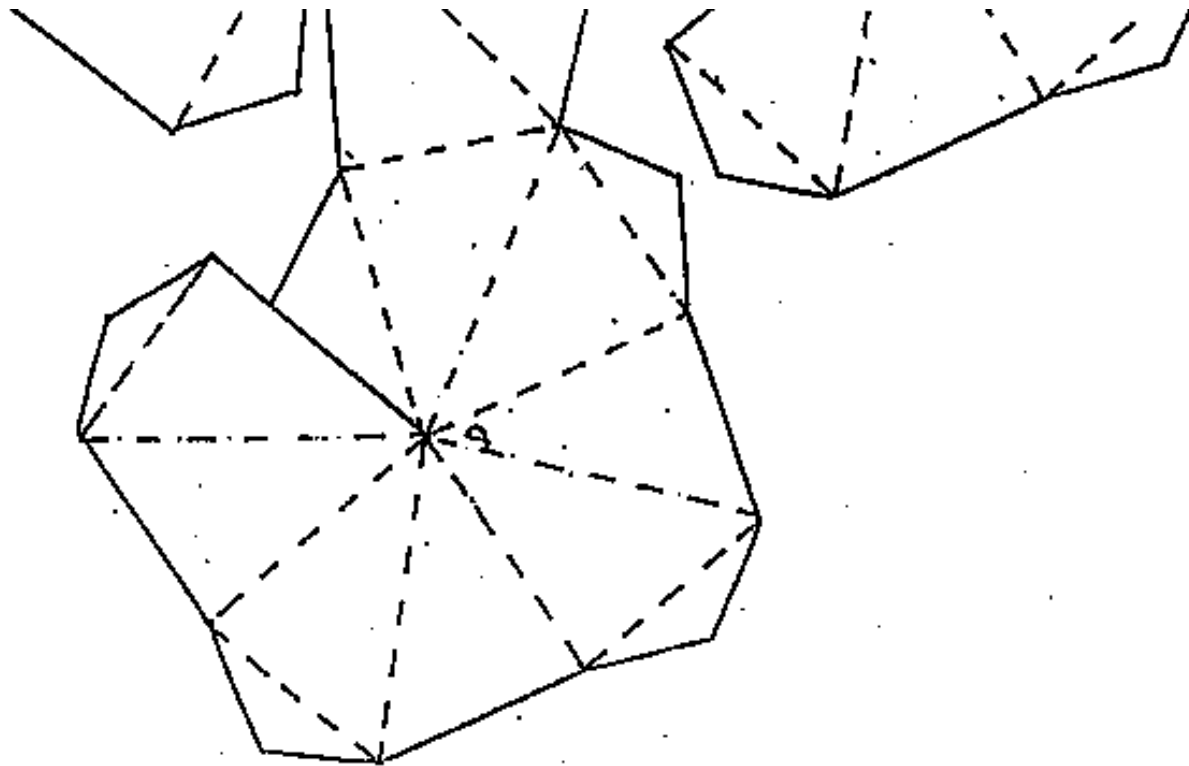
2) Fermi restando i punti A e Q innalziamo P in modo da rendere piatto il diedro su AQ : $\hat{D}_{l_3}$.

Esacisottaedro convesso

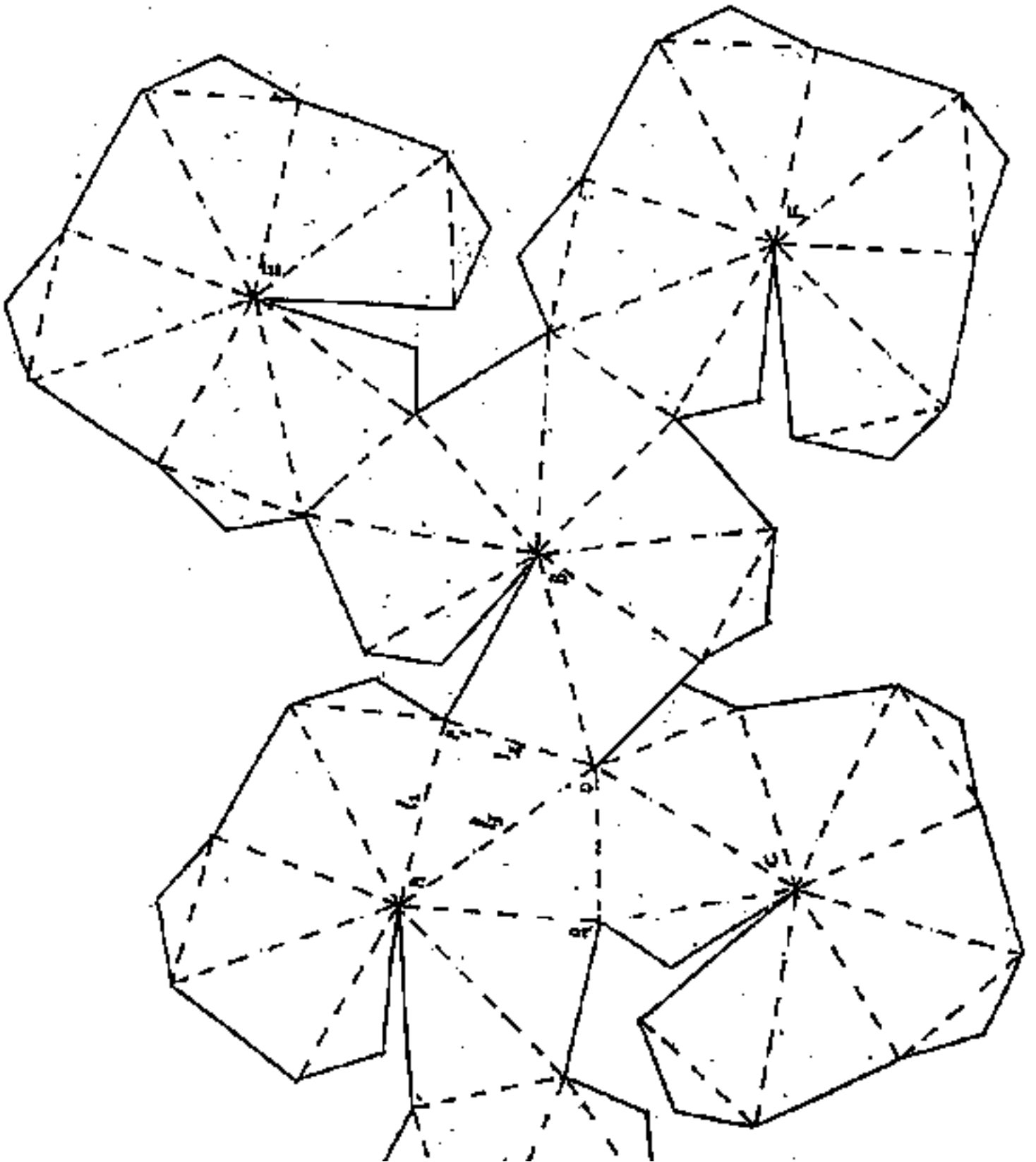
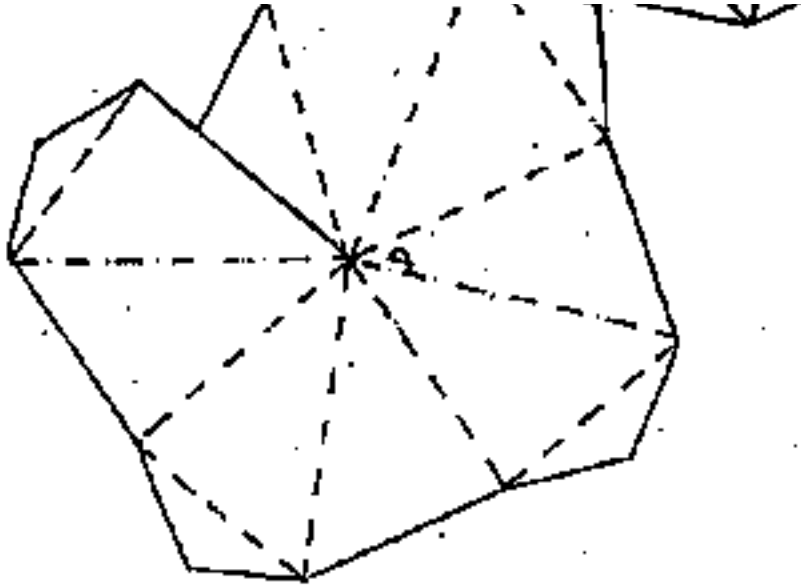
Esacisottaedro concavo

Schema di Esacisottaedro inscrittibile in una sfera

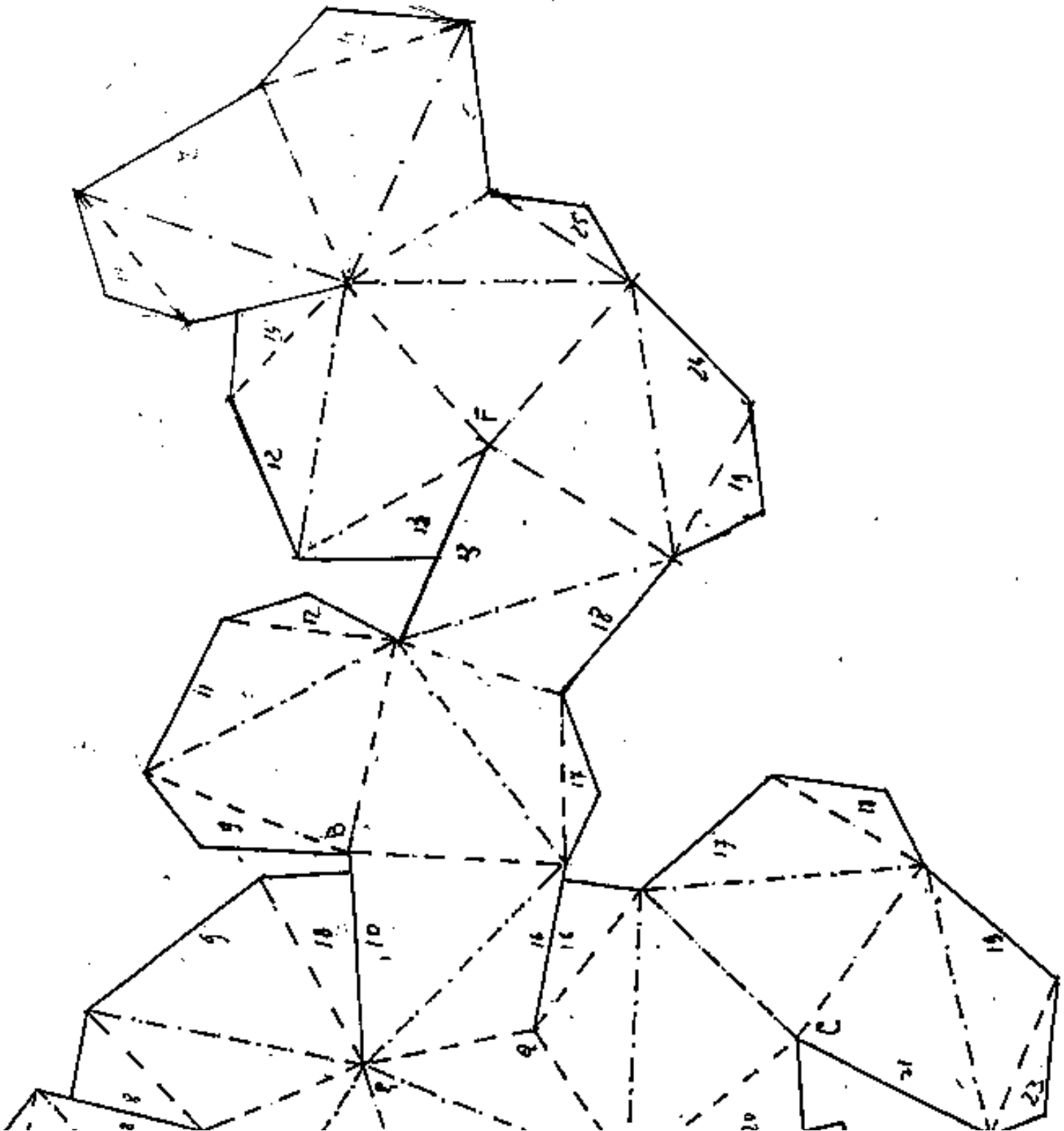
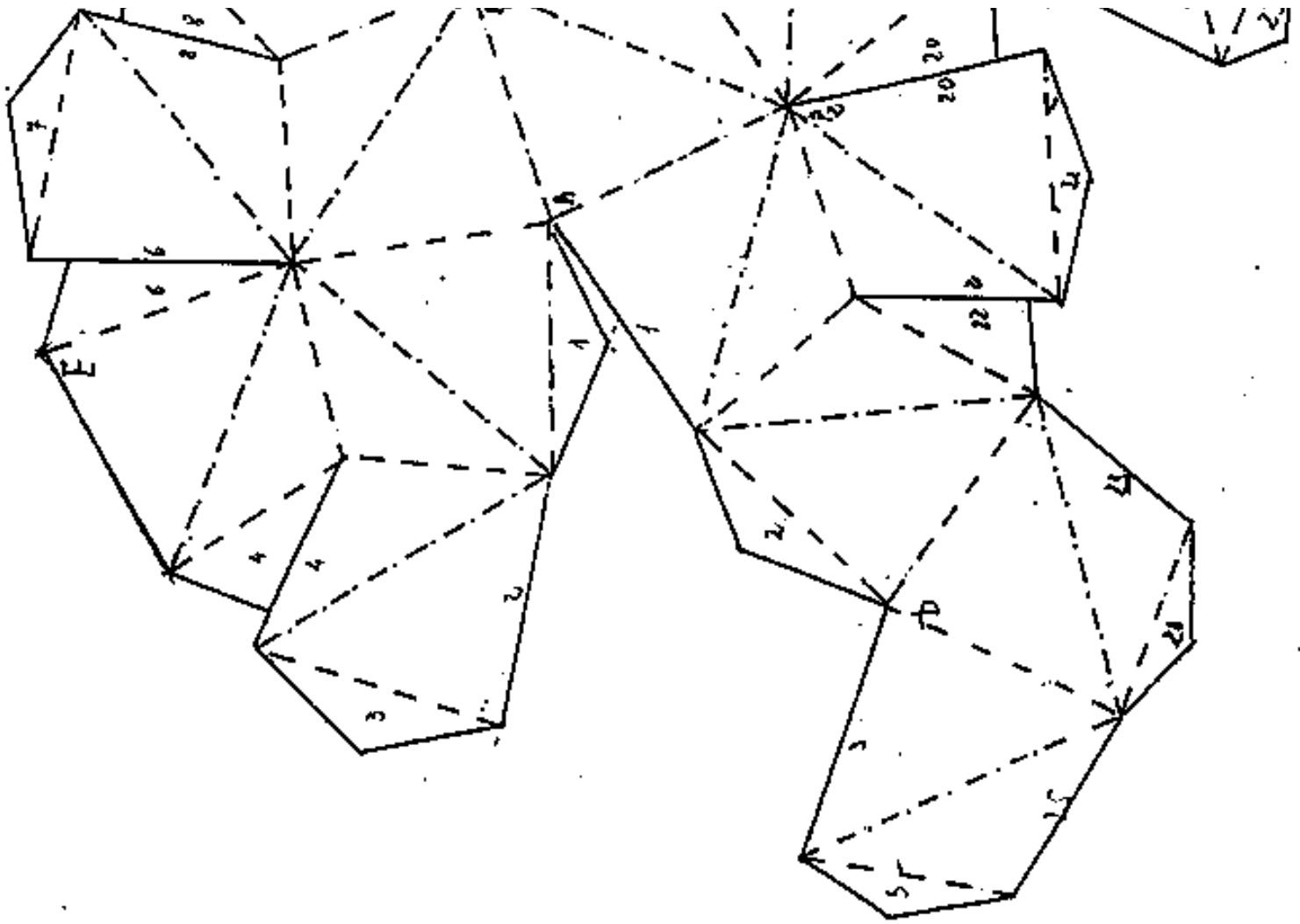
Il solido è convesso

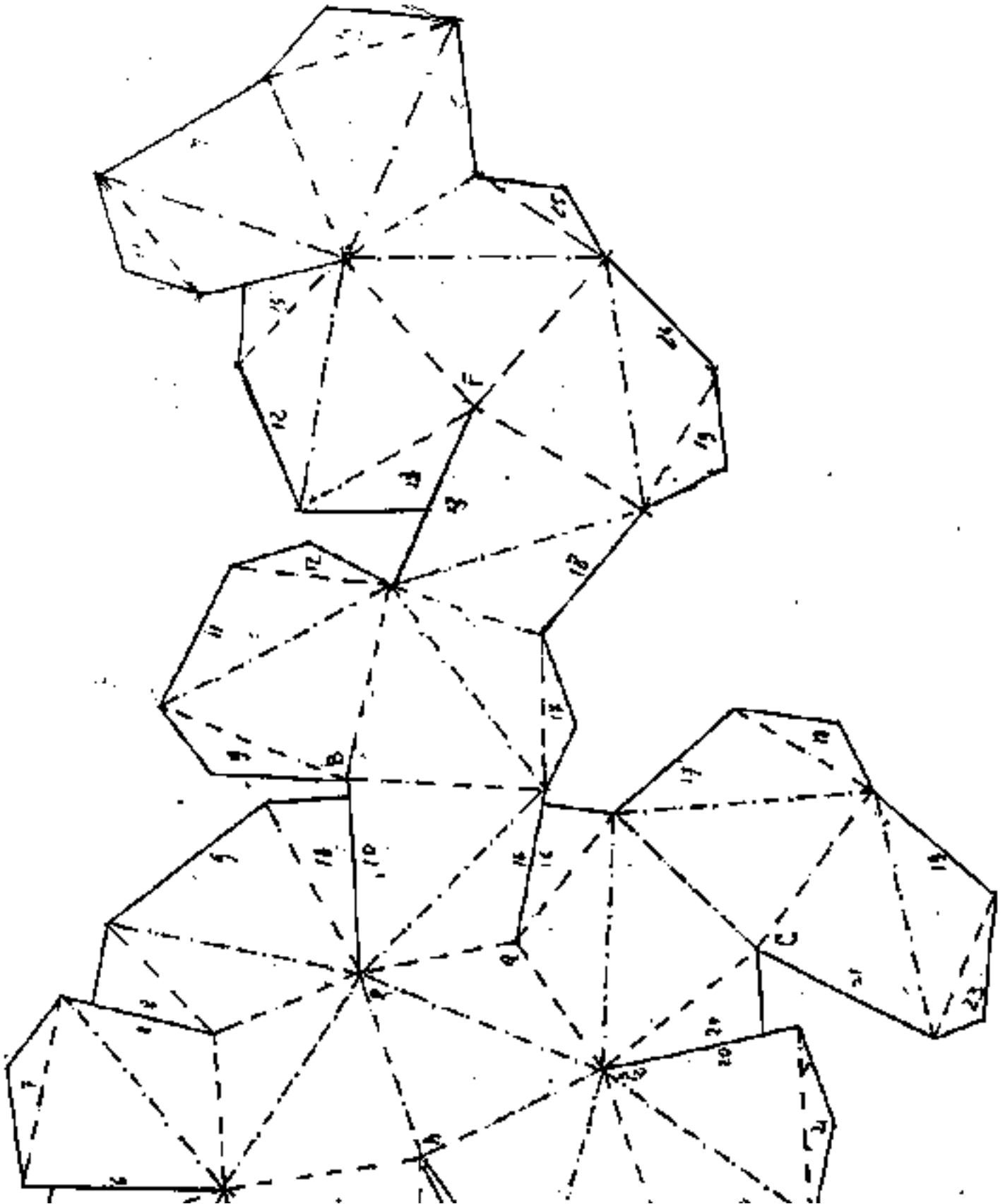
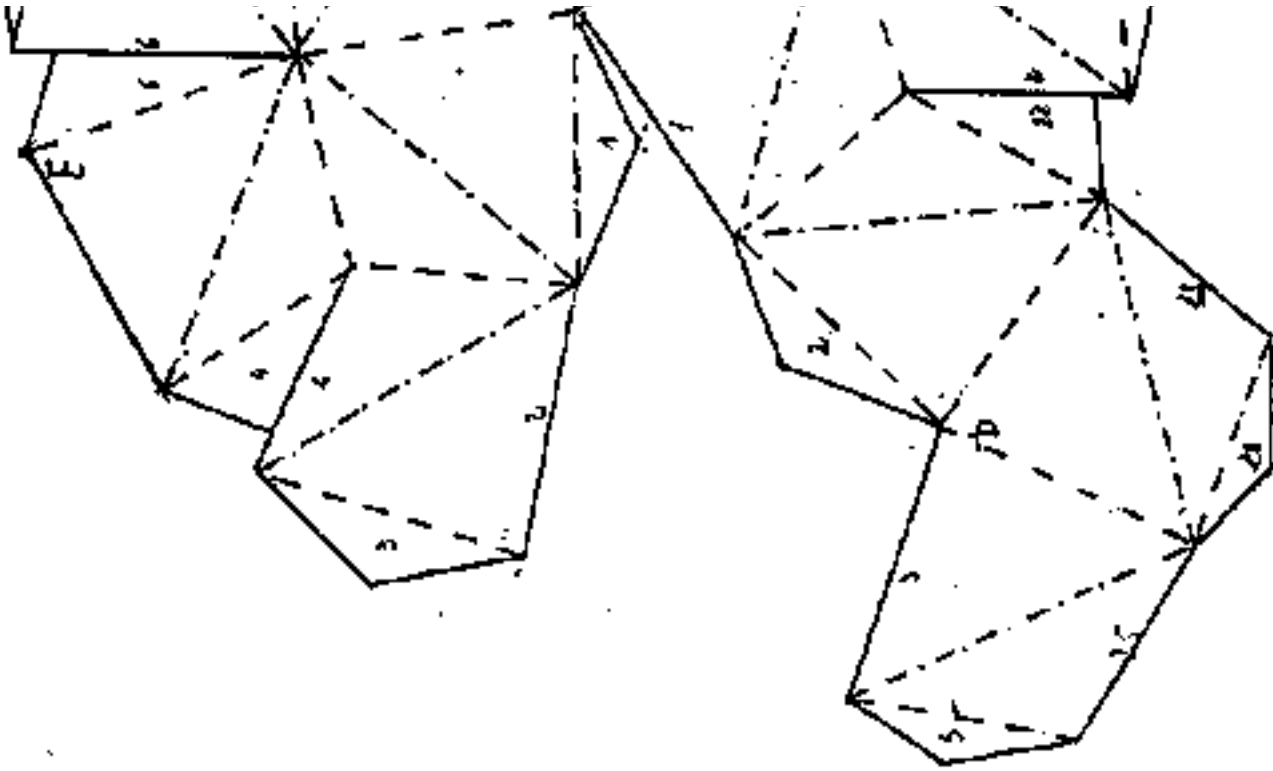
(A, B, C, D, E, F, sono i vertici comuni all'ottaedro)

Ω

Schema di Esacisottaedro inscrittibile in una sfera

Il solido è convesso

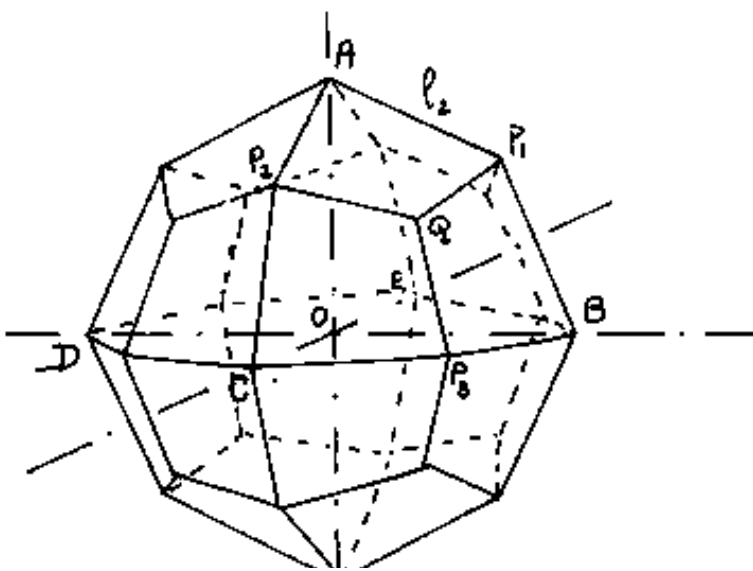
(A, B, C, D, E, F, sono i vertici comuni all'ottaedro)

ESACIS OTTAEDRO

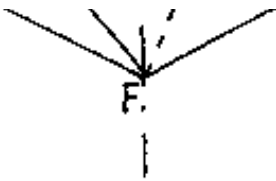
Solido concavo inscrittibile in una sfera

ESACISOTTAEDRO

Solido concavo inscrittibile in una sfera

IL TRAPEZOEDRO

Il trapezoedro talvolta è chiamato: ICOSITETRAEDRO (dal greco: icos = 20, tetra = 4, edro = piano, base o faccia; cioè 24 facce).

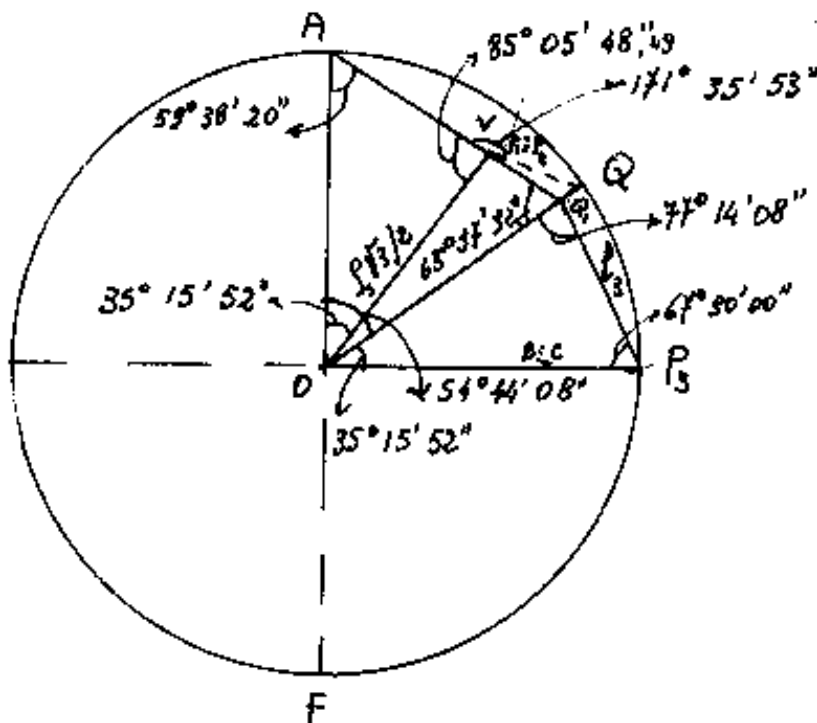
Il trapezoedro è quindi un solido di 24 facce, 48 spigoli e 26 vertici (24+26 = 48+2).

I 26 vertici sono costituiti: dai 6 vertici dell'ottaedro, più 12 vertici dei raggi bisettori degli spigoli dell'ottaedro, più, 8 vertici dei raggi uscenti dai centro-faccia dell'ottaedro. Le facce sono quadrangolari simmetriche rispetto ad una diagonale.

Dal disegno è possibile rilevare che gli spigoli dell'ottaedro base, cioè: $\overline{AB}$, $\overline{BF}$, $\overline{FD}$, $\overline{DA}$, si proiettano in vera grandezza "l_0"; avremo $\rho_1 = l_0/\sqrt{2}$ = raggio della circon=

F.

$\rho_1 = l_0/\sqrt{2}$ = raggio della circonferenza circoscritta all'ottagono sulla quale insistono pure i punti: $P_1, P_2, \ldots$ ove: $\overline{P_1P_2} = \rho_1$ (vedi esacisottaedro), l_2 = spigolo maggiore = lato dell'ottagono inscritto nei cerchi massimi passanti per i vertici dell'ottaedro: $\overline{AP_1} = l_2 = l_0\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$ = $\boxed{l_2 = l_0\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

$\boxed{l_2 = \rho_1\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ $= (0,765366865)\rho_1$; $\Rightarrow$ $l_2 = (0,54119610)l_0$.

I punti Q giacenti sul prolungamento del segmento che dal centro O della sfera, va al centro delle facce dell'ottaedro, non giacciono sulla superficie sferica, altrimenti il quadrilatero AP_2QP_1 non sarebbe piano.

Occorre trovare la posizione di Q che rende piano tale quadrilatero. Facciamo una sezione secondo il cerchio massimo: AQP_3F

Nel disegno il punto V corrisponde alla proiezione della corda $\overline{P_1P_2} = \rho_1$. Tale corda dista dal centro O: $\overline{OV} = \rho_1\sqrt{3}/2$

sappiamo: (vedi esercizi ottaedro)

$\overline{AV} = \rho_1 \frac{1}{2}\sqrt{7-4\sqrt{2}}$ $\overline{AO} = \rho_1$

Calcoliamo gli angoli del triangolo AOV di cui sono noti i lati:

sono noti i lati:

$$\underline{O\hat{A}V} = \arccos\left(\frac{\overline{OA}^2 + \overline{AV}^2 - \overline{VO}^2}{2(\overline{OA})(AV)}\right) = \arccos\left(\frac{1 + (7-4\sqrt{2})/4 - 3/4}{2\left(\sqrt{7-4\sqrt{2}}/2\right)(1)}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{8-4\sqrt{2}}{4\left(\sqrt{7-4\sqrt{2}}\right)}\right) = \arccos\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}\right) = O\hat{A}V = O\hat{A}Q_1$$

$$\underline{O\hat{A}V} = \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}\right) = \boxed{O\hat{A}Q_1 = 59°\ 38'\ 19'',7037}$$

L'angolo $A\hat{O}Q$ fra vertice e centrofaccia dell'ottaedro è già stato calcolato: $A\hat{O}Q = \boxed{A\hat{O}Q_1 = 54°\ 44'\ 08''}$

Per differenza: $A\hat{Q}_1 O = 180° - (O\hat{A}Q_1 + A\hat{O}Q_1) =$ $\boxed{A\hat{Q}_1 O = 65° \; 37' \; 32''}$

$$\text{sen}\, A\hat{Q}_1 O = \text{sen}(O\hat{A}Q_1 + A\hat{O}Q_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) =$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{21-12\sqrt{2}}}\right) = \left(\sqrt{\frac{31+8\sqrt{2}}{51}}\right); \quad \cos A\hat{Q}_1 O = \left(2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{51}}\right)$$

Ora possiamo calcolare $\overline{AQ_1}$ ed $\overline{OQ_1}$ per definire la posizione di Q_1.

$$\overline{OQ_1} = \overline{OA}\,\frac{\text{sen}(O\hat{A}Q_1)}{\text{sen}(O\hat{Q}_1 A)} = \rho_1 \frac{\text{sen}(59° \; 38' \; 19'',7)}{\text{sen}(65° \; 37' \; 32'')} =$$

$$\overline{OQ_1} = \rho_1\left(\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{3(7-4\sqrt{2})}}{2\sqrt{2}-1}\right) = \rho_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1}\right) = \ell_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{\overline{OQ_1} = \rho_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1}\right)} = (0,947290041)\,\rho_1$$

$$\overline{AQ_1} = \overline{OA}\left(\frac{\text{sen}(A\hat{O}Q_1)}{\text{sen}(A\hat{Q}_1 O)}\right) = \rho_1 \frac{\text{sen}(54° \, 44' \, 08'')}{\text{sen}(65° \; 37' \; 32'')} = \rho_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\sqrt{\frac{51}{31+8\sqrt{2}}}\right) =$$

$$\boxed{\overline{AQ_1} = \rho_1 \frac{1}{7}\sqrt{62-16\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{AQ_1 = \ell_0 \frac{1}{7}\sqrt{31-8\sqrt{2}}}$$

Completiamo il calcolo degli angoli:

Completiamo il calcolo degli angoli:

$$\cos(\hat{AVO}) = \frac{\overline{AV}^2 + \overline{OV}^2 - \overline{AO}^2}{2(\overline{AV})(\overline{OV})} = \left(\frac{7-4\sqrt{2}/4 + 3/4 - 1}{2\sqrt{(3/4)(7-4\sqrt{2})/4)}}\right) =$$

$$= \left(\frac{(6-4\sqrt{2})/4}{2/4\sqrt{21-12\sqrt{2}}}\right) = \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{21-12\sqrt{2}}}\right)$$

$$\hat{AVO} = \arccos\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{21-12\sqrt{2}}}\right) = \arcsen\left(\frac{2}{\sqrt{21-12\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \operatorname{arctg}(6-\sqrt{32}) = \boxed{\hat{AVO} = 85° \; 05' \; 48''.4934}$$

Calcolo degli angoli diedri del trapezoedro 3°

Diedro sullo spigolo $\overline{QP_1'}$ = $\hat{D}_{QP'} = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\overline{P_1'P_2'}}{2h_1}\right) = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\overline{P_1'P_2'}}{2}\,\frac{\overline{P_1'Q}}{\overline{P_1P_2}\,\overline{V_1Q}}\right)$

$$= 2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-8\sqrt{3}}{9-5\sqrt{3}}}\right) = 2\,\text{arcsen}\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{8}}\right) =$$

$$\hat{D}_{QP_1} = 2\arccos\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}}\right) = 2\,\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}}\right) = 2\,\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{3}}\right) =$$

$$2(66°\,32'\,23'',13085) \quad \boxed{\hat{D}_{QP_1} = 133°\ 04'\ 46'',26171}$$

Diedro sullo spigolo $\overline{AP_1'}$ = $\hat{D}_{AP_1'} = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\overline{P_1'P_4'}}{2h_2}\right) =$

$$\hat{D}_{AP_1'} = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\overline{P_1'P_2'}\sqrt{2}}{2}\,\frac{\overline{AP_1'}}{\overline{P_1'P_2'}\,\overline{AV_1}}\right) = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{11-6\sqrt{3}}}{\sqrt{9-5\sqrt{3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$\hat{D}_{AP'} = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{99-54\sqrt{3}+55\sqrt{3}-90}{3}}\right) = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{3}}\right) =$$

$$\hat{D}_{AP'} = 2\arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}\right) = 2\,\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}\right) = 2\,\text{arctg}\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)$$

$$\boxed{\hat{D}_{AP'} = 142°\ 03'\ 42'',741262}$$

Generalizzazione dei trapezoedri

Consideriamo l'angoloide tetraedro di vertice O, delimitato dai raggi: $\overline{OP_2}$, $\overline{OA}$, $\overline{OP_1}$, $\overline{OQ}$, ove P_2, A, P_1, Q sono

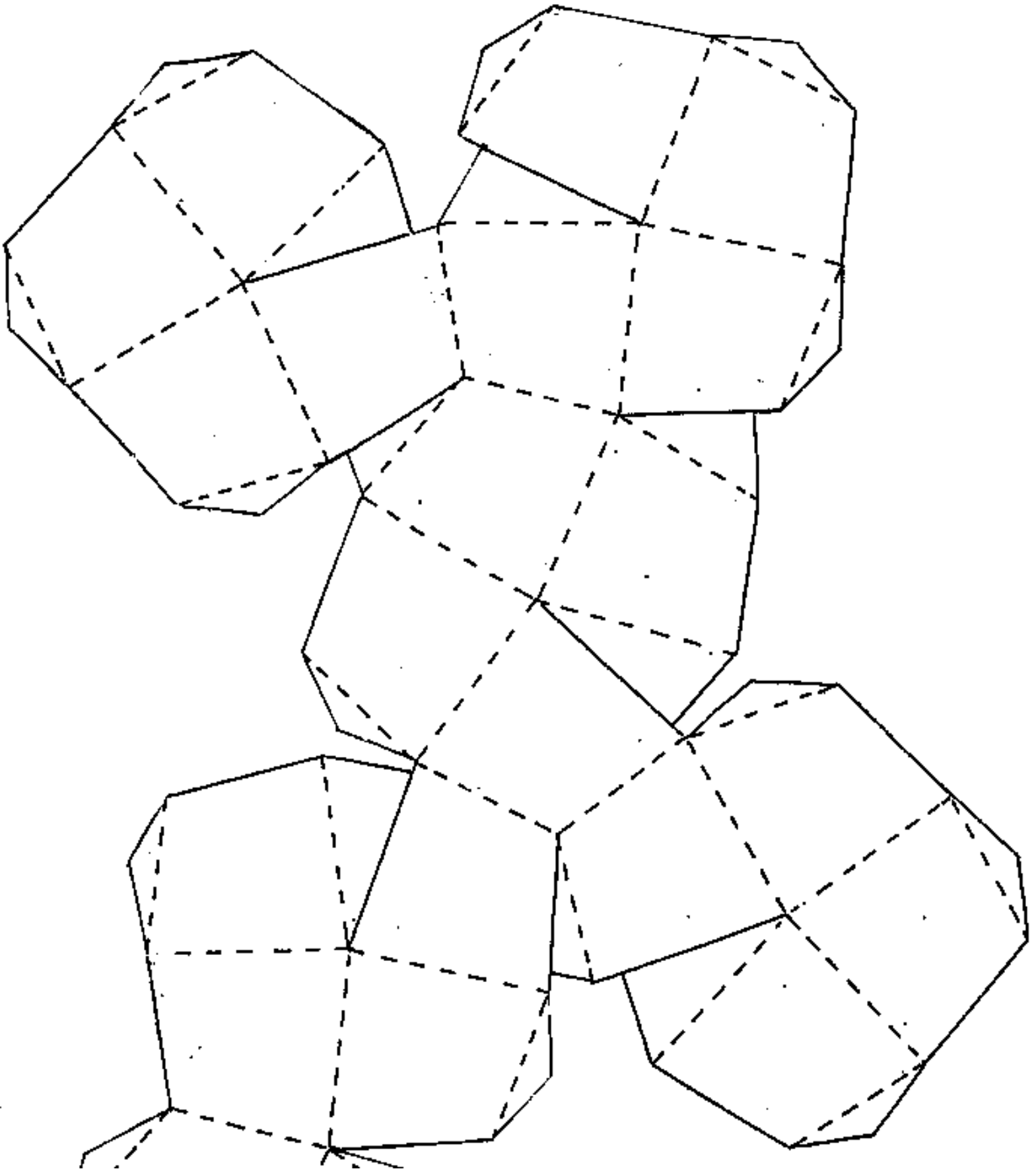
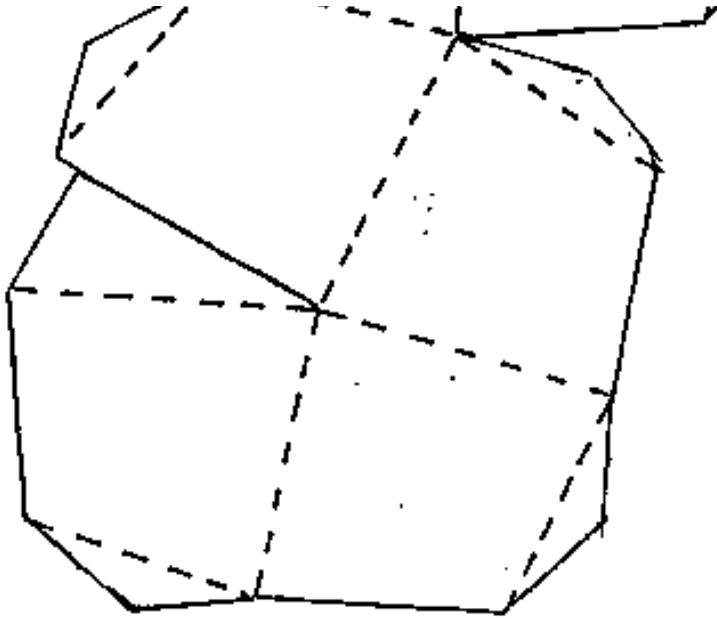
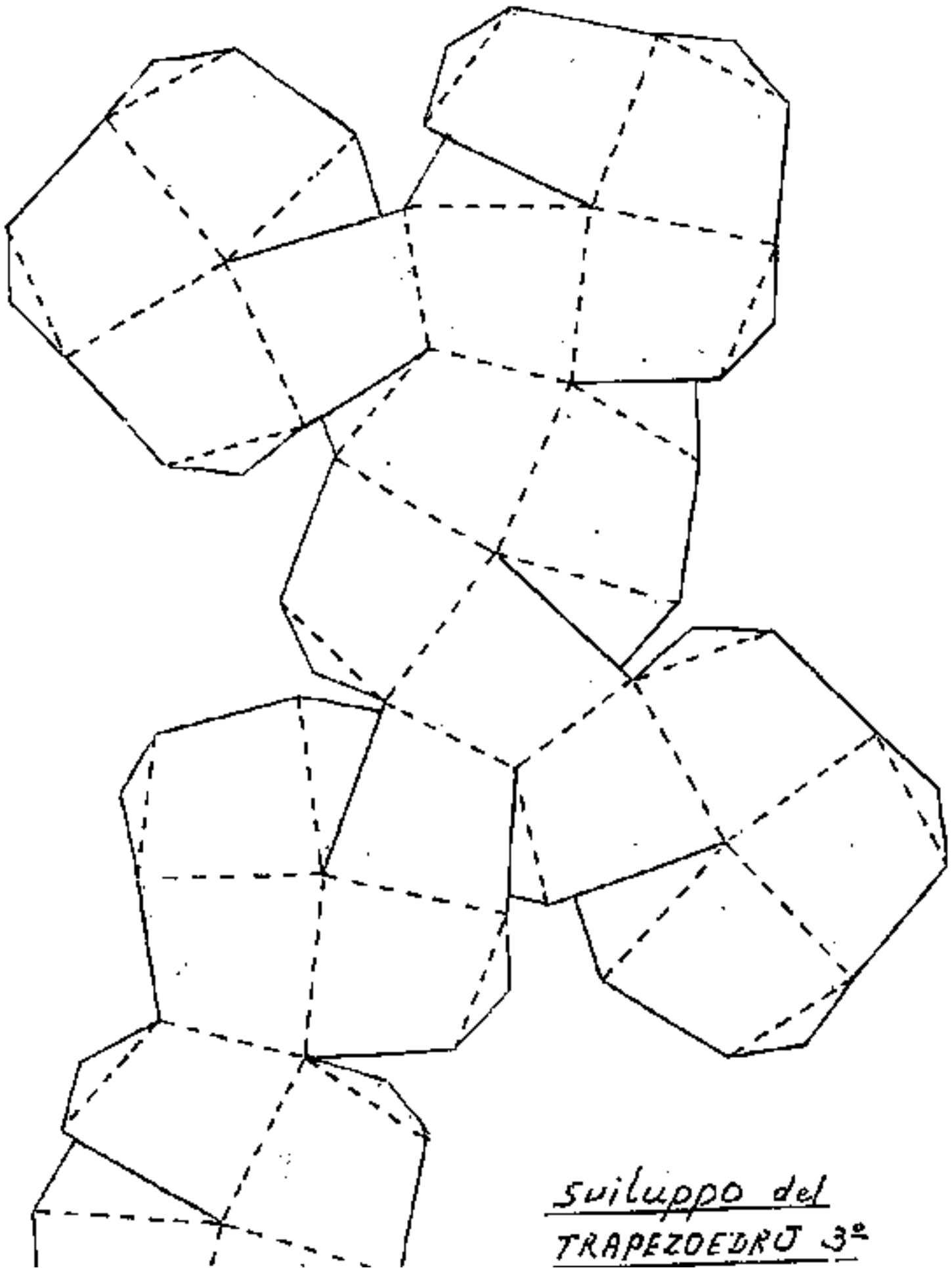
i vertici del quadrilatero piano, faccia generica del trapezoedro.

Gli angoli fra tali raggi sono:

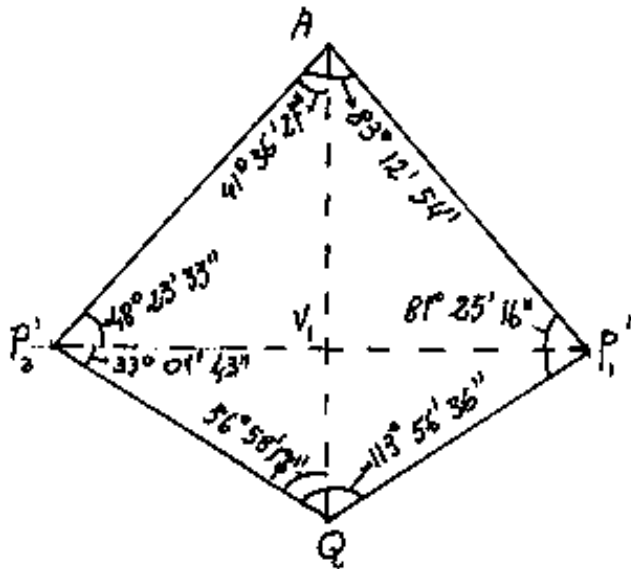
$A\hat{O}P_1 = A\hat{O}P_2 = 45°$ = (lati del quadrilatero sferico)

$A\hat{O}Q = 54° 44' 08''$ = (diagonale " " ")

$Q\hat{O}P_1 = Q\hat{O}P_2 = 35° 15' 52''$ = (lati " " ") = $(M\hat{O}T)$

$P_1\hat{O}P_2 = 60°$ = (diagonale " " ")

Sviluppo del
TRAPEZOEDRO 3°

sviluppo del

TRAPEZOEDRO 3°

TRAPEZOEDRO 3°

Nella figura abbiamo riportato gli angoli che qualificano la diversità delle facce dei trapezoedri per esempio:

1) Trapezoedro: $P_2 \hat{A} P_1 = 81° 34' 44''$

Trapezoedro 2°: $P_2 \hat{A}_1 P_1 = 85° 33' 13''$

Trapezoedro 3° $P_2' \hat{A} P_1' = 83° 12' 54''$

$$\overline{AP_1'} = \overline{AP_2'} = \sqrt{\left(\frac{\overline{P_1'P_2'}}{2}\right)^2 + \overline{AV_1}^2} = \rho_1 \sqrt{(2-\sqrt{3}) + (9-5\sqrt{3})} =$$

$$\boxed{\overline{AP_1} = \rho_1 \sqrt{11 - 6\sqrt{3}}} = (0,479548042)\rho_1$$

$$\overline{QP_1'} = \overline{QP_2'} = \sqrt{\left(\frac{\overline{P_1'P_2'}}{2}\right)^2 + \overline{V_1Q}^2} = \rho_1 \sqrt{(2-\sqrt{3}) + \frac{9-5\sqrt{3}}{3}} = \rho_1 \sqrt{\frac{6-3\sqrt{3}+9-5\sqrt{3}}{3}}$$

$$\boxed{\overline{QP_1'} = \rho_1 \sqrt{(15-8\sqrt{3})/3}} = (0,617412217)\rho_1$$

$$P_2'\hat{A}V_1 = V_1\hat{A}P_2' = \operatorname{arctg}\left(\overline{P_2'V_1}/\overline{AV_1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}/\sqrt{9-5\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{18-9\sqrt{3}+10\sqrt{3}-15}{6}}\right) =$$

$$\boxed{P_2\hat{A}V_1 = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\right)} = \boxed{41° 36' 26'',78988}$$

$$Q\hat{P_2'}V_1 = Q\hat{P_1'}V_1 = \operatorname{arctg}\left(\overline{QV_1}/\overline{P_2'V_1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{9-5\sqrt{3}}{3(2-\sqrt{3})}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{18-10\sqrt{3}+9\sqrt{3}-15}{3}}\right)$$

$$\ldots = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3(2-\sqrt{3})}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\ldots}{3}}\right)$$

$$\widehat{QP_2'V_1} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}\right) = 33^\circ\ 01'\ 42'',621774$$

$$\widehat{AP_2'V_1} = 48^\circ\ 23'\ 33'',21012 \qquad \widehat{AP_2'Q} = 81^\circ\ 25'\ 15'',83189$$

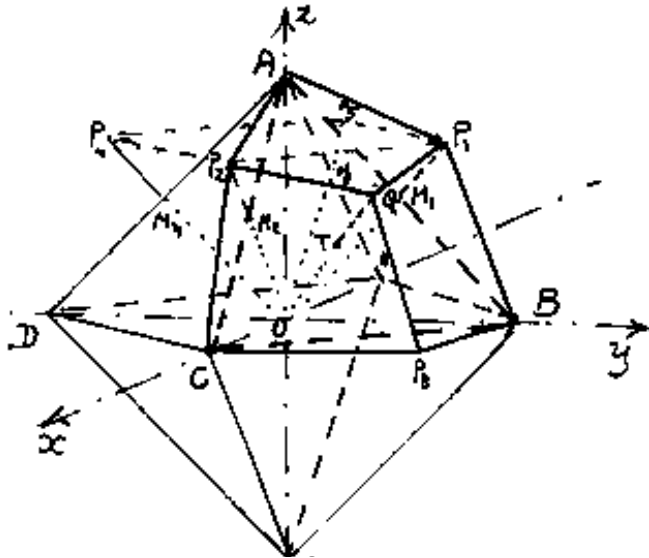
$$\widehat{P_2'QV_1} = 56^\circ\ 58'\ 17'',378226 \qquad \widehat{P_2'QP_1'}\ 113^\circ\ 56'\ 34'',756452$$

Per questo solido vale: $\overline{OA} = \rho_1 = l_0/\sqrt{2}$, però non vale $\overline{P_1P_2} = \rho_1$, ma: $\overline{P_2'P_1'} = \rho_1 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Bastano cinque elementi per determinare un quadrilatero, sferico. (oltre il raggio ρ), il sesto è di controllo.

Questo angoloide è ottenuto dividendo in tre parti uguali l'angoloide costituente le facce dell'ottaedro, perciò, $(3 \cdot 8 = 24)$, il suo valore in stereoradianti sarà: $\frac{1}{24} 4\pi = \frac{\pi}{6}$ stereoradianti. Esso può essere la base di un insieme di solidi aventi 24 facce quadrilatere simmetriche rispetto ad una diagonale. Chiameremo questo insieme, "insieme dei trapezoedri"

Poniamo: $\overline{OA} = \rho = l_0/\sqrt{2}$; $\overline{MP} = \lambda l_0$; (ove M è il punto medio degli spigoli l_0 dell'ottaedro.)

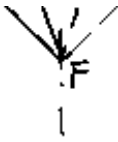
$\overline{TQ} = K l_0$ (ove T = puntomedio delle facce dell'ottaedro, A = vertice dell'ottaedro, O = centro sfera = centro ottaedro)

$$\overline{AP_1} = \overline{AP_2} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2} = \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + (\lambda l_0)^2}$$

$$\boxed{\overline{AP} = \frac{l_0}{2}\sqrt{1 + 4\lambda^2}}$$

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP} = \overline{OM} + \lambda l_0 = \frac{l_0}{2} + l_0\lambda =$$

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \frac{l_0}{2}(1 + 2\lambda)}$$

$$\overline{OQ} = \overline{OT} + \overline{TQ} = \left(\frac{l_0}{\sqrt{6}} + K l_0\right) =$$

F

$$OQ = OT + TQ = \left(\frac{l_0}{\sqrt{6}} + K l_0\right)$$

$$\boxed{\overline{OQ} = \frac{l_0}{\sqrt{6}}\left(1 + \sqrt{6}\,K\right)}$$

$$\cos(Q\hat{O}P) = \cos(T\hat{O}M) = \left(\frac{\overline{OT}}{\overline{OM}}\right) = \left(\frac{l_0/\sqrt{6}}{l_0/2}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad \boxed{Q\hat{O}P = 35^\circ\, 15'\, 52''}$$

$$\overline{QP} = \sqrt{\overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 - 2(\overline{OP})(\overline{OQ})\cos(Q\hat{O}P)} = l_0\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}} + K\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}} + K\right)\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$\overline{QP} = l_0\sqrt{K^2 + \frac{1}{6} + 2\frac{K}{\sqrt{6}} + \frac{1}{4} + \lambda^2 + \lambda - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{K}{2} + \frac{\lambda}{\sqrt{6}} + K\lambda\right)} = \boxed{\overline{QP} = l_0\sqrt{K^2 + \lambda^2 - \sqrt{\frac{8}{3}}K\lambda + \frac{\lambda}{3} + \frac{1}{12}}}$$

TABELLA dei TRAPEZOEDRI

$\overline{P_1P_2}/l_0$	$\overline{QP}/l_0$	$\overline{AQ}/l_0$	$P\widehat{A}Q$	$P\widehat{Q}A$	$\widehat{D}_{AP}$	$\widehat{D}_{QP}$	NOTE
$\frac{1}{2}(1+2\lambda)$	$\sqrt{\overline{AB}^2+\left(\frac{\overline{P_1P_2}}{2}\right)^2}$	$\frac{\sqrt{12\lambda^2-4\lambda+3}}{3-2\lambda}$	arcsen $\left(\frac{1+2\lambda}{2\sqrt{1+4\lambda^2}}\right)$	arcsen $\left(\frac{\overline{P_1P_2}}{2\,\overline{QP}}\right)$	arcsen $\left(\frac{\overline{PA}}{\sqrt{2}\,\overline{VA}}\right)$	arcsen $\left(\frac{\overline{PQ}}{2\,\overline{V_1Q}}\right)$	valori in funzione di λ
$\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}K}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}K}$		$\sqrt{\frac{1}{3}+K^2}$	arcsen $\left(\frac{\overline{P_1P_2}}{2\,\overline{AP}}\right)$	id	id	id	valori in funzione di K
$\frac{1}{2}$ 0,500000	$\frac{\sqrt{3}}{6}$ 0,288675	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ 0,577350	30°	60°	109° 28' 16"	180°	ottaedro a facce rigate
$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	$\frac{1}{7}\sqrt{10-\sqrt{2}}$ 0,418553038	$\frac{1}{7}\sqrt{31-8\sqrt{2}}$ 0,633846236	40° 47' 22"	57° 37' 54"	138° 07' 05"	138° 07' 05"	trapezoedro a diedri uguali
$(\sqrt{3}-1)$ 0,732050807	$\left(\sqrt{\frac{15-8\sqrt{3}}{6}}\right)$ 0,436576365	$\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ 0,650115147	41° 36' 27"	56° 58' 17"	142° 03' 43"	133° 04' 46"	Trapezoedro 3°
$2-\sqrt{\frac{3}{2}}$ 0,775255129	$\sqrt{\frac{2(57-23\sqrt{6})}{3}}$ 0,469658000	$\sqrt{\frac{21-8\sqrt{6}}{3}}$ 0,684125247	42° 46' 36"	55° 37' 23"	148° 52' 55"	124° 37' 58"	Trapezoedro 2° (Attenzione: $\overline{AB}$ diventa $\overline{A_1O}$)
1 1,000000	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	1 1,000000	45°	45°	180°	90°	CUBO di spigolo: $l_0\sqrt{2}$

λ	K	$\overline{AP}/l_0$	$\overline{P_1}$ …
λ	$\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{3/\lambda - 2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{1+4\lambda^2}$	$\frac{1}{2}($ …
$\frac{3}{\frac{4}{K}\sqrt{\frac{2}{3}}+2}$	K	$\frac{\sqrt{30K^2+4\sqrt{6}K+8}}{2(\sqrt{8}+\sqrt{3}K)}$	$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ …
0	0	$\frac{1}{2}$ 0,500000	0,5 …
$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 0,207106781	$\frac{2}{7}\left(\sqrt{3}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 0,261586921	$\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 0,541196100	0,707 …
$\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$ 0,232050807	$\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 0,298858491	$\sqrt{\frac{11-6\sqrt{3}}{2}}$ 0,551223707	$(\sqrt{3}$ … 0,73 …
$\frac{3-\sqrt{6}}{2}$ 0,275255129	$2\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 0,367006838	$\sqrt{\frac{8-3\sqrt{6}}{2}}$ 0,570758605	2 … 0,77 …
$\frac{1}{2}$ 0,5000000	$\sqrt{\frac{2}{3}}$ 0,816496581	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	1,0 …

La distanza di V dalla faccia ABC dell'ottaedro sia $\overline{VH} = \overline{VI}\cos(\widehat{IOT}) = \left(\lambda l_0 \sqrt{3}/2\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right) = \boxed{\overline{VH} = \lambda l_0 \sqrt{2/3}}$

$\overline{HI} = \overline{VI}\,\mathrm{sen}(\widehat{IOT}) = \left(\frac{l_0\lambda\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \boxed{\overline{HI} = \frac{l_0\lambda}{2\sqrt{3}}}$; $\boxed{\overline{AI} = \frac{l_0\sqrt{3}}{4}}$; $\overline{AH} = \overline{AI} - \overline{HI}$

$\overline{AH} = l_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\lambda\sqrt{3}}{6}\right) = \boxed{\overline{AH} = \frac{l_0\sqrt{3}}{12}(3-2\lambda)}$

possiamo ora scrivere la proporzione: $\overline{QT} : \overline{AT} = \overline{VH} : \overline{AH}$

$K l_0 : \frac{l_0}{\sqrt{3}} = l_0\lambda\sqrt{2/3} : l_0\frac{\sqrt{3}}{12}(3-2\lambda)$ da cui: $K = \frac{\sqrt{2}}{3}\lambda\frac{12}{\sqrt{3}(3-2\lambda)}$

$K = \frac{4\lambda}{(3-2\lambda)}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\boxed{K = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{4}{\left(\frac{3}{\lambda}-2\right)}}$ $\boxed{\lambda = \frac{(3\sqrt{3}K)}{(4\sqrt{2}+2\sqrt{3}K)}}$

per $K=0$; $\lambda=0$ si ha l'ottaedro a facce rigate.

$\boxed{\lambda = \frac{3}{\left(\frac{4}{K}\sqrt{\frac{2}{3}}+2\right)}}$; Abbiamo così risolto la condizione che il quadrilatero AP_2QP_1 sia piano.

Possiamo ora esprimere in funzione di λ od in in funzione di K gli elementi del trapezoedro che dimensionalmente possono riferirsi allo spigolo l_0 dell'ottaedro o al raggio ρ_1 della sfera circoscritta

all'ottaedro o passante per punti determinati.

L'angolo $\boxed{T\hat{A}Q} = \operatorname{arctg}\left(\frac{K l_0}{l_0/\sqrt{3}}\right) = \boxed{\operatorname{arctg}(K\sqrt{3})} = \operatorname{arctg}\left(\frac{4\sqrt{2}}{\frac{3}{\lambda} - 2}\right)$

$\cos(T\hat{A}Q) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} + K^2}}$; $\overline{AQ} = \overline{AT}\cos(T\hat{A}Q) = \frac{l_0}{\sqrt{3}}\sqrt{1+3K^2} = l_0\sqrt{\frac{1}{3} + K^2}$.

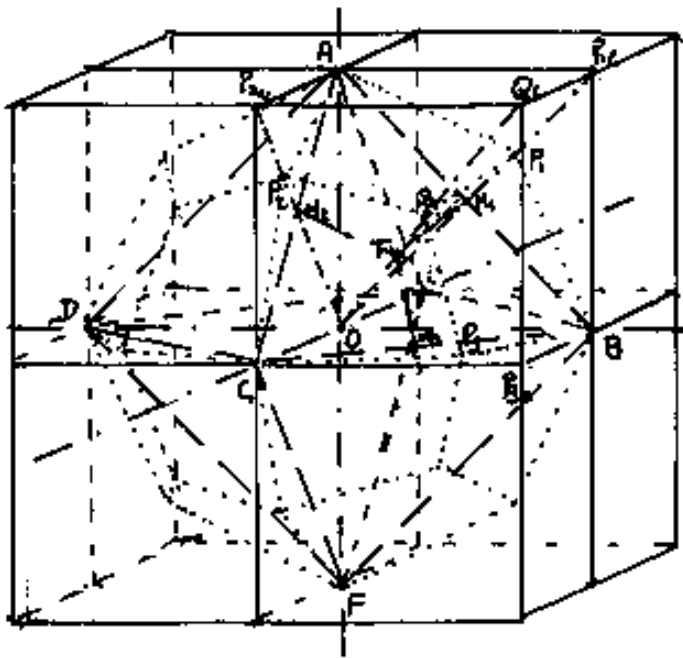
Possiamo far crescere i coefficienti λ o K fino a che i diedri sugli spigoli convergenti sui vertici dell'ottaedro ($\hat{D}_{AP}$) diventino piani (180°) il trapezoedro si trasforma in cubo, aumentando ancora diventa concavo.

In figura, con diverso tratteggio, si è cercato di rappresentare il solido ottaedro base, le cui facce sono rigate dai segmenti $\overline{TM}$ e sovrappongono le facce AM_2TM_1, M_2CM_3T, TM_3BM_1 del trapezoedro con i coefficienti: $\lambda = K = 0$.

Intermedio a puntini si è rappresentato un trapezoedro le cui facce sono divente: AP_2QP_1, $P_2CP_3Q_1$, $Q_1P_3BP_1$. I coefficienti di questo trapezoedro sono intermedi: $0 < \lambda < \frac{1}{2}$;

$0 < K < \sqrt{2/3}$;

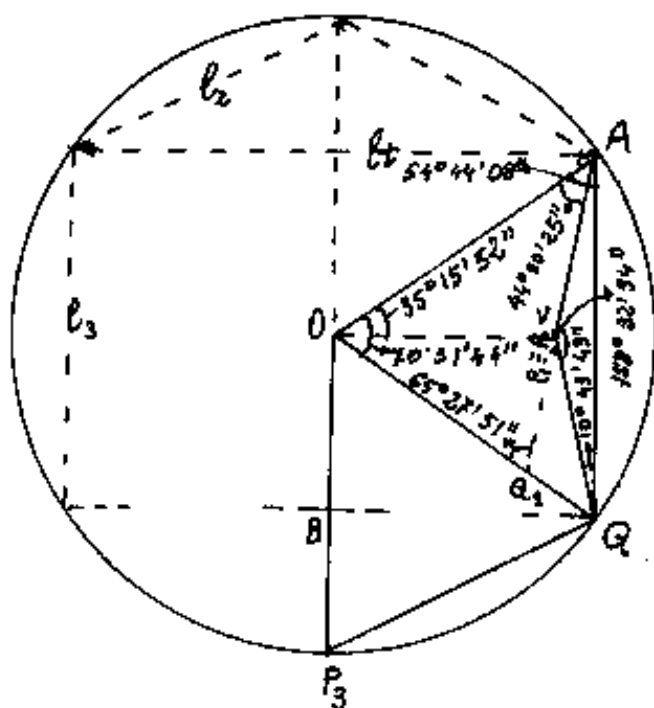
Continuando a crescere i coefficienti della classe dei trapezoedri, quando $\lambda = \frac{1}{2}$ e $K = \sqrt{\frac{2}{3}}$, il trapezoedro si trasforma in cubo ove si hanno le facce $AP_{2c}Q_cP_{1c}$, $P_{2c}CP_{3c}Q_c$, $Q_cP_{3c}BP_{1c}$.

Le relazioni che legano $K = f(\lambda)$ e $\lambda = \arg f(K)$, sono riportate in tabella

riportate in tabella.

Indice Enciclopedico Indice Pag. 306

Il deltoide dodecaedro

($F = 12$; $V = 14$; $S = 24$)

Abbiamo visto come l'esacistetraedro inscrittibile in una sfera, se convesso, corrisponde al tetracisesaedro, se concavo al triacisottaedro.

Avevamo anche lì, il quadrilatero AP_2QP_1 non piano, con: A, P_2, Q, P_1, insistenti sulla superficie sferica. Come abbiamo operato sull'esacisottaedro per ottenere il trapezoedro, analogamente operiamo sull'esacistetraedro per ottenere il deltoide dodecaedro.

Lasciamo A, P_1, P_2, sulla superficie sferica, ci proponiamo, spostando Q in Q_1 di ottenere piano il quadrilatero $AP_2Q_1P_1$. (abbiamo scelto i simboli dell'esacisottaedro)

[illegible] le Q_1 P_1. (abbiamo scelto i simboli dell'esacisottaedro)

Sezioniamo con un piano passante per $O\,A\,Q\,P_3$, l'esacistetraedro; $\overline{OA} = \overline{OQ} = \overline{OP_3} = \boxed{\rho_1 = \frac{l_t\sqrt{6}}{4}}$; $\boxed{l_t = \rho_1 \frac{2}{3}\sqrt{6}}$;

$\overline{AQ} = \boxed{l_3 = \frac{l_t}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\rho_1}$; $\frac{\overline{P_1P_2}}{2} = \frac{\overline{P_1P_3}}{2} = \overline{PV} = \frac{l_o}{2} = \boxed{\overline{OV} = \frac{l_t}{4}\sqrt{3}}$;

$\underline{A\hat{O}V} = \arcsin\left(\frac{\overline{AQ}/2}{\overline{OA}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{35°\,15'\,51'',8028579}$

$\underline{O\hat{A}Q} = \underline{54°\,44'\,08'',1971421}$; $\underline{A\hat{V}Q = 158°\,32'\,34'',202}$; (V. triacisottaedro concavo = esacistetraedro)

$\widehat{VAQ} = \widehat{VQA} = (90° - \widehat{AVQ}/2) = 10° \, 43' \, 42'',85$; $\boxed{\ell_2 = \ell_t \sqrt{3-\sqrt{3}}/2}$

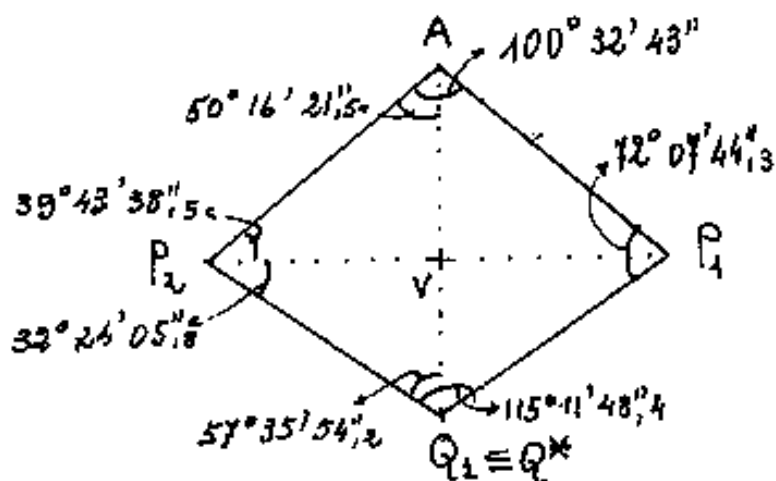
$\widehat{OAQ_1} = (\widehat{OAQ} - \widehat{VAQ}) = 44° \, 00' \, 25''$; $\widehat{AQ_1O} = (180° - \widehat{AOQ} - \widehat{OAQ}) = 67° \, 27' \, 51''$

$\overline{AQ_1} = \rho_1 \dfrac{\operatorname{sen}(\widehat{AOQ_1})}{\operatorname{sen}(\widehat{OQ_1A})} = (1,036393358)\rho_1 = (0.634658726)\ell_t$;

$$\boxed{\overline{AQ_1} = \rho_1 \sqrt{\frac{24(75-4\sqrt{3})}{39^2}} = \ell_t \frac{\sqrt{75-4\sqrt{3}}}{13}}$$

$\overline{AV} = \sqrt{\ell_2^2 - \overline{OV}^2} = \ell_t \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3}{16}} = \boxed{\overline{AV} = \dfrac{\ell_t}{4}\sqrt{9-4\sqrt{3}}} = (0,359843436)\ell_t$

$\overline{Q_1V} = (\overline{AQ_1} - \overline{AV})$; $\overline{Q_1V} = (0,274815289)\ell_t$

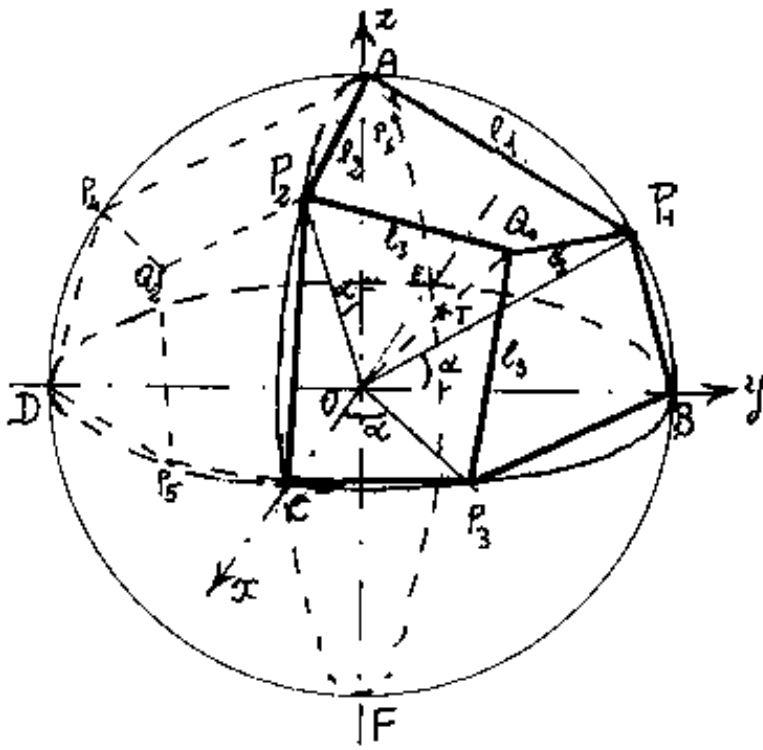
$\overline{Q_1P_2} = \ell_t \sqrt{\overline{P_2V}^2 - \overline{VQ_1}^2} = \overline{Q_1P_2} = (0,512858112)\ell_t = s_2$

Questi elementi ci consentono di disegnare la faccia del deltoide dodecaedro. ($\ell_t = 5$ cm)

Se sezioniamo l'esacistetraedro concavo, inscrittibile in una sfera, con un piano passante per $\widehat{AOQ}$; tenuto presente che A, B, C, D, è il tetraedro generante; Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, sono i punti di

intersezione con la superficie sferica dei raggi pas=
santi per i centri delle facce del tetraedro. I punti:
P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 sono i punti di intersezione
con la superficie sferica dei raggi passanti per
la mezzeria degli spigoli del tetraedro. Avendo
indicizzato i vertici Q ove Q_1 è relativo alla faccia ABC,
indicheremo con Q^* il vertice spostato già indicato con Q_1.

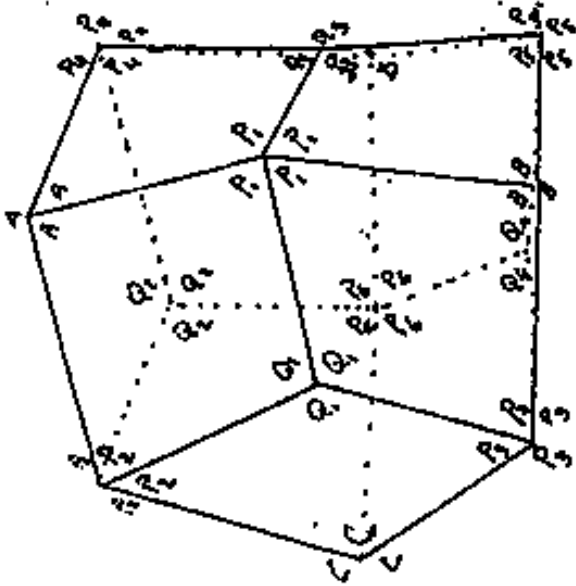
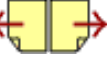
Il diacisdodecaedro (o diploide)

(24 facce quadrilatere, 26 vertici, 48 spigoli)

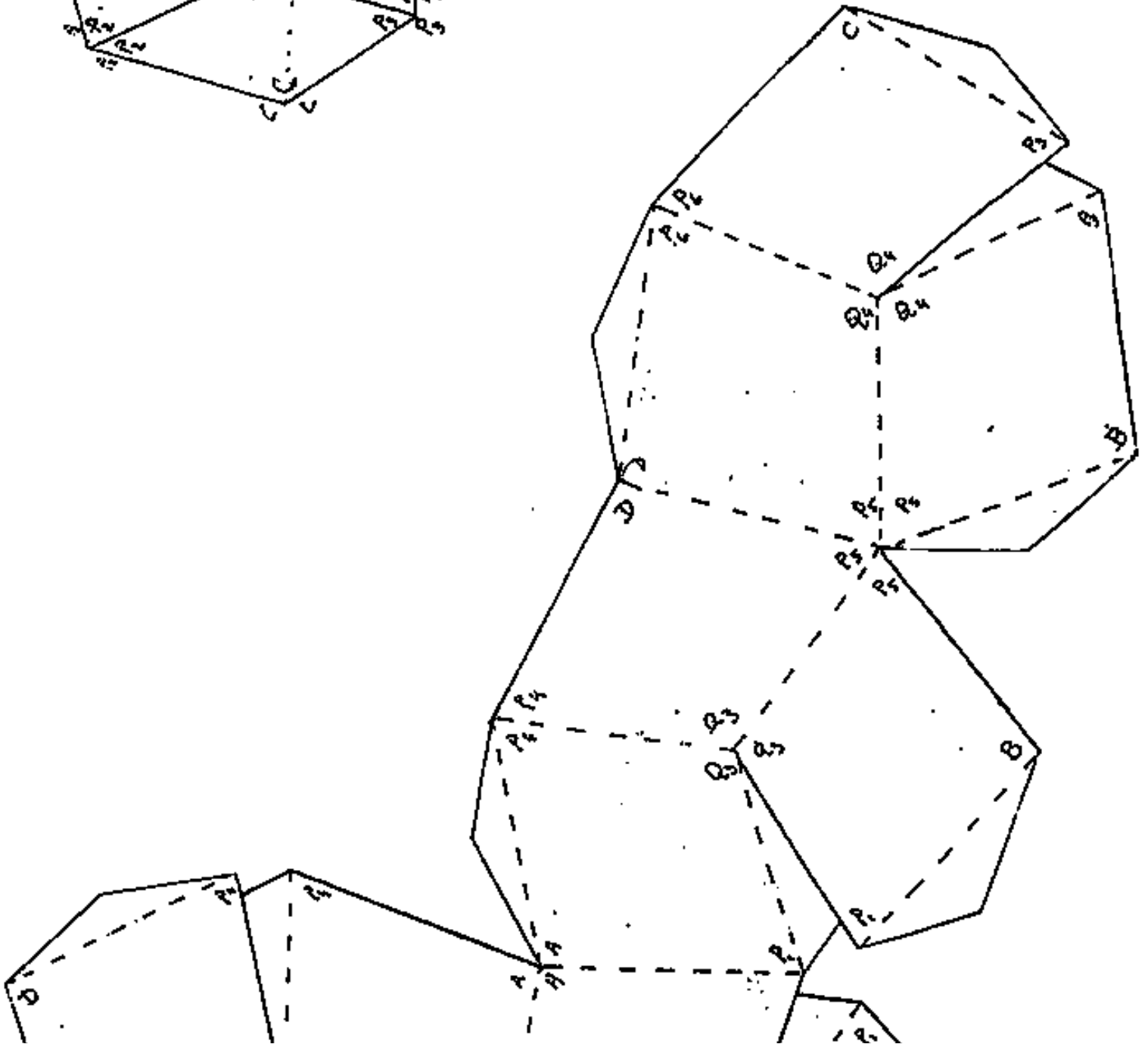
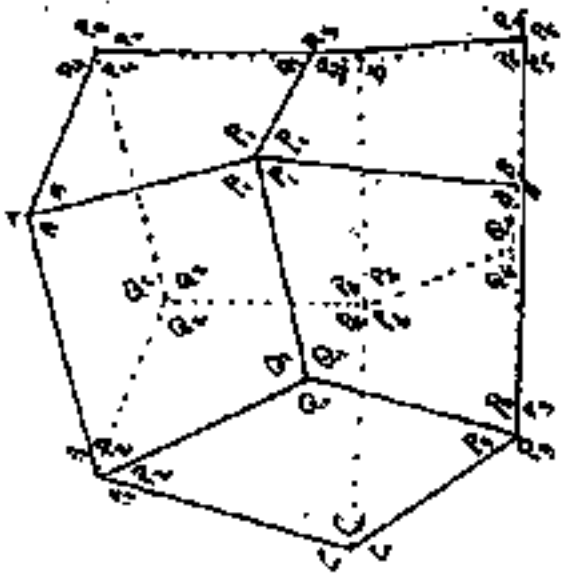
Consideriamo un ottaedro regolare A, B, C, D, E, F, inscritto in una sfera di raggio ρ_1, e centro O.

Consideriamo il triangolo sferico ABC, prospiciente la faccia ABC, dell'ottaedro; consideriamo che gli archi: $\widehat{AC}$, $\widehat{CB}$, $\widehat{BA}$; siano tracciati dall'estremo P di tre raggi: $\overline{OP_2}$; $\overline{OP_3}$; $\overline{OP_1}$; che rispettivamente descrivono l'arco: $\widehat{AC}$; $\widehat{CB}$; $\widehat{BA}$; e sia $A\hat{O}P_2 = C\hat{O}P_3 = B\hat{O}P_1 = \alpha$ (con α variabile da zero a $\pi/2$ rad $= 90°$, da assumere come parametro).

Consideriamo ora il raggio $\overline{OT}$, che passa per il centro T della faccia dell'ottaedro e prolun=

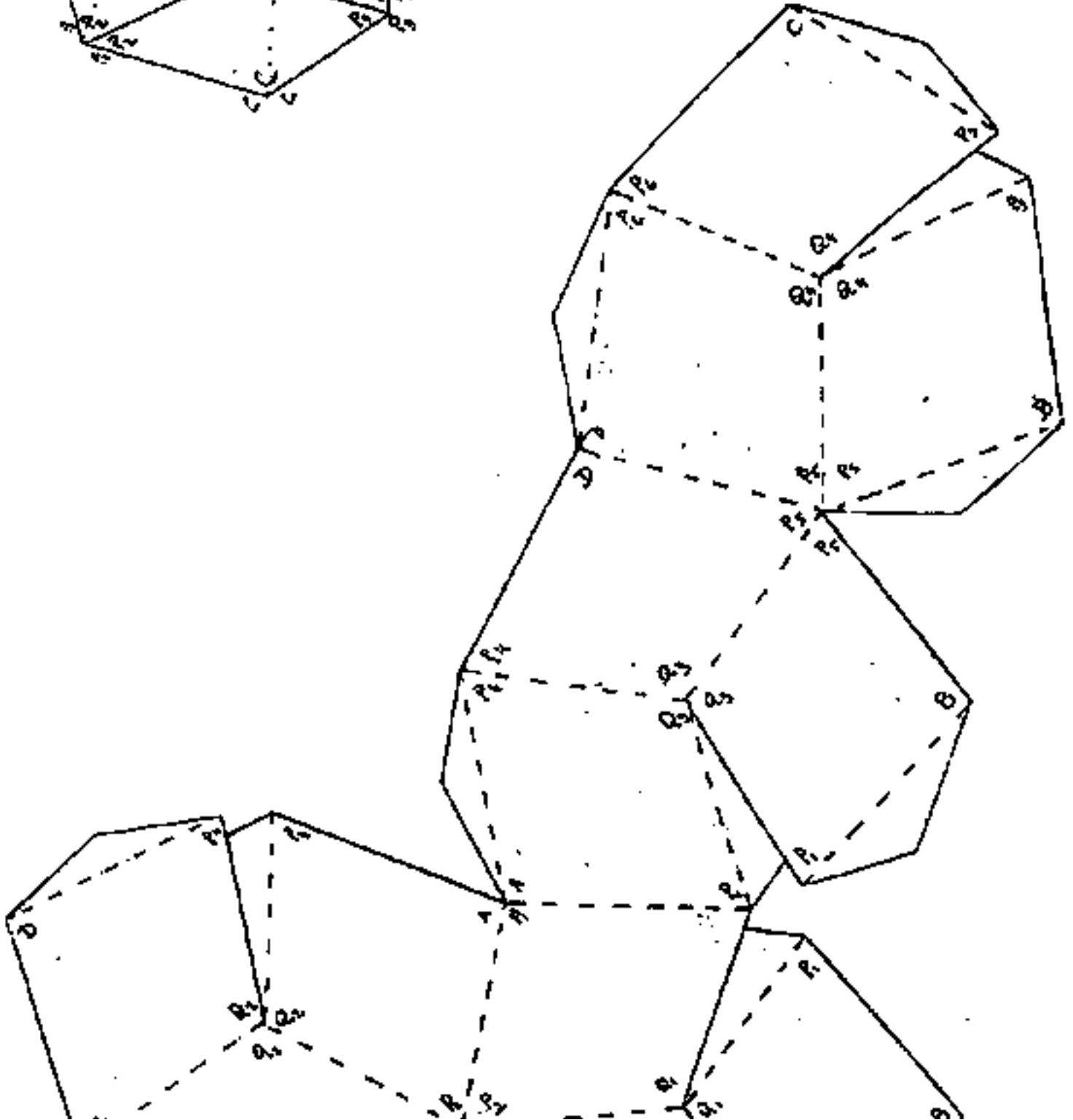
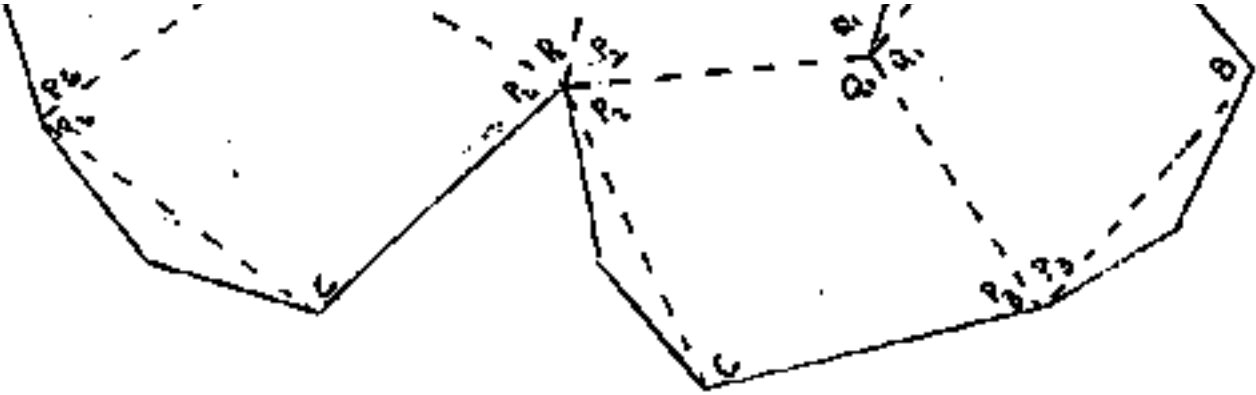
il centro I della faccia dell'ottaedro e prolunghiamo tale raggio fino ad un punto Q, tale che, i quadrilateri: $AP_2QP_1 = BP_1QP_3 = CP_3QP_2$; risultino piani. Questi tre quadrilateri piani sono le facce da sovrapporre all'ottaedro per ottenere la classe di solidi detta: diploide o dei diacisdodecaedri.

Si noti che ciascun diacisdodecaedro è

Schema del

DELTOIDE DODECAEDRO

diedro $\hat{D}_{e_1}$ = 137° 50' 43,"3

Schema del

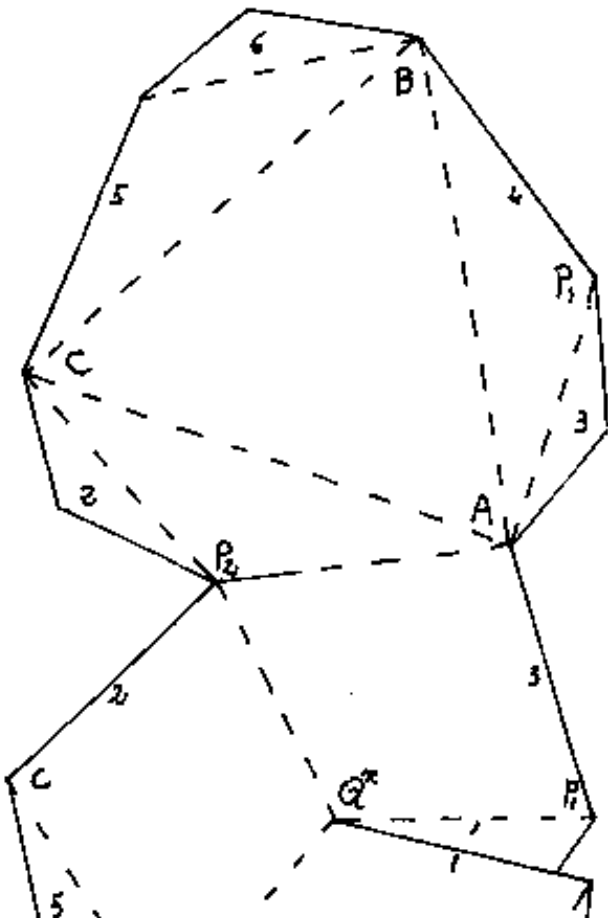
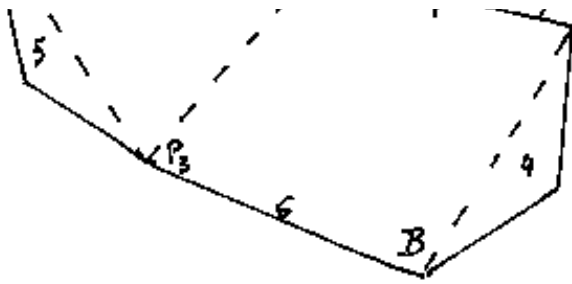
DELTOIDE DODECAEDRO

diedro $\hat{D}_{Q_1} = 137° 50' 43,''3$

$$\overline{VQ^*} = \overline{OV}\left(\frac{\operatorname{sen}(V\hat{O}Q^*)}{\operatorname{sen}(V\hat{Q^*}O)}\right) = \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(3\sqrt{\frac{11}{75+4\sqrt{3}}}\right) = \rho_1\sqrt{\frac{33}{150+8\sqrt{3}}} =$$

$$\boxed{\overline{VQ^*} = \frac{\rho_1}{13}\sqrt{\frac{75-4\sqrt{3}}{2}}} = (0{,}44877 1488)\,\rho_1$$

$$\overline{AP_1} = \overline{AP_2} = \ell_2 = \frac{\ell_t}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}} = \rho_1\, 2\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} = (0{,}919401686)\,\rho_1$$

calcoliamo: $\overline{Q^*P_1} = \overline{Q^*P_2} = \sqrt{\left(\frac{\overline{P_1P_2}}{2}\right)^2 + \overline{VQ^*}^2} = \rho_1\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{33}{150+8\sqrt{3}}} =$

$$\overline{Q^*P_1} = \rho_1\sqrt{\frac{108+4\sqrt{3}}{150+8\sqrt{3}}} = \quad \overline{Q^*P} = \rho_1\, 2\sqrt{\frac{11}{61+\sqrt{3}}} = (0{,}83749379)\,\rho_1$$

Il quadrilatero piano $AP_2Q^*P_1$ fornisce la configurazione delle facce del nostro solido, che avevamo già calcolato e disegnato. A fianco è lo sviluppo, per costruire modelli, delle parti di solido da sovrapporre alle facce del tetraedro; ne occorrono quattro per ottenere il solido completo

per ottenere il solido completo.

Abbiamo ripetuto i calcoli per esprimerli in radicali in funzione di ρ_1, comunque ricordiamo che $l_t = \rho_1\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right) = (1,632993162)\rho_1$

$\rho_1 = l_t\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = (0,612372435)\, l_t$.

individuato dal parametro α. In particolare per $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad $= 45°$ si ha il trapezoedro (che abbiamo già trattato).

Si noti che i punti: P_1; P_2; P_3; qualunque sia α, sono i vertici di un triangolo equilatero: $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_3}$, il cui lato raggiunge il minimo $= \rho_1$, per $\alpha = 45°$; mentre per $\alpha = 0$, o per $\alpha = 90°$ si ha il massimo $= \rho_1\sqrt{2}$.

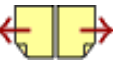
Si ha anche: $\overline{P_1Q} = \overline{P_2Q} = \overline{P_3Q}$. Abbiamo già dimostrato, (per $\alpha = 45°$), nel trapezoedro che, se Q è sulla superficie sferica: $\overline{P_1P_2} > \overline{AQ_1}$; ciò, a maggior ragione, se $\alpha \neq 45°$. Questo implica che il quadrilatero $AP_2Q_1P_1$ (ove Q_1 è il punto sulla superficie sferica del raggio per il centro faccia dell'ottaedro) non è piano: e se, oltre al perimetro, tracciamo la diagonale $\overline{AQ_1}$, (non $\overline{P_1P_2}$), si ha un esacisottaedro convesso, se invece tracciamo la diagonale $\overline{P_1P_2}$, (non $\overline{AQ_1}$), si ha un angolo diedro concavo sugli spigoli: $\overline{P_1P_2}$; $\overline{P_1P_3}$; $\overline{P_2P_3}$, ...

Consideriamo gli assi cartesiani come si usa

Consideriamo gli assi cartesiani, come si usa in cristallografia, cioè: $\overline{OC}$ su x, $\overline{OB}$ su y, $\overline{OA}$ su z; (terna antioraria con la x volta verso l'osservatore); avremo: $A \equiv (0, 0, \rho_1)$; $B \equiv (0, \rho_1, 0)$; $C \equiv (\rho_1, 0, 0)$;

$P_1 \equiv (0, \rho_1 \cos\alpha, \rho_1 \operatorname{sen}\alpha)$; $P_2 \equiv (\rho_1 \operatorname{sen}\alpha, 0, \rho_1 \cos\alpha)$; $P_3 \equiv (\rho_1 \cos\alpha, \rho_1 \operatorname{sen}\alpha, 0)$

$$\overline{AP_2} = \overline{BP_1} = \overline{CP_3} = \boxed{l_2 = \rho_1 2 \operatorname{sen}(\alpha/2)}$$

$$\overline{AP_1} = \overline{BP_3} = \overline{CP_2} = l_1 = \rho_1 2 \operatorname{sen}\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) \quad \boxed{l_1 = \rho_1 \sqrt{2}\left(\cos(\alpha/2) - \operatorname{sen}(\alpha/2)\right)}$$

Calcoliamo la distanza $\overline{P_1P_2}$ (dalle coordinate cartesiane)

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(0-\rho_1 \operatorname{sen}\alpha)^2 + (\rho_1\cos\alpha - 0)^2 + (\rho_1\operatorname{sen}\alpha - \rho_1\cos\alpha)^2} =$$

$$= \rho_1\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \boxed{\overline{P_1P_2} = \rho_1\sqrt{2-\operatorname{sen}(2\alpha)}}$$

calcoliamo l'angolo: $(P_2\hat{A}P_1) = \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - \overline{P_1P_2}^2}{2l_1l_2}\right)$;

$$(P_2\hat{A}P_1) = \arccos\left(\frac{1}{2}\,\frac{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - \left(2-\operatorname{sen}(2\alpha)\right)}{\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(1 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - \left(1 - \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{2}\right)\cos\alpha\right)}{2\sqrt{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos(\alpha/2) - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{-1 + \cos^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{(P_2\hat{A}P_1) = \arccos\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right)} = \hat{A}$$

Posto: $\rho_1 = 1$, calcoliamo alcuni elementi di P_2AP_1 al variare di α.

α	$\overline{AP_2} = l_2$	$\overline{AP_1} = l_1$	$\overline{P_1P_2}$	$(P_1\hat{A}P_2) = \hat{A}$
0°	0	1,4142135 62	1,414213562	90°

0°	0	1,414213562	1,414213562	90°
10°	0,174311486	1,285575219	1,287625666	86° 47′ 18″,45
15°	0,261052384	1,217522858	1,224744871	85° 26′ 33″,04
30°	0,517638090	1	1,064882433	82° 33′ 52″,30
45°	0,765366865	0,765366865	1	81° 34′ 44″,19
60°	1	0,517638090	1,064882433	82° 33′ 52″,30
75°	1,217522858	0,261052384	1,224744871	85° 26′ 33″,04
90°	1,414213562	0	1,414213562	90°

Dobbiamo ora imporre la condizione che il quadrilatero AP_2QP_1 sia piano. A tal fine scriviamo l'equazione del piano per A, P_1, P_2 : $(\rho_1 = 1)$

$$\frac{a}{d}X + \frac{b}{d}Y + \frac{c}{d}Z = 1$$ (Sostituiamo le coordinate di A, P_1, P_2 per calcolare i coefficienti)

$$\begin{matrix} A) \\ P_1) \\ P_2) \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \Delta$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ 1 & 0 & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha)-1 \\ 1 & 0 & \cos(\alpha)-1 \end{vmatrix} = \Delta_a = \cos\alpha(\cos(\alpha)-1)$$

$$\boxed{a/d = \frac{(1-\cos(\alpha))}{\operatorname{sen}(\alpha)}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & 1 & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \Delta_b = \operatorname{sen}(\alpha)(\operatorname{sen}(\alpha) - 1)$$

$$\boxed{b/d = \frac{1-\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos\alpha}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cos(\alpha) & 1 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_c = \operatorname{sen}(\alpha)(-\cos(\alpha))$$

$$C/d = \frac{-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = 1$$

L'equazione del piano sarà quindi:

$$\left(\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)X + \left(\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)y + Z = 1$$

Notiamo che per i punti del raggio $\overline{OQ}$ vale la relazione: $X_Q = Y_Q = Z_Q$, per cui dovendo Q

soddisfare l'equazione del piano, si ha:

$$\left(\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + 1 \right) X = 1$$

$$\left(\cos\alpha - \cos^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \right) X = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{X_Q = Y_Q = Z_Q = \rho_1 \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 1}}$$

$$\overline{P_1Q} = \sqrt{(X_Q - 0)^2 + (Y_Q - \rho_1\cos\alpha)^2 + (Z_Q - \rho_1\operatorname{sen}\alpha)^2} \qquad \text{posto } (\rho_1 = 1)$$

$$\boxed{\overline{P_1Q} = \overline{P_2Q} = \overline{P_3Q} = \sqrt{3X_Q^2 + 1 - 2X_Q(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}} = l_3$$

$$\boxed{AQ_1 = AQ_2 = \sqrt{3X_Q^2 + 1 - 2X_Q}}$$

Coefficienti dell'equazione del piano AP_1QP_2 $(c/d = 1)$

coseni direttori ed (angoli) (numericamente dai coeff.)

α	$a/d = \left(\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)$	$b/d = \left(\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)$	$\sqrt{(a/d)^2+(b/d)^2+(c/d)^2}$	$\cos(\hat{Nx})$ $(\hat{Nx})$	$\cos(\hat{Ny})$ $(\hat{Ny})$	$\cos(\hat{NZ})$ $(\hat{NZ})$
0°	0	1	1,414213562	0 (90°)	0,707106781 (45°)	0,707106781 (45°)
10°	0,087488664	0,839099631	1,308335759	0,066870182 (86° 09' 56")	0,641348847 (50° 06' 27")	0,764329793 (40° 09' 09")
15°	0,131652498	0,767326988	1,267329116	0,103881854 (84° 02' 14")	0,605467813 (52° 44' 15")	0,789061016 (37° 57' 07")
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,226044624	0,487058474	0,843610023

[illegible]				[illegible]	[illegible]	[illegible]
30°	0,267949192	0,577350269	1,185381838	0,226044624 (76° 56' 08")	0,487058474 (60° 51' 09")	0,843610023 32° 28' 36"
45°	0,414213562	0,414213562	1,158941651	0,357406744 (69° 03' 32")	0,357406744 (69° 03' 32")	0,862856671 (30° 21' 40")
60°	0,577350269	0,267949192	1,185381838	0,487058474 (60° 51' 09")	0,226044624 (76° 56' 08")	0,843610023 (32° 28' 36")
75°	0,767326988	0,131652498	1,267329116	0,605467813 (52° 44' 15")	0,103881854 (84° 02' 14")	0,789061016 (37° 57' 07")
90°	1	0	1,414213562	0,707106781 (45°)	0 (90°)	0,707106781 (45°)

($\rho_1 = 1$) abbiamo già calcolato: $\overline{AP_2} = \ell_2 = 2 \operatorname{sen} \alpha/2$; $\overline{AP_1} = \ell_1 = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{90° - \alpha}{2}\right)$

l'angolo $(Q_2 \hat{O} Q_1) = (T_2 \hat{O} T_1) = 70° \, 31' \, 44''$ ove T_1 = centro della faccia ABC dell'ottaedro cui corrisponde Q_1, T_2 = centro della faccia ACD dell'ottaedro cui corrisponde Q_2. $\left(\operatorname{sen}\left(\frac{Q_2 \hat{O} Q_1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$\overline{OQ_1} = \overline{OQ_2} = X_Q \sqrt{3}$$

$$\overline{Q_1 Q_2} = 2\, \overline{OQ_1} \operatorname{sen}\left(\frac{Q_2 \hat{O} Q_1}{2}\right) = 2 X_Q \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \overline{Q_1 Q_2} = 2 X_Q$$

$$(A \hat{P_2} Q_1) = \arccos\left(\frac{1}{2} \frac{\overline{AP_2}^2 + \overline{Q_1 P_2}^2 - \overline{AQ_1}^2}{(\overline{AP_2})(\overline{Q_1 P_2})}\right)$$

$$(A \hat{P_1} Q_1) = \arccos\left(\frac{1}{2} \frac{\overline{AP_1}^2 + \overline{Q_1 P_1}^2 - \overline{AQ_1}^2}{(\overline{AP_1})(\overline{Q_1 P_1})}\right)$$

} angoli delle facce in $\hat{P_2}$ e $\hat{P_1}$.

Siano: p, q, z, le coordinate dei punti intercettati dal piano sugli assi. ($\rho_1 = 1$)

$$p = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad ; \quad q = \frac{\cos \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha} \quad ; \quad z = 1$$

Valori delle coordinate e dei raggi $\overline{OQ_1} = \overline{OQ_2} = ..$ ($\rho_1 = 1$)

α	$X_Q = Y_Q = Z_Q$	$\overline{OQ}$	p (x)	q (y)	z (z)
0	—	—	—	—	—

10°	0,5190522556	0,899024879	11,43005221	1,191753592	1
15°	0,5265986324	0,912095587	7,595754090	1,303225373	1
30°	0,5419174615	0,938628577	3,732050814	1,732050808	1
45°	0,5469181607	0,947290042	2,414213562	2,414213562	1
60°	0,5419174615	0,938628577	1,732050808	3,732050807	1
75°	0,5265986324	0,912095587	1,303225373	7,595754090	1
90°	—	—	—	—	—

Dimensioni ed angoli delle facce ($\rho_1 = 1$)

α	$\overline{AQ}$	$\overline{PQ} = l_3$	$\overline{Q_1Q_2}$	$\cos(A\hat{P}_2Q)$ $(A\hat{P}_2Q)$	$\cos(A\hat{P}_1Q)$ $A\hat{P}_1Q$
0°	—	—	—	—	—
10°	0,8775769031	0,7782335154	1,038104511	−0,494302761 (119° 37' 26")	0,743749608 (41° 56' 54")
15°	0,8824517517	0,7362203544	1,053197265	−0,438499698 (116° 00' 29")	0,69484031 (45° 59' 08")
30°	0,8928542335	0,6328329692	1,83834923	−0,19653601 (101° 20' 04")	0,47665728 (61° 31' 58")
45°	0,8969939436	0,5919799513	1,093836321	0,14644661 (81° 34' 44")	0,14644661 (81° 34' 44")
60°	0,8928542335	0,6328329692	1,83834923	0,476657281 (61° 31' 58")	−0,19653601 (101° 20' 04")
75°	0,8824517517	0,7362203544	1,053197265	0,694840313 (45° 59' 08")	−0,438499698 (116° 00' 29")
90°	—	—	—	—	—

calcoliamo l'angolo: $(P_2\hat{Q}P_1) = 2\arcsin\left(\frac{\overline{P_1P_2}/2}{\overline{PQ}}\right)$, verifichiamo che la somma degli angoli delle facce quadrilatere è 360°.

Per ogni α riportiamo le dimensioni e gli angoli della faccia, nonchè il disegno in scala

---

$\alpha = 10°$ lati e diag. : angoli:

$\overline{AP_2} = \ell_2 = 0,174311486\ \rho_1$

$\overline{AP_1} = \ell_1 = 1,285575219\ \rho_1$

$\overline{P_1Q} = \ell_3 = 0,778233 5154\ \rho_1$

$\overline{P_1P_2} = 1,287625666\ \rho_1$

$\overline{AQ} = 0,8775769031\ \rho_1$

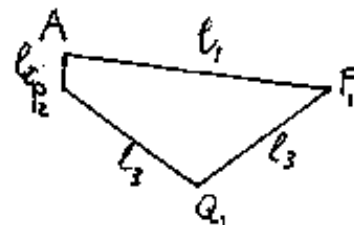
$P_1\widehat{A}P_2 = 86°\ 47'\ 18''$

$A\widehat{P_2}Q = 119°\ 37'\ 26''$

$A\widehat{P_1}Q = 41°\ 56'\ 54''$

$P_2\widehat{Q}P_1 = 111°\ 38'\ 22''$

$360°\ 00'\ 00''$

A, ℓ_1, P_1, ℓ_2, P_2, ℓ_3, ℓ_3, Q_1

$\alpha = 15°$ — lati e diag. ; angoli

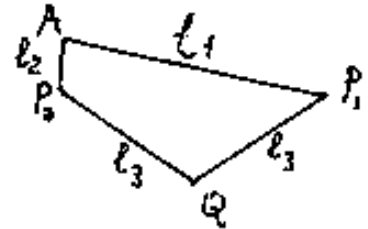
$\overline{AP_2} = \ell_2 = 0{,}261052384\ \rho_1$ — $P_1\hat{A}P_2 = 85°\ 26'\ 33''$

$\overline{AP_1} = \ell_1 = 1{,}217522858\ \rho_1$ — $A\hat{P_2}Q = 116°\ 00'\ 29''$

$\overline{PQ} = \ell_3 = 0{,}7362203544\ \rho_1$ — $A\hat{P_1}Q = 45°\ 59'\ 08''$

$\overline{P_1P_2} = 1{,}224744871\ \rho_1$ — $P_2\hat{Q}P_1 = 112°\ 33'\ 50''$

$\overline{AQ} = 0{,}8824617517\ \rho_1$ — $360°\ 00'\ 00''$

A, ℓ_1, P_1, ℓ_2, P_2, ℓ_3, Q, ℓ_3

$\alpha = 30°$ — lati e diag. ; angoli

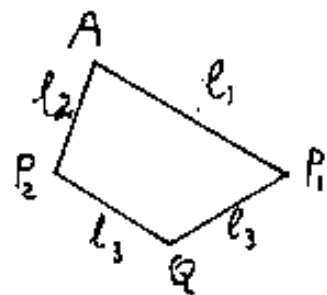
$\overline{AP_2} = \ell_2 = 0{,}517638090\ \rho_1$ — $P_1\hat{A}P_2 = 82°\ 33'\ 52''$

$\overline{AP_1} = \ell_1 = 1{,}00000000\ \rho_1$ — $A\hat{P_2}Q = 101°\ 20'\ 04''$

$\overline{PQ} = \ell_3 = 0{,}6328329692\ \rho_1$ — $A\hat{P_1}Q = 61°\ 31'\ 58''$

$\overline{P_1P_2} = 1{,}064882433\ \rho_1$ — $P_2\hat{Q}P_1 = 114°\ 34'\ 06''$

$\overline{AQ} = 0{,}8928542335\ \rho_1$ — $360°\ 00'\ 00''$

A, ℓ_1, ℓ_2, P_1, P_2, ℓ_3, Q, ℓ_3

$\alpha = 45°$ — lati e diag. ; angoli

$\overline{AP_2} = \ell_2 = 0{,}765366865\ \rho_1$ — $P_1\hat{A}P_2 = 81°\ 34'\ 44'',2$

$\overline{AP_1} = \ell_1 = 0{,}765366865\ \rho_1$ — $A\hat{P_2}Q = 81°\ 34'\ 44'',2$

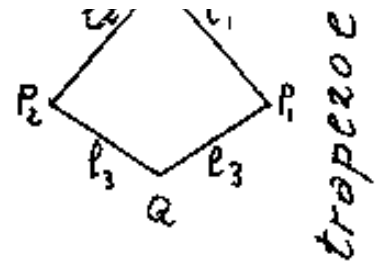
A, ℓ_2, ℓ_1 ...edro

$\overline{PQ} = l_3 = 0{,}5919799513\, \rho_1$ $\qquad A\hat{P}_1Q = 81^\circ\, 34'\, 44'',2$

$\overline{P_1P_2} = 1$ $\qquad P_2\hat{Q}P_1 = 115^\circ\, 15'\, 47'',4$

$\overline{AQ} = 0{,}8963939436\, \rho_1$ $\qquad 360^\circ\, 00'\, 00''$

P_2, P_1, l_3, l_3, Q

trapezoe

Per $\alpha = 60^\circ$ ed $\alpha = 75^\circ$ le facce sono simmetriche ad $\alpha = 30^\circ$ ed $\alpha = 15^\circ$, per cui basta ribaltare le figure intorno all'asse di $\overline{P_1P_2}$, quindi Q è invariato P_2 scambia P_1; l_2 scambia l_1

L'ICOSITETRAEDRO pentagonale

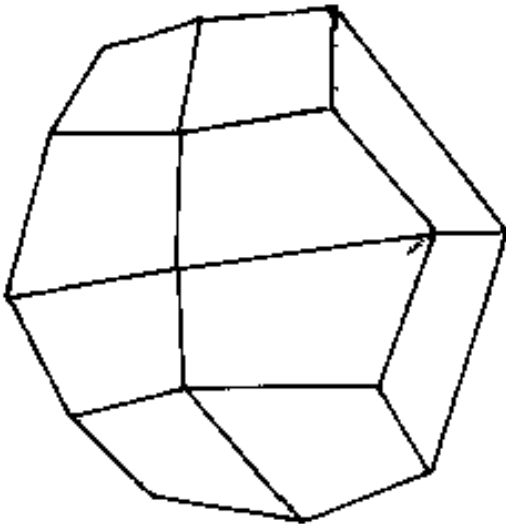
24 facce pentagonali, 38 vertici, 60 spigoli

Consideriamo un cubo ed un ottaedro aventi lo stesso centro e riferiti agli stessi assi passanti per i vertici del l'ottaedro e per i centro faccia del cubo. Siano oxyz tali assi, e siano: A, B, C, D, E, i vertici di una faccia generica dell'icositetraedro pentagonale, ove i vertici A corrispondono ai vertici dell'ottaedro, mentre i vertici D corrispondono ai vertici del cubo. I vertici A sono comuni a quattro facce come nell'ottaedro; i vertici B sono

comuni a quattro facce, come nell'ottaedro; i vertici B. sono comuni a tre facce come nel cubo; però la giacitura delle facce dell'icositetraedro pentagonale non corrisponde alla giacitura delle facce del cubo o dell'ottaedro.

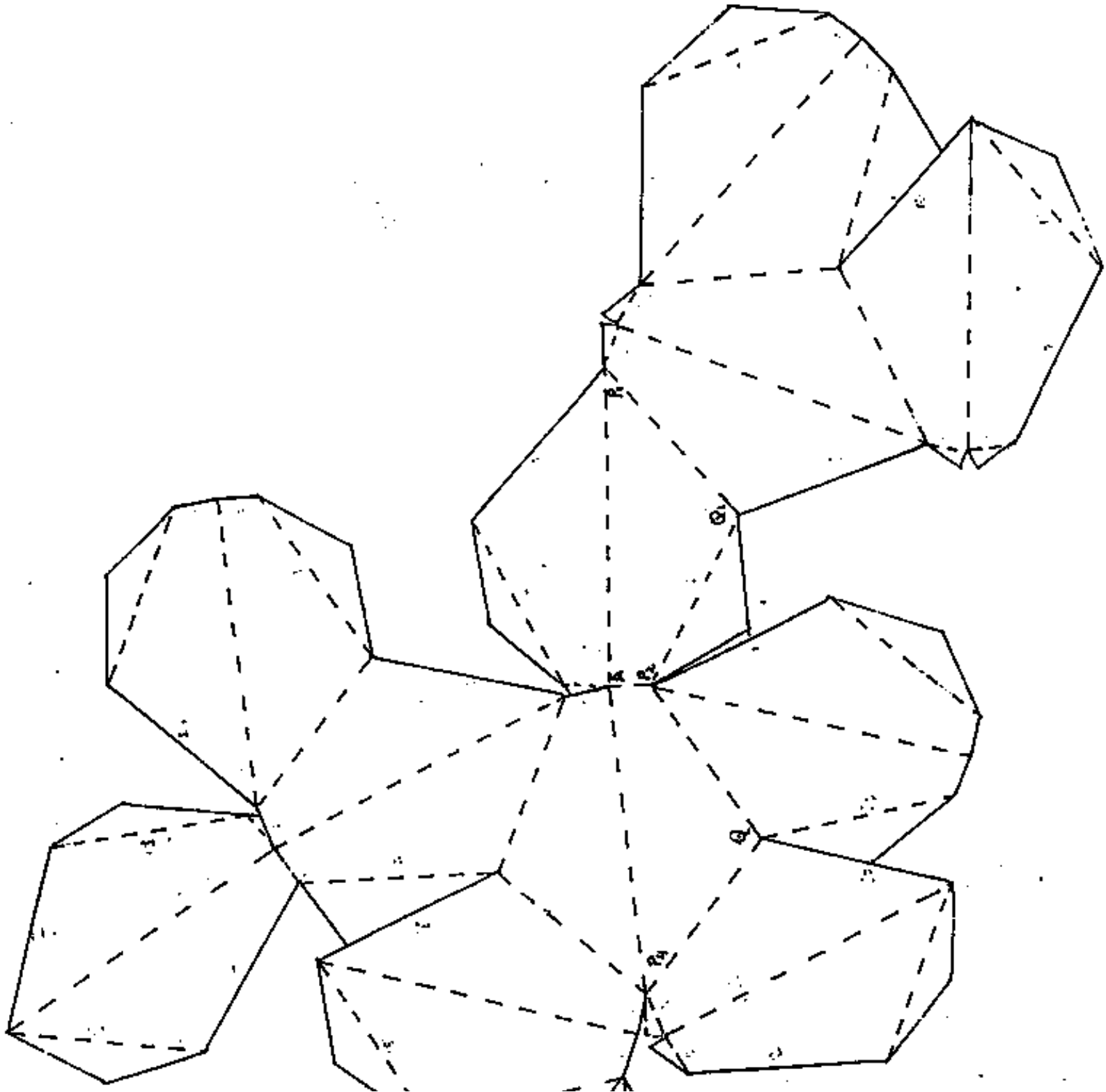
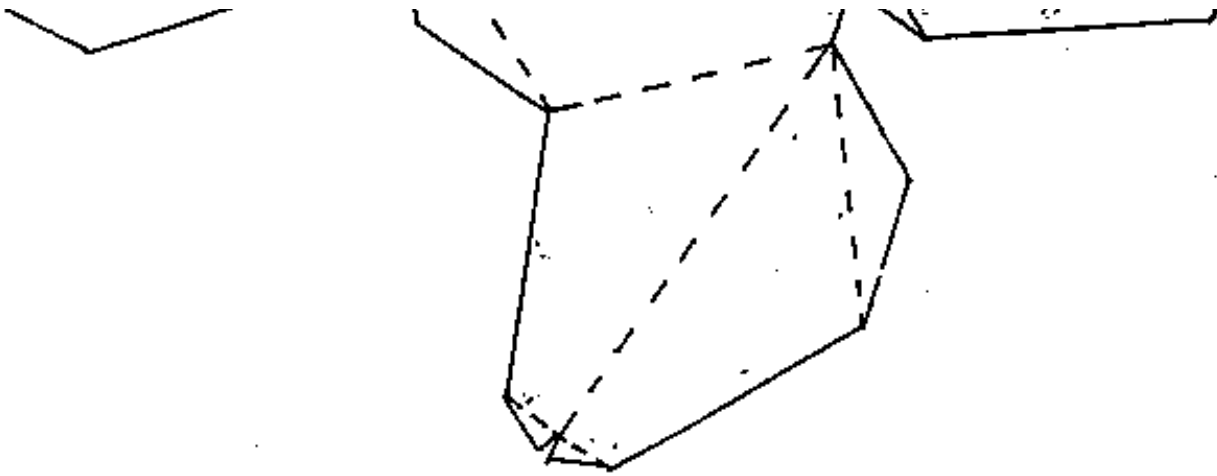
In cristallografia, il solido icositetraedro del gruppo monometrico, sistema cubico, è la forma della classe "giroedrica", detta anche: "classe pentagonoicositetraedrica."

diamo un abbozzo prospettico di due solidi diacisdodecaedri, individuati dai parametri: $\alpha = 30°$ ed $\alpha = 10°$, dei quali abbiamo dato anche lo sviluppo. Per l'angolo limite $\alpha = 45°$ il solido diventa un trapezoedro.

(Vedasi anche quanto esposto per il solido: pentagonododecaedro - (tetartoedro)

diacisdodecaedro diploide

$\alpha = 30°$

diacisdodecaedro diploide

$\alpha^{\circ} = 10^{\circ}$

sviluppo di Diacisdodecaedro $\alpha = 30°$

sviluppo di Diacisdodecaedro $\alpha = 30°$

Per lo stesso ragionamento il diedro su AP_1 sarà:

$$\hat{D}_{AP_1} = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{\ell_1 \operatorname{sen}\alpha}{\ell_2 \operatorname{sen}\hat{A}}\right)$$

$P_1P_6 = 2\rho \operatorname{sen}\alpha$; $\ell_2 = \rho_1 2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{sen}\hat{A} = \sqrt{\frac{2 - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2}}$

sostituendo:

$$\hat{D}_{AP_1} = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2 - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2}}}\right)$$

$$\hat{D}_{AP_1} = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}\cos(\alpha/2)}{\sqrt{2 - \operatorname{sen}^2\alpha/2\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2}}\right)$$

$$\hat{D}_{AP_1} = 2 \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{2(1+\cos\alpha)}{4-(1-\cos\alpha)(1-\operatorname{sen}\alpha)}}\right)$$ (equazione in funzione di α)

$$\hat{D}_{QP} = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\overline{P_1P_2}}{2\overline{QP}}\right)^2}}\right)$$ (già trovata)

poiché: $\overline{P_1P_2} = \rho_1\sqrt{2 - \operatorname{sen}2\alpha}$; $\left(\frac{P_1P_2}{2QP}\right) = \operatorname{sen}\frac{P_2\hat{Q}P_1}{2} = \operatorname{sen}\hat{Q}/2$

$$\hat{D}_{QP} = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2\cos\hat{Q}/2}\right)$$

α	$\hat{D}_{QP_1}$ (ℓ_3)	$\hat{D}_{AP_2}$ (ℓ_2)	$\hat{D}_{AP_1}$ (ℓ_1)	NOTE
0°	–	–	–	

0	–	–	–	
10°	125° 44' 47",386	100° 12' 54"	172° 19' 54"	
15°	128° 30' 27",036	105° 28' 30"	168° 04' 28"	
30°	135° 22' 17",316	121° 42' 19"	153° 52' 17"	
45°	138° 07' 04",653	138° 07' 05"	138° 07' 05"	(trapezoedro)
60°	135° 22' 17",346	153° 52' 17"	121° 42' 19"	
75°	128° 30' 27",036	168° 04' 28"	105° 28' 30"	
90°	–	–	–	

Per calcolare $\hat{D}_{AP_2}$ si può impostare il discorso in modo forse più semplice. Poiché: $\overline{P_1P_4} = 2\rho_3 \cos\alpha$, e poiché le aree dei triangoli: AP_1P_2 ed AP_4P_2 sono uguali, anche: le altezze rispetto al lato comune $\overline{AP_2}$ sono uguali

$$h_{\overline{AP_2}} = \frac{2S_{AP_1P_2}}{\overline{AP_2}} = \frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\overline{AP_2}\right)\left(\overline{AP_1}\right)\operatorname{sen}(P_2\hat{A}P_1)}{\overline{AP_2}} = \overline{AP_1}\operatorname{sen}(\hat{A})$$

(ove: $\hat{A} = P_2\hat{A}P_1 = P_4\hat{A}P_2 = \ldots$) per cui:

$$\hat{D}_{AP_2} = 2\arcsen\left(\frac{\overline{P_1P_4}/2}{h_{AP_2}}\right) = 2\arcsen\left(\frac{\frac{2}{2}\rho_3\cos\alpha}{\overline{AP_1}\operatorname{sen}\hat{A}}\right)$$

$\overline{AP_1} = \ell_1$

$$\boxed{\hat{D}_{AP_2} = 2\arcsen\left(\frac{\rho_3\cos\alpha}{\ell_1\operatorname{sen}\hat{A}}\right)}$$

Formula abbastanza sintetica ove essendo noti: ℓ_1/ρ_3, e $\operatorname{sen}\hat{A}$ risulta facilmente calcolabile $\hat{D}_{AP_2}$ in funzione di α.

Sostituendo abbiamo: $\ell_1 = \rho_3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

$$\cos\left(P_2\hat{A}P_1\right) = \cos\hat{A} = \left(\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right);\quad \operatorname{sen}\hat{A} = \sqrt{\frac{2 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2}}$$

$$\hat{D}_{AP_2} = 2\arcsen\left(\frac{\cos\alpha}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\sqrt{2 - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2}}\right)$$

ma: $\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \text{sen}\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{1-\text{sen}\alpha}$ $\qquad$ $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

$$\hat{D}_{AP_2} = 2\arcsen\left(\frac{\cos\alpha}{(\sqrt{1-\text{sen}\alpha})(\sqrt{2-\frac{(1-\cos\alpha)}{2}(1-\text{sen}\alpha)})}\right)$$

$$\hat{D}_{AP_2} = 2\arcsen\left(\sqrt{\frac{1+\text{sen}\alpha}{2-\frac{(1-\cos\alpha)(1-\text{sen}\alpha)}{2}}}\right)$$

$$\hat{D}_{\overline{AP_1}} = 2\arcsen\left(\sqrt{\frac{2(1+\text{sen}\alpha)}{4-(1-\cos\alpha)(1-\text{sen}\alpha)}}\right)$$

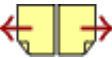
(equazione in funzione di (α))

Gli elementi di simmetria di questa classe sono: quattro assi ternari, tre assi quaternari, sei assi binari; in simboli: $(3A_4, 4A_3, 6A_2)$.

Noi consideriamo: Assi quaternari, i tre assi x, y, z, ciò vuol dire che i vertici A e le facce che hanno in comune A e tutte le altre facce si sovrappongono ogni quarto di giro per rotazione intorno a tali assi.

Consideriamo: Assi ternari, i quattro assi che si ottengono dalle diagonali interne del cubo; tali assi uniscono due vertici D. Nella rotazione ogni terzo di giro si sovrappone un vertice D e tutta la configurazione. Occorre però notare che preso un asse $\overline{DD}$ gli altri 6 punti D si trovano disposti in modo tale che ogni sesto di giro si sovrappongano alternativamente; cioè, al primo $\frac{1}{6}$ di giro si presenta il D più in alto, (se inizialmente si presentava il D. più in basso). Dopo

[illegible] il D più basso che si [illegible]

un'altro $\frac{1}{6}$ giro ritorna il D più basso che si sovrappone all'originario dopo $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ di giro. Dopo un'altro $\frac{1}{6}$ di giro si ripresenta il D più alto che si sovrappone a quello che avevamo notato anche questo dopo $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ e così via.

Considereremo "Assi binari" i sei assi che si ottengono unendo i punti medi degli spigoli opposti del cubo, o dell'ottaedro, ruotando intorno a questi assi il solido si sovrappone a se stesso ogni mezzo giro.

Il solido non presenta piani di simmetria.

Se perpendicolarmente agli assi binari facciamo passare dei segmenti bisecati dall'asse binario e ruotati di φ rispetto alla direzione dei rispettivi spigoli del cubo, avremo che gli estremi di tali segmenti sono i vertici in cui coincidono B, C, E di tre facce. Avviene che se la ruotazione è oraria (o antioraria) la distinzione dei vertici delle facce e scritta ABCDE in sequenza antioraria (od oraria). Si hanno così due tipi di icositetraedri pentagonali detti rispettivamente sinistri e destri e non sono sovrapponibili.

Al simbolo di faccia {khl} del destro corrisponde il sim

[illegible]

bolo di faccia $\{\bar{k}\bar{h}\bar{l}\}$ del sinistro.

Unendo i punti medi degli spigoli opposti dell'otta=edro, si ottengono gli stessi assi binari.

Cerchiamo ora di determinare la posizione mu=tua dei vertici; vediamo quali elementi determi=nano le facce pentagonali (che debbono essere uguali).

Per definire un pentagono occorrono sette elementi opportuni e indipendenti fra loro. La somma dei cinque angoli interni è 540°, perciò il quinto angolo non è indipendente, e l'indipendenza degli altri quattro è limitata dal dover essere minori di 180°, e che la loro somma sia superiore a 360° ma inferiore a 540°, poiché dei sette elementi almeno uno è una misura lineare, occorrono sei angoli per determinare pentagoni simili e saranno presi fra lati e diagonali, poiché fra solo lati possono essere solo quattro indipendenti. Occorre che le terne di tre angoli non si riferiscano a maglie triangolari di vertici. Ciò premesso, attribuito il valore s ad un lato, è possibile determinare tutte le altre misure lineari in funzione di s e dei sei angoli (opportuni).

sui angoli (opposti).

Nel caso del nostro solido, vi sono però delle condizioni iniziali che riducono il grado di arbitrarietà nella definizione delle facce pentagonali ABCDE. Abbiamo infatti, se A è il vertice comune a 4 facce, (cioè i vertici A corrispondono ai vertici di un ottaedro) che $\overline{AE} = \overline{AB}$. Analogamente i vertici D comuni a tre facce implicano $\overline{ED} = \overline{DC}$.

Attribuito il valore s ad $\overline{AE} = \overline{AB}$ ed il valore x ad $\overline{ED} = \overline{DC}$, ove: $x = Ks$, restano da determinare il coeff. K, il lato $\overline{BC}$ e due angoli o due diagonali.

Vi sono poi grandezze limite, per esempio, posto: $\alpha = E\hat{A}B$ avremo: $60° < \alpha < 90°$, perché per $\alpha = 60°$ si ha l'ottaedro, per $\alpha = 90°$ le quattro facce aventi in comune A sono complanari.

Analogamente per l'angolo $E\hat{D}C = \delta$, dovrà essere $90° < \delta < 120°$, per $\delta = 90°$ si ha il vertice del cubo; per $\delta = 120°$ le tre facce aventi in comune D. sono complanari.

Introduciamo ora le condizioni arbitrarie.

1) Imponiamo che l'angolo diedro sugli spigoli uscenti da A, sia uguale all'angolo diedro sugli spigoli uscenti da D; cioè: $\hat{D}_A = \hat{D}_D$. (Solido a diedri uguali).

Calcoliamo i due diedri in funzione dell'ango=

Calcoliamo i due diedri in funzione dell'angolo delle facce.

sia: $s = \overline{AE} = \overline{AB}$ $\quad h = s\,\text{sen}(\alpha)$

$$\overline{EB} = 2s\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{EP} = \overline{PB} = \overline{EB}/\sqrt{2} = \sqrt{2}\,s\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{sen}\left(\hat{D}_A/2\right) = \overline{PB}/h = \frac{\sqrt{2}\,s\,\text{sen}\,\alpha/2}{s\,\text{sen}\,\alpha}$$

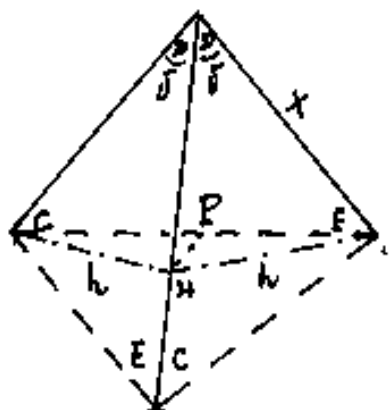
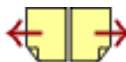
$$\hat{D}_A = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}\,\text{sen}\,\alpha/2}{2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\boxed{\hat{D}_A = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right)}$$

$$x = \overline{DE} = \overline{DC} \; ; \qquad h = x \operatorname{sen} \delta \; ;$$

$$\overline{EC} = 2x \operatorname{sen}(\delta/2) \; ; \quad \overline{EP} = x \operatorname{sen}(\delta/2) \; ;$$

$$\operatorname{sen}\left(\hat{D}_D/2\right) = \overline{EP}/h = \frac{x \operatorname{sen}(\delta/2)}{x \operatorname{sen}(\delta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\delta/2)}{2 \operatorname{sen}(\delta/2) \cos(\delta/2)}$$

$$\boxed{\hat{D}_D = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2\cos(\delta/2)}\right)} = \left(\hat{D}_{EB}\right)\left(\text{stessi } \delta\right)$$

$$\hat{D}_A = \hat{D}_D \qquad \text{da cui:} \quad \sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

---

2) Imponiamo che anche: $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = x$

3) Imponiamo che: $A\hat{B}C = B\hat{C}D = C\hat{D}E = D\hat{E}A$

Avremo che: $\boxed{\delta = \frac{540° - \alpha}{4} = \left(135° - \frac{\alpha}{4}\right)}$

sostituendo $\delta/2 = \left(67{,}5° - \frac{\alpha}{8}\right)$ si ha:

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\cos\left(67{,}5° - \frac{\alpha}{8}\right)}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\cos\left(67{,}5 - \frac{\alpha}{8}\right)$$

equazione che risulta soddisfatta per $\alpha = 80°,7517021$

$$\alpha = 80°\ 45'\ 06'',13$$

da cui:

$\delta = 114°,8120745$ $\delta = 114°\ 48'\ 43'',4$

Possiamo così disegnare la configurazione di una faccia (simile) e calcolare le correlazioni fra gli elementi lineari.

Pentagono irregolare - faccia dell'icosistetraedro pentagonale

Tabella di funzioni angolari

Angolo	radianti	sessadecimali	sessagesimali	1/n di giro	seno	coseno	tangente
BÂE α	1,409383078	80°,75170208	80° 45' 06",1275	1/4,458110364	0,987001141	0,160713244	6,141380206
BÂH = EÂH α/2	0,704691539	40°,37585104	40° 22' 33",0637	1/8,916220728	0,647798871	0,761811408	0,850340207
α/4	0,352345769	20°,18792552	20° 11' 16",53	1/17,83244146	0,345100413	0,938565769	0,367689111
ABÊ = AÊB 90° − α/2	0,866104787	49°,62414896	49° 37' 26",94	1/7,254532472	0,7618114086	0,647798871	1,175999901
BĈC = AÊD δ = 135° − α/4	2,003848721	114°,8120745	114° 48' 43",4	1/3,135558708	0,907689063	−0,419643378	−2,16300104
EDT = HFC = HFD 45° − α/4	0,43305293	24°,81207448	24° 48' 43",47	1/14,50906494	0,419643377	0,907689063	0,462320627
BĈF = CDF 45° + α/4	1,137743933	65°,18792552	65° 11' 16",53	1/5,522495111	0,907689063	0,419643377	2,163001042
EBD = DBC = ½(45 + α/4)	0,568871966	32°,59396276	32° 35' 38",27	1/11,04499022	0,538682013	0,842509162	0,639378225
CÂB = DÂE	0,4584345598	26°,2663654645	26° 15' 58",91567	1/13,70574092125	0,442544847	0,89674637348	0,49350057065
DÂC	0,492513958	28°,218971159	28° 13' 08",3	1/12,7573751	0,472842546	0,881146937	0,536621676
AĈD = AD̂C	1,324539348	75°,89051442	75° 53' 25",85	1/4,743675843	0,96983167	0,243775575	3,978379169
AD̂E = AĈB	0,679309372	38°,921560057	38° 55' 17",62	1/9,249372315	0,628255861	0,778006794	0,807519761

confrontando le due equazioni (espressioni in $sen(\frac{\alpha}{2})$ uguali ad $(\frac{1}{2})$).

$$sen^4\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}sen\frac{\alpha}{2}=sen^3\frac{\alpha}{2}-sen^2\frac{\alpha}{2}+sen\frac{\alpha}{2}$$

semplificando e dividendo per $sen\frac{\alpha}{2}$, torna:

$$\boxed{sen^3\frac{\alpha}{2}-sen^2\frac{\alpha}{2}+sen\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}=0}$$

che è l'equazione di terzo grado; ciò vuol dire che dividendo per $sen(\frac{\alpha}{2})$, togliamo la radice $sen\frac{\alpha}{2}=0$, e che le due espressioni sono confrontabili come uguali solo per il valore calcolato di α. Notiamo che anche la coppia di radici immaginarie sono uguali nelle due equazioni, cioè le quattro radici dell'equazione di quarto grado sono:

$x_1=0,176100564369478 + i\cdot 0,860716618623568 4$

$x_2=0,176100564369478 8 - i\cdot 0,860716618623568 4$

$\underline{x_3=0,647798871261042 4} = sen(\frac{\alpha}{2})$

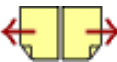
$x_4=-1$

nell'equazione di terzo grado le radici sono identiche, manca: $x_4=-1$ e rappresentano $sen(\frac{\alpha}{2})$.

manca: $X_4 = -1$ e rappresenta...

Diamo ora una tabella degli angoli della faccia e le loro funzioni trigonometriche.

Ricordiamo l'uguaglianza dei triangoli: DTE e DGE per cui $D\hat{A}G = D\hat{A}E = C\hat{A}B = \operatorname{arctg}\left(\frac{\overline{DG}}{\overline{AG}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\overline{TD}}{\overline{BE}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{X \operatorname{sen}(45° + \alpha/2)}{2 s \operatorname{sen} \alpha/2}\right)$

$D\hat{A}E = 0,4684345598885086 \text{ rad} = 26°,2663654645488 7$.

Calcoliamo ora le correlazioni fra gli elementi di una faccia: abbiamo già calcolato: $x = s \cdot 2(1 - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2})$

$s = \frac{x}{2}\frac{1}{(1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2})} = \frac{x(1+\operatorname{sen}\alpha/2)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; $\boxed{s = x(1{,}419643379)} = \overline{AB} = \overline{AE}$

$\boxed{x = s(0{,}7044022574)} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ = (lati)

$\boxed{\overline{BE}} = \overline{AG} = 2\overline{EM} = 2s\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = 2s\,0{,}6477988 71 = \boxed{s(1{,}295597742)}$

$\boxed{\overline{BM}} = \overline{EM} = \boxed{s(0{,}647798871)}$ = (semidiagonale)

$\boxed{\overline{AM}} = s\cos(\frac{\alpha}{2}) = \boxed{s(0{,}761811408)} = \overline{HF} = \frac{x}{2}(\operatorname{tang}(45° + \alpha/4))$

infatti: $\frac{x}{2}\operatorname{tang}(45° + \frac{\alpha}{4}) = (1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2})s\,\frac{1+\operatorname{tg}\alpha/4}{1-\operatorname{tg}\alpha/4} = s(1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2})\frac{\cos\alpha/4 + \operatorname{sen}\alpha/4}{\cos\alpha/4 - \operatorname{sen}\alpha/4}$

$\overline{HF} = s(1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2})\frac{(\cos\alpha/4 + \operatorname{sen}\alpha/4)^2}{(\cos^2\alpha/4 - \operatorname{sen}^2\alpha/4)} = s(1-\operatorname{sen}\alpha/2)\frac{(1+2\operatorname{sen}\alpha/4\cos\alpha/4)}{\cos\alpha/2} = s\,\frac{\cos^2\alpha/2}{\cos\alpha/2}$.

$\boxed{\overline{HF}} = \overline{AM} = s\cos\frac{\alpha}{2} = \boxed{s(0{,}761811408)}$

$\boxed{\overline{TE}} = \overline{TG} = x(\operatorname{sen}(45° - \alpha/4)) = s\cdot 2(1-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2})(\operatorname{sen}(45° - \alpha/4)) = \boxed{(\overline{BE} - s)}$

$\boxed{\overline{TE} = s(2\operatorname{sen}(\alpha/2) - 1)}$ $\boxed{\overline{TE} = s(0{,}295597742)}$ $\boxed{\overline{TE} = x(0{,}419643377)}$

$\overline{DT} = \overline{DG} = x(\cos(45° - \frac{\alpha}{4})) = \overline{TE}\operatorname{tang}(45° + \alpha/4) = s(2 - 2\operatorname{sen}\alpha/2)(\cos(45° - \alpha/4))$

$\boxed{\overline{DT} = s(0{,}639378224)} = \overline{MH}$; $\overline{AH} = \overline{MF} = \overline{AM} + \overline{MH} = (s\cos\frac{\alpha}{2} + \overline{DT})$

$\boxed{\overline{AH} = s(1{,}401189633)} = \overline{MF} = \overline{BM}\operatorname{tg}(45° + \frac{\alpha}{4}) = s(1{,}401189633)$;

$\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AG}/\cos(E\hat{A}D) = \overline{BE}/\cos(E\hat{A}D) = 2s\operatorname{sen}(\alpha/2)/\cos(E\hat{A}D)$

$\overline{AC} = \overline{AD} = 1(1{,}444776117)$; $\overline{MT} = x/2 = 1(0{,}352201128)$

$\overline{AF} = (\overline{AM} + \overline{MF}) = (\overline{AH} + \overline{HF}) = \overline{AF} = 1(2{,}163001041)$

$\overline{AT} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MT}^2} = 1\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} + (x/2)^2} = 1\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} + (1 - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2})^2} = 1\sqrt{1+1-2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$.

$\overline{AT} = 1\sqrt{2 - 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$; $\overline{AT} = 1(0{,}839286754)$; $\overline{AT} = \sqrt{1 \cdot x}$ cioè

$1 : \overline{AT} = \overline{AT} : x$ medio prop. $\overline{AT} = \frac{x}{2}\cos(45° + \frac{\alpha}{4}) = 1\,\frac{(1 - \operatorname{sen}\alpha/2)}{2\cos(45 - \alpha/4)}$

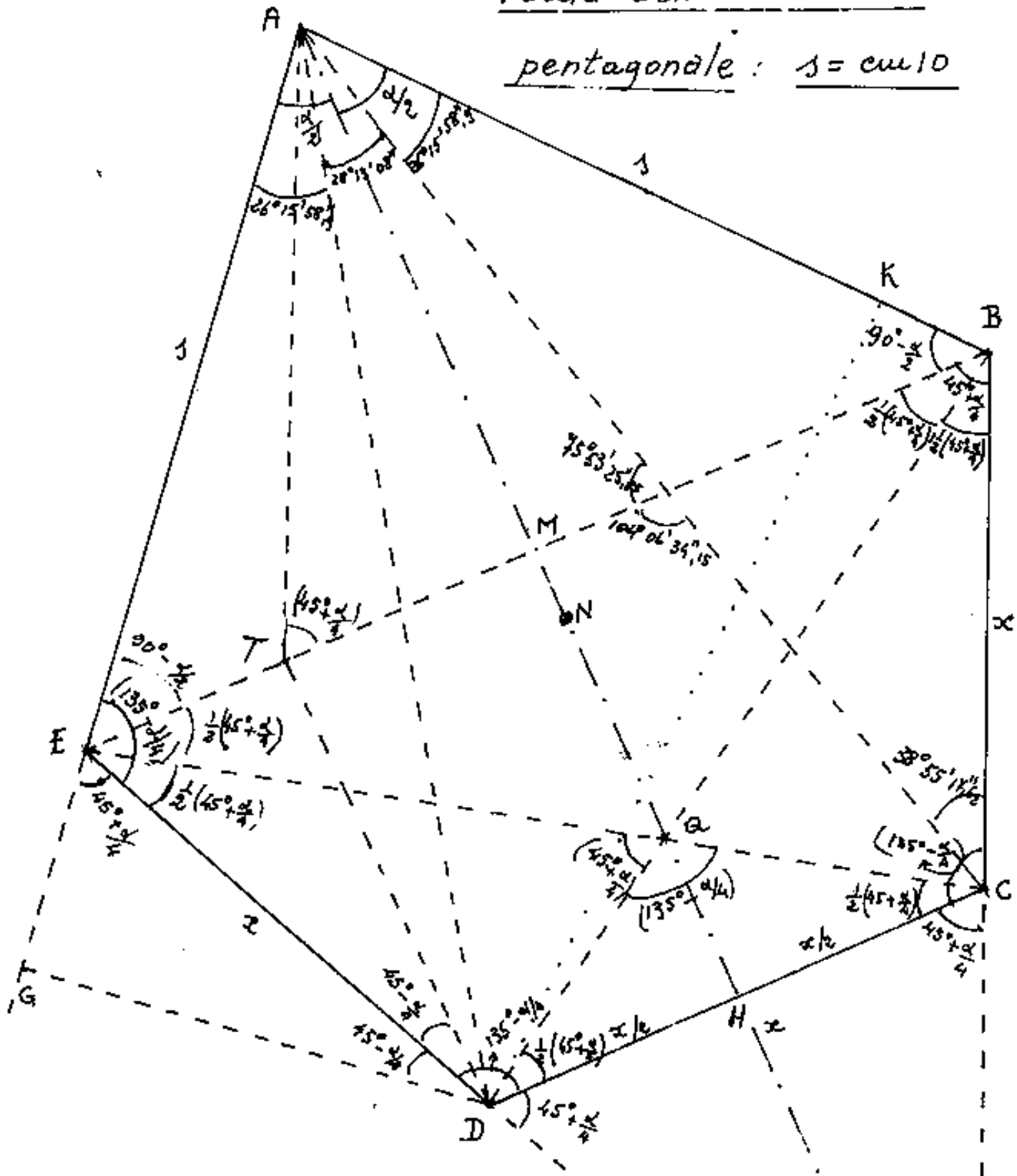
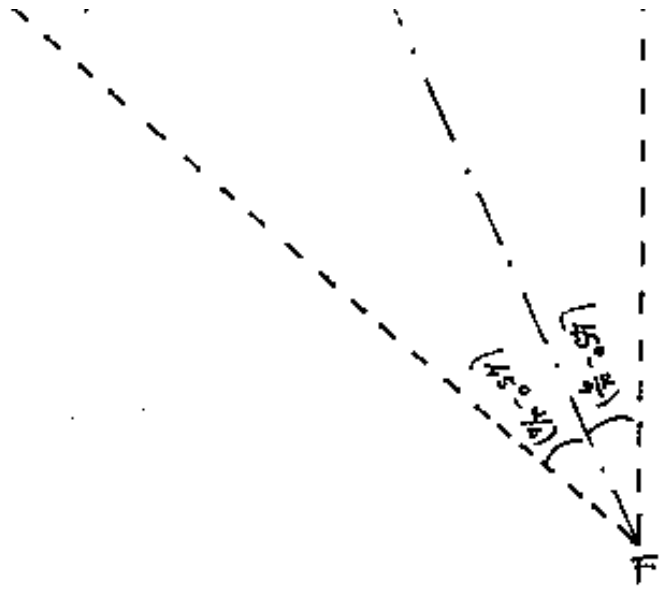
cioè l'angolo $\widehat{ATM} = (45° + \frac{\alpha}{4})$

$\overline{BD} = \overline{CE} = 2x\cos\left(\frac{1}{2}(45° + \frac{\alpha}{4})\right) = x(1{,}685018324) = 1(1{,}186930711)$

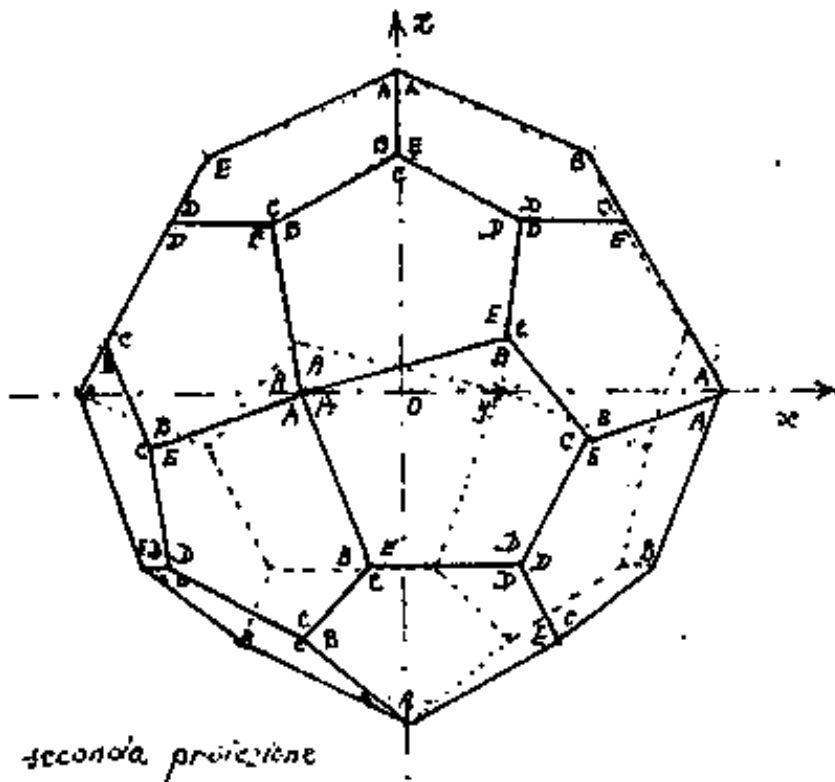
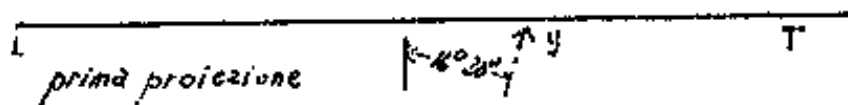
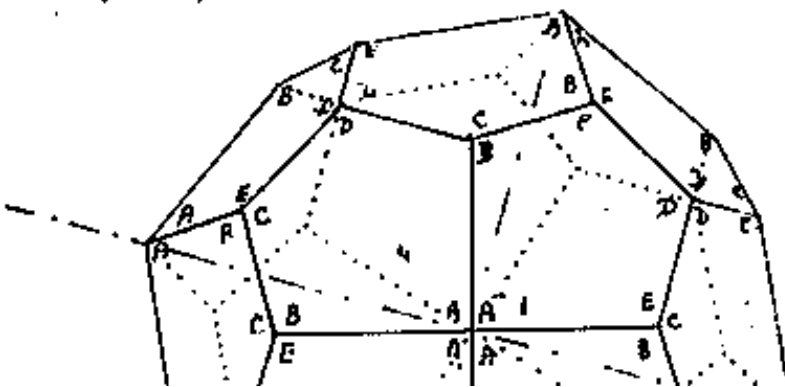
Riepilogo alfabetico delle misure lineari della faccia

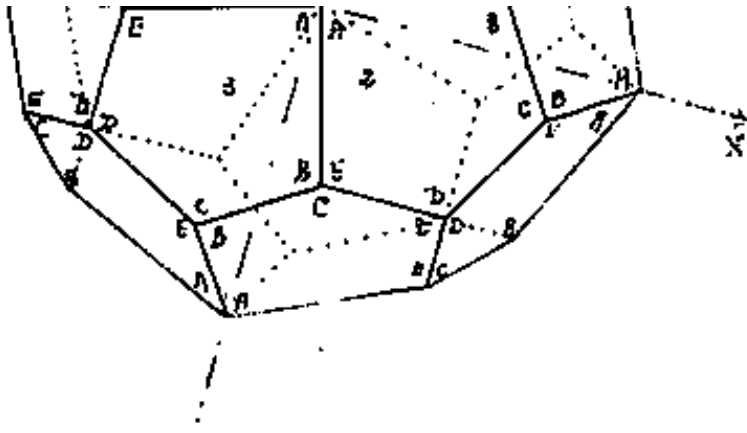
segmento	f(s)	f(x)	NOTE
$\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{BT} = s =$	1	1,419643379 x	lati
$\overline{AC} = \overline{AD} =$	1,444776117 s	2,051045629 x	
$\overline{AF} =$	2,163001041 s	3,070690107 x	
$\overline{AG} = \overline{BE} =$	1,295597742 s	1,839286756 x	BE diagonale
$\overline{AH} = \overline{FM} =$	1,401189633 s	1,989189585 x	
$\overline{AM} = \overline{FH} =$	0,761811408 s	1,081500521 x	
$\overline{AQ} =$	1,175999901 s	1,669500473 x	vedi: $tg(90-\alpha/2)$
$\overline{AT} =$	0,839286754 s	1,191487883 x	
$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = x =$	0,7044022574 s	1	lati
$\overline{BD} = \overline{CE} =$	1,186930711 s	1,685018324 x	diagonali
$\overline{BF} = \overline{EF} =$	1,543689014 s	2,191487888 x	
$\overline{BM} = \overline{EM} =$	0,647798871 s	0,919643378 x	
$\overline{BQ} = \overline{EQ} =$	0,768892375 s	1,091552969 x	
$\overline{CF} = \overline{DF} =$	0,839286755 s	1,191487883 x	vedi $\overline{AT}$
$\overline{CH} = \overline{DH} = \overline{MT} = x/2 =$	0,352201128 s	0,5 x	

$\overline{CQ} = \overline{DQ} =$	0,418038336 s	0,593465355 x	
$\overline{DG} = \overline{DT} = \overline{HM} =$	0,639378224 s	0,907689062 x	
$\overline{EG} = \overline{ET} =$	0,295597742 s	0,419643377 x	
$\overline{FQ} =$	0,98700114 s	1,401189633 x	
$\overline{HQ} =$	0,225189732 s	0,319689112 x	
$\overline{MQ} =$	0,414188492 s	0,58799995 x	

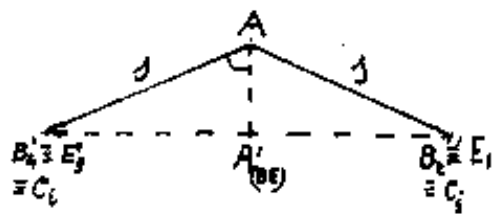
Faccia dell'icositetraedro pentagonale : s = cm 10

si sono evidenziate le grandezze angolari riportate in tabella; la scala: s = cm 10 permette una facile verifica delle misure lineari.

Abbiamo imposto l'uguaglianza degli angoli diedri, $\hat{D}_A = \hat{D}_D$, ma non li abbiamo calcolati

$$\boxed{\hat{D}_A} = 2\arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right) = 136°,3092329 = \boxed{136° \; 18' \; 33'',2}$$

$$\boxed{\hat{D}_D} = 2\arcsen\left(\frac{1}{2\cos\frac{\delta}{2}}\right) = 136°,3092329 = \boxed{136° \; 18' \; 33'',2}$$

seconda proiezione

prima proiezione

La proiezione a fianco riferisce il solido ad una terna antioraria di assi cartesiani ortogonali, mentre le facce hanno i vertici simboleggiati in sequenza oraria. I vertici "D" sono i vertici del cubo.

Consideriamo il vertice "A" sul semiasse posivo delle z, le quattro facce che vi concorrono hanno i segmenti

... i segmenti $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ paralleli al piano xy, che assumiamo come primo piano di proiezione,

quindi, in prima proiezione i segmenti: $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ si proiettano in vera grandezza, in particolare i

segmenti $\overline{BE}$ formano un quadrato di lato $\overline{BE}$ le cui semidiagonali sono le proiezioni dei segmenti $\overline{AB} = \overline{AE} = 1$; cioè $\overline{A'B'} = \overline{A'E'} = \overline{BE}/\sqrt{2}$; indichiamo con $A'_{(BE)}$ la proiezione di A sul piano dei B,E ed avremo:

$$\overline{A'B'} = 1{,}295597742\cdot 1/\sqrt{2} = 0{,}916125949\cdot 1$$

$$(B\hat{A}A'_{(BE)}) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{0{,}916125949\cdot 1}{1}\right) = 66^\circ{,}36613616$$

$$(B\hat{A}A') = 66^\circ\,21'\,58''{,}09 \quad ; \quad (E_1\hat{A}B_4) = 2(B\hat{A}A') = 132^\circ\,43'\,56''{,}1$$

$$\overline{AA'_{(BE)}} = \overline{AB}\cos(BAA'_{BE}) = \text{quota di A sul piano dei B, E.}$$

$$\overline{B_1E_2} = 1{,}832251898 \qquad \overline{AA'} = 0{,}4008905646\cdot 1$$

Sezioniamo ora il solido con un piano verticale passante per $\overline{AH}$ = asse della faccia, notiamo che anche i vertici C e D giacciono su piani paralleli ad xy, cioè i lati $\overline{CD}$ si proiettano in vera grandezza, ed i vertici D proiettano in prima proiezione i lati del quadrato che è la faccia del cubo normale a Z.

Il segmento $\overline{AH}$ passa per

A

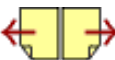
$E_1 \equiv B_1 \equiv M_1$ $M_2 \equiv B_2 \equiv E_2$

$A'_{(BE)}$

$H_1 \equiv D_1 \equiv C_1$ $A'_{(DC)}$ $D_2 \equiv C_2 \equiv H_2$

Il segmento AH passa per "M" ed "M" è alla stessa quota di $\overline{EB}$, perciò l'angolo:

$$(A'_{(BE)}\hat{A}M) = \arccos\left(\frac{AA'_{BE}}{AM}\right) , =$$

$$(A'_{(BE)}\hat{A}M) = \arccos\left(\frac{0,4008905646 1}{0,7618114087 1}\right) = \underline{58°,2486915 1}$$

$$\boxed{(A'_{(BE)}\hat{A}M) = 58° \ 14' \ 55'',289} \qquad \boxed{2\,(A'_{(BE)}\hat{A}M) = 116° \ 29' \ 50'',5}$$

$\overline{A'_{(DC)}D_2} = \overline{A'H'} = \overline{AH}\, \text{sen}(58°14'55'',289) = 1{,}19148788 2_1$

$\overline{AA'_{DC}} = \overline{AH}\cos(58°14'55'',289) = 0{,}73735270 7_1$ quota di A sul piano di DC.

$\overline{DK} = \overline{BD}\,\text{sen}(\tfrac{3}{2}\delta - 90) = \overline{DK} = 1{,}175999902_5$ (distanza di D da $\overline{AB}$)

$\overline{D_2C_1} = 2\,\overline{DK}\,\text{sen}(\hat{D}_A/2) = \overline{D_2C_1} = 2{,}183105939_1 = \overline{D'_2C'_1}$.

Si noti che $\overline{D_2C_1}$ è parallelo al piano di $\overline{B_1E_2}$, mentre $\overline{D_1D_2}$ è parallelo ad y, si noti che $\overline{C_1D_1} = x$ è inclinato di 45° rispetto a $\overline{D_2C_1}$ perciò:

$$\overline{D_1D_2} = \sqrt{(x/\sqrt{2})^2 + (\overline{D_2C_1} - x/\sqrt{2})^2} = s\sqrt{(0{,}248091269 + 2{,}839286\,76)} =$$

$\overline{D_1D_2} = s(1{,}757093631)$ (lato del quadrato e spigolo del cubo)

Calcoliamo ora quanto ha ruotato il lato del quadrato $\overline{D_1D_2}$ rispetto agli assi (che è la ruotazione degli spigoli $\overline{AB}$ rispetto agli spigoli dell'ottaedro).

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\overline{D_1C_2} - x/\sqrt{2}}{\overline{D_1D_2}}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{x/\sqrt{2}}{\overline{D_1D_2}}\right) =$$

$$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}(\overline{D_1C_1}) - x}\right) = \text{arctg}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}\,\overline{D_1C_1}}{x} - 1}\right) =$$

$\varphi = 0{,}2874131485 3$ rad.

$\varphi =$ 11° 467560387 sessadec

$\varphi = 16°,467560387$ sessadec.

$\varphi = 16° \; 28' \; 03'',218$ sessages. (angolo di rotazione sinistra o destra rispetto agli assi)

$\varphi = 1/21,86116167$ di giro.

$\operatorname{sen} \varphi = 0,283472243\,65$

$\cos \varphi = 0,95898038443$

$\operatorname{tang} \varphi = 0,2955977?227$

Consideriamo il quadrato: $D_1D_2D_3D_4$ faccia del cubo i cui spigoli sono paralleli agli assi, cio' implica che il diametro della sfera circoscritta all'ottaedro, che è anche la distaza di due vertici opposti: $\overline{A_{z+}A_{z-}} = \overline{A_{x+}A_{x-}} = \overline{A_{y+}A_{y-}} = \left(\overline{D_1D_2} + 2\overline{A'_{(CD)}A}\right) = 2\rho_1 =$

$\rho_1 = \left(\overline{D_1D_2}/2 + \overline{A'_{CD}A}\right) = (1,757093631/2 + 0,737352707)\,1$

$\boxed{\rho_1 = 1,615899522_1}$; raggio della sfera circoscritta

$l_o = \sqrt{2}\,\rho_1 = \boxed{l_o = 2,285227019_1}$ spigolo dell'ottaedro

$\overline{D_1D_3} = \overline{D_1D_2}\sqrt{2} = \boxed{\overline{D_1D_3} = 2,484905643_1}$ diagonale del quadrato

$\overline{D_1D_2}\sqrt{3} = \boxed{\overline{D_{1z+}D_{3z-}} = 3,043375443_1}$ diagonale del cubo

$\boxed{2\rho_1 = 3,231799044_1}$ = diametro sfera = diagonale cubo circoscritto

$\boxed{l_c = 1,86588048_1}$ = spigolo del cubo circoscritto $> \overline{D_1D_2}$

Il cubo di spigolo $\overline{D_1D_2}$ non è inscritto nella stessa sfera dell'ottaedro, i vertici D del solido sono interni alla sfera.

Area di una faccia $= S_f = \left(\dfrac{(\overline{AM})(\overline{EB})}{2} + \dfrac{\overline{EB} + \overline{CD}}{2}\,\overline{MH}\right)$

$\dfrac{\overline{EB} + \overline{CD}}{2} = 1$ $\boxed{S_f = 1^2(1,132878796)}$ = 0,49350057 + 0,1 [illegible]

<u>superficie laterale</u> del solido : $S_\ell = 24 \cdot S_f$

$$S_\ell = s^2 (27,1890911)$$

Tutte le facce hanno la stessa distanza dal centro "O" della sfera, per cui dalle coordinate di tre punti di una faccia si può calcolare l'equazione del piano e da

essa la distanza: h_f. ove il volume del solido sarà dato da:

$$V = \left(\frac{1}{3} h_f \cdot S_f\right) 24 .$$

I tre punti siano: A_2, B_2, C_2; avremo:

$$x_A = 0 \quad ; \quad y_A = 0 \quad ; \quad z_A = \rho_1 = s(1{,}615899522)$$

$$x_{B_2} = \overline{A'_{(BE)} B_2} \cos\varphi \; ; \quad y_{B_2} = (\overline{A'_{(BE)} B}) \operatorname{sen}\varphi \; ; \quad z_{B_2} = \rho_1 - (\overline{A'_{(BE)} A})$$

$$x_{E_2} = \overline{A'_{(BE)} E_2} \operatorname{sen}\varphi \; ; \quad y_{E_2} = -(\overline{A'_{BE} B}) \cos\varphi \; ; \quad z_{E_2} = \rho_1 - (\overline{A'_{(BE)} A})$$

$$\overline{A'B'} \operatorname{sen}\varphi = (0{,}916125949\, s)(0{,}283424365) = (0{,}259696454)s$$

$$\overline{A'B'} \cos\varphi = (0{,}916125949\, s)(0{,}958980384 43) = (0{,}878546814)s$$

$$(\rho_1 - \overline{A'_{(BE)} A}) = (1{,}615899522 \cdot s - 0{,}400890564 6\, s) = 1{,}215008958.$$

$$\begin{cases} 0 + 0 + 1{,}615899522 (c/d) = 1 \\ +(0{,}878546814)(\frac{a}{d}) + (0{,}259696454)\frac{b}{d} + (1{,}215008958)\frac{c}{d} = 1 \\ +(0{,}259696454)\frac{a}{d} - (0{,}878546814)\frac{b}{d} + (1{,}215008958)\frac{c}{d} = 1 \end{cases}$$

da cui l'equazione del piano ai coseni direttori

$$-(0{,}462320624 59)x + (0{,}251358646139)y - (0{,}850340204 39)z + $$

$$+ (1{,}374061334666)s = 0$$

cioè la distanza dal centro O di ciascuna faccia è:

$h_f = (1,37406433467)\,s = \boxed{h_f = \frac{\rho_1 \cdot s'}{\sqrt{2(\overline{AA'_{(BE)}})^2 + s'^2}}}$; ove: $s' = \overline{A'_{(BE)}B'}$

e quindi il volume $V = (1,3740643346)(27,189091)\frac{s^3}{3}$

$$\boxed{V = (12,45318678)\,s^3}$$

Il volume del cubo interno $V = (5,42481227)\,s^3$

Il volume del cubo circoscritto $V = (6,496081480)\,s^3$

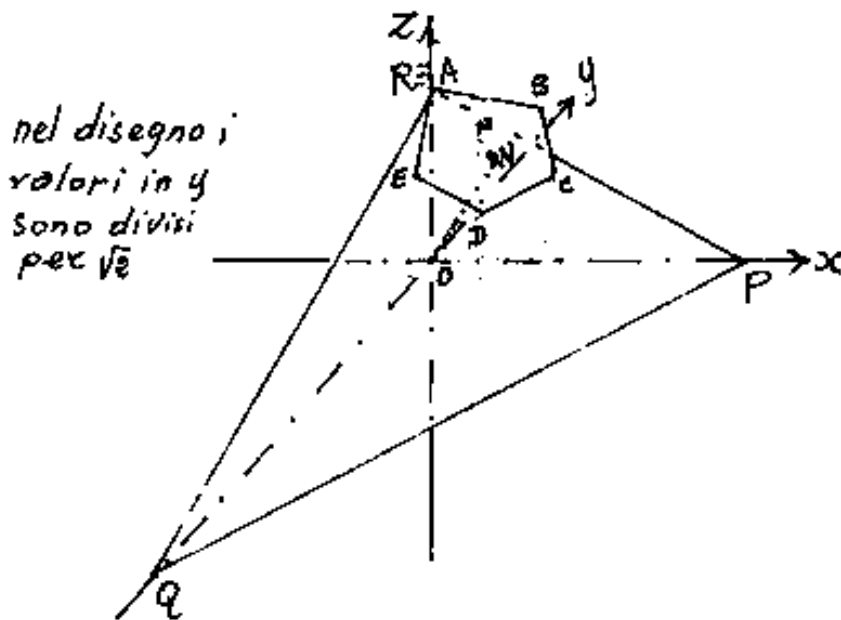
Il volume dell'ottaedro $V = (5,62576768)\,s^3$

Il volume della sfera per i punti A; $V = (17,67387043)\,s^3$

Se dividiamo l'equazione del piano per il termine noto otteniamo l'equazione segmentaria del piano della faccia; $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ ove p, q, r; sono i segmenti staccati dal piano sugli assi

in x; $\overline{OP} = p = +(2,972102597)s$

" y; $\overline{OQ} = q = -(5,466548933)s$

" z; $\overline{OR} = r = +(1,615899522)s = \rho_3$

se invece moltiplichiamo i coseni direttori per la distanza del piano dall'origine "O" degli assi, otteniamo le coordinate di N ortocentro del triangolo PQR e punto di intersezione della normale condotta da "O" al piano stesso. (vedi vol III).

$x_N = +(0,635258284)s$; $y_N = -(0,34538295)s$; $z_N = +(1,16842215)s$

ove: $(\overline{ON} = 1,374064 9346)s = h_1^o$

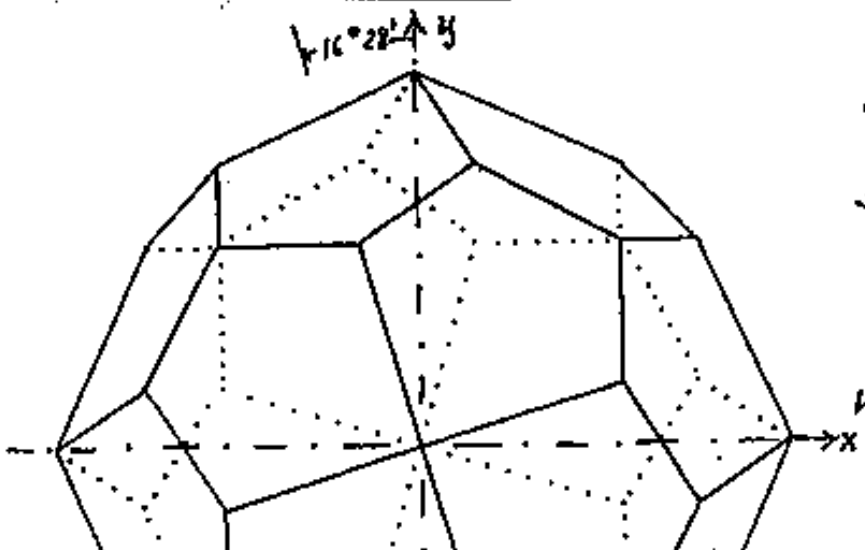
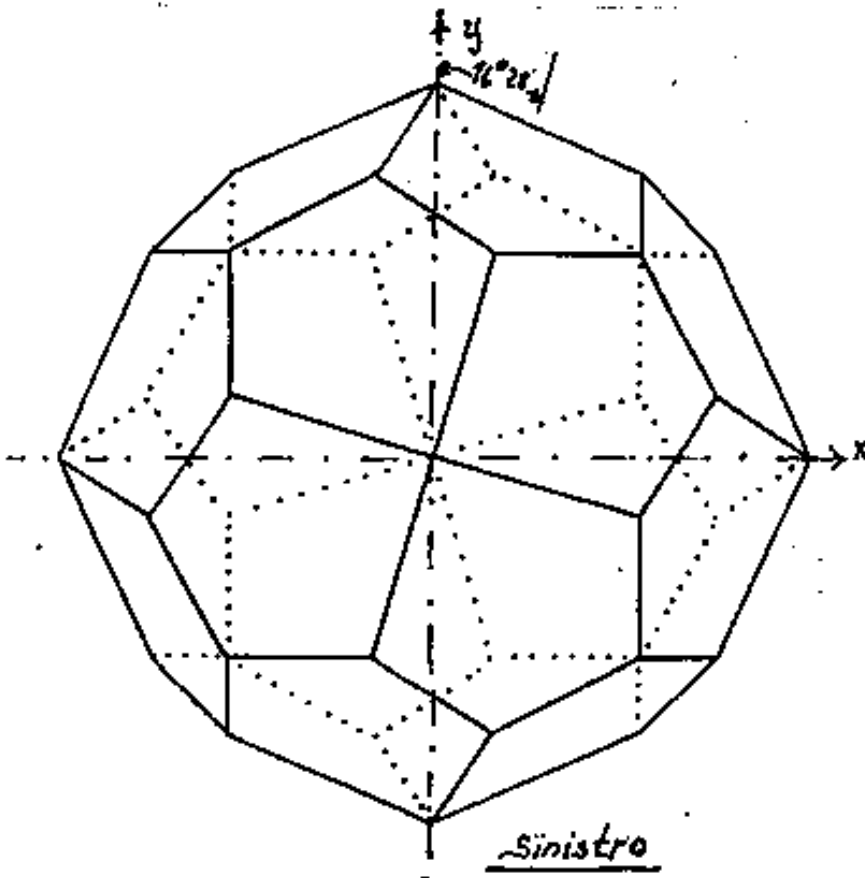
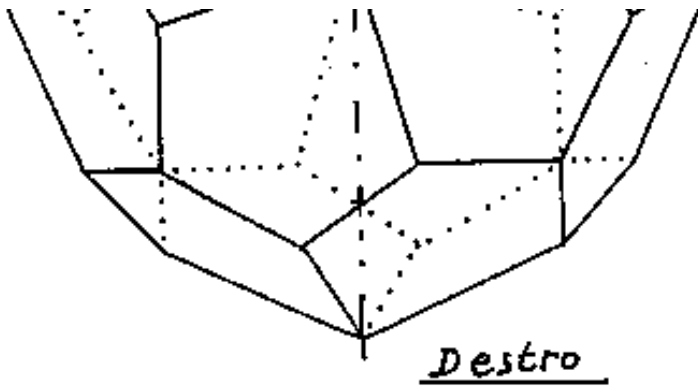
Ma "N" rimane entro la faccia perciò il solido che

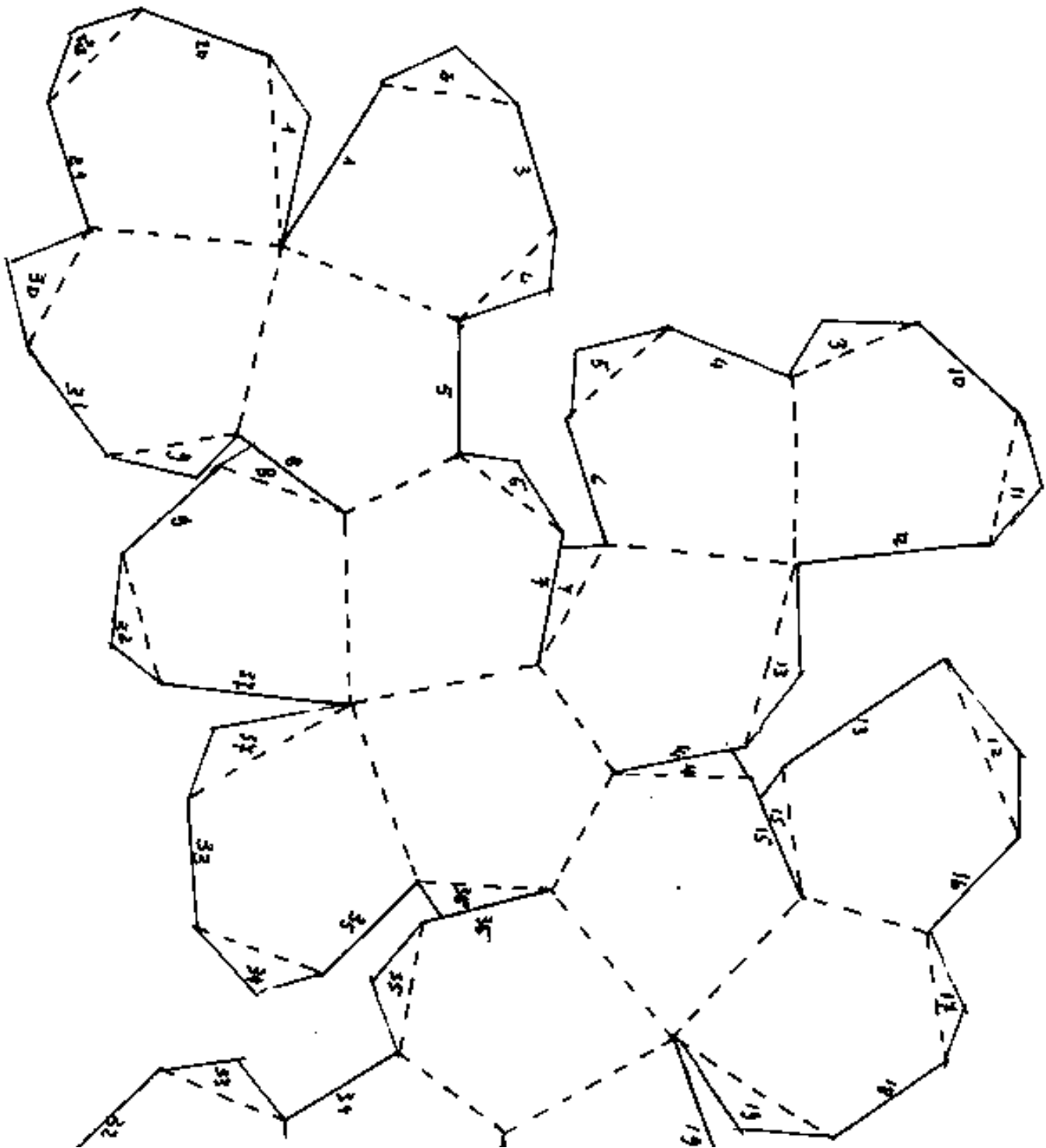
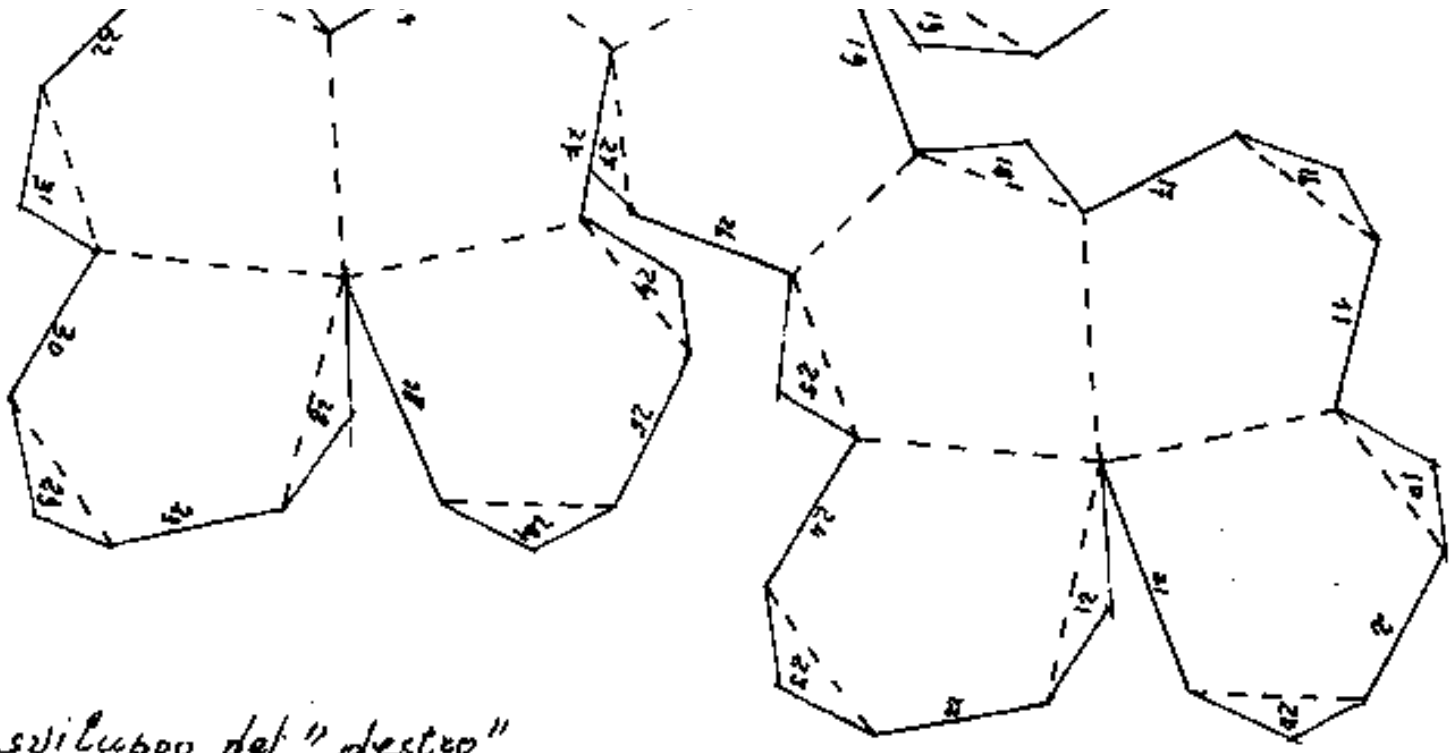
Ma "N" rimane entro la faccia, perciò il solido che non ha sfera circoscritta in quanto passa solo per i vertici "A", ammette invece la sfera inscritta che è tangente alle facce nel punto N.

$\hat{AON} = \arccos(0,8503402073 9) = 31^\circ 45' 04,''7$ ove $\overline{AN} = \overline{ON}\ tg(\hat{AON})$

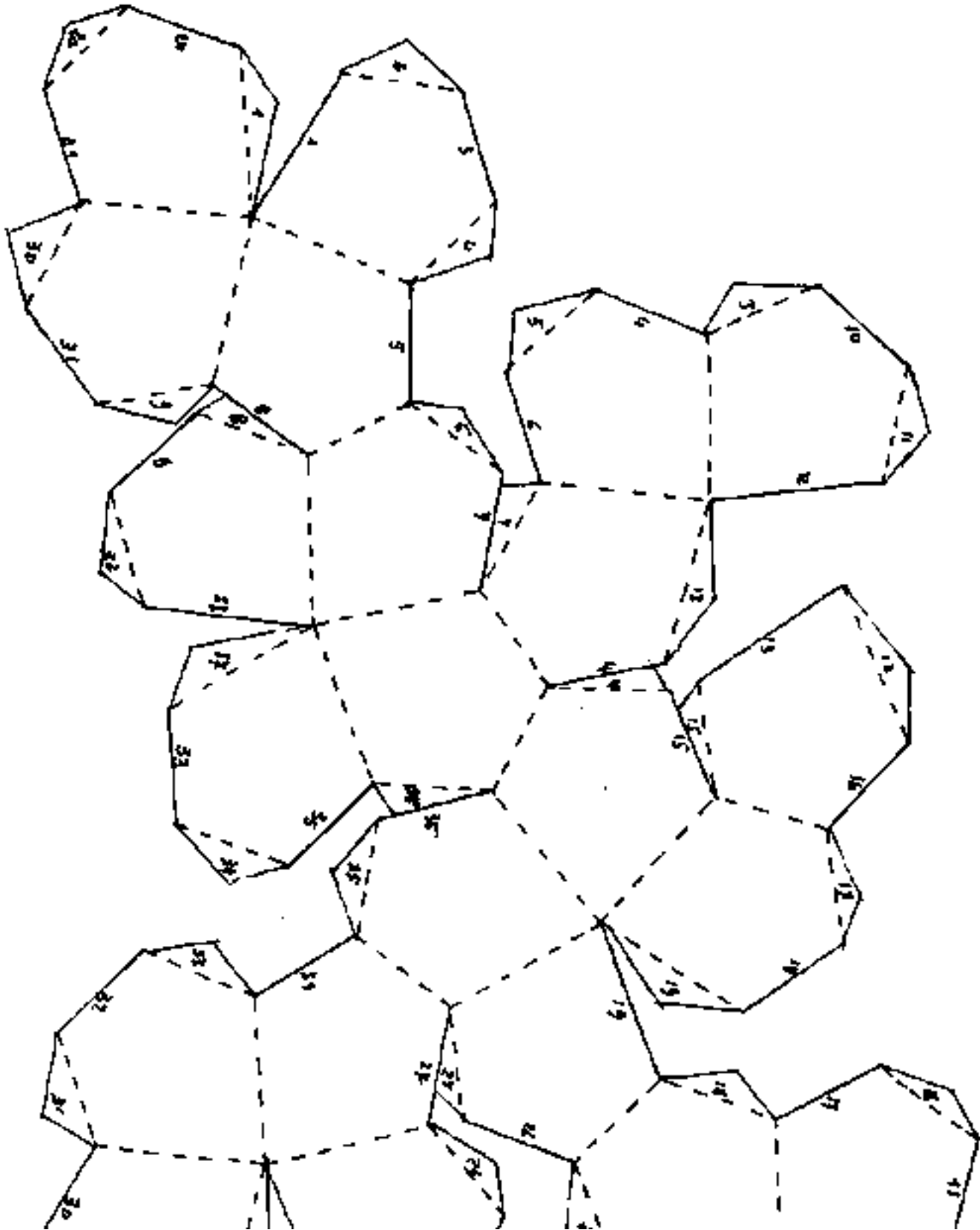
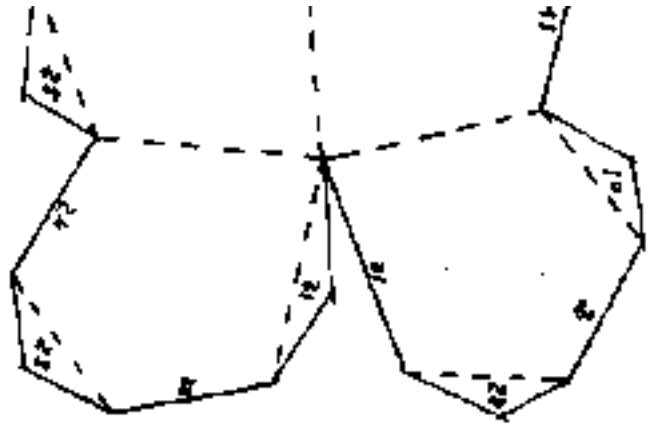
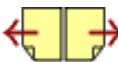
$\overline{AN} = (0,850340209)_s$ (fra M e Q). "N" appare equidistante da B, C, D, E cioè è sul punto comune agli assi dei lati ecc.

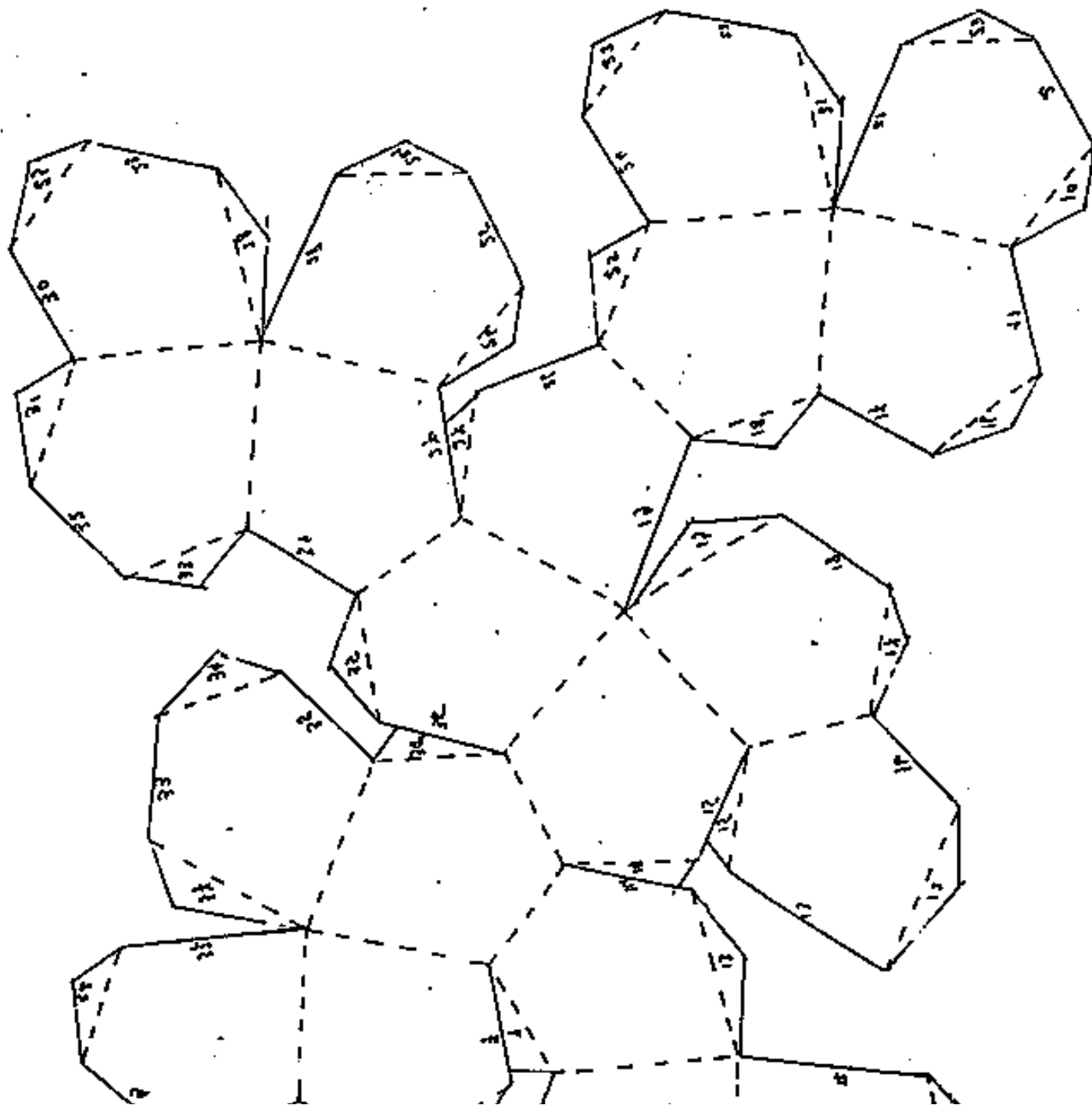
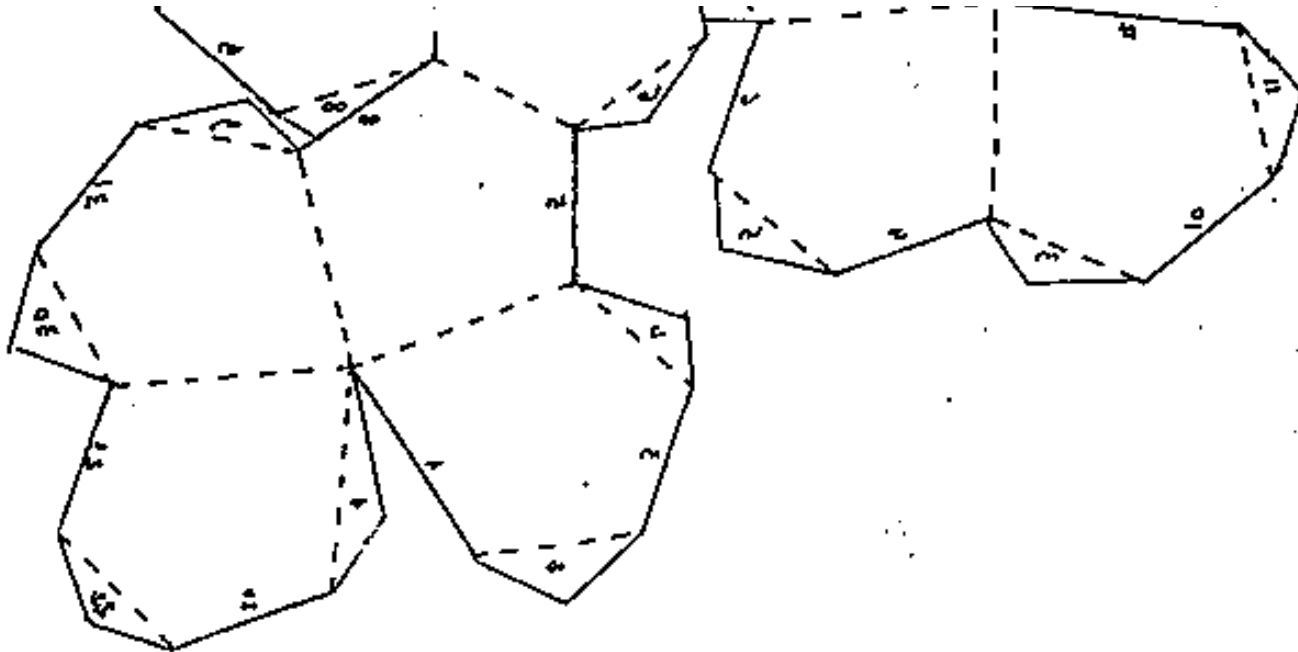
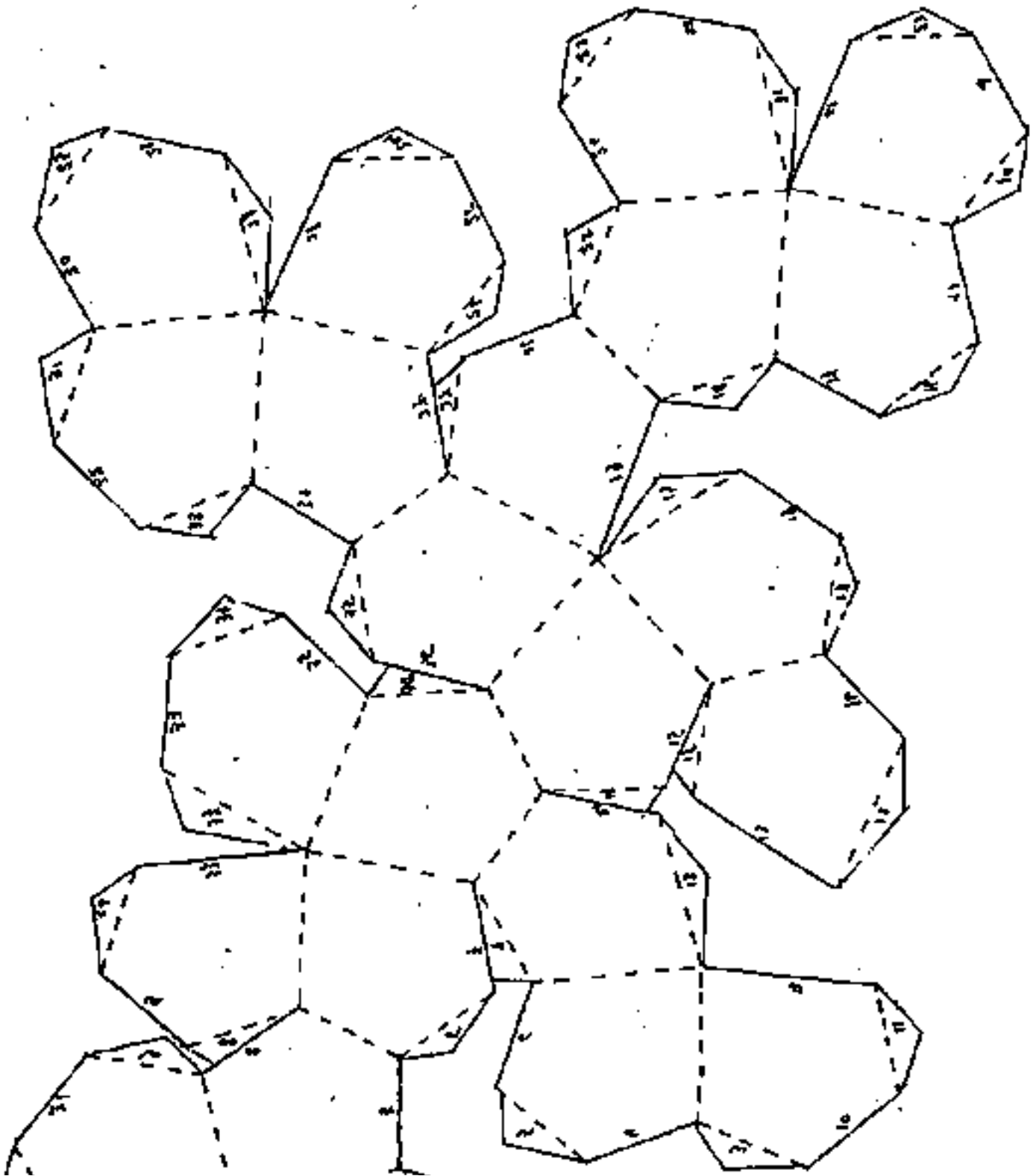
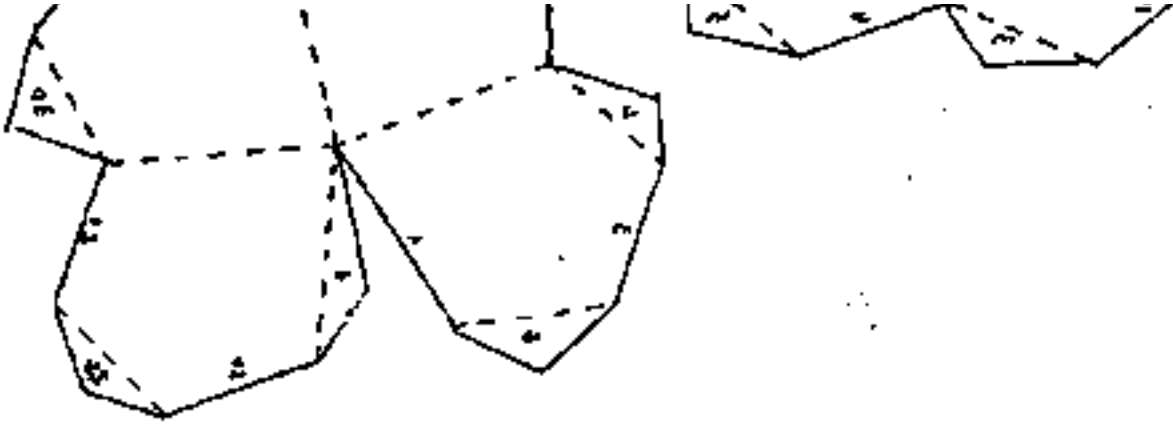
Si è eseguito anche la proiezione dell'icositetraedro sinistro, se confrontiamo la prima proiezione del solido destro con la prima prima proiezione del solido sinistro, notiamo che le parte sottostante e la parte soprastante sono mutuamente ruotate e ruotate anche rispetto agli assi; le due ruotazioni sono di verso opposto. Per paragonare con la vite destrogira e sinistrogira pensiamo la

y
16°28'
x
Sinistro
16°28'
y
x

Destro

strogira pensiamo la parte inferiore del solido e la parte superiore come il dado ed il bullone e noteremo che per allineare le due parti nel destro si devono muovere come l'avvitamento della vite destrogira; nel sinistro come lo svitamento della stessa vite destrogira e non vale invertire le parti.

Sviluppo di Icositetraedro pentagonale (sinistro)

(Lo sviluppo del "destro"
è l'immagine speculare)

Sviluppo di Icositetraedro
pentagonale (Sinistro)

(Lo sviluppo del "destro"
è l'immagine speculare)

Sviluppo dell'icositetraedro pentagonale (destro)

Sviluppo dell'icositetraedro pentagonale (destro)

Il calcolo degli angoli diedri

Abbiamo già trattato il problema al capitolo: "Angoli diedri ed angoli delle facce" in generale per tre facce con angoli al vertice fra loro diversi: (α_0, β_0, γ_0) con α_0 opposto ad "a" = $\overline{BC}$, β_0 opposto a "b" = $\overline{AC}$, ed γ_0 opposto a "c" = $\overline{AB}$; ed abbiamo ricavato la formula per il diedro sullo spigolo $\overline{OC}$ ("O" = vertice) = $\hat{D}_c$ con la formula del coseno:

$$\cos(\hat{D}_c) = \frac{\cos\gamma_0 - \cos\alpha_0 \cos\beta_0}{\operatorname{sen}\alpha_0 \operatorname{sen}\beta_0}$$

Analogamente si è trattato un vertice con quattro facciate scomponendo la base quadrilatera in due triangoli. Analogamente si possono calcolare i diedri con la formula del coseno, se scomponiamo in triangoli il poligono di base del poliedro angoloide.

Consideriamo ora il caso particolare di

facce aventi angoli uguali nel vertice comune, per cui sono uguali i diedri sugli spigoli uscen= ti dal vertice comune.

Indicheremo con "α" l'angolo delle facce al vertice comune, indicheremo con $\hat{D}_3$ il diedro quando gli spigoli sono tre, ed avremo:

$$\cos(\hat{D}_3) = \frac{\cos\alpha - \cos\alpha \cdot \cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,\alpha} = \cos\alpha \, \frac{1 - \cos\alpha}{1 - \cos^2\alpha} =$$

$$\boxed{\cos(\hat{D}_3)} = \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \boxed{\frac{1}{1/\cos\alpha + 1}} \qquad \boxed{\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right) = \frac{1}{\cos(\hat{D}_3)}}$$

"Il reciproco del coseno dell'angolo delle facce maggiorato di uno, equivale il reciproco del coseno del diedro a tre facce"

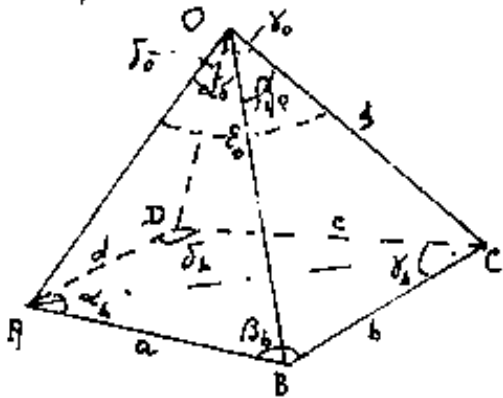
Tavola dei diedri sugli spigoli dei vertici a 3 facce

Angolo α al vertice delle 3 facce	Diedro sui 3 spigoli		NOTE
	$\hat{D}_3$ sessadec	$\hat{D}_3$ sessages	
120°	180°	180°	caso limite
119° 52' 44"	173°,07328	173° 04' 23",808	-
119° 51' 05",52	172°,3316667	172° 19' 54"	diacisdodecaedro (10)
119° 02' 21",66	160°,6125436	160° 36' 45",1	triacisicosaedro
117° 12' 02",05	147°,3501	147° 21' 00",36	triacisottaedro
116° 31' 54",1	144°	144°	romboedro a 30 facce
115° 15' 47",43	138°,1179533	138° 07' 04",632	trapezoedro
115° 11' 48",4	137°,8453763	137° 50' 43",3	Deltoide dodecaedro

115° 11' 48",4	137°,8453763	137° 50' 43",3	Deltoide dodecaedro
114° 48' 43",4	136°,3092222	136° 18' 33",2	icositetraedro pentagonale
112° 53' 07",37	129°,5211944	129° 31' 16",3	triacistetraedro
111° 14' 45",4	124°,6327124	124° 37' 57",7	esacisottaedro lim.
109° 28' 16",3	120°, –	120°	rombododecaedro
108°	116°,5650512	116° 33' 54"	dodecaedro
90°	90°	90°	cubo
60°	70°,52877937	70° 31' 43",61	tetraedro

Diedri su vertici a quattro facce

Abbiamo già visto al capitolo: "angoli diedri ed angoli delle facce" che non basta la conoscenza dei quattro angoli delle facce che concorrono nel vertice comune per poter calcolare i diedri sugli spigoli uscenti da tale vertice.

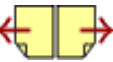
Detto "O" il vertice comune, detti: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, gli spigoli uscenti da esso; detti: $A\hat{O}B = \alpha_o$, $B\hat{O}C = \beta_o$; $C\hat{O}D = \gamma_o$; $D\hat{O}A = \delta_o$; gli angoli delle facce sul vertice O, rispettivamente opposti ai lati del quadrilatero di base della piramide: $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$; $d = \overline{DA}$; $D\hat{A}B = \alpha_b$; $A\hat{B}C = \beta_b$; $B\hat{C}D = \gamma_b$; $C\hat{D}A = \delta_b$.

A questi elementi, per definire il quadrilatero ABCD abbiamo supposto di conoscere la diagonale $\overline{AC}$ e quindi l'angolo sul vertice "O" $A\hat{O}C = \varepsilon_o$ quindi agli

l'angolo sul vertice "O", $\widehat{AOC} = \varepsilon_0$, quindi applicando ripetutamente la formula dei diedri su vertici a tre facce si è ricavato:

$$\widehat{D}_{oA} = \arccos\left(\frac{\cos\beta_0 - \cos\alpha_0 \cos\varepsilon_0}{\operatorname{sen}\alpha_0 \operatorname{sen}\varepsilon_0}\right) + \arccos\left(\frac{\cos\gamma_0 - \cos\delta_0 \cos\varepsilon_0}{\operatorname{sen}\delta_0 \operatorname{sen}\varepsilon_0}\right)$$

$$\widehat{D}_{oB} = \arccos\left(\frac{\cos\varepsilon_0 - \cos\alpha_0 \cos\beta_0}{\operatorname{sen}\alpha_0 \operatorname{sen}\beta_0}\right)$$

$$\widehat{D}_{oC} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha_0 - \cos\beta_0 \cos\varepsilon_0}{\operatorname{sen}\beta_0 \operatorname{sen}\varepsilon_0}\right) + \arccos\left(\frac{\cos\delta_0 - \cos\gamma_0 \cos\varepsilon_0}{\operatorname{sen}\gamma_0 \operatorname{sen}\varepsilon_0}\right)$$

$$\widehat{D}_{oD} = \arccos\left(\frac{\cos\varepsilon_0 - \cos\gamma_0 \cos\delta_0}{\operatorname{sen}\gamma_0 \operatorname{sen}\delta_0}\right).$$

Nel caso in cui gli angoli delle 4 facce che concorrono nel vertice siano tutti uguali, e gli spigoli siano tutti uguali, cioè il quadrilatero di base sia un quadrato; se $\varphi = \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \delta_0$, è l'angolo delle facce, ed "s" lo spigolo: $2s \,\text{sen} \frac{\varphi}{2} = l$ = lato base

$l\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\, s \,\text{sen} \frac{\varphi}{2}$ = diagonale $= 2s \,\text{sen} \frac{\varepsilon}{2}$ cioè $\frac{\varepsilon}{2} = \text{arcsen} \sqrt{2} \,\text{sen} \frac{\varphi}{2}$.

ma: $\cos \varepsilon = 1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2} = 1 - (2)\left(\sqrt{2}\,\text{sen} \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \left(1 - 4\,\text{sen}^2 \frac{\varphi}{2}\right)$; ed anche essendo: $\text{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$; $\cos \varepsilon = 1 - \frac{4}{2}(1 - \cos\varphi) =$

$$\boxed{\cos \varepsilon = (2\cos\varphi - 1)}$$

$$\boxed{\cos \hat{D} = \left(\frac{2\cos\varphi - 1 - \cos^2\varphi}{\text{sen}^2\varphi}\right)} = \left(\frac{-(1-\cos\varphi)^2}{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)}\right)$$

$$\boxed{\cos \hat{D}_4 = \left(\frac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi + 1}\right).}$$

si noti che per: $\varphi = 70° 31' 43'',61$ si ha: $\text{sen}\,\varphi = \frac{1}{3}$

per cui: $\cos \hat{D}_4 = -\frac{1}{2}$ $\quad \underline{\hat{D}_4 = 120°}$

se consideriamo i vertici di 3 facce ove: $\hat{D}_3 = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\cos\varphi}}$

e per $\varphi = 109° 28' 16'',39$ si ha $\cos\varphi = -\frac{1}{}$

cos φ

e per $\varphi_3 = 109° 28' 16'',39$, si ha $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$

per cui $\hat{D}_3 = -\frac{1}{2}$; $\hat{D}_3 = 120°$

È questo il caso del rombododecaedro i cui vertici sono a tre facce uguali con $\varphi_3 = 109° 28' 16'',39$, oppure a quattro facce uguali con $\varphi_4 = 180° - \varphi_3 = 70° 31' 43'',61$ ed i diedri sono sempre di 120° (facce piane).

Il pentagono-dodecaedro -(tetartoedro)

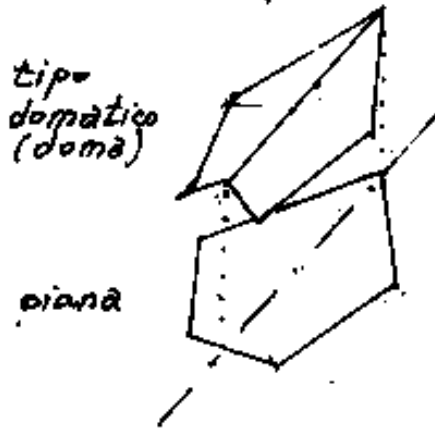
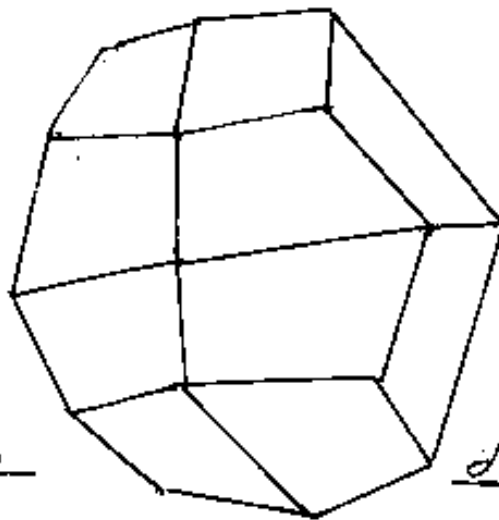
Il solido ha 12 facce pentagonali (generalmente irregolari), 20 vertici, 30 spigoli. (12+20=30+2)
In cristallografia troviamo il pentagonododecaedro in due classi diverse, e precisamente: 1) nella classe diacisdodecaedrica o diploide (che noi abbiamo già trattato per solidi a facce quadrangolari) ed in cui cristallizza la pirite, la hauerite, la cobaltite. 2) nella classe pentagonododecaedrica o tetartoedrica, ove il pentagonododecaedro è detto "tetraedrico" ed in cui cristallizza l'Ullmannite.

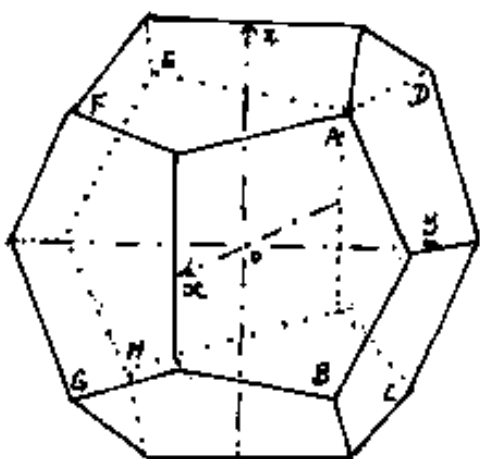
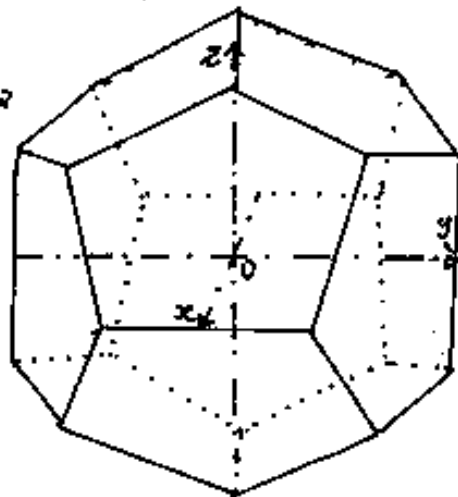
È opportuno rilevare che il diacisdodecaedro, il cui nome esprime la sua configurazione, il prefisso: dia che dal greco assume contemporaneamente vari significati come: " attraverso, separazione o distinzione in …

zione o distinzione in due parti da cui le parole italiane: diaframma, dialogo," ed il prefisso cis = al di qua, o sopra; stanno a significare che sopra il dodecaedro (pentagonale, regolare o irre= golare) vi sono due facce simmetriche ad una linea che attraversa i pentagoni, necessariamente le facce sono quadrilatere, (vedi rappresentazione dei diacisdodecaedri o diploidi).

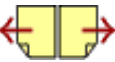
Qualora le due facce quadrangolari dei diploidi ruotassero intorno alla linea simmetrica di sepa=razione fino a giacere sullo stesso piano si otter=rebbe il pentagonododecaedro.

tipo domatico (doma)

piana

prospetto di diacisdodecaedro

diploide

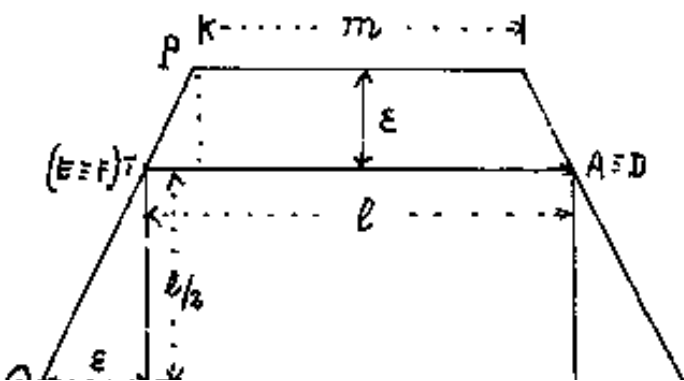
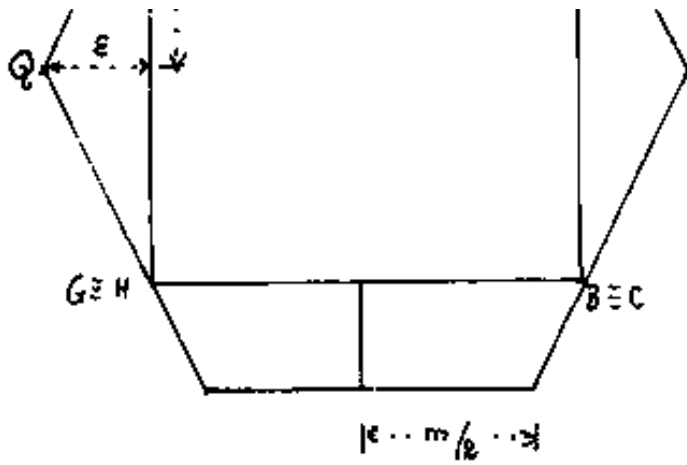
Rapresentiamo ora il pentagonododecaedro destro, sinistro, con la se verso l'osservatore e terna antioraria:

questa figura è stata ripresa da: Carobbi "Lezioni di Mineralogia"

ove si nota che gli assi ox, y, z bisecano spigoli

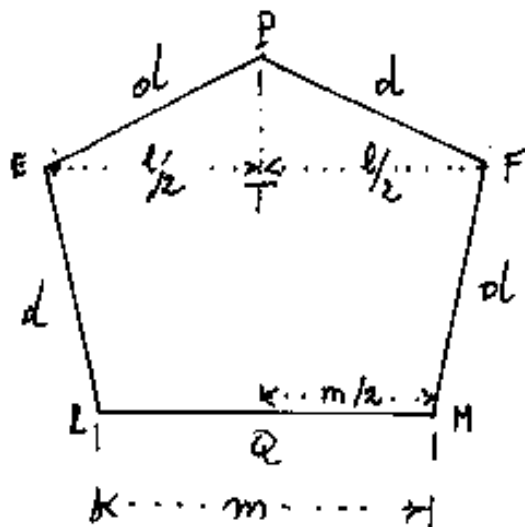
opposti paralleli; e che, fermi gli assi, ruotando di 90° il solido destro intorno all'asse x, si ottiene il sinistro.

Nel corso di questa opera, abbiamo trattato abbastanza sui concetti di "destro, sinistro, destrorso, sinistrorso destro giro, sinistro giro, verso orario, verso antiorario, vite destrogira, vite sinistrogira, elica destro gira, ed

elica sinistrogira, solidi destri e solidi sinistri; ribadiamo ancora che la distinzione puó essere relativa all'osservatore o al sistema di riferimento, ciò implica che non v'é diversità fra i due oggetti; ma la distinzione puó essere indipendente dall'osservatore o dai sistemi di riferimento, ed in questo caso i due oggetti sono "in se" diversi (come la vite destrogira è diversa dalla vite sinistrogira perché è diversa l'elica del suo pane pur avendo lo stesso diametro e lo stesso passo; come sono diversi certi cristalli, vedi icositetraedri pentagonali ecc.).

Date le condizioni di parallelismo di spigoli opposti, esposte per questa specie di pentagonododecaedro, si rileva che vertici come: A,B,C,D,E,F,G H, sono comuni ai vertici di un cubo, che ha per spigoli la stessa diagonale di pentagoni uguali (non regolari).

Consideriamo una sezione mediana di tale cubo, (per es.

Q ε G≡H B≡C m/2

mediana di tale cubo, (per es. quella del piano zy.).
Sia "m" il lato delle facce pentagonali bisecato dagli assi. Sia "l" il lato del cubo; e siano "d" i restanti lati del pentagono.

Sia T il punto medio di $\overline{EF}$, avremo: (vedi figure)

$$\left(\frac{l-m}{2}\right)^2 + \varepsilon^2 = \overline{PT}^2$$

$$d^2 = \overline{PT}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

ma: $\varepsilon^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \overline{QT}^2$

ed essendo allineati P, T, Q:

$$\varepsilon : \frac{l}{2} = \frac{l-m}{2} : \varepsilon$$

Cioè: $\varepsilon^2 = \frac{l^2 - lm}{4}$

Riferiamoci al lato del cubo e poniamo: $m/l = K$

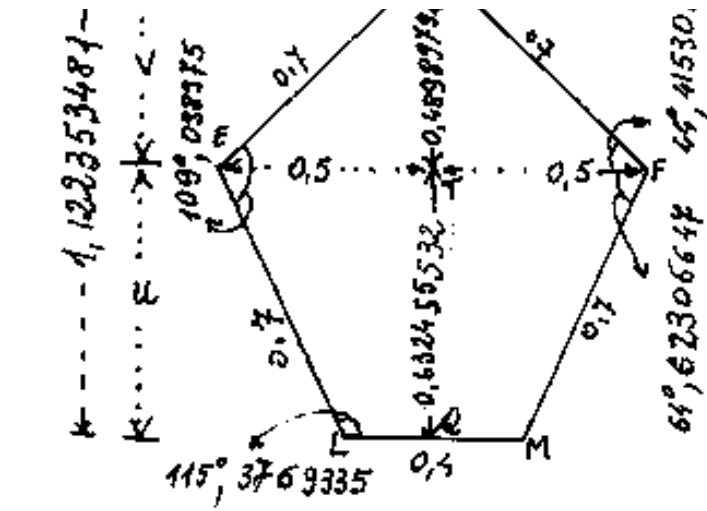
avremo:

$$\varepsilon/l = \frac{1}{2}\sqrt{1-K} \quad ; \quad d/l = \frac{1}{2}\sqrt{3-3K+K^2}$$

Abbiamo così ridotto al parametro K questa specie di pentagonododecaedro ove (se consideriamo unitario il lato del cubo, K diventa il valore dello spigolo m)

Assumiamo: $m/l = 0,4$ per fare lo schema per la costruzione di un modello in

P 91°,16938281

1,122353487
u
v
109°,0387175
E
0,7
0,5
0,5
F
T
0,4898979
0,6324555320
0,7
0,7
64°,6230664
44°,41530
L
M
0,5
115°,3769335

$\hat{D}_m = 104°\ 28'\ 39''$; $\hat{D}_d = 118°\ 57'\ 18''$; —

cartoncino.

$$u/\ell = \frac{1}{2}\sqrt{2-K}\ ; \quad v/\ell = \frac{1}{2}\sqrt{2-3K+K^2}$$

Angoli diedri:

$$\hat{D}_m = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\ell}{2t}\right) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{1-K}}\right)$$

$$\hat{D}_d = 2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{1}{2\cos\left(\frac{P\hat{E}L}{2}\right)}\right)$$

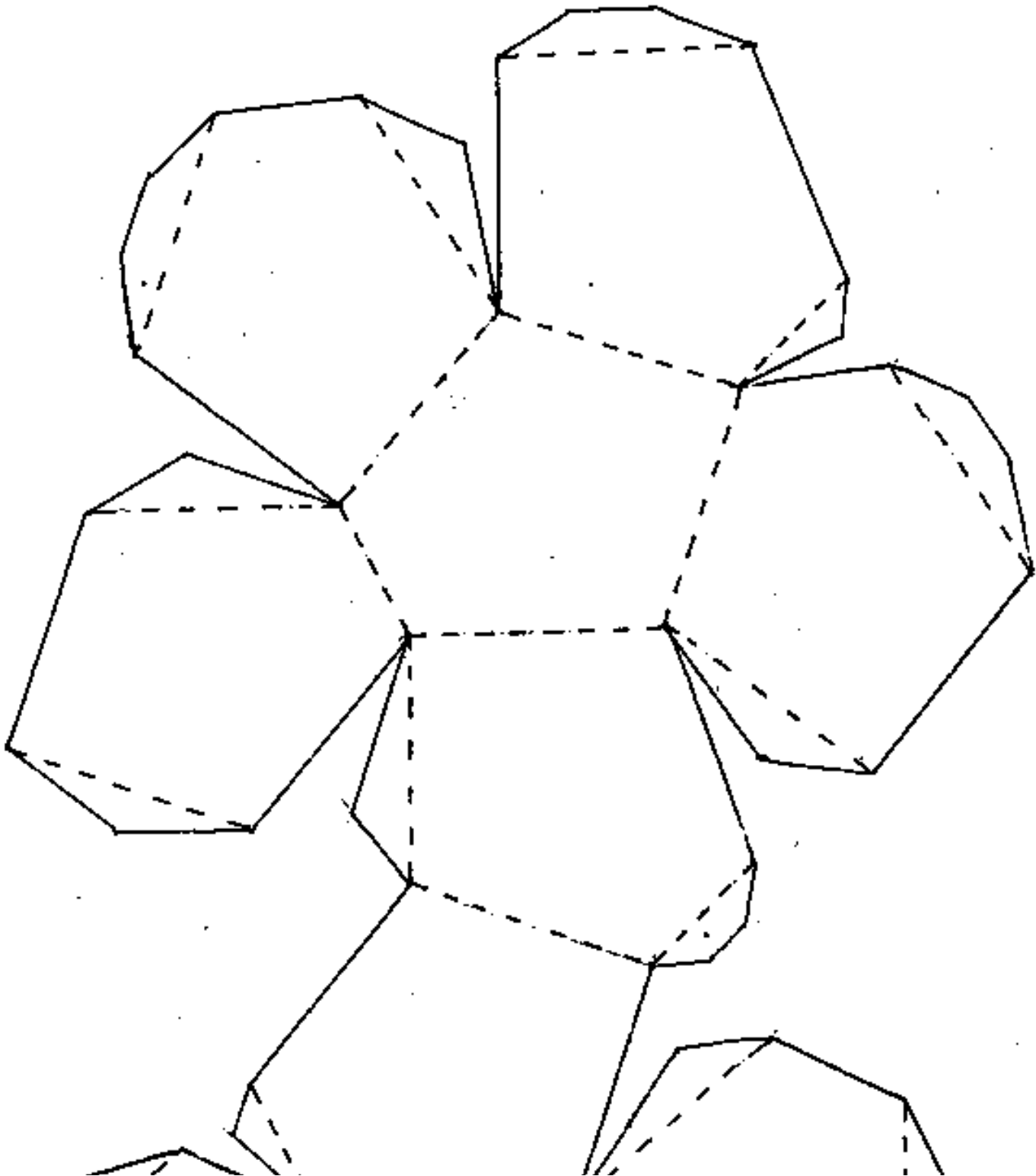
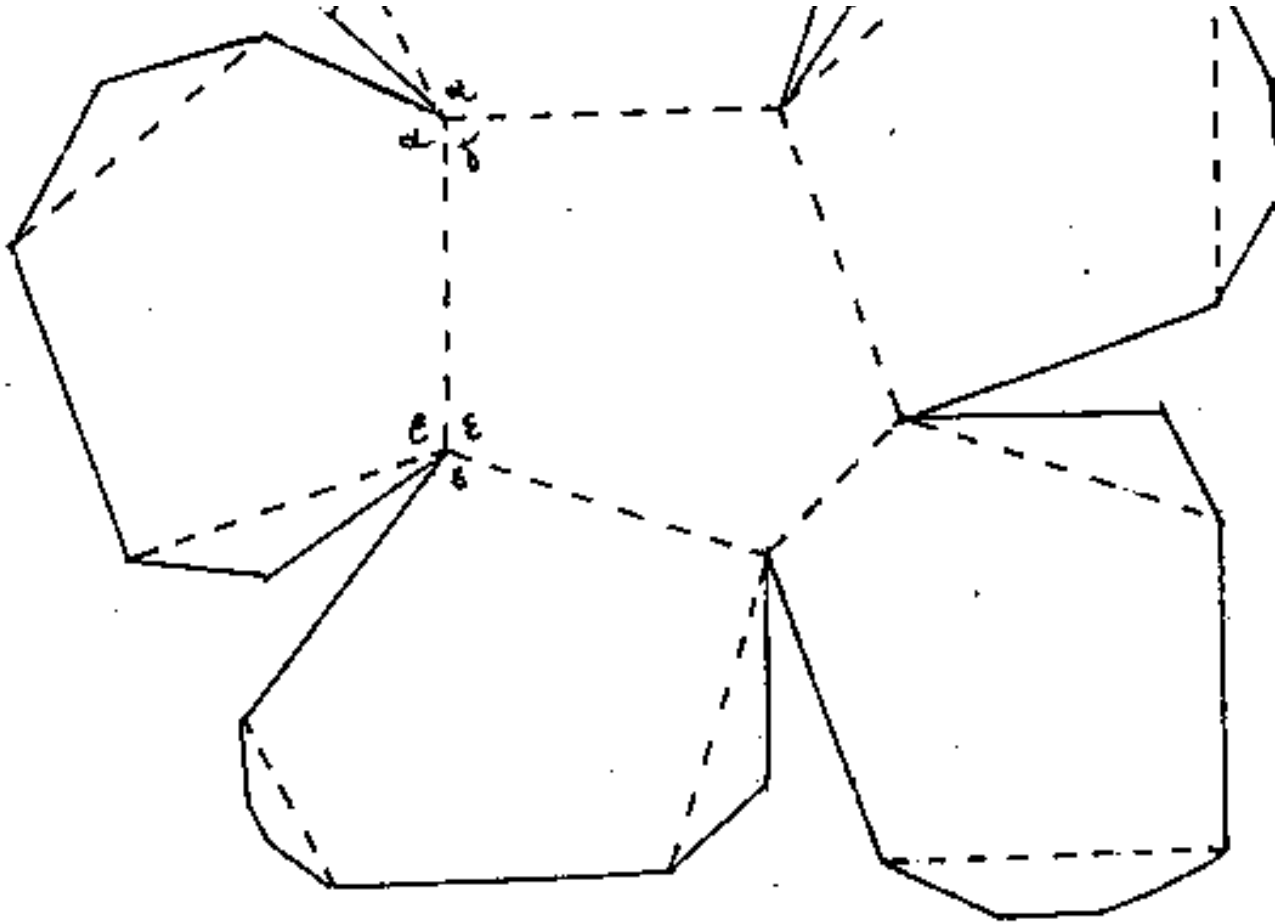
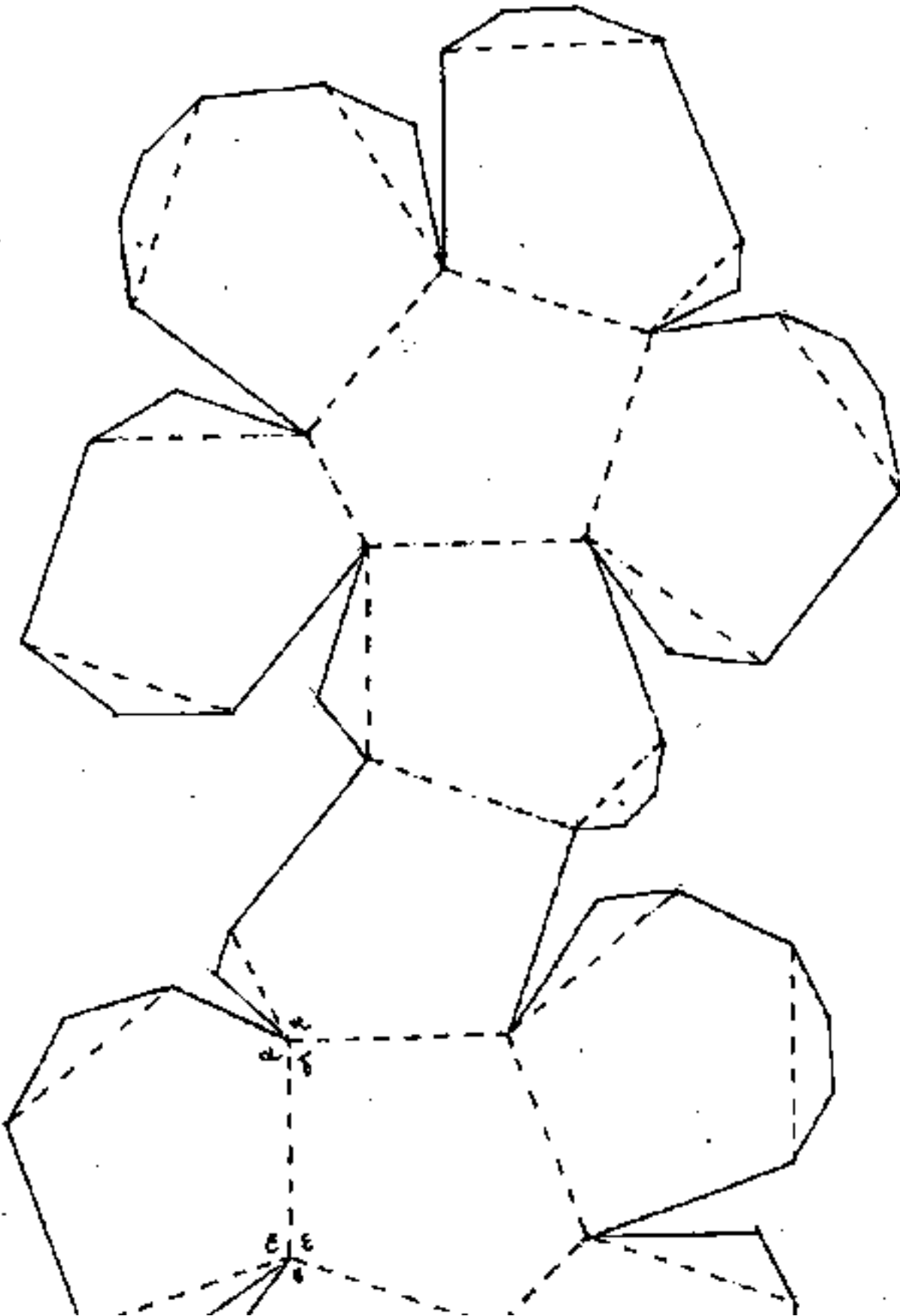
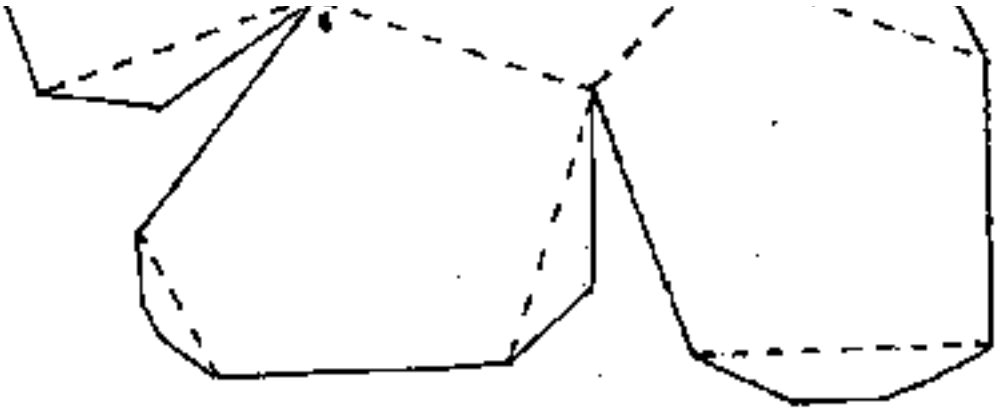
TABELLA

$K = m/l$	E/l	d/l	$V/l = \overline{PT}/l$	$U/l = \overline{QT}/l$	angoli delle facce			angoli diedri		NOTE
					$P\hat{F}M = P\hat{E}L$	$E\hat{P}F$	$E\hat{L}M = F\hat{M}E$	$\hat{D}_{(m)}$	$\hat{D}_{(d)}$	
0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	109° 28' 16",3	70° 31' 43",61	—	—	120°	rombododecaedro
0,1	0,4743416	0,8231039	0,6538348	0,6892024	109° 27' 08",98	74° 48' 42",01	123° 08' 30",01	93° 01' 01",05	119° 57' 14",9	
0,2	0,4472136	0,7810250	0,600000	0,6708204	109° 23' 14",8	79° 36' 40",11	120° 48' 25",1	96° 22' 45",73	119° 47' 43",3	
0,3	0,4183300	0,7399324	0,5454356	0,65119202	109° 15' 29",8	85° 01' 22",35	118° 13' 48",9	100° 09' 51",29	119° 28' 55",8	
0,4	0,3872983	0,70000	0,4898979	0,6324555	109° 02' 18",15	91° 10' 09",78	115° 22' 36",9	104° 28' 39"	118° 57' 18"	
0,5	0,3535534	0,6614378	0,4330127	0,6123724	108° 41' 08",67	98° 12' 47",56	112° 12' 27",5	109° 28' 16",3	118° 07' 31",82	
0,6	0,3162278	0,6244998	0,3741657	0,5916080	108° 07' 48",86	106° 22' 57",6	108° 40' 42",3	115° 22' 36",9	116° 51' 22",5	
0,618033988	0,3090170	0,6180340	0,3632713	0,5877853	108° 00' 00"	108° 00' 00"	108° 00' 00"	116° 33' 54",1	116° 33' 54",1	dodecaedro regolare
0,7	0,2738613	0,5894913	0,3122499	0,5700877	107° 14' 36",1	116° 01' 49",66	104° 44' 29"	122° 34' 44",2	114° 55' 05",78	
0,8	0,2236068	0,5567764	0,2449490	0,5477226	105° 45' 12",1	127° 47' 59"	100° 20' 48",3	131° 48' 37",1	111° 52' 51",1	
0,9	0,1581139	0,5267827	0,1658312	0,5244044	102° 54' 08",18	143° 18' 09",3	95° 26' 47",3	144° 54' 11",5	106° 42' 25",6	
1	0	0,5	0	0,5	90°	180°	90°	180°	90°	cubo a facce rigate

Pentagono dodecaedro (4 lati uguali)
simmetrico – k = 0,40 ; d = 0,70 ; l = 1 ;

Pentagono dodecaedro (4 lati uguali)

simmetrico — $k = 0{,}40$; $d = 0{,}70$; $l = 1$;

d
d
b
E
E
b

Tracciamo anche la <u>prima e seconda proiezione del pentagonododecaedro</u> simmetrico, a quattro lati uguali con $m/\ell = 0,4$.

Nel disegno si è evidenziato punteggiando la proiezione del cubo interno di spigolo ℓ e si sono riportate in figura le denominazioni che si sono proiettate in vera grandezza, da cui ricaviamo:

$$H = (u+v)\cos(\hat{D}_{mu} - 90°) + m \,\text{sen}\, \hat{D}_{mu}/2$$

$$H/\ell = 1,402938$$

notare che $H < \ell\sqrt{2}$.

L'area di una faccia sia

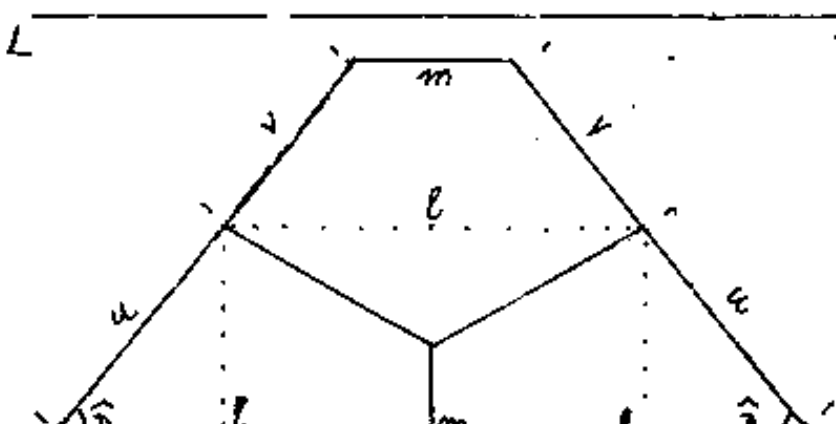
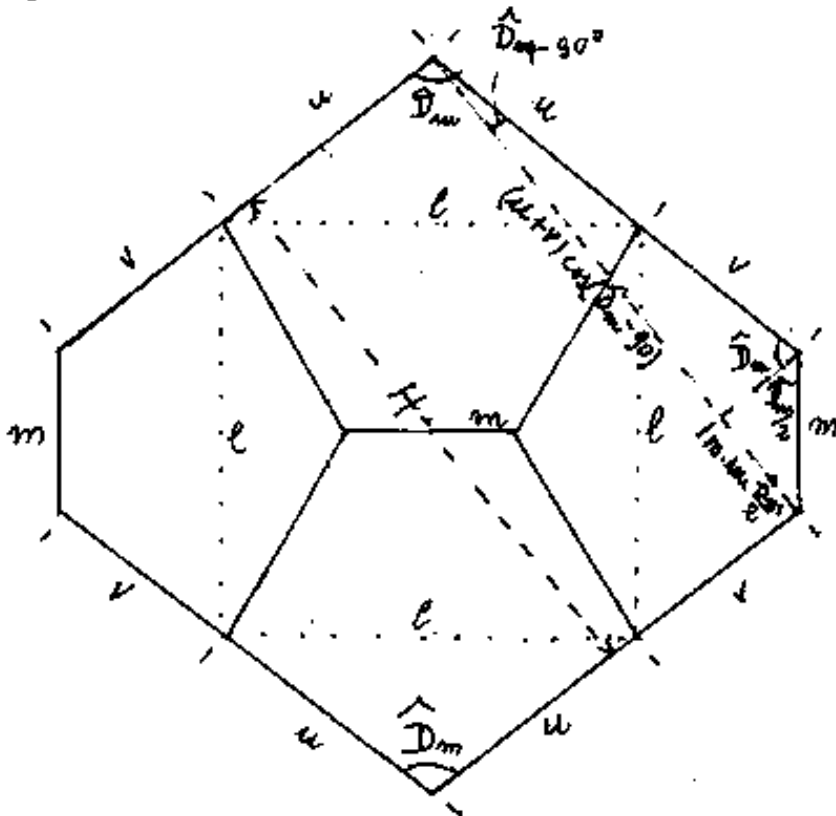
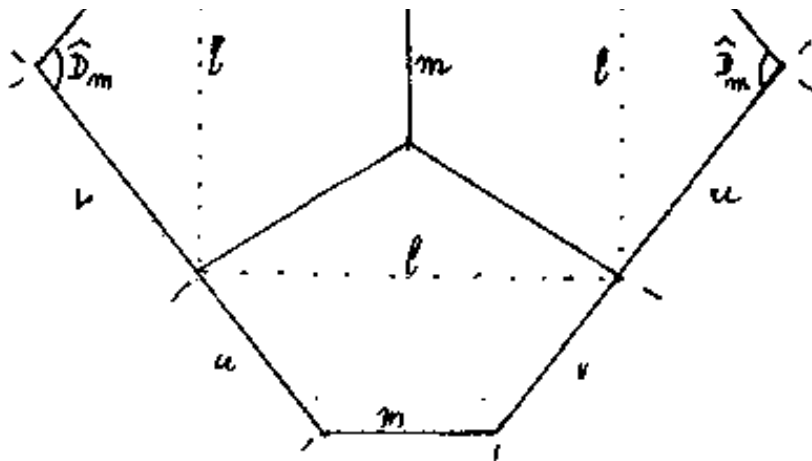
$$S_f = \frac{\ell \cdot v}{2} + \frac{\ell + m}{2} u$$

$$S_f = \ell^2 (0,687667846)$$

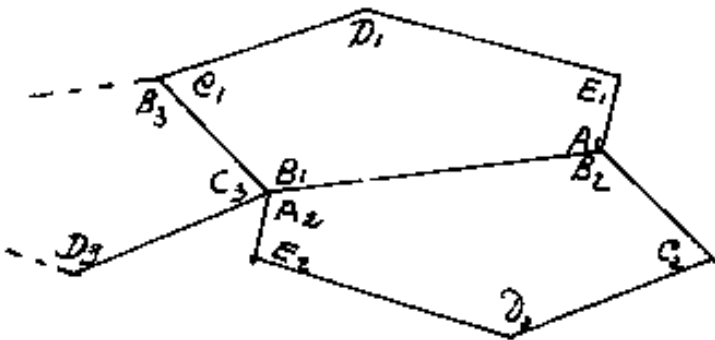
<u>Superfici laterale del solido</u>

$$S\ell = \ell^2 (8,25201416)$$

<u>Volume del solido:</u>

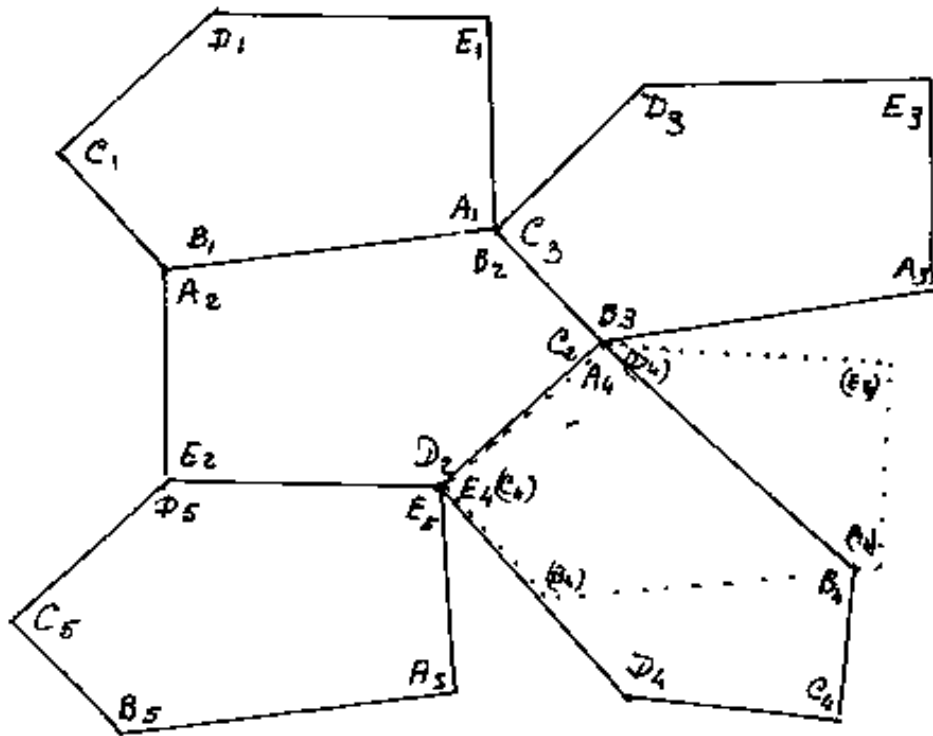
$$V = 12\left(\frac{Sf \cdot (H/2)}{3}\right) =$$

$$V = \ell^3 (1{,}9295107)$$

Abbiamo trattato un solido pentagono-dodecaedro (tetartoedro) avente facce pentagonali con quattro lati uguali ed uno diverso, simmetriche rispetto al l'asse del lato diverso (variabile). Comunque il lato diverso varia, come misura, rispetto alla misura de. gli altri quattro da zero (romboedro), a due (cubo), quando il rapporto è uno (dodecaedro regolare). Noi ab= biamo preso il parametro rispetto allo spigolo del cubo: parametro "l" variabile da zero ad uno.

Cerchiamo ora di generalizzare il solido e e vediamo quali limitazioni si impongono alla irre= golarità delle facce.

1) Impossibile un solido pentagono-dodecaedro avente le facce uguali, con lati tut ti diversi fra loro.

B_3 C_1 D_1 E_1 A_1 B_2 C_3 B_1 A_2 D_3 E_2 D_2 C_2

Infatti, nel fare il modello, si

nota che, facce adiacenti, possono unirsi avendo in comune lo stesso spigolo (lati di faccia della stessa lunghezza: $\overline{BA} = \overline{AB}$; $\overline{BC} = \overline{CB}$; ecc.). (Attenzione, leggendo i simboli delle facce nello stesso verso orario avremmo: $\overline{B_1 A_1} = \overline{A_2 B_2}$ $\overline{B_1 C_1} = \overline{C_3 B_3}$) Ma ogni vertice è comune solo a tre facce, per cui, (vedi figura), nel vertice: $B_1 A_2 C_3$ dovrebbe essere $\overline{C_3 D_3} = \overline{A_2 E_2}$, impossibile essendo diversi i lati delle facce.

2) E' impossibile un solido pentagonododecaedro le cui facce abbiano solo due lati uguali fra loro.

Infatti, dall'esempio precedente, disegnamo una faccia pentagonale con: $\overline{EA}=\overline{CD}$. I lati $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, in quanto diversi, possono affiancarsi solo ad omonimi di altra faccia. (vedi figura)

Avremo così: $\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}$; $\overline{B_2C_2}=\overline{B_3C_3}$; $\overline{E_2D_2}=\overline{E_5D_5}$ il lato $\overline{C_2D_2}$ può unirsi sia con $\overline{(C_4)(D_4)}$, sia con $\overline{E_4A_4}$.

Se poniamo $\overline{C_2D_2}=\overline{(C_4)(D_4)}$, si nota che: $\overline{(D_4)(E_4)}\neq\overline{B_3A_3}$, ed $\overline{E_5A_5}\neq\overline{(B_4)(C_4)}$ non consentono la costruzione.

Se poniamo $\overline{C_2D_2}=\overline{E_4A_4}$ avremo $\overline{A_3B_3}=\overline{A_4B_4}$, ma i lati: $\overline{E_5A_5}\neq\overline{E_4D_4}$ non consentono la costruzione.

Abbiamo preso due lati uguali non consecutivi

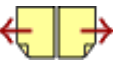
Abbiamo preso due lati uguali non consecutivi

altrimenti, se consecutivi, l'impossibilita' resta

dimostrata fino dal 1) esempio.

Restano ora le seguenti condizioni:

3) 3 lati non consecutivi uguali (impossibile)

4) 3 lati consecutivi uguali (impossibile)

5) due coppie di lati uguali non consecutivi (impossibile)

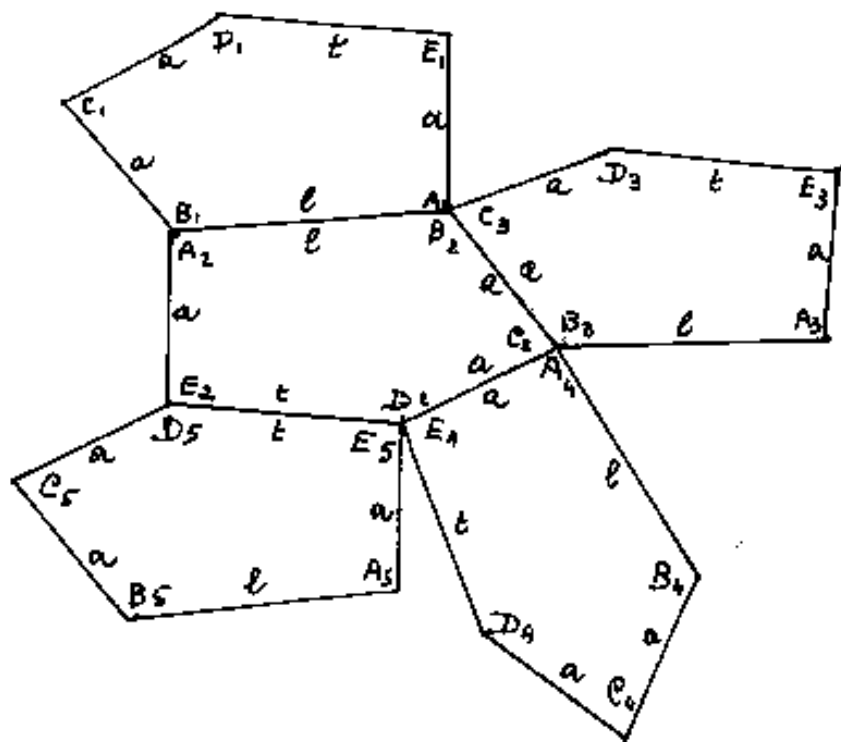
6) due coppie di lati uguali di cui uno non consecutivi (impossibile)

7) due coppie di lati uguali consecutivi

8) una coppia di lati uguali non consecutivi e tre lati uguali (impossibile)

9) una coppia di lati uguali consecutivi e tre lati uguali

10) 4 lati uguali

11) 5 lati uguali.

3) Tre lati uguali non consecutivi:

(lati uguali = a ; diversi: l, t)

Impossibile perchè in $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ il collegamento è obbligato, ed anche $\overline{E_2D_2} = \overline{E_5D_5}$ è obbligato.

Per $\overline{B_2C_2}$ se poniamo $\overline{B_2C_2} = \overline{C_3D_3}$ avremmo $\overline{E_1A_1} \neq \overline{D_3E_3}$;

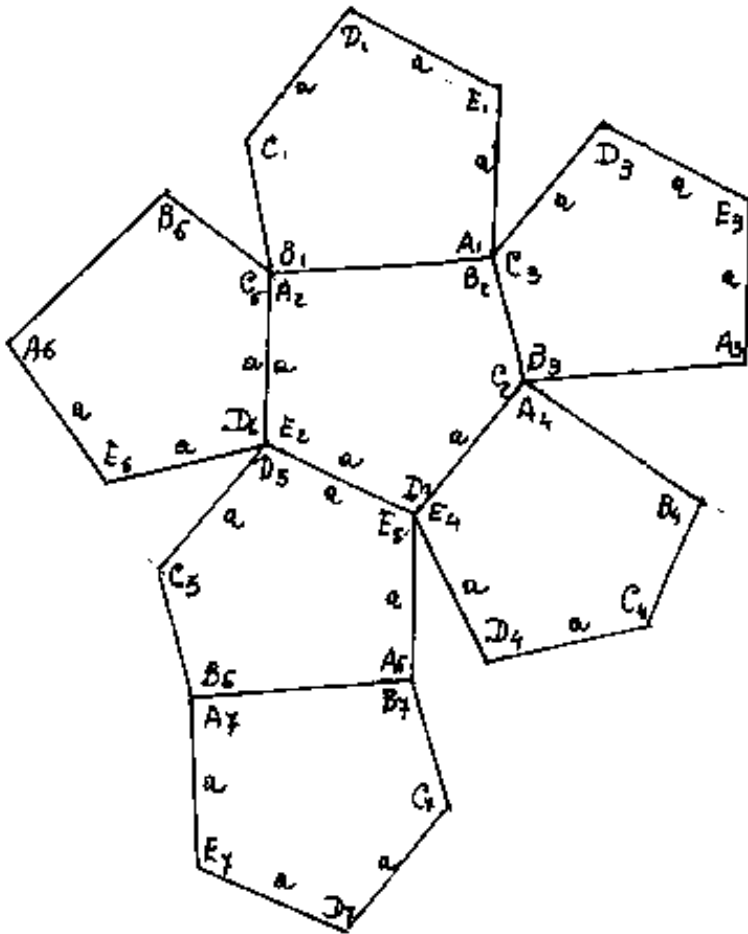
se poniamo: $\overline{B_2C_2} = \overline{E_3A_3}$ avremmo $\overline{E_1A_1} \neq \overline{A_3B_3}$

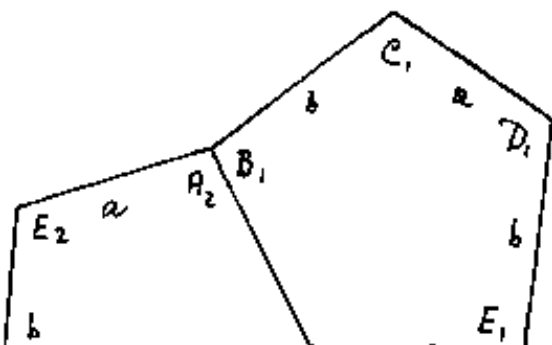
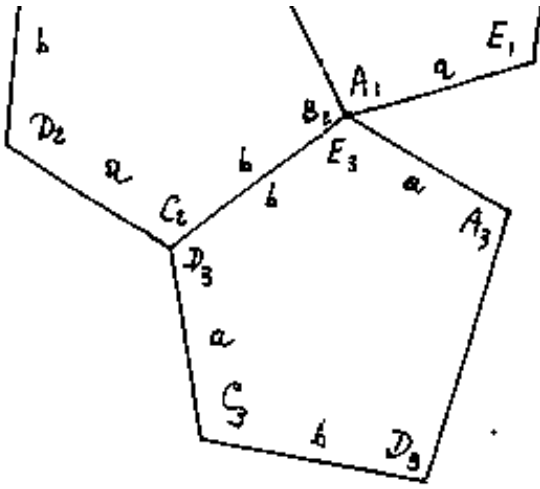
Resta compatibile $\overline{B_2C_2} = \overline{C_3B_3}$ perchè $\overline{A_1E_1} = \overline{C_3D_3}$

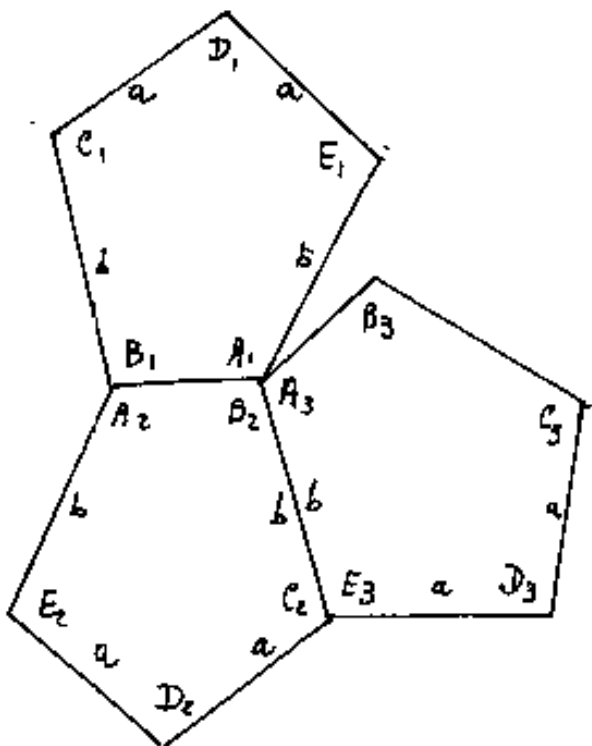
Come si vede, le facce che abbiamo affiancato sono obbligate, però è comunque impossibile affiancare la faccia 4 alla 2 su $\overline{C_2D_2}$. Se: $\overline{C_2D_2} = \overline{A_4E_4}$ si ha: $\overline{E_5A_5} \neq \overline{E_4D_4}$;

Se $\overline{C_2D_2} = \overline{C_4D_4}$ si ha: $\overline{E_4D_4} \neq \overline{B_3A_3}$; se $\overline{C_2D_2} = \overline{C_4B_4}$ si ha $\overline{D_4C_4} \neq \overline{B_3A_3}$;

$\overline{E_5A_5} \neq \overline{A_4B_4}$. D'altra parte $\overline{A_2E_2}$ vuole tre lati uguali consecutivi.

che nessuna faccia del caso 3) può soddisfare, e ne conferma l'impossibilità.

4) Tre lati consecutivi uguali (a)

Impossibile perchè l'applicazione delle facce: 1, 3, 4, 5, 6 intorno alla 2 è obbligato come in figura; ma ciò rende impossibile l'applicazione della faccia 7 perchè: $\overline{B_7C_7} \neq \overline{C_4D_4}$

5) Due coppie di lati uguali (a) e (b) non consecutivi.

Impossibile perchè: $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$, obbligato; se: $\overline{C_2B_2} = \overline{E_3D_3}$ occorrerebbe una faccia con due "a" consecutivi da porre in $\overline{D_2C_2} = \overline{D_3C_3}$.

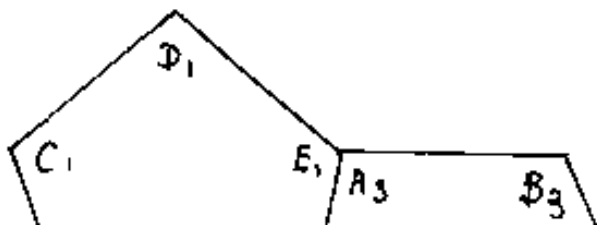
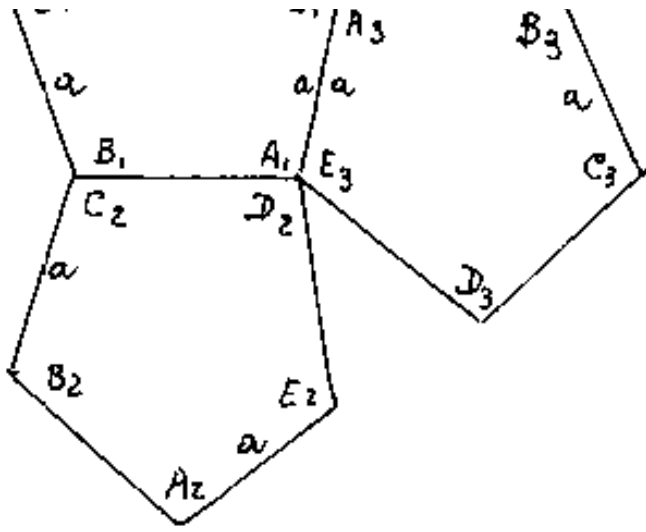
Se: $\overline{C_2B_2} = \overline{C_3D_3}$, avremmo un $\overline{E_2D_2} = \overline{E_4D_4}$ che rende impossibile una faccia 5 con due lati b consecutivi.

6) Due coppie di lati uguali di cui in una non consecutivi.

Impossibile perché: $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ obbligato. Se $\overline{B_2C_2} = \overline{A_3E_3}$, si ha: $\overline{A_1E_1} \neq \overline{A_3B_3}$. Se $\overline{B_2C_2} = \overline{B_3C_3}$, si ha: $\overline{A_1E_1} \neq \overline{C_3D_3}$.

---

7)* Due coppie di lati uguali consecutivi.

E' possibile la costruzione dei vertici e degli spigoli comuni, resta da vedere se le facce si mantengono piane, caso che esamineremo dopo.

---

8) Una coppia di lati (a) uguali non consecutivi

(a) e tre lati uguali

Impossibile, infatti si hanno due modalità per affiancare il lato $\overline{E_1A_1}$, cioè: $\overline{E_1A_1} = \overline{A_3E_3}$ che obbliga: $\overline{A_1B_1} = \overline{C_2D_2}$, ed implica $\overline{C_1B_1} = \overline{C_2B_2}$ ed occorrerebbero due lati uguali consecutivi (impossibile).

$\overline{E_1A_1} = \overline{B_3C_3}$ obbliga ancora $\overline{A_1B_1} = \overline{D_2C_2}$ come prima; (impossibile).

9) Una coppia di lati uguali consecutivi e tre lati uguali.

È un caso particolare del caso 7*) che tratteremo; il caso simmetrico è già stato trattato all'inizio.

10) Quattro lati uguali

Anche questo è un caso particolare del 7*) quando il rapporto fra i lati delle due coppie è 1 che tratteremo dopo il 7*). Come simmetrico vedi tabella all'inizio.

11) Cinque lati uguali

Ammette solo variazioni angolari, vedremo che ammette solo il dodecaedro regolare

Solo tre delle undici condizioni, sui lati delle facce pentagonali, risultano non impossibili alla costruzione del solido; e poiché il caso 7*) in una trattazione generale comprende le condizioni dei casi 9), 10), 11), esaminiamo il caso 7*) in generale

caso f°) in generale.

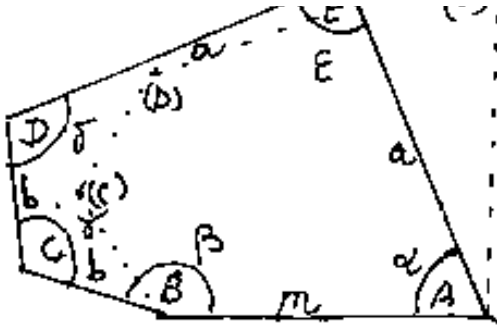
caso 7*)

Classe di solidi a facce pentagonali aventi per lati due coppie diverse di lati uguali consecutivi ed un lato diverso da quello delle coppie agli estremi delle coppie stesse.

Sia $\overline{AB}$ il lato diverso: $\overline{AB} = m$; e siano rispettivamente uguali ad "a" i lati della coppia dalla parte A di m e siano uguali a "b" i lati della coppia dalla parte B di m.

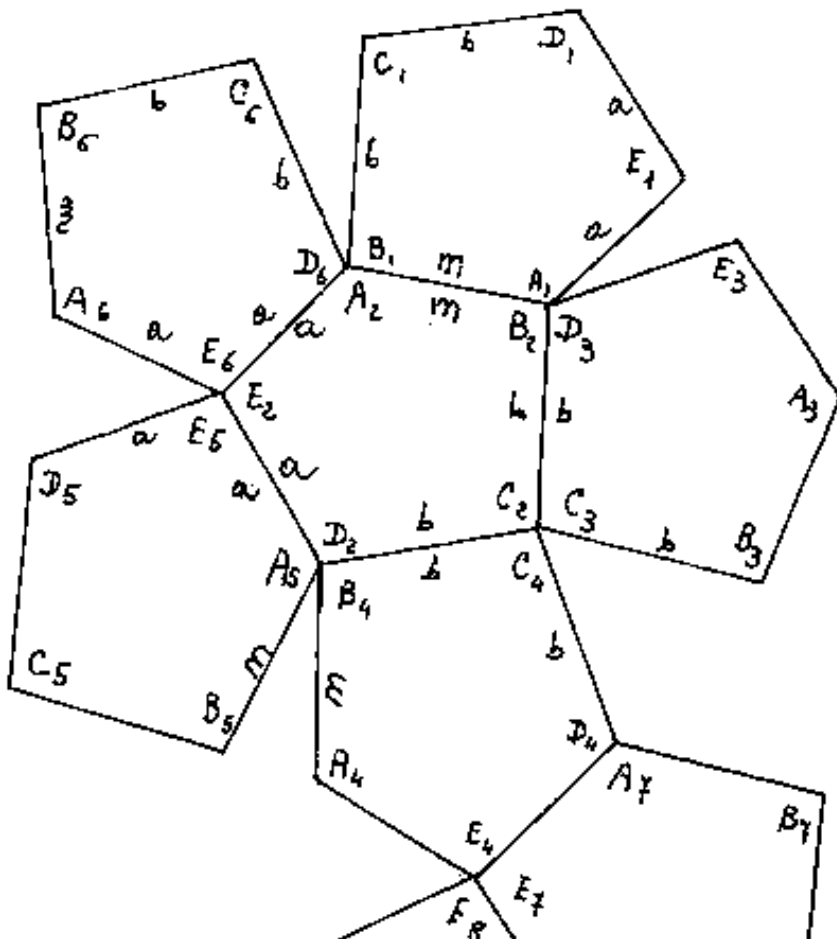
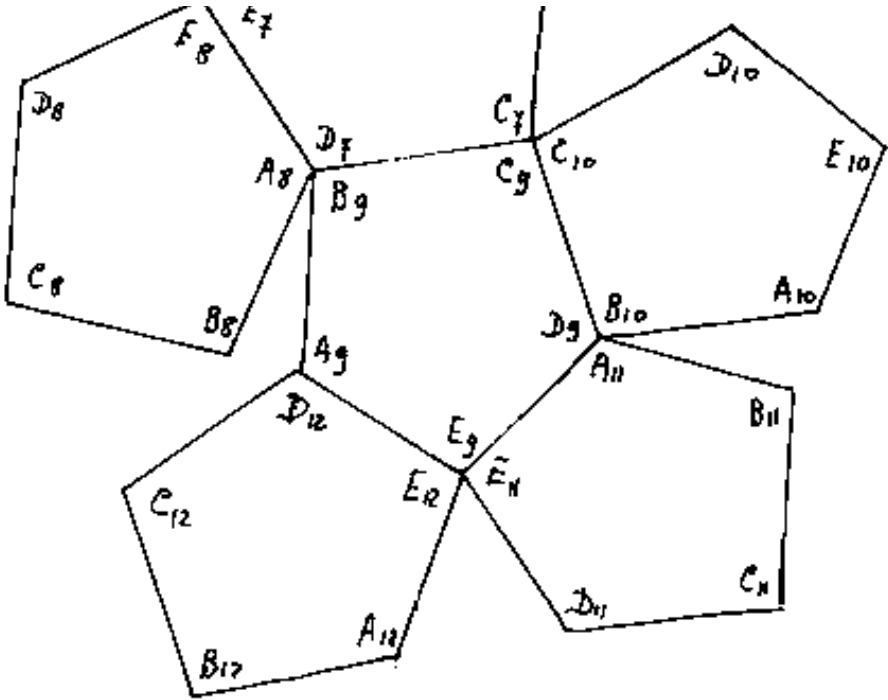
Appare ovvio che se noi applichiamo le lettere nei vertici in sequenza oraria od antioraria avremo due solidi detti destro e sinistro.

Esaminiamo ora i limiti di grandezza dei lati, limite che necessariamente dipende dalla

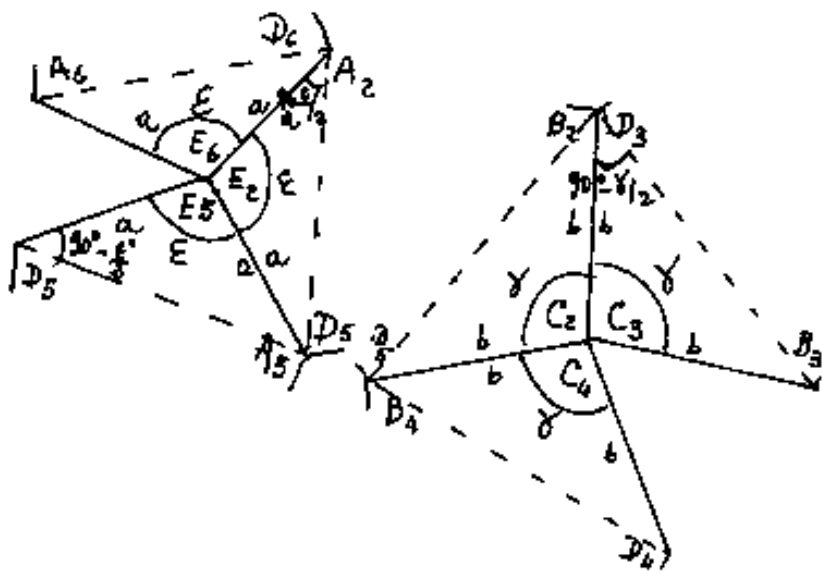
(E) grandezza degli altri, ma an

che dagli angoli. La sola grandezza dei lati non definisce la configurazione della faccia, infatti con gli stessi lati si possono avere infinite configurazioni: ABCDE, AB(C)(D)(E), e da queste distinguere quelle per le quali è possibile il solido, se ve ne sono.

Per le misure lineari si ha:

$0 < m < 2(a+b)$; $0 < 2a < (m+2b)$; $0 < 2b < (m+2a)$

non solo, ma per ogni triangolo in cui può essere scomposto il pentagono, (avente gli stessi vertici della faccia pentagonale) per l'esistenza vale il principio che ogni lato del triangolo deve essere maggiore della differenza degli altri due e minore della loro somma.

Indichiamo con α, β, γ, δ, ε, gli angoli della faccia, rispettivamente in A, B, C, D, E. Indichiamo con $\widehat{D}_E$ l'angolo diedro sugli spigoli uscenti da E, cioè: $\widehat{D}_{ED} = \widehat{D}_{EA}$ dovrà essere: $\widehat{D}_{ED} = \widehat{D}_{DE}$, $\widehat{D}_{EA} = \widehat{D}_{AE}$

Indichiamo con $\hat{D}_C$ il diedro sugli spigoli uscenti da C, cioè: $\hat{D}_{CB} = \hat{D}_{CD}$; indichiamo con $\hat{D}_{AB}$ l'angolo diedro sullo spigolo $\overline{AB}$ che congiunge i vertici ABD.

Nel solido vi sono 4 vertici C ; 4 vertici E ; e 12 vertici ABD.

Si noti che i vertici "E" ed i vertici "C", possono considerarsi vertici di piramidi a base triangolare equilatera rispettivamente di lato $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$. e di spigoli rispettivamente uguali $\overline{ED} = \overline{EA} = a$ ed $\overline{CD} = \overline{CB} = b$; come si può vedere in figura.

Ricordando che il calcolo dei diedri si è ricavato prima con la formula del coseno in trigonometria sferica, poi col calcolo

dell'altezza relativa allo spigolo per facce triangolari, per i nostri diedri avremo:

$$\hat{D}_{AB} = \arccos\left(\frac{\cos\delta - \cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}\right)$$

$$\hat{D}_E = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2\cos\varepsilon/2}\right) \quad ; \quad \hat{D}_C = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2\cos\gamma/2}\right)$$

si può anche scrivere:

$$\cos(\hat{D}_E) = \frac{1}{1 + 1/\cos(\varepsilon)} \qquad \cos(\hat{D}_C) = \frac{1}{1 + 1/\cos(\gamma)}$$

Si deve però notare che gli spigoli uscenti da E o gli spigoli uscenti da C hanno l'altro estremo nei vertici $\widehat{ABD}$ ove le facce che vi convergono hanno angoli diversi, in base ai quali si possono calcolare i diedri:

$$\hat{D}_E = \arccos\left(\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma}\right) \qquad \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\cos(\varepsilon)}}\right) = \cos\hat{D}_E$$

$$\hat{D}_C = \arccos\left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}\right) \qquad \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\cos x}}\right) = \cos\hat{D}_C$$

Poiché sullo stesso spigolo gli angoli diedri debbono essere costanti il confronto fra le due espressioni implica una correlazione angolare che condiziona "essere piane" le superfici delimitate dagli spigoli interessati e quindi essere piana la superficie delle facce.

Per determinare una faccia pentagonale piana occorrono 7 elementi di cui almeno una misura lineare. Per figure simili avremo dei coef=

... e lineare. Per figure simili avremo dei coef-
ficienti: nel nostro caso potremmo porre $b = Km$;
$a = Hm$, se consideriamo "m" come modulo unitario.
Poiché "a" e "b" sono le misure di coppie di lati, con
i coefficienti: "H" e "K" copriamo ben 5 misure lineari
quindi bastano due angoli (per es. ε, γ) per
definire la faccia. Se poniamo $\hat{D}_E = \hat{D}_C$ (uguaglianza di diedri) $\varepsilon = \gamma = \varphi$; per cui: K, H, φ; definiscono la faccia.

Poiché nei vertici E o C vi sono tre angoli di faccia uguali (3ε o 3γ) questi angoli dovranno essere minori di 360° affinché il vertice non sia piano: $3\varepsilon < 360°$; $3\gamma < 360°$ e quindi per $\varepsilon = \gamma = \varphi$ (diedri uguali) $3\varphi < 360°$;

cioè: $\boxed{\varphi < 120°}$ anche $\boxed{\varepsilon < 120°}$; anche $\boxed{\gamma < 120°}$

vediamo alcuni valori caratteristici di φ in vertici a 3 facce

per $\varphi = 60°$ si ha: $\hat{D}_\varphi = 70° 31' 43'',6$ tetraedro

$\varphi = 90°$ " $\hat{D}_\varphi = 90°$ cubo

$\varphi = 108°$ " $\hat{D}_\varphi = 116° 33' 54'',1$ dodecaedro regolare

$\varphi = 109° 28' 16''$ " $\hat{D}_\varphi = 120°$ romboedro

$\varphi = 115° 15' 47'',4$ " $\hat{D}_\varphi = 138° 07' 04'',65$ trapezoedro

$\varphi = 120°$ " $\hat{D}_\varphi = 180°$ le facce sono in piano

Ma anche per i vertici ABD dovrà essere: $(\alpha+\beta+\delta) < 360°$ affinché siano convessi, quindi $540° - (\alpha+\beta+\delta) > 180°$; $540° - 2\varphi < 360°$

$\varphi > \frac{540-360}{2}$; $\varphi > 90°$, cioè le condizioni di possibilità di un solido a diedri uguali per cui: $\varepsilon = \gamma = \varphi$

impongono: $\boxed{90° < \varphi < 120°}$

La condizione che le facce si mantengano piane nel solido:

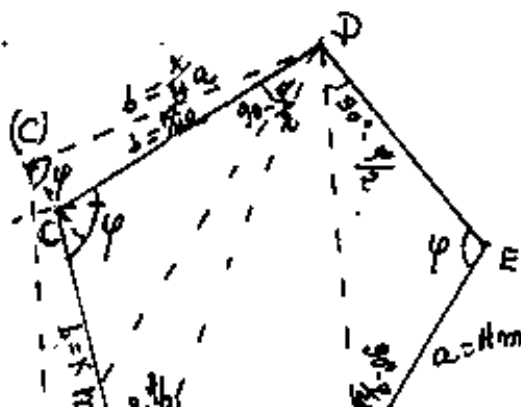
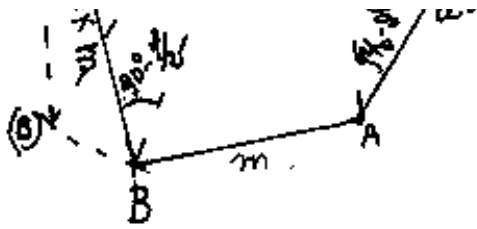
La condizione che le facce si mantengano piane nel solido:

$$\cos(\hat{D}_E) = \frac{1}{1+\frac{1}{\cos\varphi}} = \boxed{\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\delta}{\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\delta} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\delta}{\operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\delta}} = \cos(\hat{D}_C)$$

sviluppando si ha:

$$\operatorname{sen}\beta\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\delta = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\delta$$

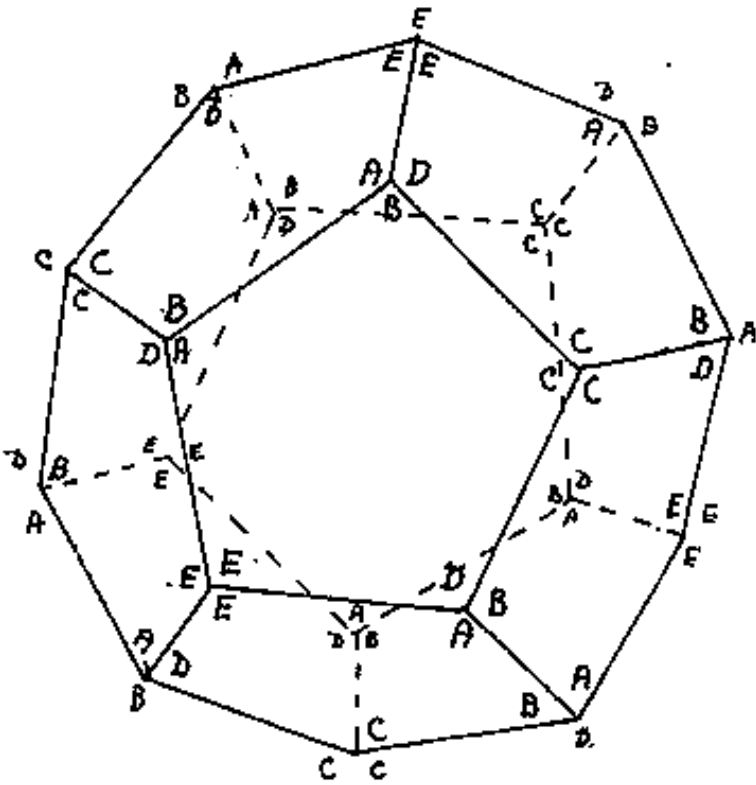
solidi a facce curve

Noti K, H, φ, vediamo la costruzione grafica.
sia $\varphi = 109°$, $b/a = 1,20$. $m/a = 0,90$. (scelti a caso).
Scelta una scala di uno scalimetro in cui $a = 1$
partiamo da A e tracciamo il segmento $\overline{AE} = a = 1$
in E tracciamo l'angolo φ che definisce la dire=
zione $\overline{ED}$ e su di essa riportiamo il segmento $a = 1 = \overline{ED}$;
resta così definito il punto D, la distanza $\overline{DA} =$
$= 2a \operatorname{sen} \frac{1}{2}\varphi$; nonché gli angoli $D\hat{A}E = A\hat{D}E = (90° - \frac{1}{2}\varphi)$.
In D non conoscendo l'angolo, non possiamo
tracciare la direzione $\overline{DC}$, tracciamo una direzio=
ne qualsiasi $\overline{D(C)}$ (ove: (C) indica C spostato), su tale
direzione riportiamo il segmento: $b = 1{,}20 \cdot a = \overline{D(C)} = 1,20$
resta con ciò definita la posizione di (C), ed in (C)
tracciamo l'angolo $\varphi = D\widehat{(C)}(B)$,
su $\overline{(C)(B)}$ riportiamo il segmen=
to $\overline{(B)(C)} = \overline{BC} = b = 1{,}2 \cdot a = 1,20$;
abbiamo così la vera distan=

za $\overline{D(B)} = \widehat{DB}$ ed i veri angoli:

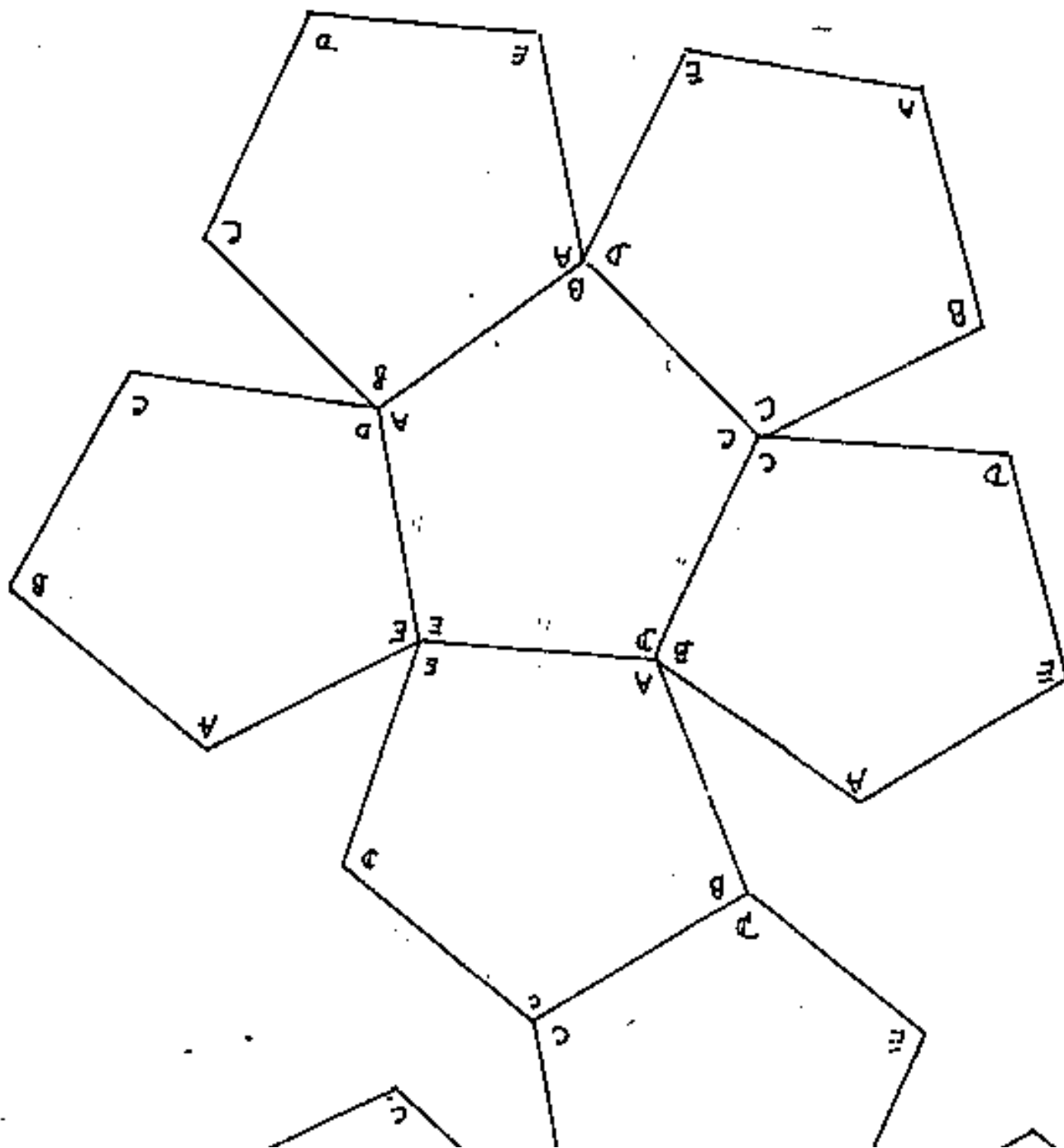
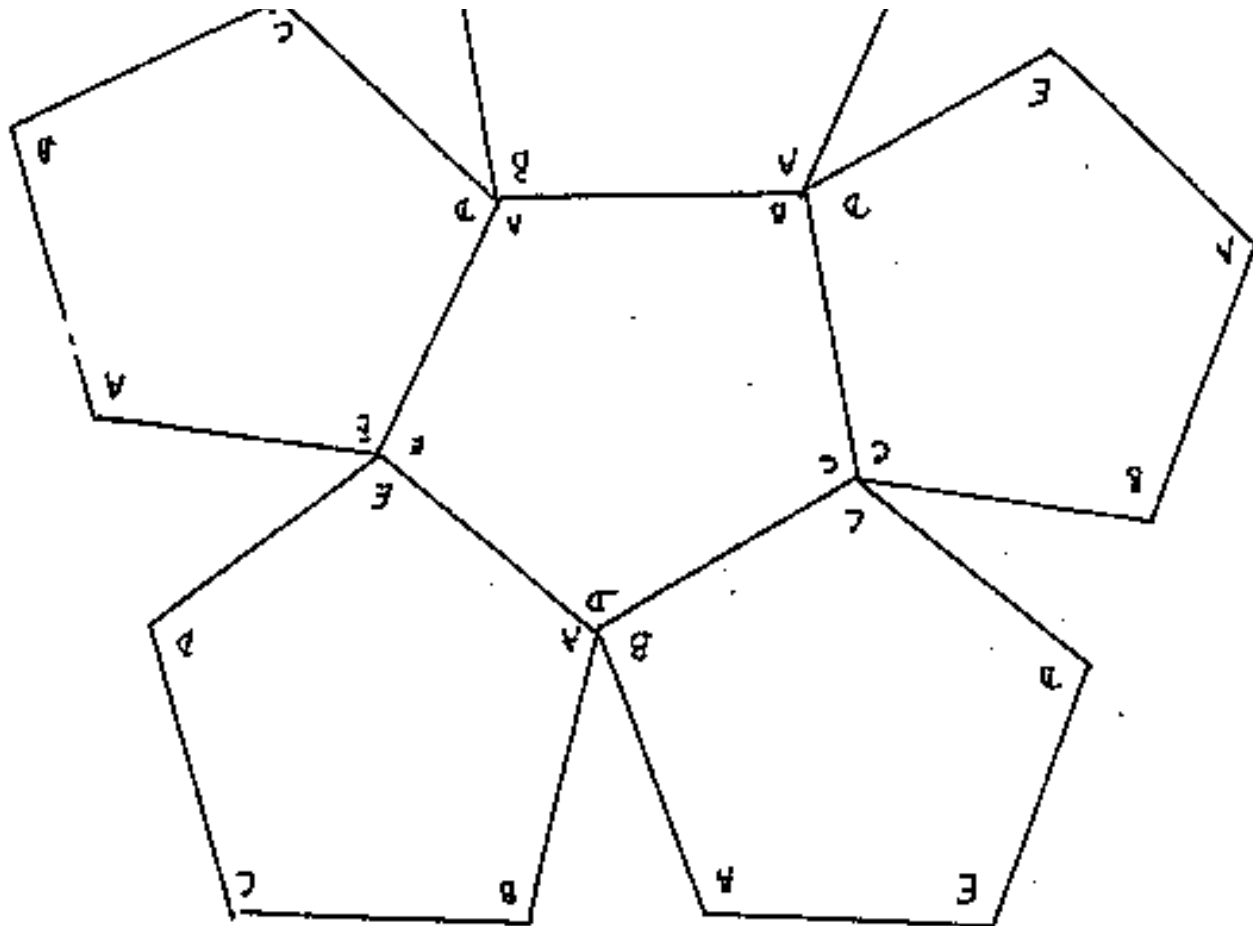
$\widehat{CDB} = \widehat{DBC} = (C)\widehat{D}(B) = D\widehat{(B)}(C) = (90° - \varphi/2)$.

centro in A con apertura 0,9, Centro in D con apertura $\overline{D(B)}$ si determina B. e quindi C facendo centro in D e B con apertura $b = 1,20$.

La costruzione grafica effettuata ci permette di calcolare tutti gli elementi della faccia.

Risulta quindi possibile la classe di solidi aventi 12 facce pentagonali uguali, delimitate da due coppie contigue diverse di lati uguali, ed un lato diverso. Assegnati due angoli, risultano calcolabili gli altri angoli, ed i rapporti fra i lati delle due coppie e col lato diverso. Diamo la prima proiezione del solido calcolato nell'esempio numerico; facilmente ricavabile dallo schema del modello.

Dalla proiezione è più facile evidenziare le irregolarità del solido, che ha angoli delle facce ed angoli diedri tutti diversi.

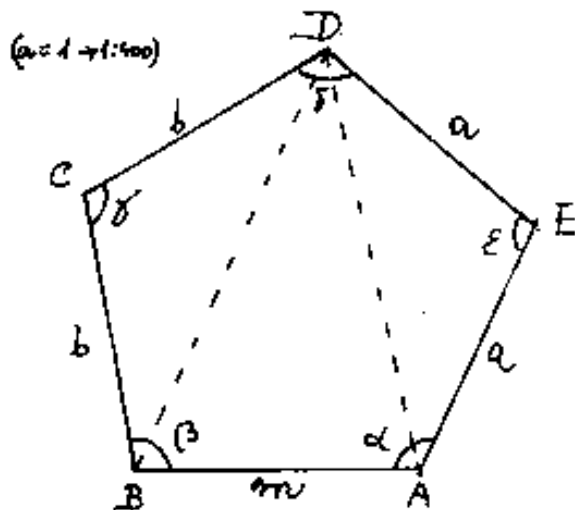
sviluppo di PENTAGONODODECAEDRO

2 coppie contigue diverse di lati uguali, angoli delle facce tutti diversi, diedri tutti diversi. facce uguali (dati dell'esempio numerico), che si mantengono piane

Il sistema può risolversi per tentativi. A tal fine facciamo un esempio numerico.

Fissiamo (arbitrariamente): $\alpha = 115°$; $\beta = 100°$,

affinché sia verificato il sistema ne consegue:

$\delta = 109°,1588707$; $\gamma = 109°,9373425$; $\varepsilon = 105°,6037867$

Da ciò deduciamo: (posto $a = \overline{AE} = \overline{ED}$)

$(90° - \gamma/2) = C\hat{D}B = D\hat{B}C = 35°,03132875$

$(90° - \varepsilon/2) = A\hat{D}E = D\hat{A}E = 37°,19810665$

$D\hat{B}A = 64°,96867125$; $D\hat{A}B = 77°,80189335$

$B\hat{D}A = 37°,22943530$

$\overline{AD} = 2a \,\text{sen}\frac{\varepsilon'}{2} = 1,593099794 \cdot a$

$\overline{BA} = \overline{AD}\,\frac{\text{sen}\,B\hat{D}A}{\text{sen}\,D\hat{B}A} = m = 1,06374952 \cdot a$

$\overline{BD} = \overline{AD}\,\frac{\text{sen}\,B\hat{A}D}{\text{sen}\,D\hat{B}A} = 2b\,\text{sen}\frac{\gamma}{2} = 1,718543707 \cdot a$

$\overline{CB} = \overline{CD} = b = 1,04937917 \cdot a$

Verifichiamo i diedri

$\hat{D}_E = \arccos\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\cos E}}\right) = 111°,5897451 = D_{AE} = \arccos\left(\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\delta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\delta}\right)$

$$\hat{D}_C = \arccos\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\cos\gamma}}\right) = 121°,1602176 = \hat{D}_{BC} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\delta}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\delta}\right)$$

$$\hat{D}_{AB} = \arccos\left(\frac{\cos\bar{\nu} - \cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}\right) = 117°,0946229$$

Diamo lo schema di questo solido.

L'aver posto: $\varepsilon = \gamma = \varphi$ fa decadere il caso 7)

Consideriamo in generale se è possibile il caso 7), per la compatibilità degli angoli diedri. Cioè consideriamo: $\varepsilon \neq \gamma$:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\cos\varepsilon}} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\delta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\delta} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{\cos\varepsilon}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\delta}{\cos\beta - \cos\alpha\cos\delta}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\cos\gamma}} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\delta}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\delta} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{\cos\gamma}\right) = \frac{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\delta}{\cos\alpha - \cos\beta\cos\delta}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^\circ$$

$$\frac{1}{\cos\varepsilon} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\delta + \cos\alpha\cos\delta - \cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha\cos\delta} = \frac{\cos(\alpha-\delta) - \cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha\cos\delta}$$

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\delta + \cos\beta\cos\delta - \cos\alpha}{\cos\alpha - \cos\beta\cos\delta} = \frac{\cos(\beta-\delta) - \cos\alpha}{\cos\alpha - \cos\beta\cos\delta}$$

$$\boxed{\cos\varepsilon = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\delta}{\cos(\alpha-\delta) - \cos\beta}}$$

formule fondamentali per la verifica della possibilità di un so

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\delta}{\cos(\beta-\delta) - \cos\alpha}$$

possibilità di un solido a facce piane

Quindi le due equazioni sono condizionate dalla: $(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = 540°$ e dalle limitazioni:

$\varepsilon < 120°$; $\gamma < 120°$; $\alpha + \beta + \delta < 360°$

un solido simmetrico ove: $a = b$ e quindi $\alpha = \beta$, ove ciò era possibile in una molteplicità di casi.

Per chiarire ciò basta notare che l'espressione:

$$\cos\delta = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen} 2\beta}{2 \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}$$

al limite di $\alpha = \beta$ diventa una forma in= determinata: $\frac{0}{0}$, che può assumere va= lori reali, e che la semplificazione della formula trasformata dalla prostaferesi è una divisione del valore di $\frac{0}{0}$ perciò la formula: $\delta = (\alpha + \beta)$ non vale per $\alpha = \beta$. ma vale per $\alpha \neq \beta$. $(\varepsilon = \delta = \varphi)$

Per meglio convincersi tratteremo il modello di un solido a facce non pia= ne.

Per meglio capire questo concetto consideriamo due

piani aventi in comune lo spigolo: $\overline{ED}$; le rette perpendicolari ad $\overline{ED}$ (giacenti su piani perpendicolari ad $\overline{ED}$) formano sempre lo stesso angolo $N_1\widehat{I}N_2$ qualunque sia il punto I della retta su cui giace $\widehat{ED}$ ed è pari al diedro perciò: se le facce sono piane deve essere: $\widehat{D}_{ED} = \widehat{D}_{DE} = N_1\widehat{I}N_2$.

$\varphi/2 = 54^\circ 30' 00''$; $(90^\circ - \varphi/2) = 35^\circ 30' 00''$; $H = 0{,}9\ a$

$\overline{AD} = 2a \operatorname{sen} \varphi/2 = 2 \operatorname{sen}(109^\circ/2) = (1{,}628231037)a$

$\overline{BD} = 2b \operatorname{sen} \varphi/2 = 2 \cdot 1{,}20\, a \cdot \operatorname{sen}(109^\circ/2) = (1{,}953877244)a$

$\widehat{BDA} = \arccos\left(\dfrac{\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BA}^2}{2(\overline{BD})(\overline{AD})}\right) = \arccos(0{,}889362763?) = \underline{27^\circ 12' 24'',19}$

$\widehat{D} = 2(90^\circ - \varphi/2) + \widehat{BDA} = 71^\circ\ 27^\circ 12' 24'',19 = \underline{98^\circ 12' 24'',19}$

$\widehat{BAD} = \arccos\left(\dfrac{\overline{BA}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{DB}^2}{2(\overline{BA})(\overline{AD})}\right) = \arccos(-0{,}121638475) = \underline{96^\circ 59' 12'',02}$

$\widehat{A} = (\widehat{BAD} + \widehat{DAE}) = 96^\circ 59' 12'',02 + 35^\circ 30' 00'' = \underline{132^\circ 29' 12'',02}$

$\widehat{DBA} = \arccos\left(\dfrac{\overline{BA}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2}{2(BA)(BD)}\right) = \arccos(0{,}561987988) = \underline{55^\circ 48' 23'',79}$

$\widehat{B} = (\widehat{DBA} + \widehat{DBC}) = 55^\circ 48' 23'',79 + 35^\circ 30' 00'' = \underline{91^\circ 18' 23'',79}$

$\widehat{BDA} = 27^\circ 12' 24'',19 +$;
$\widehat{BAD} = 96^\circ 59' 12'',02 +$
$\widehat{DBA} = 55^\circ 48' 23'',79 =$
$180^\circ 00' 00'',00$.

$2\varphi = 218 = (C + E)$
$D = 98\ 12' 24'',19$
$A = 132\ 29' 12'',02$
$B = 91^\circ 18' 23'',79$
$540^\circ 00' 00'',00$

quindi la sezione è definita nel piano, resta da vedere se si mantiene piana costruendo il solido; a tal fine calcoliamo gli angoli diedri.

$\widehat{D}_{EA} = \widehat{D}_{ED} = \widehat{D}_{CD} = \widehat{D}_{CB} = \arccos\left(\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\cos\varphi}}\right) = 118^\circ 51' 49'',7$

cos φ 1

$$\hat{D}_{DE} = \arccos\left(\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\delta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\delta}\right) = 99°\ 24'\ 1'',86$$

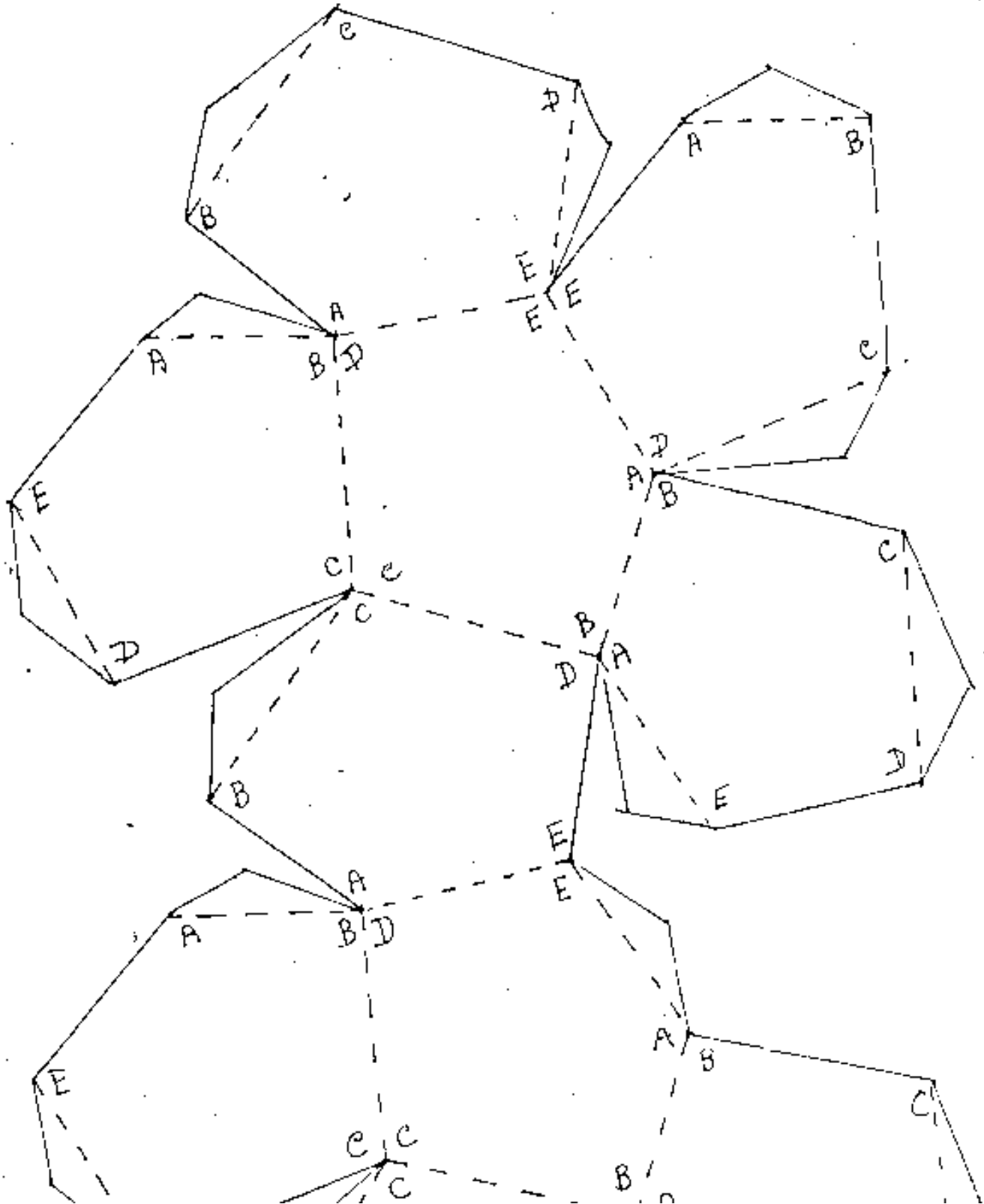
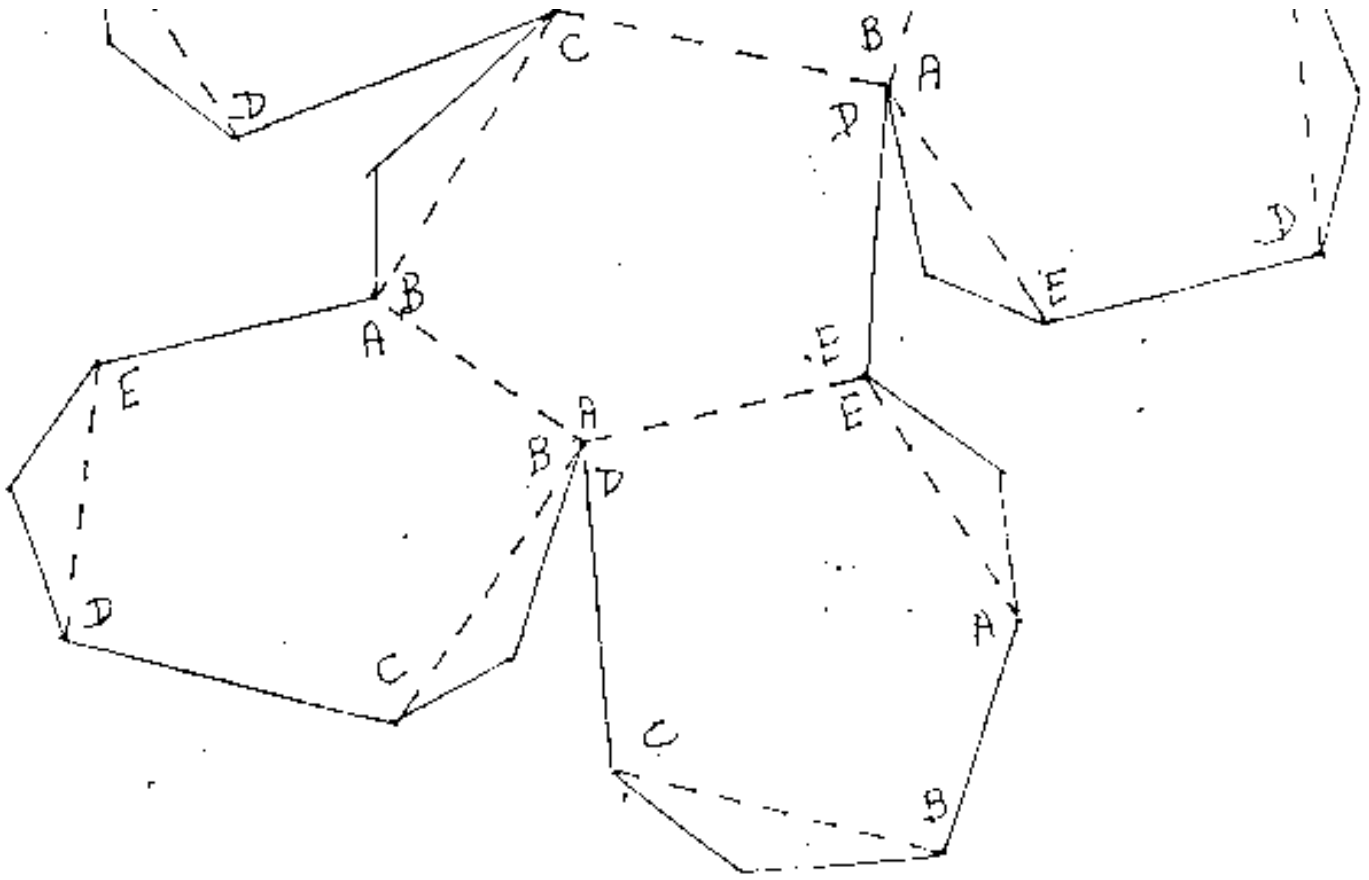
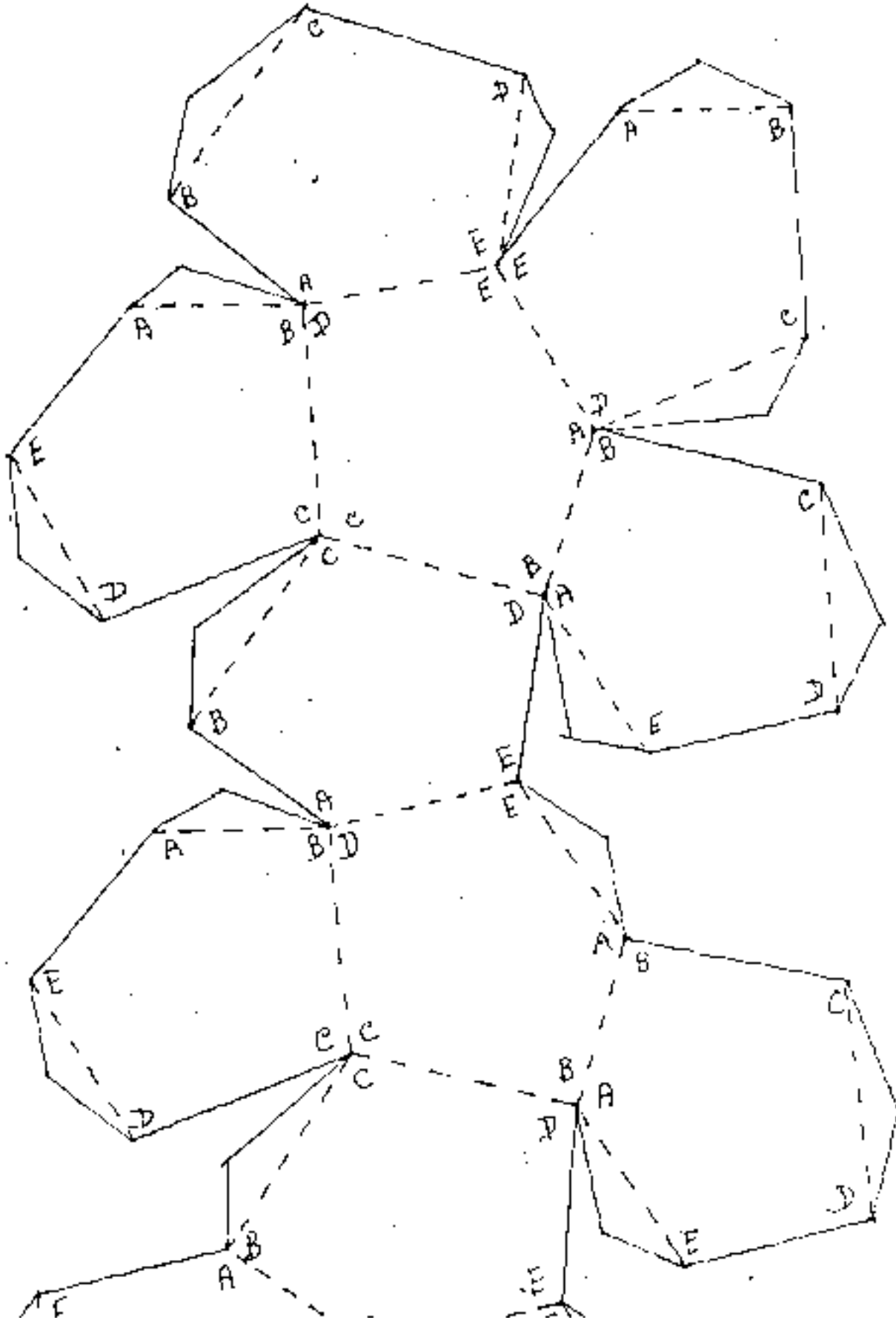
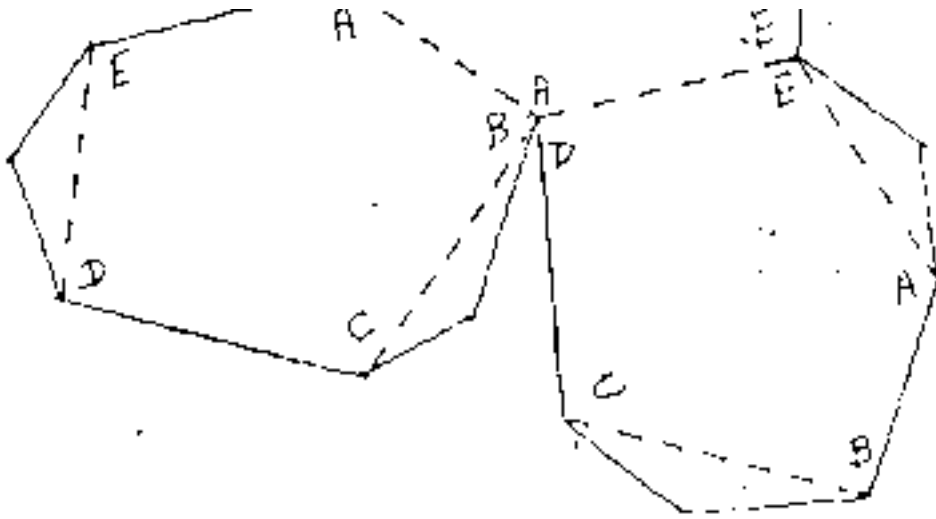
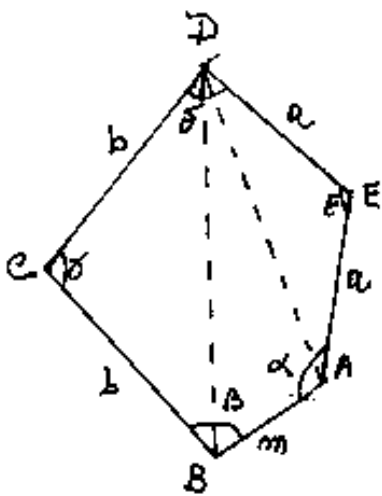
$$D_{DC} = \arccos\left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\delta}{\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\delta}\right) = 133°\ 18'\ 15'',7$$

$$D_{AB} = \arccos\left(\frac{\cos\delta - \cos\alpha\cos\beta}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}\right) = 102°\ 23'\ 12'',5$$

Poiché: $\hat{D}_{ED} \neq \hat{D}_{DE}$ e $\hat{D}_{CD} \neq \hat{D}_{DC}$ le facce non saranno piane

Sviluppo di un pentagono-dodecaedro a facce non piane ($K=1{,}20$; $H=0{,}9$; $\varphi=109°$)

Sviluppo di un pentagono-dodecaedro a facce non piane ($K=1{,}20$; $H=0{,}9$; $\varphi=109°$)

A E B A D C D E E A C B

Le formule fondamentali per la verifica che il solido sia a facce piane correlazionano solo funzioni angolari; è vero che tali funzioni possono essere espresse da relazioni di misure lineari sempre riducibili ai rapporti K, H, o simili, ma da sole valgono per tutti i solidi, mentre noi cerchiamo le condizioni del caso 7°) cioè che siano piane le facce di un pentagono dodecaedro avente i lati delle facce costituiti da due coppie diverse di lati uguali e da un lato diverso.

La condizione 7) può esprimersi con le relazioni:

$$\cos \varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AD}}{a}\right)^2$$

$$\cos \gamma = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BD}}{b}\right)^2$$

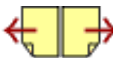
per definire la faccia occorre che sia noto il triangolo ABD. Quindi con elementi tutti lineari occorre conoscere: m, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, a, b.

Bastano 5 elementi essendo doppi a e b.

$$\cos(\alpha + \varepsilon/2 - 90) = \frac{\overline{AD}^2 + m^2 - \overline{BD}^2}{2m\,\overline{AD}} \; ; \quad \cos(\beta + \gamma/2 - 90°) = \frac{\overline{BD}^2 + m^2 - \overline{AD}^2}{2m\,\overline{BD}}$$

Però, come si vede, facendo le sostituzioni, le espressioni tendono a complicarsi; conviene tornare alle espressioni angolari, ove fissati due angoli come α e β si può esprimere ε ed δ in funzione di γ, e poiché: $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = 540°$, dando

Tabella di pentagonododecaedri a facce piane e vertici di 3 facce

α	β	γ	δ	ε	Note
108°	101°	108° 4' 53",86	116° 41' 20",46	106° 13' 45",68	b/a = 1,03126098035
108°	102°	108° 6' 2",51	115° 24' 31",8	106° 29' 25",69	b/a = 1,02544946255
108°	103°	108° 6' 33",36	114° 8' 32",23	106° 44' 54",42	b/a = 1,02011289977
108°	104°	108° 6' 27",11	112° 53' 20",07	107° 0' 12",83	b/a = 1,01523380995
108°	105°	108° 5' 44",32	111° 38' 53",9	107° 15' 21",78	b/a = 1,01079644855
108°	106°	108° 4' 25",39	110° 25' 12",47	107° 30' 22",14	b/a = 1,00678664144
108°	107°	108° 2' 30",58	109° 12' 14",78	107° 45' 14",64	b/a = 1,00319164092
108°	108°	108°	108°	108°	(1) Dodecaedro regolare
108°	109°	107° 56' 53",65	106° 48' 27",46	108° 14' 38",89	b/a = 0,99780146289
108°	110°	107° 53' 11",41	105° 37' 36",7	108° 29' 11",89	b/a = 0,99478686916
108°	111°	107° 48' 53",03	104° 37' 27",37	108° 43' 39",6	b/a = 0,99274480695
108°	112°	107° 43' 58",14	103° 17' 59",32	108° 58' 2",54	b/a = 0,99107785 19
108°	113°	107° 38' 26",27	102° 9' 12",54	109° 12' 21",19	b/a = 0,98976987 6
108°	114°	107° 32' 16",85	101° 1' 7",15	109° 26' 36"	b/a = 0,98881861546
108°	115°	107° 25' 29",18	99° 53' 43",435	109° 40' 47",38	b/a = 0,98821930 65

Dati α e β (possibili), la risoluzione per i restanti angoli è unica ed indipendente dalle dimensioni lineari, che però debbono consentire la costruzione del solido.

Abbiamo visto che il caso γ^*) è il più generale che consenta lo schema di sviluppo, sulla base di due coppie diverse di lati uguali ed un terzo lato diverso. Però le faccie in piano dello sviluppo, diventano curvilinee se non è rispettata la legge sugli angoli diedri: $\hat{D}_{EA} = \hat{D}_{AE}$.

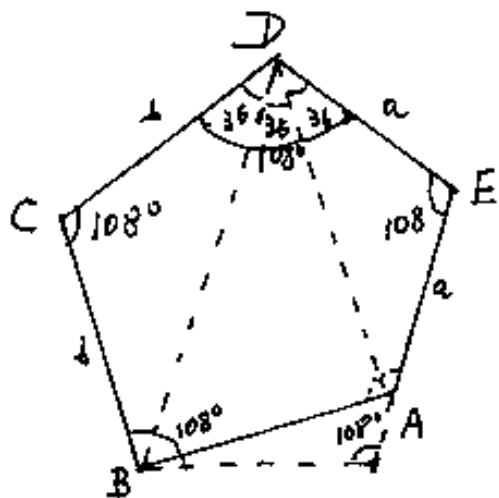
Per costruire la figura è necessario avere le dimensioni dei lati di coppia per esempio: a e b allora $\overline{AD} = 2a \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2}$; $\overline{BD} = 2b \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2}$; $\hat{ADE} = 90° - \varepsilon/2$
$\hat{BDC} = 90 - \frac{\gamma}{2}$; $\hat{ADB} = \delta + \frac{\varepsilon + \gamma}{2} - 180°$; quindi se noti a e b resta definito $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2(\overline{AD} \times \overline{BD}) \cos \hat{ADB}}$.

Con gli angoli occorrono relazioni lineari per poter disegnare la faccia. (cioè gli angoli danno i K)
Se prendiamo un angolo fisso, per esempio:

$\alpha = 108 = 540/5$ sappiamo che per le limitazioni già esposte: $(\alpha+\beta+\delta) < 360°$ quindi: $(\beta+\delta) < 252°$; ma interessa che gli angoli oscillino intorno a $108° = \frac{3}{5}\pi$ rad. ; su tale base si è costruita la seguente tabella:

I valori degli angoli riportati in tabella, si riferiscono a solidi che hanno due coppie diverse di lati uguali. ed un lato diverso che è $\overline{AB}$, perciò gli spigoli ad angoli uguali convergeranno nei vertici: C ed E. Se gli spigoli "a" convergono in E e gli spigoli "b" = Ka convergono in "C" il valore di <u>K non è arbitrario</u>, ma dipende dagli angoli scelti.

Per evidenziare ciò consideriamo il caso particolare di $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = 108°$ (dodecaedro regolare.) e supponiamo di fissare <u>arbitrariamente</u> $K = 1,25$ per i lati uscenti da D avremo un caso I però con α e β diversi da 108°: $\underline{\beta \;\; 89°,12111575}$; $\underline{\alpha = 126°,87888425}$. (facce curve)

Se invece manteniamo gli angoli di

108° ed il K=1,25 per i lati uscenti da D. avremo che $\overline{EA}$ sarà maggiore di "a" e quindi solo due lati uguali (b) impossibile a costruire il solido, (non è il caso 4*)

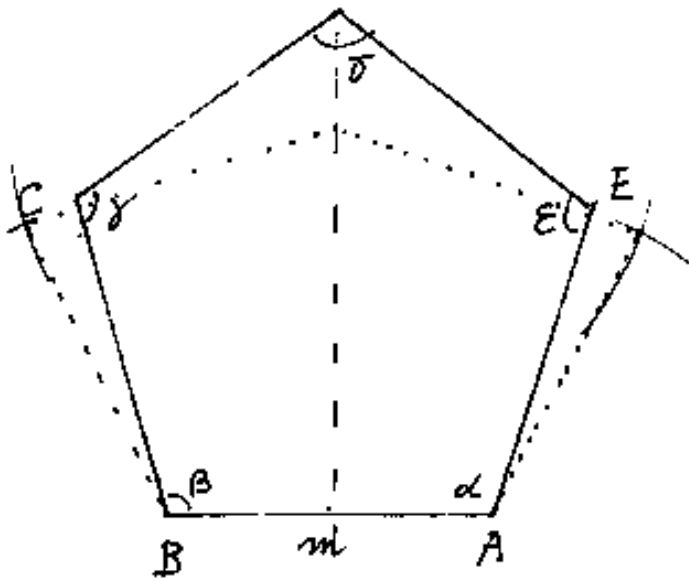
Dobbiamo quindi cercare di ricavare K = b/a in funzione degli angoli che accertano la planarità delle facce.

Tabella dei pentagonododecaedri (c. 10)

Angoli delle facce			Angoli diedri			lato	NOTE
φ	δ	$\alpha = \beta$	$\hat{D}_{\varphi\alpha}$	$\hat{D}_{\alpha\varphi}$	$\hat{D}_{\beta\alpha}$	m/a	
90.00	180.00	90.00	90.00	180.00	0.00	2.00	(cubo a facce rigate)
91.00	177.96	90.02	91.02	91.02	177.96	2.00	
92.00	175.85	90.08	92.07	92.07	175.85	2.00	
93.00	173.65	90.18	93.17	93.17	173.66	1.99	
94.00	171.35	90.32	94.30	94.30	171.37	1.98	
95.00	168.94	90.53	95.48	95.48	168.99	1.97	
96.00	166.41	90.80	96.70	96.70	166.50	1.96	
97.00	163.73	91.14	97.98	97.98	163.89	1.94	
98.00	160.88	91.56	99.30	99.30	161.13	1.92	
99.00	157.84	92.08	100.69	100.69	158.23	1.89	
100.00	154.57	92.71	102.13	102.13	155.15	1.86	
101.00	151.03	93.49	103.64	103.64	151.86	1.81	
102.00	147.15	94.42	105.22	105.22	148.33	1.76	
103.00	142.86	95.57	106.87	106.87	144.52	1.70	
104.00	138.05	96.97	108.61	108.61	140.34	1.62	
105.00	132.55	98.73	110.44	110.44	135.70	1.53	
106.00	126.10	100.95	112.37	112.37	130.44	1.40	
107.00	118.25	103.88	114.40	114.40	124.28	1.24	
108.00	108.00	108.00	116.57	116.57	116.57	1.00	(dodecaedro regolare)
109.00	92.06	114.97	118.86	118.86	105.10	0.60	
109.47	70.53	-	120.00	120.00	120.00	0.00	(rombododecaedro)

Caso 11) Cinque lati uguali

Variano solo gli angoli, abbiamo visto dalle tabelle dei

D

caso 1° che a lati uguali corrispondono angoli uguali. Ammesso quindi che D possa spostarsi solo sull'asse di $\overline{AB}$, si avrebbe il caso 10, però dalla tabella notiamo che per ogni φ si ha un solo rapporto m/a cioè il caso 11) vale solo per il dodecaedro regolare.

Quindi il nostro solido, nel passare da $\varphi = 90°$ a $\varphi = 109°,4712206$, da cubo, si trasforma prima in pentagonododecaedri, per $\varphi = 108°$ è un dodecaedro regolare, infine, al limite per $\varphi = 109°4712206$ diventa un romboododecaedro

Calcoliamo, in questo campo, il valore del lato diverso: $\overline{AB} = m$ in rapporto ai quattro lati uguali: $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = a$.

Abbiamo: $\overline{DA} = 2a \operatorname{sen}(\varphi/2)$; $\widehat{BDA} = \delta - 2(90 - \varphi/2) = (\delta + \varphi - 180°)$;

$\widehat{BDA}/2 = \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\varphi}{2} - 90°\right)$; $\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{BDA}}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\delta+\varphi}{2}\right)$; $m = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{BDA}}{2}\right) \overline{DA} =$

$m = -2\left(2a \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\delta+\varphi}{2}\right) =$ $\boxed{m = -4a \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{\delta+\varphi}{2}\right)}$

Resta da analizzare il campo per φ compreso fra zero e 90°

Per $\varphi = 0$ è impossibile si sovrappongono i lati ED EA ed $\overline{CD}$ con $\overline{CB}$; Per $\varphi > 0$, possono venire facce concave che non ammettono solidi, quindi resta valido il campo:

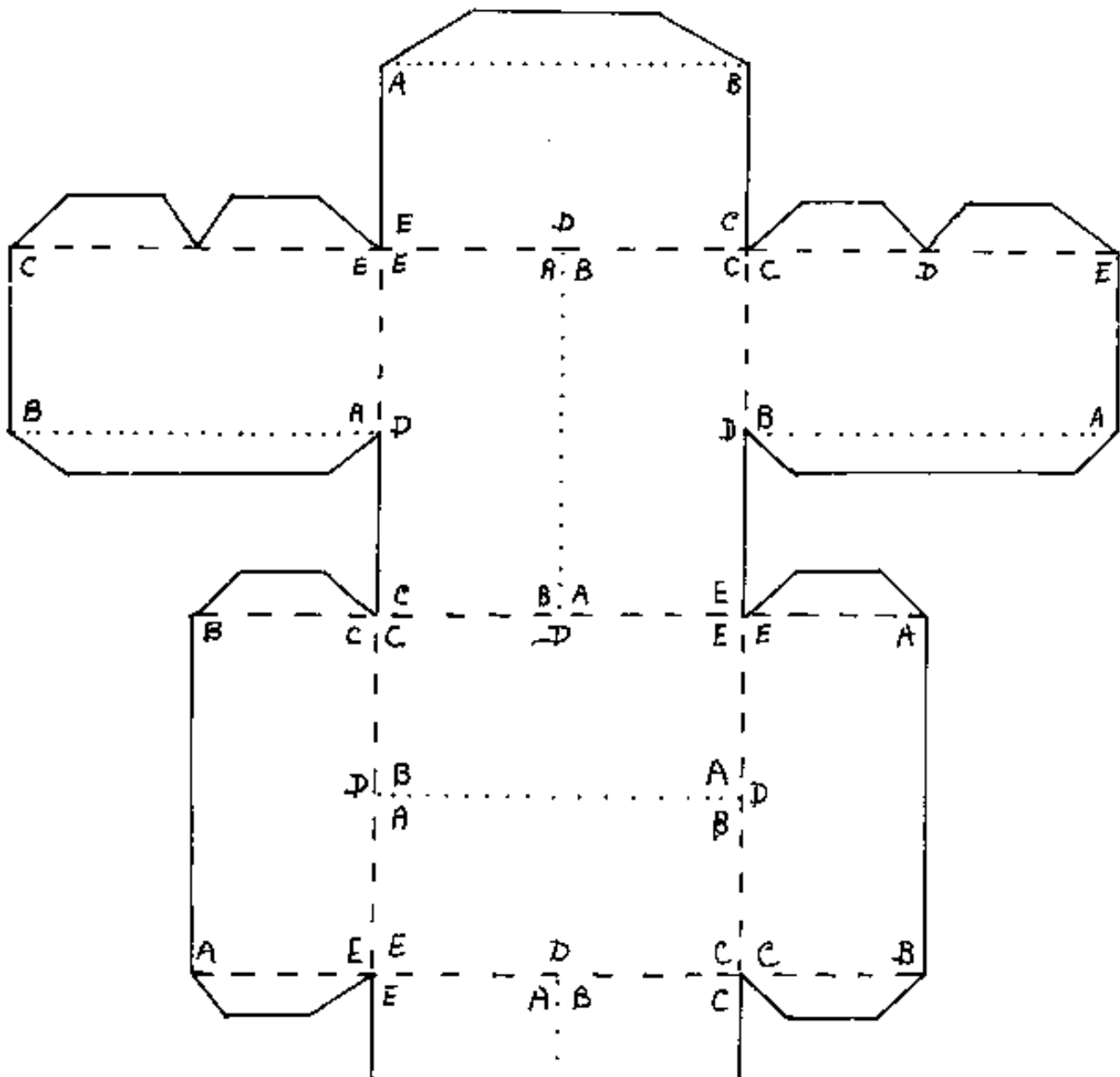
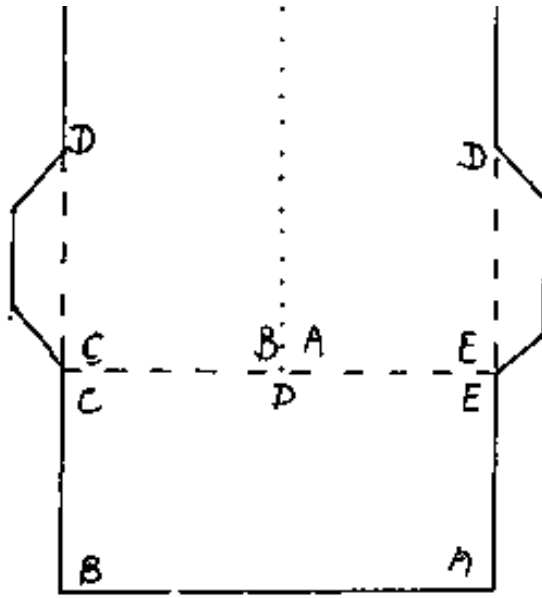
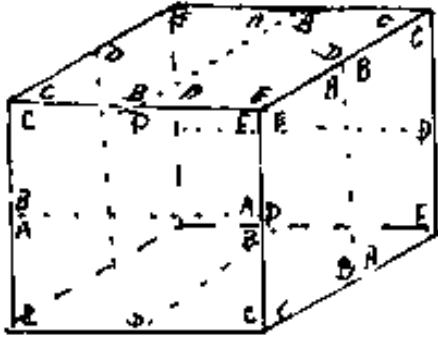
campo.

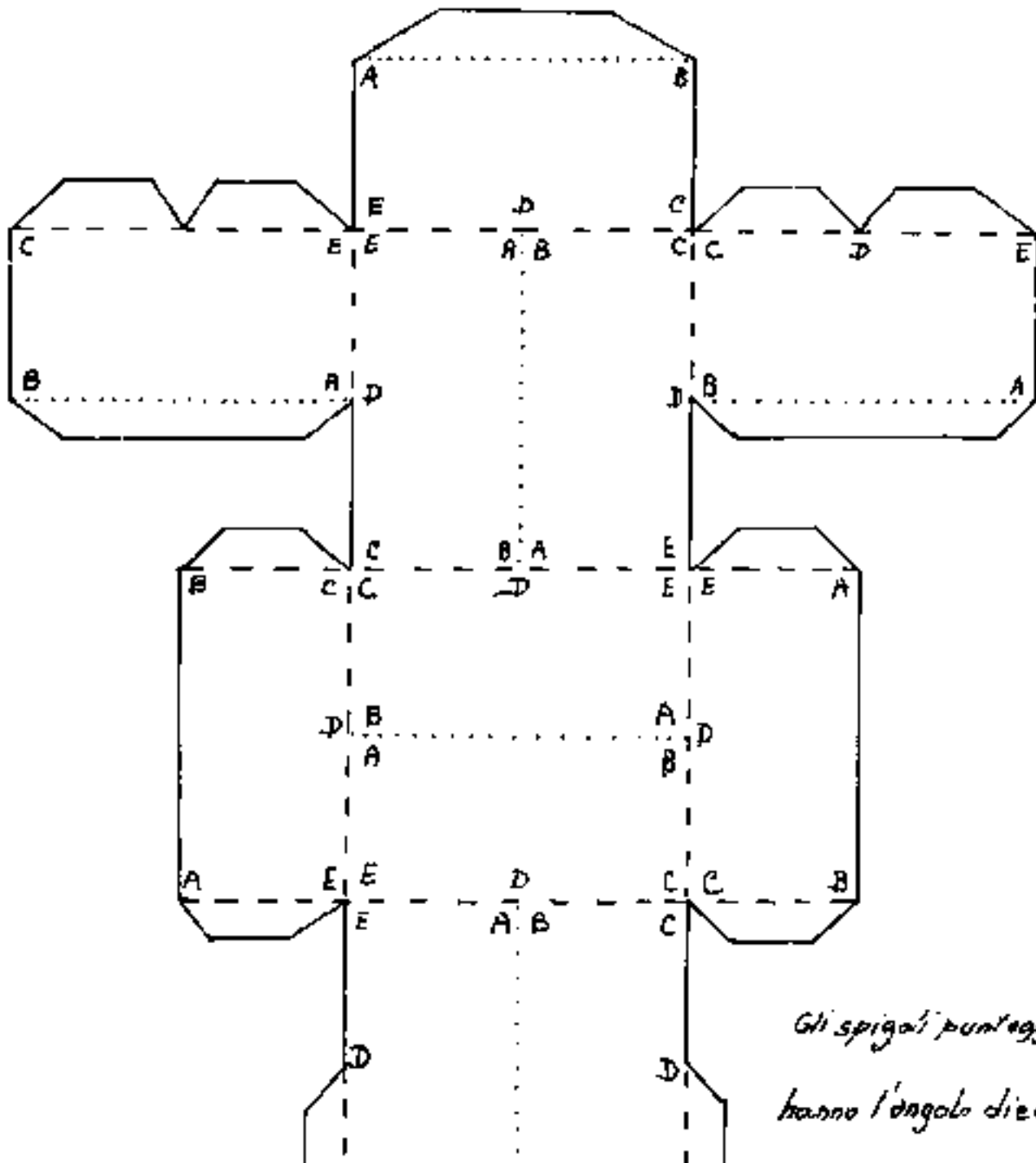
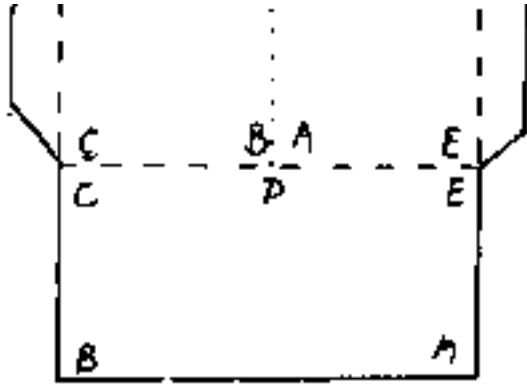
$$\boxed{90^\circ \leq \varphi \leq 109^\circ{,}4712206}$$

In questo campo cerchiamo di raggruppare in una tabella gli elementi più significativi, in cui: $\varphi = \varepsilon = \gamma$; $\alpha = \beta$; $\hat{D}_{EA} = \hat{D}_{AE}$; $\hat{D}_{AB} = \hat{D}_{BA}$

Quindi sul lato $\overline{AB}$ due facce rettangolari risultano complanari e formano un quadrato, gli altri diedri sono retti nasce così il cubo, ne diamo lo schema:

Gli spigoli puntaggiati hanno l'angolo diedro di 180° e pertanto non devono effettuarsi piegature lungo tali spigoli.

Quindi sul lato $\overline{AB}$ due facce rettangolari risultano complanari e formano un quadrato, gli altri diedri sono retti nasce così il cubo, ne diamo lo schema:

Gli spigoli punteggiati hanno l'angolo diedro di

hanno l'angolo diedro di

180° e pertanto non de-

vono effettuarsi piega-

ture lungo tali spigoli.

Ma nei vertici: $A \equiv B$ e D essendo nullo: $\overline{AB} = 0$, vi convergono 4 facce con l'angolo $\delta = 70°,5287794$ ove: $\cos \delta = \frac{1}{3}$ e l'angolo diedro sugli spigoli di 4 facce ad angoli uguali e spigoli uguali è dato da:

$$\cos \hat{D}_4 = \frac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi + 1} = \frac{+\frac{1}{3} - 1}{+\frac{1}{3} + 1} = \frac{-2/3}{4/3} = -\frac{1}{2}$$

$$\hat{D}_4 = 120°$$

Consideriamo ora l'altro caso limite:

per $\varphi = 90°$

$$2 \tan \frac{\delta}{2} = -\frac{1}{0}\left(1 + \frac{0}{1+0}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{0}\right)^2\left(1 + \left(\frac{0}{1+0}\right)\right)^2 + 4\,\frac{0}{1+0}}$$

$$2 \tan \frac{\delta}{2} = -\infty \pm \infty = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$$

$$\frac{\delta}{2} = \begin{cases} 90° \\ 0 \end{cases} \qquad \delta = \begin{cases} 0 \\ 180 \end{cases}$$

Facciamo la costruzione grafica di una faccia

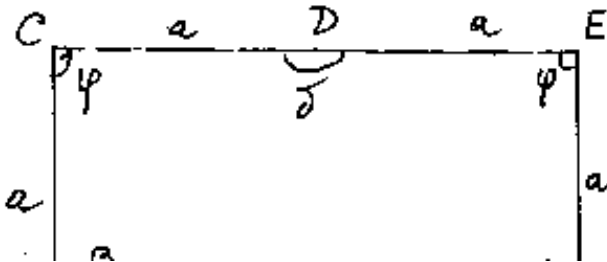
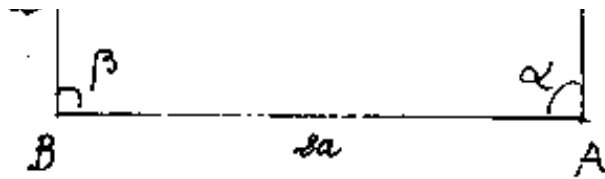
C a D a E

φ δ φ

a a

a

si nota che il pentagono è diventato un

B sa A

rettangolo.

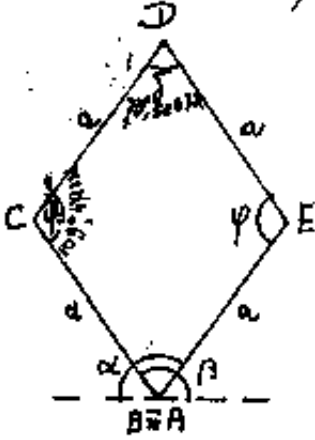
Calcoliamo gli angoli diedri $\hat{D}_{EA} = \hat{D}_{CB} = \arccos\left(\frac{\cos 90°}{1 + \cos 90}\right) = \arccos(0) = 90°$

$\hat{D}_{AE} = \hat{D}_{EA} = \arccos\left(\frac{\cos \varphi - \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right) = \arccos\left(\frac{0 - 0^2}{1^2}\right) = \arccos(0) = 90°$

Interessante il diedro: $\hat{D}_{AB} = \hat{D}_{BA} = \arccos\left(\frac{\cos \gamma - \cos\alpha \cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}\right)$

$\hat{D}_{AB} = \hat{D}_{BA} = \arccos\left(\frac{-1 - 0}{1^2}\right) = \arccos(-1)$; $\hat{D}_{AB} = \hat{D}_{BA} = 180°$

$\alpha = \beta = 125°,2643897 = 125°\ 15'\ 51'',8$,

ma $\overline{AB} = 0$, per cui il pentagono decade in un rombo. Infatti $(\delta + \varphi) = 180°$ ed il nostro pentagonododecaedro diventa un rombododecaedro per valori di $\varphi > 109°,4712206$,

D
a
a
C
φ
E
a
a
α
β
B≡A

$\overline{AB}$ si incrocia negativa, da cui l'assurdo dei valori immaginari nell'equazione.

Per $\boxed{\varphi = -109°,4712206}$ si ha: $2tg\left(\frac{\delta}{2}\right) = -tg\varphi\left(1 + \frac{\cos\varphi}{1 + \cos\varphi}\right)$

$$2\ \text{taug}\left(\frac{\delta}{2}\right) = -\left(2\sqrt{2}\right)\left(1 + \frac{-1/3}{1 - 1/3}\right)$$

$$\text{taug}(\delta/2) = -\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{3-1}\right) = -\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\delta}{2} = \begin{cases} -35°,2643896 \\ +144°,7356103 \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} -70°,5287794 \\ +289,4712206 \end{cases}$$

Poiché: $-70°,5287794 + 180° = +109°,4712206$, prendendo

Poiché: $-70,52877 94 + 180 = +109,4712206$, prendendo il valore assoluto di: $|109°,4712206| = |\varphi| = |\varepsilon| = |\gamma| = |\delta|$ dal che si deduce: $\alpha = \frac{540 - 3\varphi}{2} = \beta = \left(270° - \frac{3}{2}\varphi\right)$.

Vogliamo verificare la compatibilità degli angoli diedri: $\cos \hat{D}_E = \cos \hat{D}_e = \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos\varphi}} = \underline{\cos(120°)}$

La simmetria nei cristalli

Abbiamo già accennato (vedi I° Vol.) al concetto: "Simmetria", vogliamo ora precisare il significato di certi simboli usati in cristallografia.

Premesso che un cristallo reale si presenta in genere in forma sproporzionata o distorta, pur mantenendo la costanza degli angoli diedri fra facce corrispondenti; noi ridurremo a "cristallo modello" un tale solido, supponendo di spostare, parallelamente a se stessi, i piani delle facce, finché, mantenendo la stessa giacitura le facce stesse assumino la stessa forma, e siano della stessa grandezza.

E' anche opportuno precisare la differenza fra "assi cristallografici" ed "assi di simmetria"

Diconsi "Assi Cristallografici" gli assi passanti per un punto interno al solido e paralleli a tre spigoli del cristallo concorrenti nello stesso vertice.

E' chiaro che se i tre spigoli formano una terna trirettangola

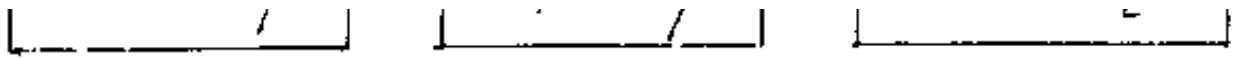
È chiaro che se i tre spigoli formano una terna trirettango=
la (come gli spigoli di un cubo) ed il punto interno al solido
coincide col suo centro, gli assi cristallografici x, y, z
formano un sistema cartesiano ortogonale al quale po=
tremmo riferire le equazioni dei piani delle facce.
In genere però i tre spigoli del cristallo non formano
un sistema di assi trirettangolo, ma un sistema di

assi inclinati, useremo come formula per individuare i piani delle facce, l'equazione segmentaria del piano, cioè: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$ (vedi vol. III) valida anche per assi inclinati, ove: p, q, r; sono i segmenti intercettati dal piano della faccia considerata con gli assi stessi e misurati a partire dall'origine "O". Cioè P, Q, R sono i punti di intersezione del piano con gli assi, avremo: $\overline{OP} = p$; $\overline{OQ} = q$; $\overline{OR} = r$; sono i parametri dell'equazione e per facce parallele, rimangono proporzionali.

La distanza del piano dall'origine degli assi, sarà:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}}}$$

ed i coseni direttori della retta di giacitura, (valida per tutte le facce (piani) parallele), saranno:

$$\cos\alpha = \frac{\delta}{p} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{\delta}{q} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{\delta}{r}$$

Se scegliamo una terna di assi cristallografici ed una faccia assunta come "faccia fondamentale" di parametri p, q, r: Ogni altra faccia può essere individuata dai suoi parametri: p_i, q_i, r_i; ma in "cristallografia" si considerano i rapporti

$$\frac{p_i}{p}\ ;\ \frac{q_i}{q}\ ;\ \frac{r_i}{r}$$

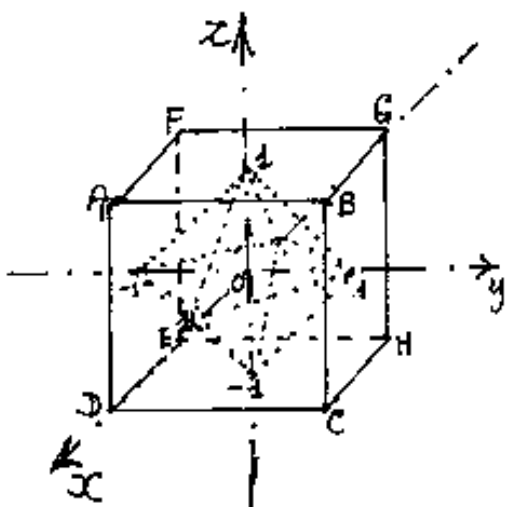
che sono detti: numeri indici.

Per la legge di Haüy: "i numeri indici stanno fra loro come tre numeri interi generalmente piccoli e primi fra loro.

(La terna degli indici individua una faccia qualsiasi rispetto alla fondamentale. Gli indici sono rapporti di coseni direttori e pertanto validi per tutti i piani paralleli.)

Si può anche scrivere:

$$\frac{p}{p'} : \frac{q}{q'} : \frac{r}{r'} = h : K : \ell$$

ove: $\{h\,K\,\ell\}$ sono gli indici di una faccia (e la rappresentano) rispetto ad un'altra faccia assunta come: faccia fondamentale.

Consideriamo il cubo in figura, gli assi x, y, z; possono essere assunti come assi cristallografici in quanto sono paralleli agli spigoli convergenti in un vertice del solido (cubo)

Quando una faccia è parallela ad un asse, non stacca alcun segmento su quell'asse per cui sarà zero il

alcun segmento su quell'asse per cui sarà zero il numero indice corrispondente; per cui la rappresentazione delle facce del cubo sarà:

ABCD = $\{1\,0\,0\}$; EFGH = $\{\bar{1}\,0\,0\}$; CBGH = $\{0\,1\,0\}$; AFED = $\{0\,\bar{1}\,0\}$

AFGB = $\{0\,0\,1\}$; CDEH = $\{0\,0\,\bar{1}\}$.

La rappresentazione delle facce dell'ottaedro tratteggia-

to all'interno del cubo (relativamente agli assi cristal-logrofici del cubo) sarà: (riportiamo anche le giaciture)

$\{111\}$; $\{11\bar{1}\}$; $\{1\bar{1}1\}$; $\{1\bar{1}\bar{1}\}$; $\{\bar{1}11\}$; $\{\bar{1}1\bar{1}\}$; $\{\bar{1}\bar{1}1\}$; $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$

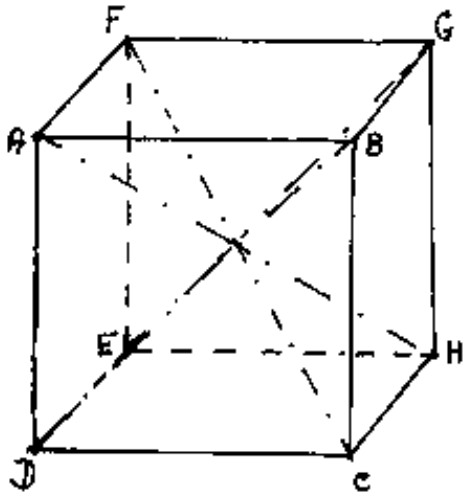
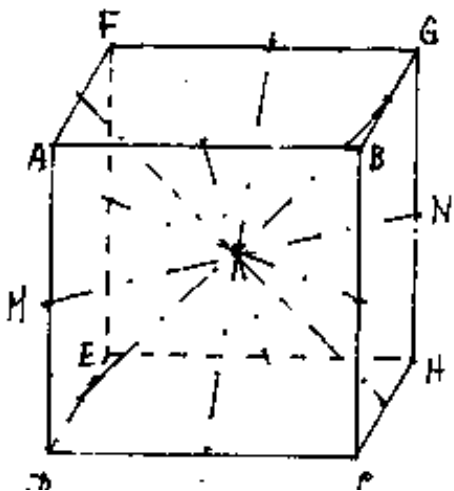
$(\overline{OB})$ $(\overline{OC})$ $(\overline{OA})$ $(\overline{OD})$ $(\overline{OG})$ $(\overline{OH})$ $(\overline{OF})$ $(\overline{OE})$

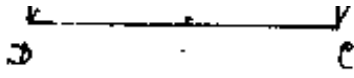
queste sono anche la rappresentazione delle facce dei due tetraedri: ACGE ed FBDH aventi per spigoli le diagonali del cubo e dalla cui intersezione nasce l'ottaedro tratteggiato. Però gli assi x, y, z, non posso-no essere assi cristallografici per l'ottaedro o per il tetraedro perché non sono paralleli a tre spigoli con-correnti. —

<u>Gli assi di simmetria</u> si dicono di ordine n quando un solido che ruoti di un giro completo in-torno a quell'asse, sovrapponga n volte se stesso (le sue facce).

Per esempio gli assi gli assi $oxyz$, ortogonali che abbiamo considerato per il cubo come assi cristallogra-

fici sono, per il cubo stesso, assi di simmetria quaternaria. Infatti la faccia {010} ruotando il solido intorno ad x assume rispettivamente le posizioni delle facce: {001}, {0$\bar{1}$0}, {00$\bar{1}$} e torna a {010} analogamente le ruotazioni intorno ad y, z, perciò il cubo ha 3 assi di simmetria quaternaria e si indica "$3A_4$" questa proprietà simmetrica.

Se nello stesso cubo consideriamo gli assi che si ottengono tracciando le quattro diagonali interne, notiamo che tali assi sono di simmetria ternaria; infatti supponiamo che sia $\overline{AH}$ l'asse intorno al quale ruota il cubo, A ed H stanno fermi essendo sull'asse di rotazione. B, D, F, sono su un piano perpendicolare all'asse di rotazione e vi rimangono scambiandosi di posto ogni terzo di giro anche C, G, E rimangono in un piano perpendicolare ad $\overline{AH}$ e si scambiano di posto ogni terzo di giro; poiché le diagonali interne sono quattro il cubo ha anche: "$4A_3$".

Nello stesso cubo, se uniamo i punti medi di due spigoli opposti otteniamo sei assi di simmetria binaria ($6A_2$) Infatti se consideriamo i punti

D C

infatti se consideriamo i punti medi M ed N di $\overline{AD}$ e $\overline{SH}$ lo spigolo $\overline{BC}$ nella rotazione si sovrappone ad $\overline{EF}$ e viceversa poi torna al suo posto (ogni mezzo giro).

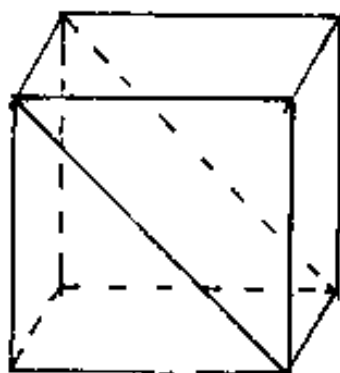
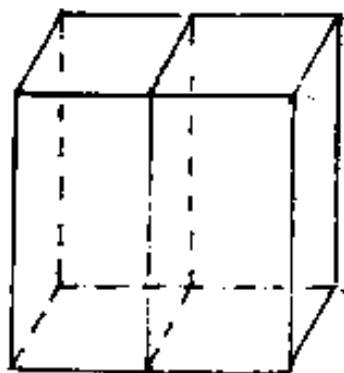
Complessivamente per il cubo avremo:

$$3A_4 \ , \ 4A_3 \ , \ 6A_2$$

come assi di simmetria.

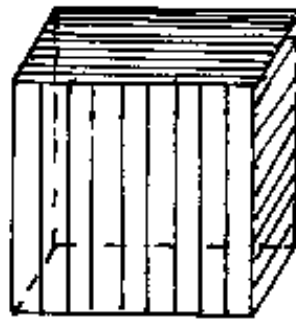
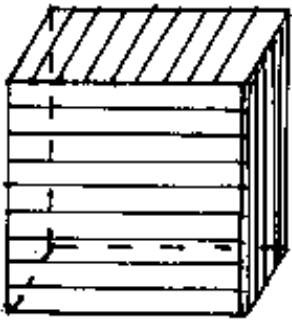
Nei cristalli si hanno solo assi di ordine 2, 3, 4, 6; mancano gli assi di simmetria quinaria e gli assi di ordine maggiore di 6.

Come si vede nel cubo, gli assi $4A_3$ e $6A_2$, non sono paralleli agli spigoli e quindi non possono confondersi con assi cristallografici.

Un piano che divida il cristallo (un solido) in due parti tali che uno è l'immagine speculare dell'altra si dice: Piano di simmetria (P) Nel cubo abbiamo nove piani di simmetria; ed esiste anche un centro (C) di simmetria, cioè un punto rispetto al quale sono equidistanti gli elementi corrispondenti.

Il grado complessivo di simmetria del cubo sarà quindi:

$$3A_4 \quad 4A_3 \quad 6A_2 \quad C \quad 9P$$

Nel trattare la simmetria, noi abbiamo conside= rato le facce di un cristallo identiche oltreché sovrapponibili, però certe facce possono presen= tare striature tali che, sovrapposte per rotazione

hanno versi di striatura diversi. Come si vede in figura, cio' vuol dire che sostanzialmente un asse che abbiamo considerato A_4 diventa A_2. Cioe' noi abbiamo considerato una: simmetria formale, geometrica, detta anche Singonia e simmetria apparente che si distingue dalla simmetria sostanziale che più interessa i cristallologi.

I diversi elementi di simmetria sono legati fra loro da particolari condizioni. Per esempio, se consideriamo P = piano di simmetria; C = centro di simmetria; A_{2n} = asse di simmetria di ordine pari; su questi elementi c'e' la condizione che se ne esistono due deve esistere anche il terzo; cioe' è impossibile che una simmetria complessiva si esprima scrivendo C P, oppure, A_2 C

simmetria complessiva si esprima scrivendo C I, oppure, A_2C oppure A_2P, deve essere A_2CP.

Tenendo conto di tali condizioni, oltre che gli assi essere solo di ordine 2, 3, 4, 6, F. G. CH. Hessel (1796 - 1872) stabilí che sono possibili solo <u>32 classi di simmetria</u> nei cristalli; poiché alcune classi presentano caratteristiche

comuni, C.S. Weiss (1780-1856) ed F.E. Neumann (1798-1895), distinsero 6 sistemi cristallini; successivamente la classificazione distinse i sistemi in gruppi, da cui i seguente quadro.

GRUPPO	SISTEMA	CLASSE
monometrico	cubico	5 classi con 4 assi di simmetria ternaria ($4A_3$): cubica esacis-ottaedrica; cubica esacis-tetraedrica; cubica diacis dodecaedrica o diploide; cubica tetartoedrica; cubica giroedrica
dimetrico	tetragonale	7 classi con asse di simmetria ternaria (A_3): ditetragonale bipiramidale; ditetragonale piramidale; piramidale; scalenoedrica; trapezoedrica; piramidale; bisfenoidale.
	esagonale	5 classi con asse di simmetria senaria (A_6): diesagonale bipiramidale; diesagonale piramidale; esagonale bipiramidale; esagonale piramidale; esagonale trapezoedrica
	trigonale	7 classi con assi di simmetria quaternaria (A_4): ditrigonale scalenoedrica; ditrigonale piramidale; trigonale trapezoedrica; trigonale romboedrica; trigonale piramidale; ditrigonale bipiramidale; trigonale bipiramidale
	rombico	3 classi con tre assi di simmetria binaria ($3A_2$) perpendicolari fra loro o con due piani di simmetria perpendicolari fra loro ed un asse binario

trimetrico	rombico	simmetria perpendicolari fra loro ed un asse binario rombica bipiramidale | rombica piramidale | rombica bisfenoidale
	monoclino	3 Classi con asse di simmetria binaria un piano normale all'asse e centro di simmetria o solo piano o solo asse. m o n o c l i n a prismatica | domatica | sfenoidica
	triclino	2 classi con centro di simmetria o senza elementi di simmetria triclina pinacoidale | triclina pediale

La Proiezione Stereografica.

Abbiamo già accennato come un cristallo reale venga idealmente ridotto ad avere facce della stessa forma e della stessa grandezza, mantenendo invariati gli angoli diedri fra le facce corrispondenti. (Cristallo modello).

Consideriamo ora il nostro cristallo modello avente il centro in comune col centro di una sfera nella quale è contenuto.

Consideriamo il piano equatoriale che divide la sfera in due emisferi, ed il cristallo in due parti.

È evidente che a seconda della posizione del solido "cristallo modello", le due parti saranno diverse. Cercheremo quindi posizioni particolari che rendano più significativa la proiezione stereografica.

I due punti opposti sulla superficie sferica individuati dalla normale per il centro del piano equatoriale, si dicono Poli ed, in analogia coi

equatoriale, si dicono *Poli* ..., in analogia dei
poli terrestri, tal volta sono detti: *polo sud* e *polo nord*
per distinguerli. Ciò faremo anche noi per facilitare
il linguaggio, anche se non vi sono elementi di
distinzione, *essendo arbitraria* la loro posizione.

La proiezione stereografica può effettuarsi dal
polo sud, sul piano equatoriale dei punti

della superficie dell'emisfero nord ottenuti tras=
lando le facce della parte di solido esistente nel=
l'emisfero nord fino ad essere tangenti alla super=
ficie sferica. Si proiettano cioè tali punti di tan=
genza.

Analogo discorso, se come centro di proiezione assu=
miamo il polo nord, per i punti di tangenza sull'emi=
sfero sud.

I punti di tangenza sono detti <u>poli delle facce</u>;
si può dire che la proiezione sterografica consiste
nell'insieme dei punti di intersezione, col piano
equatoriale, dei raggi uscenti dal polo di proiezione
e diretti verso <u>i poli delle facce</u>, e questi ultimi
sono determinati <u>dall'intersezione delle rette di
giacitura delle facce uscenti dal centro con la super=
ficie sferica.</u>

Quest'ultima osservazione ci permette di consi=

Quest'ultima osservazione ci permette di considerare un cristallo qualsiasi, anche distorto, cioé non ancora "modello" senza che vari la proiezione stereografica.

Come si vede il concetto "giacitura" di piani paralleli, sul quale abbiamo insistito in geometria dello spazio, torna utile in cristallografia.

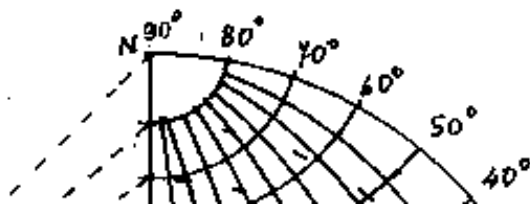
Le facce del cristallo parallele al diametro nord-sud hanno il punto di tangenza sulla circonferenza equatoriale, che coincide con la loro proiezione stereografica.

La proiezione stereografica trova applicazione ben maggiore, nelle carte geografiche. È un caso particolare delle proiezioni prospettiche, che si verifica quando il centro di proiezione (polo) è sulla superficie sferica.

Se il centro di proiezione viene collocato al centro della sfera, la proiezione si dice centrografica.

Se il polo si trova sull'equatore la proiezione stereografica si dice equatoriale.

Le proiezioni stereografiche dei paralleli e dei meridiani sono archi di cerchio a raggio variabile, cosicché, l'equatore ed il meridiano, avendo raggio infinito, si proiettano rettilinei.

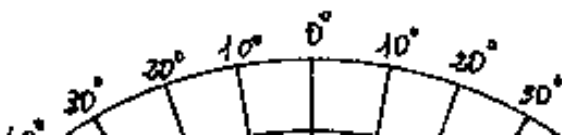
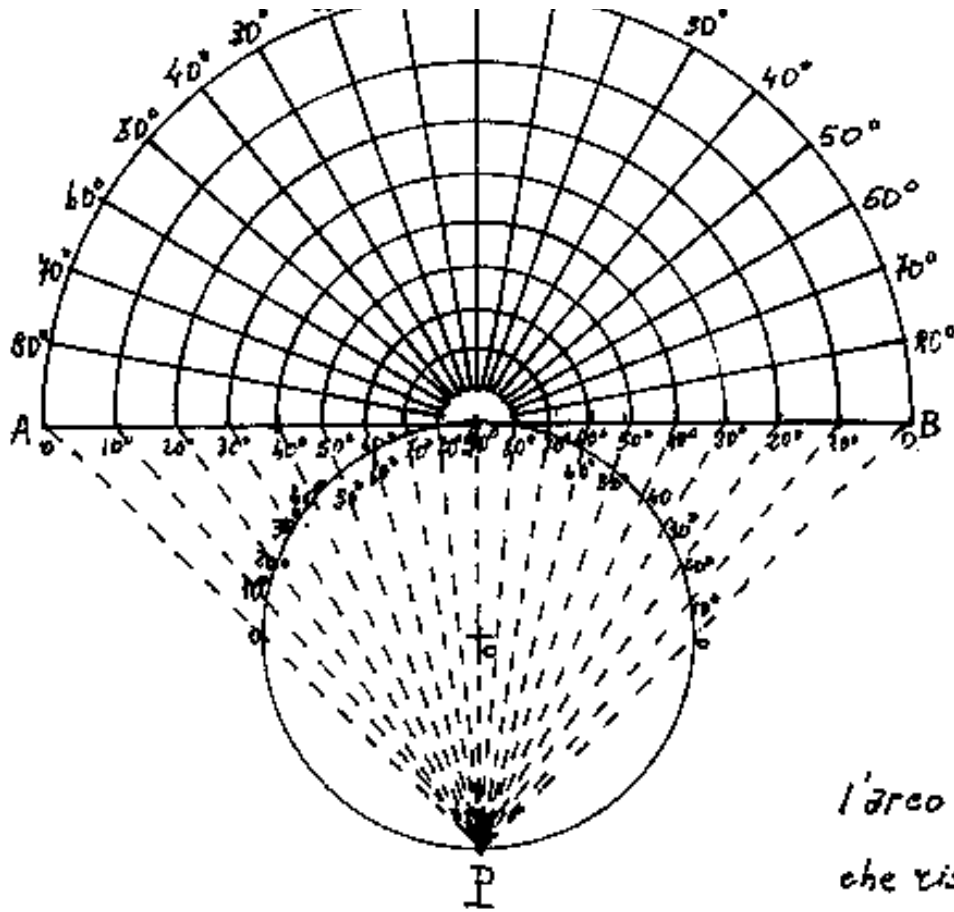
N 90° 80° 70° 60° 50° 40°

Proiezione stereografica

equatoriale.

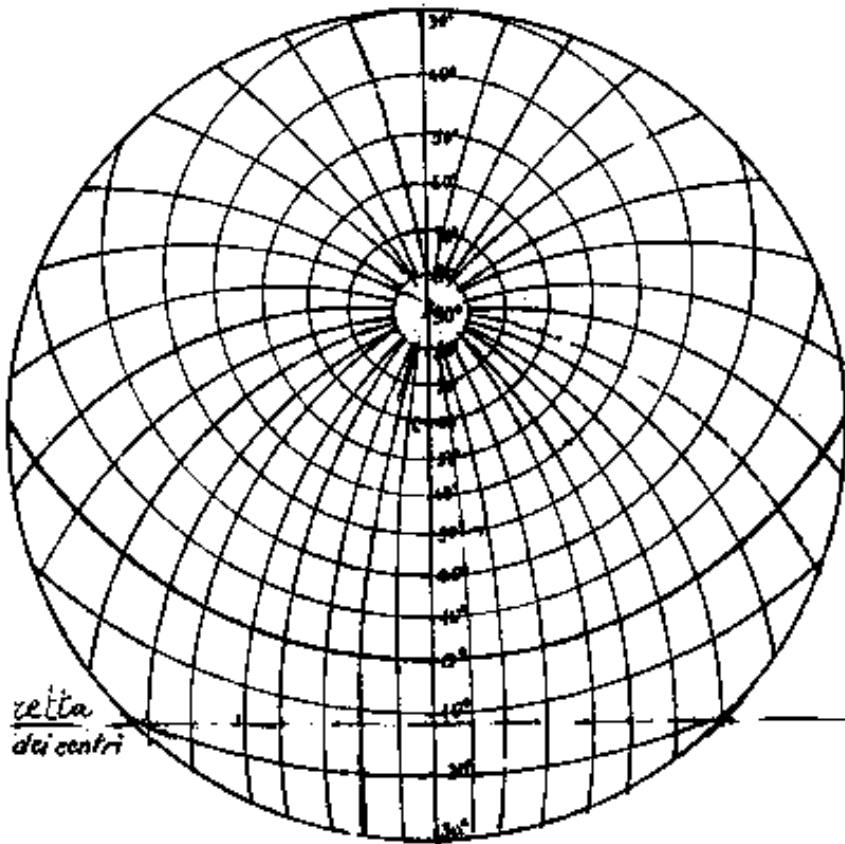
Tracciata la circonferenza di centro O e scelto un polo P, da P si proiettano sulla retta tangente NS, le graduazioni della circonferenza. Assunto $\overline{NS}$

come diametro, si traccia la semicirconferenza $\widehat{NS}$ e si gradua. I centri degli archi di cerchio delle proiezioni dei paralleli, sono sui prolungamenti della retta $\overline{NS}$ e debbono raccordare le graduazioni della semicirconferenza con le proiezioni omonime su $\overline{NS}$. I centri degli archi di cerchio delle proiezioni dei meridiani sono sulla retta $\overline{OP}$ prolungata. Il primo centro corrisponde al punto di tangenza di $\overline{NS}$ con la circonferenza (arco che abbiamo già tracciato e graduato). Lo sfrazionamento del raggio $\overline{NS}/2$ per effetto delle proiezioni delle graduazioni, riportiamolo sul raggio giacente su $\overline{PO}$ prolungato, e scriviamo le corrispondenti graduazioni. Dovendo gli archi di cerchio dei meridiani passare per tali punti e per N ed S, resta determinato il centro. Notare che le maglie verso l'esterno sono più grandi ed impiccoliscono via via che si avvicinano al centro.

Proiezione stereografica polare

30° 20° 10° 0° 10° 20° 30°

Dal polo P si proietta la semicirconferenza graduata su $\overline{AB}$, quindi con centro su $\overline{AB}/2$ si tracciano con archi di cerchio i paralleli, ra=cordando le proiezioni omo=nime. Infine si gradua l'arco $\overline{AB}$ e si tracciano i meridiani che risulteranno rettilinei.

Proiezione stereografica orizzontale.

retta dei centri

Centro di proiezione "C" un punto qualsiasi della superficie sferica. Per es. latitudine 60° e longitudine 0°. Il meridiano ove è il centro di proiezione, si proietta rettilineo. Il piano di proiezione è perpendicolare alla retta che unisce il polo di proiezione col centro sfera e col centro di proiezione, cioè sulla terra è perpendicolare al filo a piombo, da cui la dizione "orizzontale". Il cerchio massimo che delimita la proiezione, è inclinato della latitudine rispetto ai piani dei paralleli; ed ha il centro sulla proiezione del centro di proiezione. I poli della terra si proiettano sulla proiezione rettilinea del meridiano ove è il centro di proiezione. (se

ne vede uno solo). Se sfrazioniamo il segmento rettilineo, pro=
iezione del meridiano del centro di proiezione come è frazionata
la retta $\overline{AB}$ della proiezione stereografica polare e graduia=
mo gli sfrazionamenti, ricordando che il centro di proiezione ha
latitudine assegnata (nel nostro caso 60°) otteniamo un punto dei paral=
leli. All'intorno del polo terrestre vi saranno sul meridiano,
(che si proietta rettilineo) due punti aventi la stessa latitudine,

per essi si fà passare una circonferenza che ha il centro sul meridiano rettilineo ed equidistante dalle latitudini omonime. L'ultima circonferenza avrà per latitudine l'angolo complementare della latitudine del centro di proiezione, e sarà tangente alla circonferenza che delimita il campo.

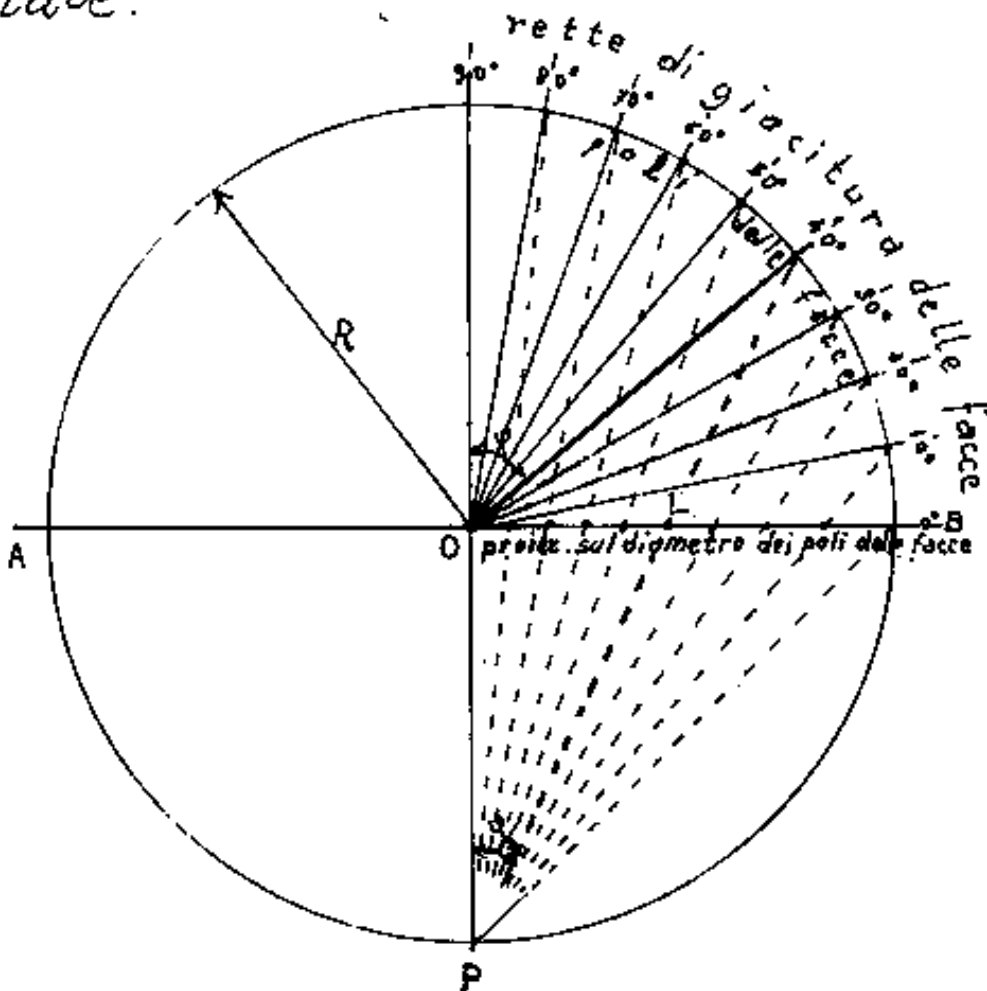
Nella proiezione stereografica polare, notiamo, che lo sfrazionamento della retta $\overline{AB}$ corrisponde ai valori della tangente trigonometrica, per angoli metà latitudine, ritenuto unitario il diametro della circonferenza di centro O.

Questa osservazione ci consente di prolungare la proiezione rettilinea del meridiano del polo e di continuare la graduazione e quindi i centri per gli archi dei restanti paralleli. (Si può calcolare il raggio come semisomma dei due valori corrispondenti allo sfrazionamento da

raccordare).

Per gli archi di meridiano, sappiamo che debbono passare per il polo terrestre. Se alla distanza dalla proiezione del polo terrestre, pari ad un raggio terrestre, tracciamo una retta perpendicolare alla proiezione rettilinea del meridiano passante per il centro di proiezione. Assunta come unità il raggio terrestre, si riportano su tale retta i valori della tangente trigonometrica

delle longitudini, tali punti sono i centri dei corrispondenti archi di meridiano.

Supponiamo di voler fare la proiezione stereografica della parte di solido, esistente nell'emisfero nord, con proiezione dal polo sud sul piano equatoriale.

Abbiamo graduato l'inclinazione delle rette di giacitura

Abbiamo graduato l'inclinazione delle rette di giacitura delle facce ponendo lo zero per rette orizzontali (facce verticali). Abbiamo indicato con φ l'angolo complementare della nostra graduazione, perciò se R è il raggio della sfera ed $\overline{OL}$ il raggio del parallelo. (Luogo delle proiezioni dei poli delle facce aventi la stessa latitudine). (cioè la rappresentazione delle facce aventi la stessa inclinazione)

$$\overline{OL} = R \tan(\varphi/2)$$

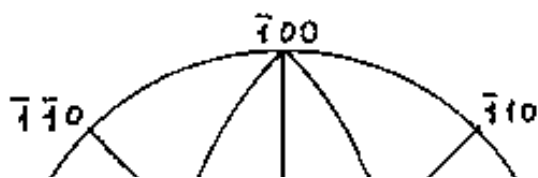
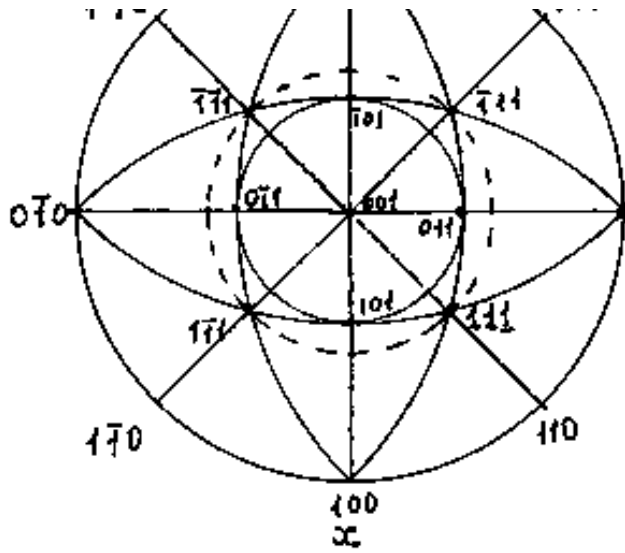
In proiezione stereografica, la nostra proiezione, stará sul cerchio (di raggio $\overline{OL}$) che rappresenta la latitudine di quelle facce.

In questa proiezione stereografica polare i meridiani si proiettano come diametri.
Fra tutte le possibili inclinazioni delle facce, consideriamo i seguenti casi particolari:

1) facce orizzontali si rappresentano al centro del cerchio

2) facce verticali si rappresentano sulla circonferenza

3) facce inclinate a 45° si rappresentano come intersezione di due meridiani in proiezione stereografica equatoriale

Infatti $\overline{OL} = tg(45°/2) \cdot R = R(\sqrt{2} - 1)$, perció se con raggio $R\sqrt{2}$, e centro in 4 punti sulla circonferenza possiamo facilmente costruire il cerchio del parallelo a 45°, che abbiamo disegnato sottile in figura. Il punto che rap=

$\bar{1}00$ $\bar{1}\bar{1}0$ $\bar{1}10$

in figura. Il punto che rap=
presenta una certa faccia in=
clinata a 45° sarà l'interse=
zione della circonferenza trac=
ciata sottile, con la proiezione
della retta di giacitura.

Nella figura, assunto l'asse z normale al disegno, ed x; y
come indicato, si sono anche segnate le siglature delle facce

rappresentate, in modo da poter verificare la loro posizione.

Le proiezioni stereografiche che abbiamo trattato, consentono di costruire (in proiezione stereografica) il reticolo di maglie costituito dalle coordinate geografiche (longitudine e latitudine, rappresentate dai meridiani e dai paralleli). E' evidente che, da ciò, si possono proiettare tutti i punti di figure esistenti su una superficie sferica, quando si conoscono le relative coordinate.

Vi sono due importanti proprietà nella proiezione stereografica, e cioè:

1) La proiezione stereografica di un cerchio sulla superficie sferica è ancora un cerchio di raggio finito o infinito (retta)

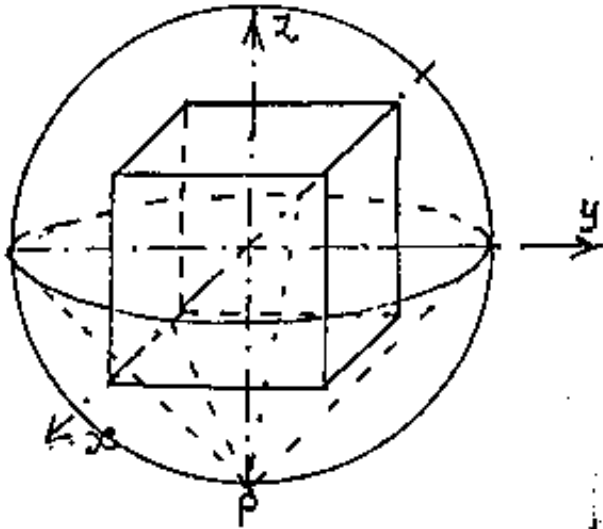
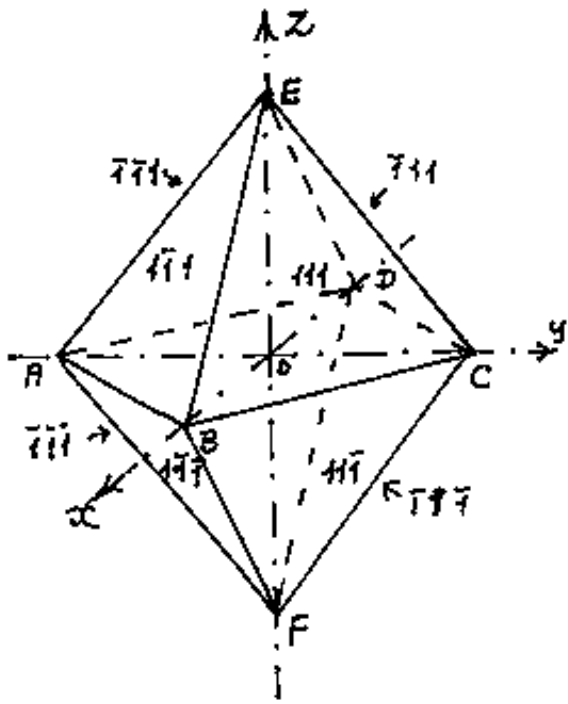
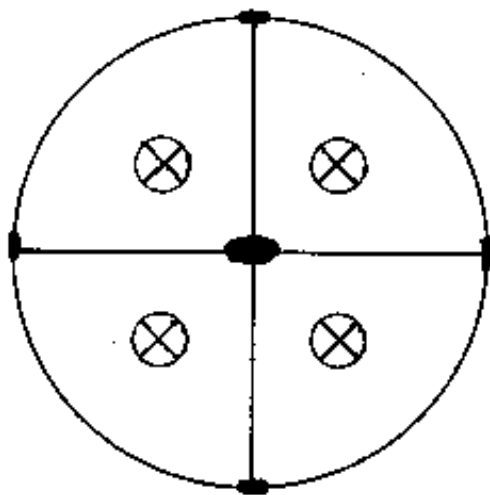
2) Gli angoli che formano due archi di cerchio sulla sfera, si conservano inalterati nella proiezio=

ne.

Vediamo come tali proprietá interessano la pro=
iezione stereografica dei cristalli.

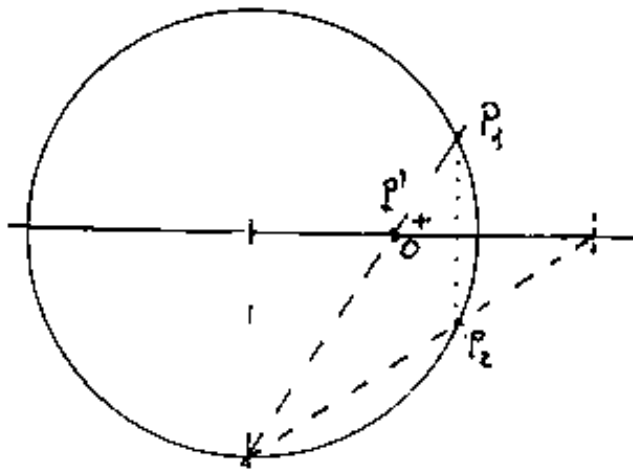
Iniziamo con esempi molto semplici.

Consideriamo un cubo riferito ad un sistema di assi cartesiani passanti per i centro faccia del cubo, e paralleli ai suoi spigoli, e

Consideriamo una sfera concentrica, cioè avente il centro nel centro del solido, e nel centro degli assi di riferimento. (Nella figura precedente, di proiezione stereografica polare, abbiamo già indicate e rappresentate le sei facce del cubo: {100}; {010}; {$\bar{1}$00}; {0$\bar{1}$0}; ed infine {001} che corrisponde a {00$\bar{1}$})

Consideriamo una bipiramide rombica, si nota che x, y, z sono tre assi di simmetria binaria ($3A_2$); vi sono tre piani di simmetria, 3P (ABCD, AECF, FBED) e, dicono un centro di simmetria coincidente con "O"; intendendo per centro di simmetria un punto all'interno del cristallo equidistante da elementi cristallograficamente identici.

Come si vede, nella proiezione stereo=

Come si vede, nella proiezione stereografica, figurano dei simboli grafici di cui non abbiamo parlato.

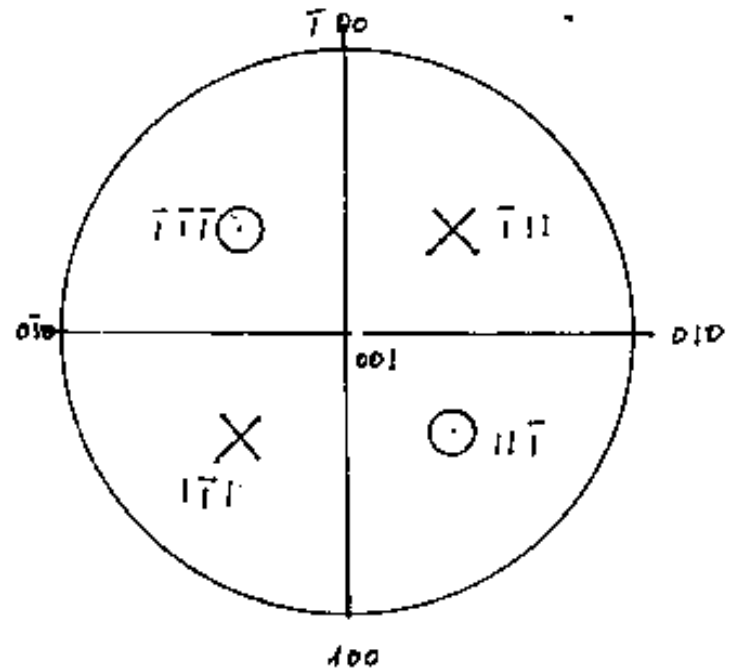
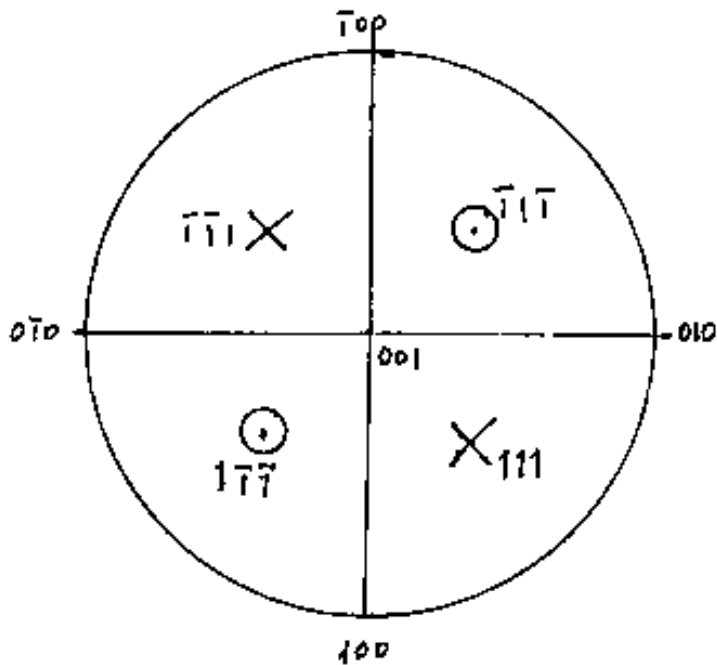
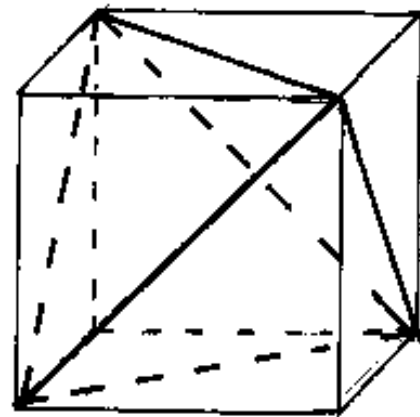
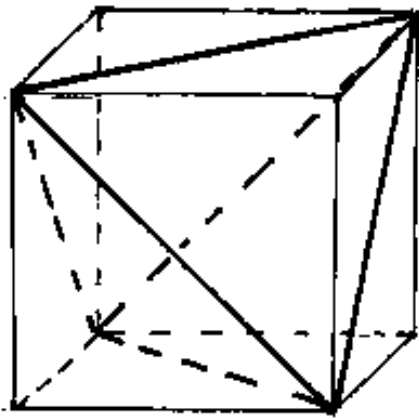
1) I piccoli ellissi anneriti che figurano agli estremi degli assi x e y ed al centro per l'asse z, significano: <u>Asse di simmetria binaria</u>. Il simbolo: ▲ (che non figura nella proiezione

ora eseguita) significa: Asse di simmetria ternaria.
Il simbolo: ■ significa: Asse di simmetria quaternaria.
Il simbolo: ⬢ significa: Asse di simmetria senaria.

Per poter distinguere le facce del solido che guardano verso l'emisfero superiore, da quelle che guardano verso l'emisfero inferiore, poiché la proiezione del punto di intersezione delle rette di giacitura di queste ultime uscirebbe dall'interno della sfera. Detto P_1 il punto intersezione con l'emisfero superiore, detta P' la sua proiezione stereografica, detto P_2 il punto intersezione della retta di giacitura della corrispondente faccia che guarda verso il basso (P_1 e P_2 sono simmetrici al piano di proiezione) si conviene di assumere per P_2 la stessa proiezione P' distinguendo la superiore

[illegible] superiore

con una crocetta: "X", e la inferiore con un cerchiet=
to: "O"; se vi sono entrambe le facce avremo: "⊗"

Per avere una specifica applicazione, con=
sideriamo i due tetraedri ricavati dalle
diagonali di faccia dei due cubi ugual=
mente orientati, ed esaminiamo le sottostanti

proiezioni stereografiche.

abbiamo anche siglato la rappresentazione delle facce, sia dei cubi, sia dei tetraedri per avere un preciso controllo con la convenzione esposta.

Non riteniamo in questa sede di dettagliare i metodi della cristallografia e cristallologia, che possono essere diversi da autore ad autore, il nostro scopo è fornire le basi matematiche sullo studio dei solidi ... per chi voglia ripartire da zero.

Considerazioni sulle figure delle facce dei solidi

Solidi a facce triangolari

equilatere : tetraedri, ottaedri, icosaedri.

isosceli : triacistetraedri (12); tetracisesaedri (24); triacisottaedri (24); pentacisdodecaedri (60); triacisicosaedri (60); esacistetraedri (concavi) (24).

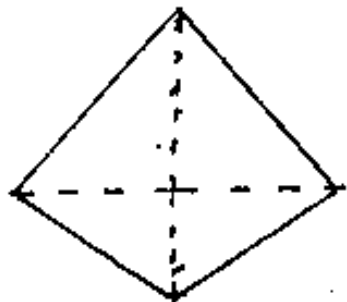
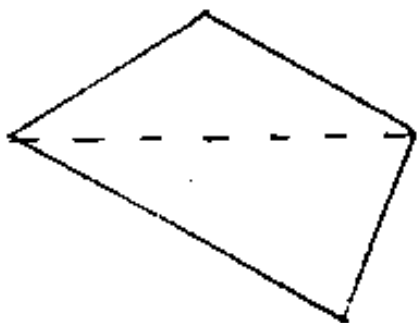
scaleni (particolari) : esacistetraedri (convessi) (24)

Solidi a facce quadrilatere

a lati uguali < quadrato : cubo (esaedro) (6)
rombi : romboedri (vedi in seguito)

I rombi possono pensarsi costituiti dall'affiancamento sulla base di due triangoli isosceli.
- Se i due triangoli sono equilateri si ha

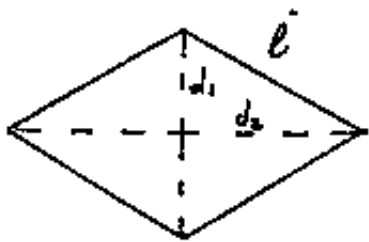
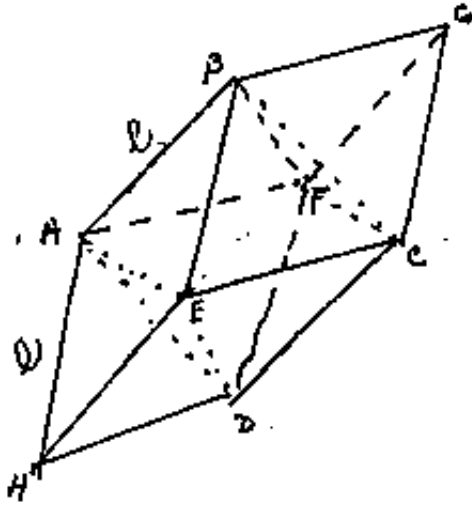
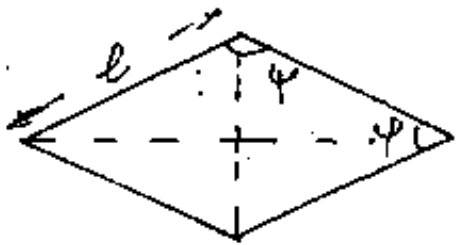
- Se i due triangoli sono equilateri si ha il romboesaedro costituito da un ottaedro con affiancati due tetraedri
- Se i due triangoli isosceli sono rettangoli, si ha il caso limite di quadrati e si torna al cubo. I solidi a facce rombiche meritano un capitolo a se, che svilupperemo nel seguito.

Se i due triangoli isosceli affacciati per la base sono diversi, cioè pur avendo la stessa base, hanno lati diversi, si ottiene la classe di solidi detti trapezoedri di cui abbiamo già trattato la condizione di possibilità (facce piane), ed in un caso particolare il deltoide dodecaedro.

Se i quadrilateri hanno un solo triangolo isoscele affacciato ad uno scaleno per la base, cioè se il quadrilatero ha due soli lati consecutivi uguali si ha la classe dei solidi detti diacisdodecaedri (o diploide), che abbiamo già trattato.

Solidi a facce pentagonali

In questa classe di solidi abbiamo tratta=
to l'icositetraedro pentagonale (24 facce)
e le varie trasformazioni dei pentagonodo=
decaedri (tetartoedri) (vedi cap.li prec.)

I Romboedri (romboesaedri)

I romboedri sono solidi aventi facce rombiche uguali. Essi possono differire sia per numero di facce, sia per le caratteristiche del rombo che può essere determinato (noto il lato = spigolo del solido) dal rapporto delle diagonali o di una diagonale ed il lato.

Il romboesaedro spesso detto semplicemente romboedro ha sei facce rombiche; se il rombo è costituito da due triangoli equilateri affacciati su un lato (base), avremo che il rapporto fra le diagonali è $\sqrt{3} = d_2/d_1$, mentre è uno il rapporto fra il lato e la diagonale minore. Il rombo-esaedro detto comunemente romboedro aventi per facce tale rombo è scomponibile in un ottaedro affianca=

to da due tetraedri. Guardando la figura non è difficile individuare l'ottaedro ABCDEF ed i tetraedri BCFG ed AEDH. questi "aghi" cristallografici non è raro ritrovarli in certe geminazioni.

Il rombo può essere pensato come la deformazione di un quadrato, a lati rigidi, cernierati ai vertici. Gli angoli interni: $\varphi + \psi = 180°$, di cui uno acuto ed uno ottuso, possono essere indice del rombo: $\psi = (180° - \varphi)$, e quindi per φ variabile da zero a $\pi/2$ si passa dal segmento lungo $2 \cdot l$ (l = lato) al quadrato di lato l. Cioè con: $0 \leq \varphi \leq \pi/2$; se continuassimo ad aumentare φ, questi, diventerebbe ottuso, e per: $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ si avrebbe il processo inverso cioè da quadrato a segmento lungo due l, con configurazioni identiche alle precedenti, se scambiamo φ con ψ.

In un solido a facce rombiche; $(\varphi \neq \psi)$, avremo vertici diversi, perchè, se pensiamo che in un vertice concorrono almeno 3 facce, gli angoli che presentano nel vertice possono

gli angoli che presentano nel vertice possono essere (con φ acuto e ψ ottuso)

(3φ) ; $(\varphi+2\psi)$; caso reale nel rombo esaedro

(3ψ) ; $(2\varphi+\psi)$; caso reale nel rombo esaedro quando $\psi < 120°$, cioè $\varphi > 60°$. Questo fa intravedere che per $\varphi > 60°$ si hanno due diversi solidi

TABELLA dei Romboesaedri

ELEMENTI di una faccia					ELEMENTI del solido				
φ	$\frac{b}{\ell}=2\sin\frac{\varphi}{2}$	$\frac{h}{\ell}=\cos\frac{\varphi}{2}$	$\frac{d}{\ell}=\sin\varphi$	$\frac{\overline{DM}}{\ell}=\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi/2}$	$\frac{H}{\ell}=\sqrt{1-\left(\frac{DM}{\ell}\right)^2}$	$\frac{p}{\ell}=$ [illegible]	$\frac{q}{\ell}=\sqrt{1+(h/b)^2}$	$\hat{D}_{1(\varphi)}$ °	$\hat{D}_2$ °
φ°	b/l	h/l	d/l	DM/l	H/l	p/l	q/l	Dp	D2
0	0	1	0	1	0	3	0	0	180°
5	0.08724	0.99905	0.08716	0.99714	0.07553	2.99619	1.00380	60.06304	119.93700
10	0.17431	0.99619	0.17365	0.98557	0.15077	2.98477	1.01508	60.25268	119.74710
15	0.26105	0.99144	0.25882	0.97426	0.22542	2.96573	1.03351	60.57171	119.42830
20	0.34730	0.98481	0.34202	0.95419	0.29921	2.93907	1.05859	61.02326	118.97680
25	0.43288	0.97630	0.42262	0.92831	0.37160	2.90480	1.08767	61.61293	118.38710
30	0.51764	0.96593	0.50000	0.89658	0.44287	2.86269	1.12603	62.34791	117.65210
35	0.60141	0.95372	0.57358	0.85890	0.51214	2.81335	1.16692	63.23749	116.76250
40	0.68404	0.93969	0.64279	0.81521	0.57917	2.75613	1.21157	64.29340	115.70660
45	0.76537	0.92388	0.70711	0.76537	0.64359	2.69122	1.25928	65.53021	114.46980
50	0.84524	0.90631	0.76604	0.70924	0.70497	2.61854	1.30936	66.96591	113.03410
55	0.92350	0.88701	0.81915	0.64664	0.76280	2.53800	1.36119	68.62288	111.37710
60	1.00000	0.86603	0.86603	0.57735	0.81650	2.44949	1.41421	70.52878	109.47120
65	1.07460	0.84339	0.90631	0.50109	0.86539	2.35281	1.46791	72.71827	107.28173
70	1.14715	0.81915	0.93969	0.41753	0.90865	2.24769	1.52183	75.23503	104.76500
75	1.21752	0.79335	0.96593	0.32623	0.94529	2.13376	1.57535	78.13513	101.86490
80	1.28558	0.76604	0.98481	0.22668	0.97397	2.01044	1.62871	81.49151	98.50850
85	1.35118	0.73728	0.99619	0.11821	0.99299	1.87695	1.68059	85.40175	94.59824
90	1.41421	0.70711	1.00000	-.00000	1.00000	1.73205	1.73205	89.99999	90.00001
95	1.47455	0.67559	0.99619	-.12901	0.99164	1.57387	1.78165	95.47882	84.52119
100	1.53209	0.64279	0.98481	-.27015	0.96282	1.39932	1.82956	102.13050	77.86951
105	1.58671	0.60876	0.96593	-.42516	0.90512	1.20255	1.87554	110.43830	69.56168
110	1.63830	0.57358	0.93969	-.59630	0.80277	0.97357	1.91939	121.31920	58.68096
115	1.68678	0.53730	0.90631	-.78656	0.61751	0.68139	1.96093	137.05060	42.94919
120	1.73205	0.50000	0.86603	1.00000	0.00000	1.00000	2.00000	180.00000	0.00000

OSSERVAZIONE

Per comodità di calcolo, nella tabella abbiamo esteso: $90° \leq \varphi \leq 120°$. In tale campo, (in cui le facce sono identiche a quelle di: $60° \leq \varphi \leq 90°$), occorre scambiare φ con ψ e lo slittamento avviene secondo ψ; risulterà $b = 2h$ e $h = b/2$.

Abbiamo considerato il rombo definito dall'ango=
lo interno acuto (φ) e l'altro ottuso $\psi = 180° - \varphi$.
Al variare di φ da zero a $\frac{\pi}{2}$ si hanno tutte
le possibili configurazioni di facce rombiche
diverse. Abbiamo visto che per calcolare l'al=
tezza del solido romboesaedro avente due
vertici con tre facce con lo stesso angolo (3φ)
$\varphi < 120°$. Notiamo che le facce per $90° \leq \varphi \leq 120°$
sono identiche a quelle con $60° \leq \varphi \leq 90°$, ove:
$90° \leq \psi \leq 120°$ perciò nel campo $60° \leq \varphi \leq 90°$ si
hanno due tipi di solido uno con vertici 3φ
ed uno con vertici 3ψ con facce identiche.
Per $0 \leq \varphi \leq 60$ si un solo tipo di solido con verti=
ci 3φ. per $120° \leq \varphi \leq 360°$ si ha un solo tipo di soli=
do con vertici 3ψ identici a quelli del campo
$0 \leq \varphi \leq 60°$. Perciò solidi diversi si hanno fa=
cendo variare $0 \leq \varphi \leq 120°$, su tale base ese=
guiamo la tabella dei valori e la

guiamo la tabella dei valori e la tabella delle relazioni.

angoli diedri

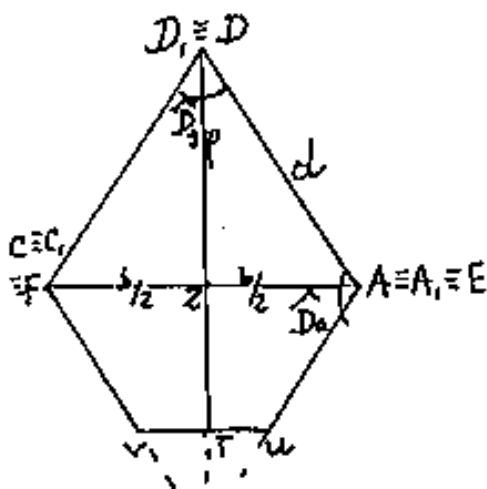
Indichiamo con: $\hat{D}_{3\varphi}$ = gli angoli diedri di facce comuni ai vertici 3φ: $\hat{D}_a$ = gli altri angoli diedri.

$$\hat{D}_{3\varphi} = 2 \arcsin\left(\frac{b}{2d}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{2\ell \operatorname{sen} \varphi/2}{2\ell \operatorname{sen}\varphi}\right) =$$

$$\hat{D}_{3\varphi} = 2 \arcsin\left(\frac{\operatorname{sen} \varphi/2}{2 \operatorname{sen}\varphi/2 \cos\varphi/2}\right) = \boxed{\hat{D}_{3\varphi} = 2 \arcsin \frac{1}{2\cos\varphi/2}}$$

Sappiamo che: $\boxed{\cos \hat{D}_{3\varphi} = \frac{1}{1 + 1/\cos\varphi}}$

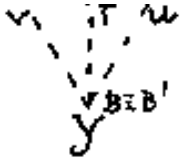
$$\boxed{\operatorname{sen} \frac{\hat{D}_{3\varphi}}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}}$$

Sezioniamo il solido con un piano α, proiettante in seconda proiezione, e normale alle direzioni dei 4 spigoli AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 e passante per D_1

$D_1 \equiv D$, d, $C \equiv C_1$, F, $b/2$, Z, $b/2$, $\hat{D}_{3\varphi}$, $\hat{D}_a$, $A \equiv A_1 \equiv E$, V, T, U

Notiamo che il diedro $\hat{D}_a = 2 Z\hat{E}D$ (essendo $Z\hat{E}D = Z\hat{E}Y$) per cui:

$$\hat{D}_a = 2 \arccos\left(\frac{b}{2d}\right) = 2 \arccos\left(\frac{\ell \operatorname{sen}\varphi/2}{\ell \operatorname{sen}\varphi}\right) =$$

$$\boxed{\hat{D}_a = 2 \arccos\left(\frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right)}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{D_3 \varphi}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\widehat{D u}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right)$$

Diagonali interne

Poiché da ogni vertice si diparte una sola diagonale interna (oltre le tre sulle facce esterne) essendo il romboesaedro delimitato da 6 facce 8 vertici e 12 spigoli $F+V=S+2$ (Eulero); ogni vertice si unisce con gli altri 7, con 7 segmenti di cui 3 lati e 4 diagonali e quest'ultime tre di faccia una sola interna.

Le quattro diagonali interne si distinguono in una diagonale principale colleganti i vertici con angoli di faccia 3φ (3 volte φ) e le altre tre diagonali interne colleganti i vertici con angoli di faccia $\varphi + 2\varphi$.

Queste tre diagonali sono uguali fra loro e rappresentano la diagonale di un rettangolo di lati l e b.

Diagonale principale $= P = \sqrt{(2h+\overline{DM})^2+H^2} =$

$$p = \ell\sqrt{4\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos\varphi\right)+1}$$

Altre 3 diagonali interne $= q = \sqrt{\ell^2+b^2}$

$$q = \ell\sqrt{1+4\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2}}$$

zione della diagonale congiungente i vertici 3φ.

Per: $60° \leq \varphi \leq 90$; $90° \geq \psi \geq 120°$

si hanno due tipi di solidi, lo slittamento delle facce parallele puo' avvenire, sia in direzione della diagonale di vertici φ, sia in direzione della diagonale di vertici ψ; cio' implica due solidi aventi entrambi 6 facce rombiche identiche, ma strutturalmente i solidi sono molto diversi.

Come si vede nel campo:

$$\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2}{3}\pi \quad ; \quad \frac{2}{3}\pi \geq \psi \geq \frac{\pi}{3}$$

scambiando φ con ψ si ha lo stesso rombo come faccia pero' ruotato di $\pi/2$ (da cui lo scambio di direzione nello slittamento delle facce parallele)

Notiamo che per $\varphi = 60° = \frac{\pi}{3}$ e $\psi = 120° = \frac{2}{3}\pi$, il primo solido è costituito da un ottaedro con affiancati due tetraedri, il secondo solido (non è ancora un solido) è un esagono di lato "l" cio' perchè nel primo solido la diagonale interna

minore è $l\sqrt{2}$ nel secondo solido la diagonale interna minore è zero. Del resto il vertice contenente $3\psi = 3 \cdot 120^\circ = 360$, non è un vertice, ma le facce costituiscono un piano.

Calcoliamo le diagonali interne.

in vera grandezza avremo anche: $H = \sqrt{l^2 - \overline{D''M''}^2}$

Sostituendo nelle due espressioni:

$$H = \sqrt{d^2 - \overline{ML}^2} = \sqrt{(l^2 - \overline{DL}^2) - \overline{ML}^2} = \sqrt{l^2 - (\overline{DL}^2 + \overline{ML}^2)} = \sqrt{l^2 - \overline{DM}^2}$$

$$H = \sqrt{l^2 - l^2 \cos^2\varphi / \cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{l}{\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\varphi} \qquad \boxed{H = l\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi/2}}}$$

Graficamente per costruire la seconda proiezione basta prolungare $\overline{MM''}$ fino ad incontrare in D_1'' l'arco di cerchio di raggio l e centro D''.

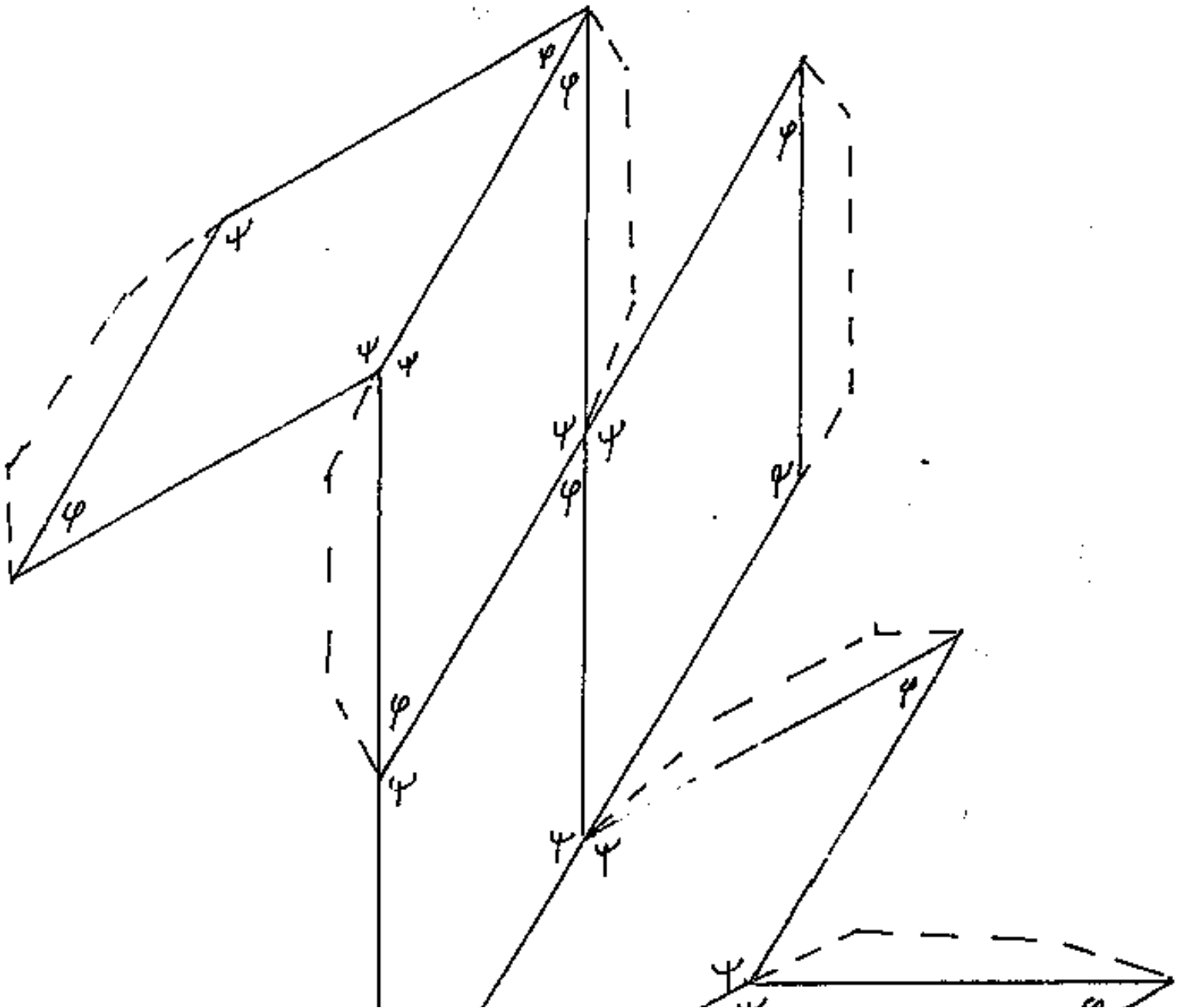
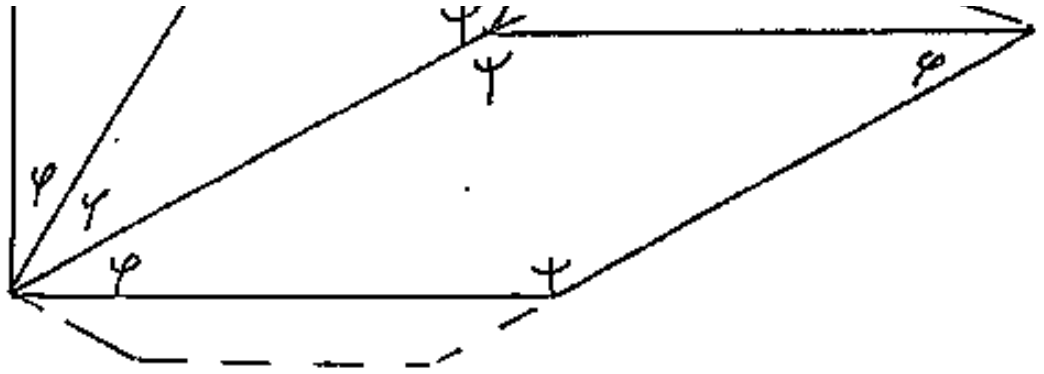
Esprimiamo in $\varphi/2$ avremo:

$$H = \frac{l}{\cos(\frac{\varphi}{2})} \cdot \sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \left(2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right)^2} =$$

$$H = \frac{l}{\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt{-4\cos^4\frac{\varphi}{2} - 1 + 5\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Delta = 0 \text{ per } \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} - \frac{16}{64}} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \begin{cases} 0; \\ \frac{\pi}{3} = 60° \end{cases} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} 0 \\ 120° \end{cases}$$

ciò vuol dire che $0 \leq \varphi \leq 120$ per $\varphi > 120°$ il radicando è negativo cioè le risoluzioni di H sono immaginarie (non esistono solidi reali). Ma $\psi = 180 - \varphi$ per cui per: $0 < \varphi < 60°$; $180° > \psi > 120°$; si ha un solo tipo di solidi. (le facce parallele sono slittate nella dire

Schema di romboesaedro con $\varphi = 30°$; $\ell = 5$ cm.

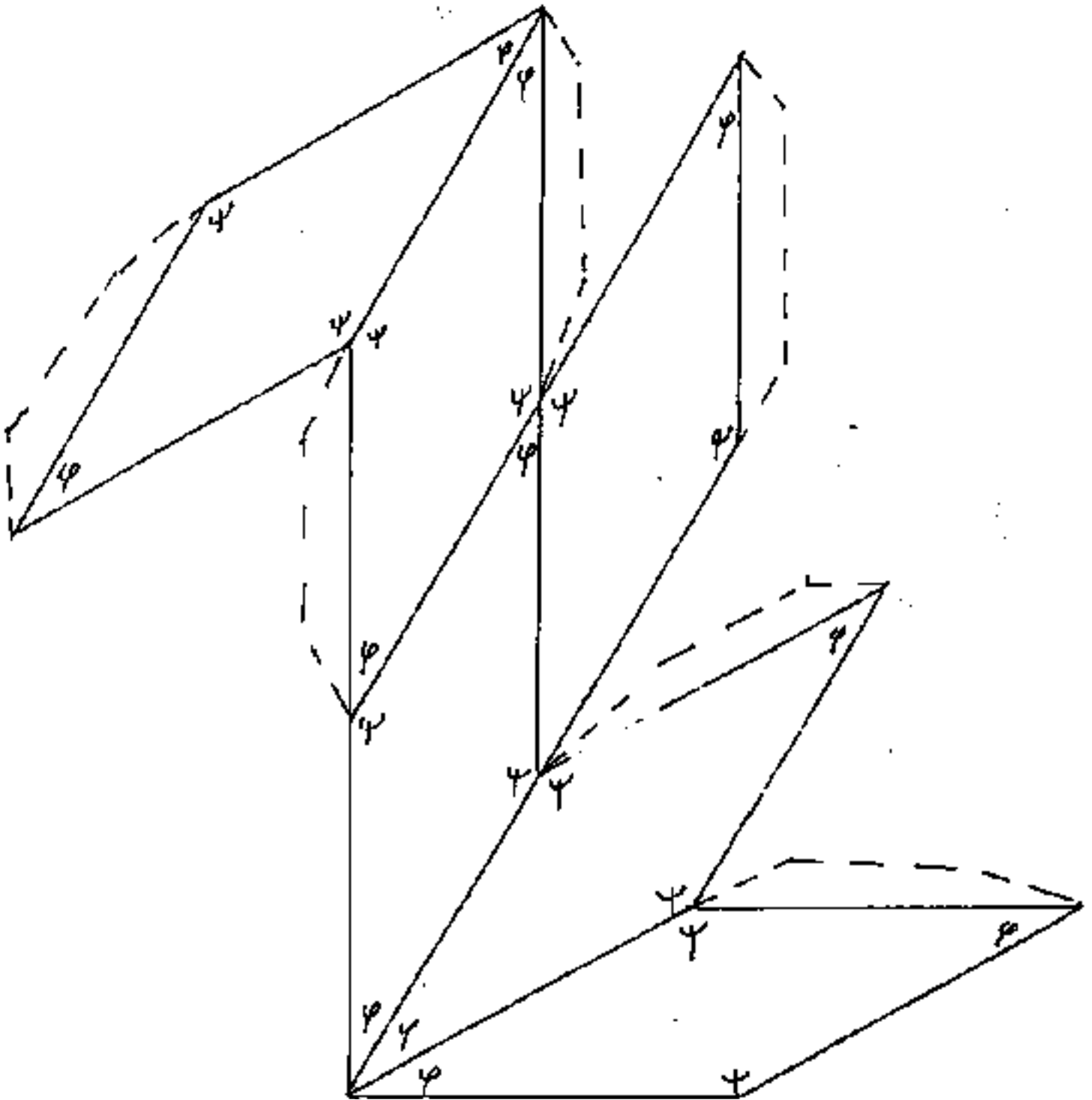
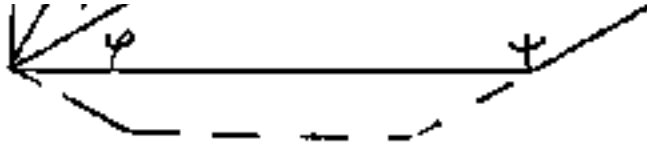
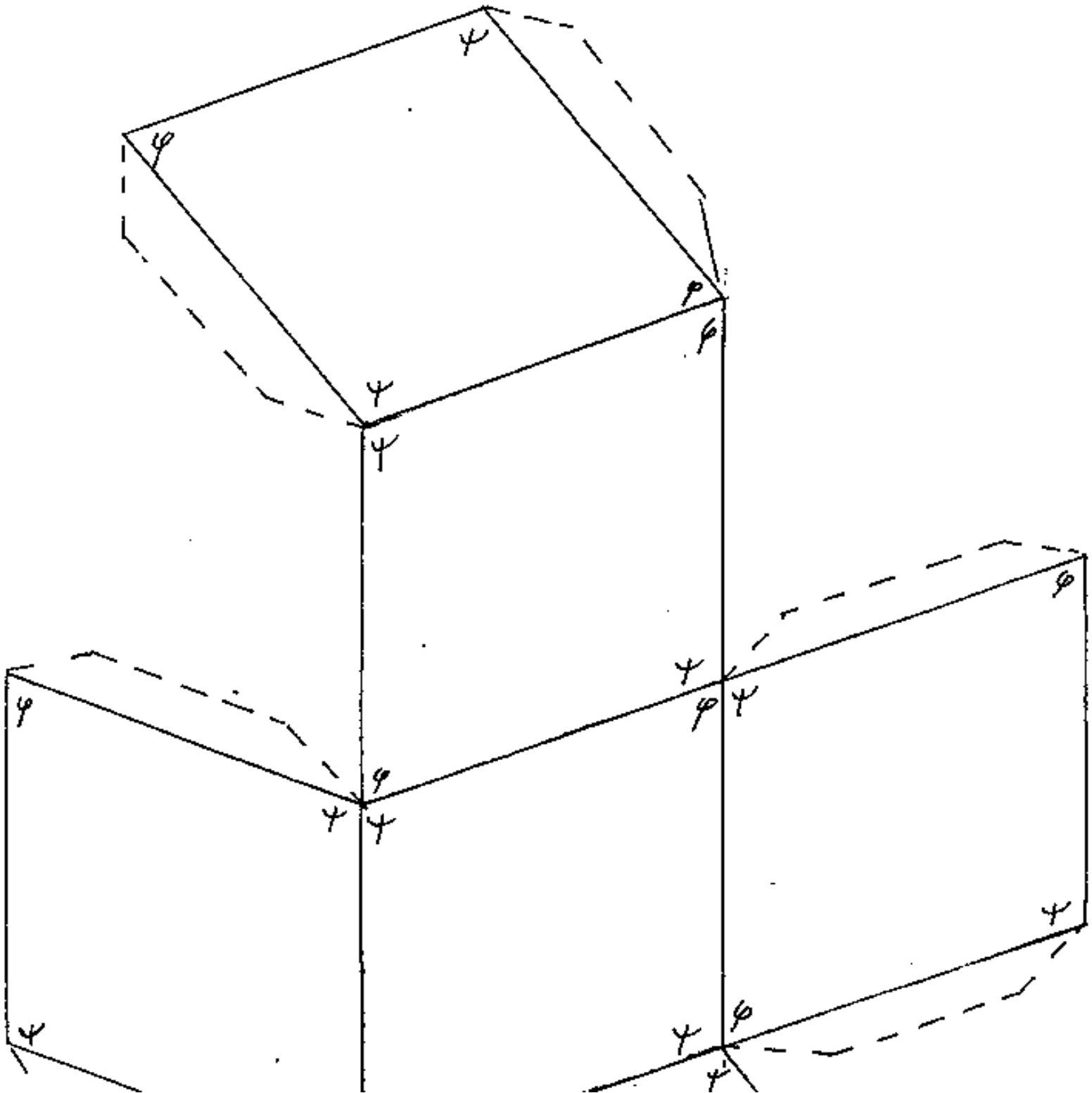
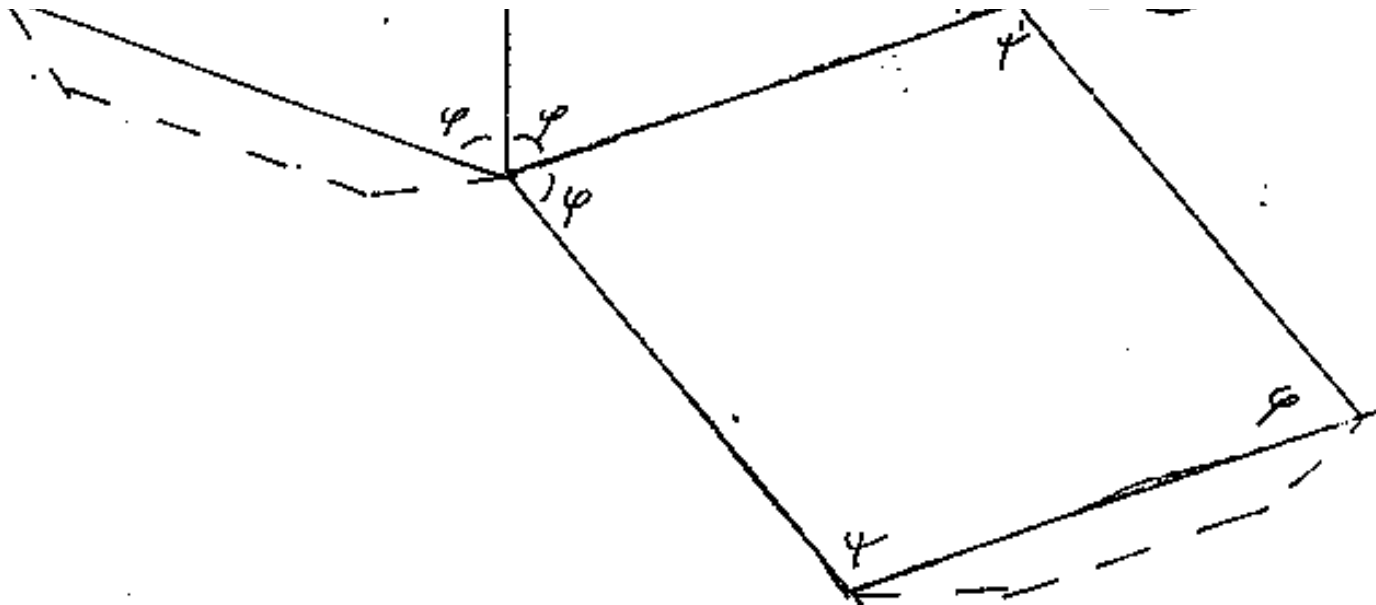
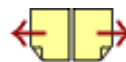
Le linguette da incollare sono a trattaggio

Schema di romboesaedro con $\varphi = 30°$; $l = 5$ cm.

φ ψ

Le linguette da incollare sono a tratteggio

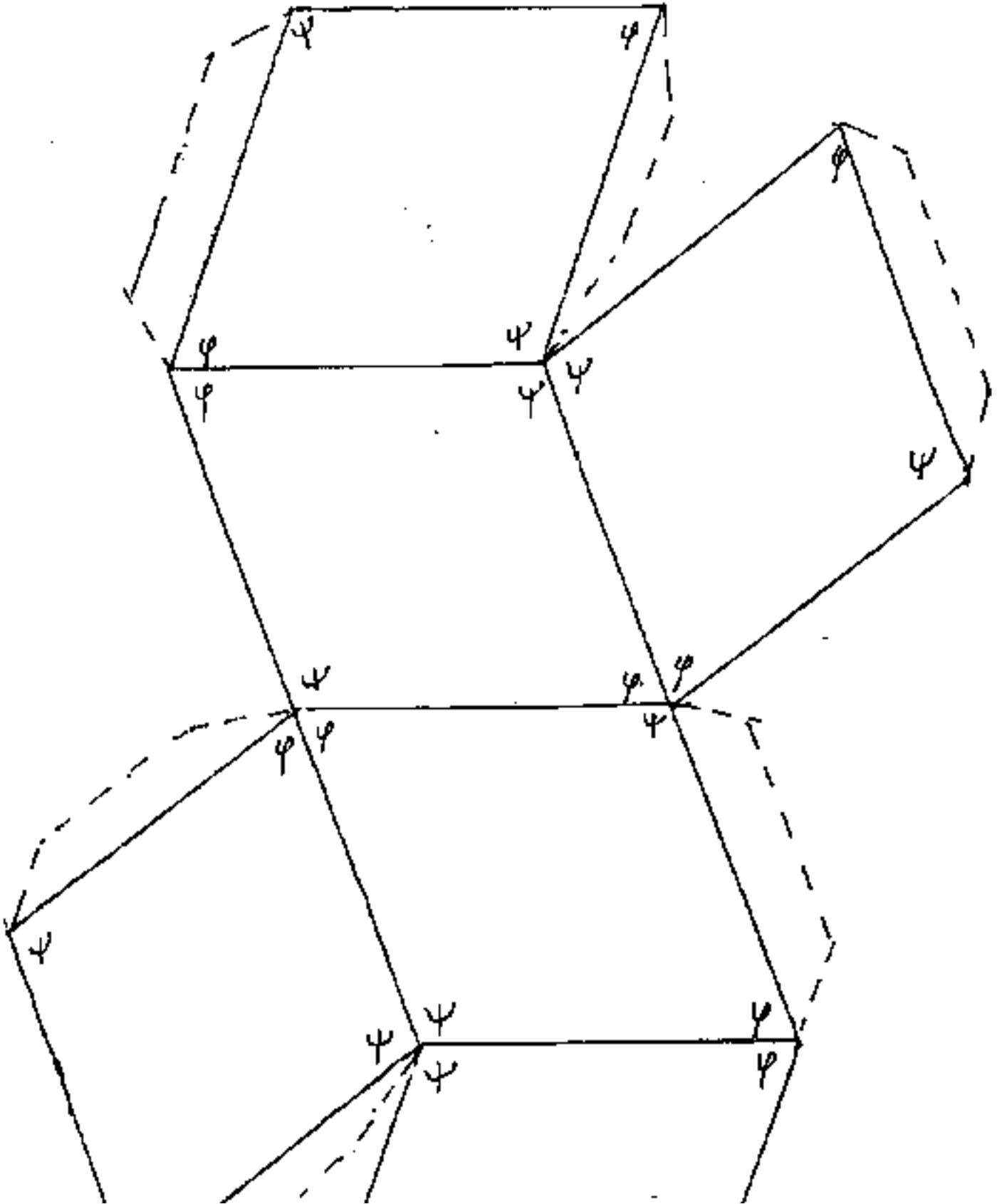
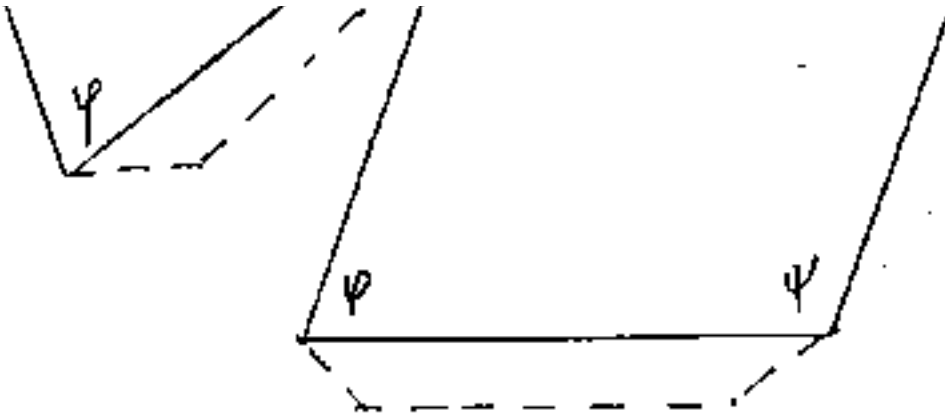
Schema di romboesaedro con facce rombiche uguali a quelle del rombododecaedro : $l = 5$; $\varphi = 70° 31' 44''$. $> 60°$ (primo tipo)

φ φ φ φ φ φ

<u>Schema di romboesaedro</u> con facce rombiche uguali a quelle del rombododecaedro : $k = 5$; $\psi = 70°31'44''$. $> 60°$

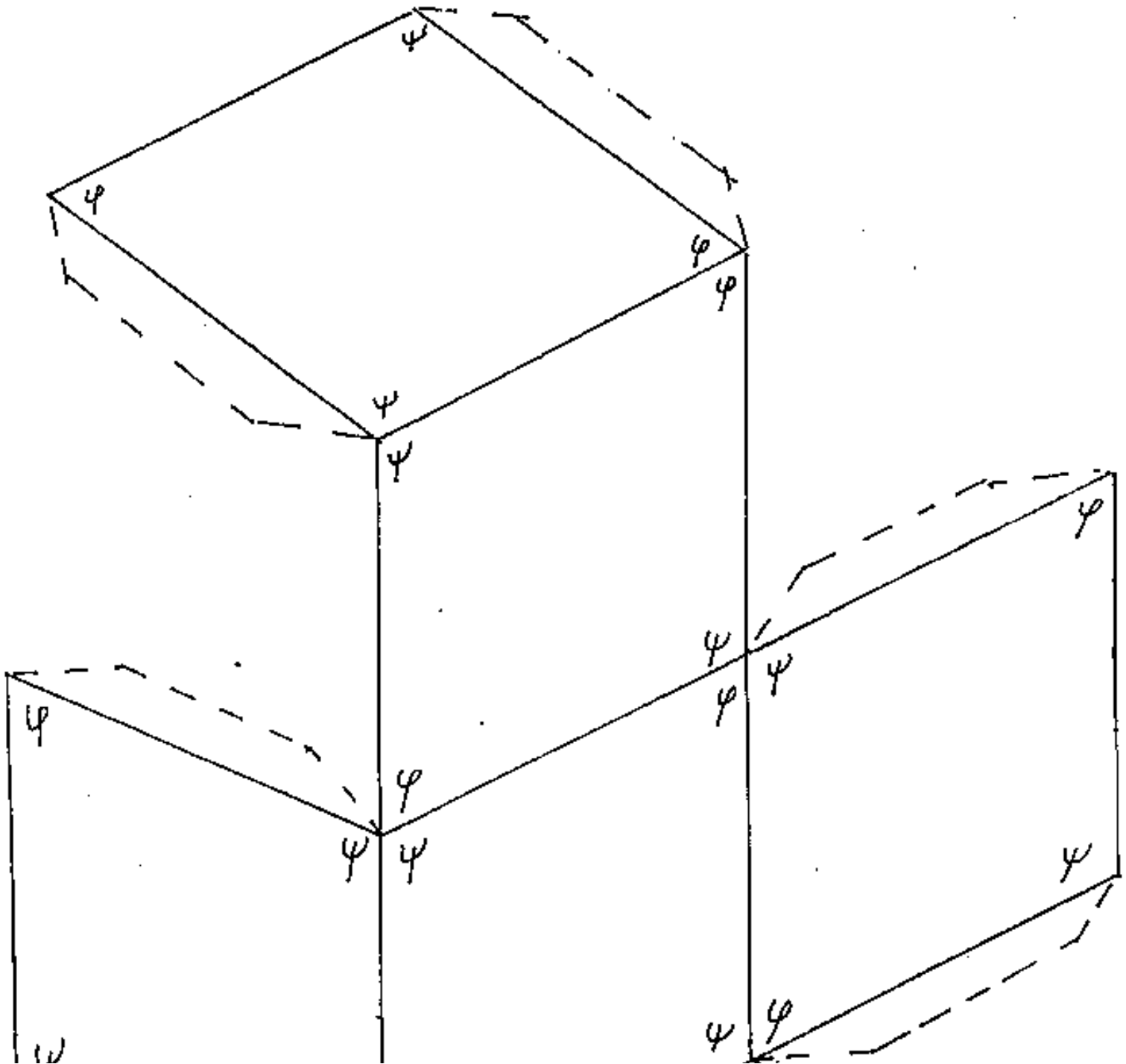
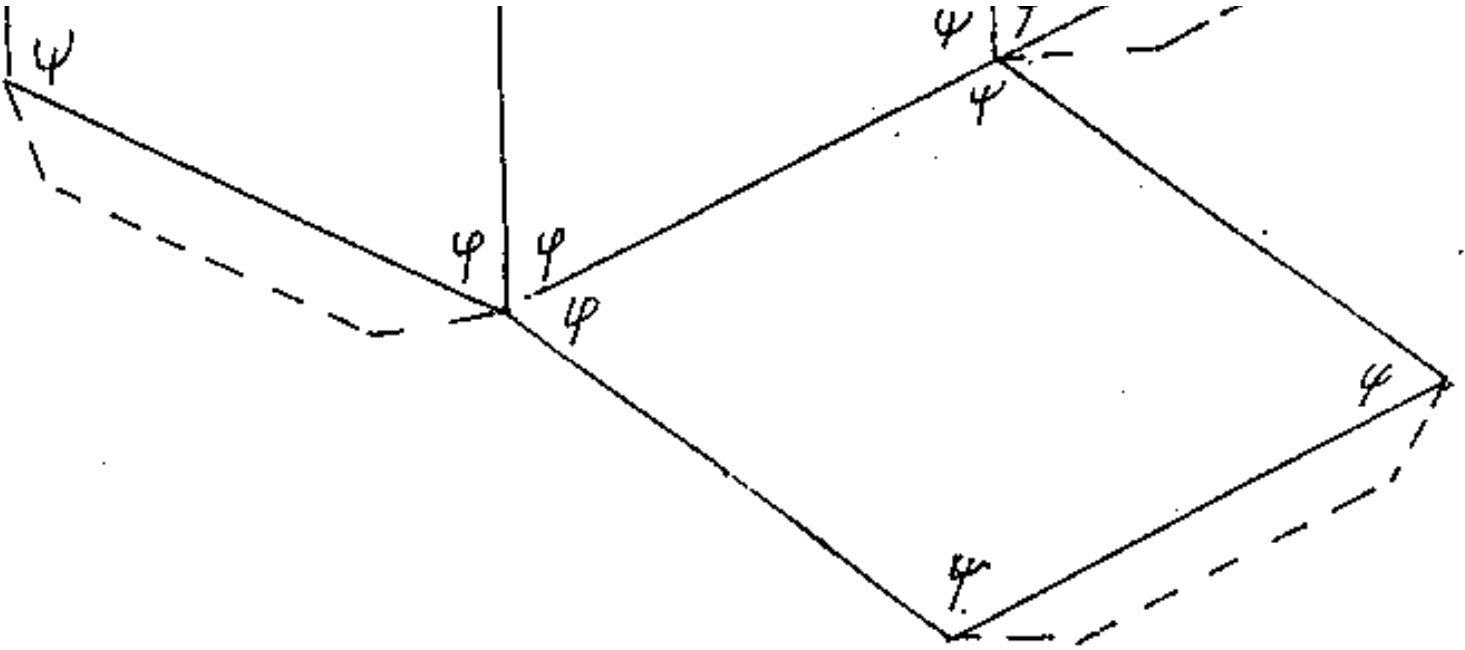
(primo tipo)

schema di romboesaedro con facce rombiche uguali a quelle del rombododecaedro: $l = 5$; $\varphi = 70°31'44'' > 60°$ (secondo tipo)

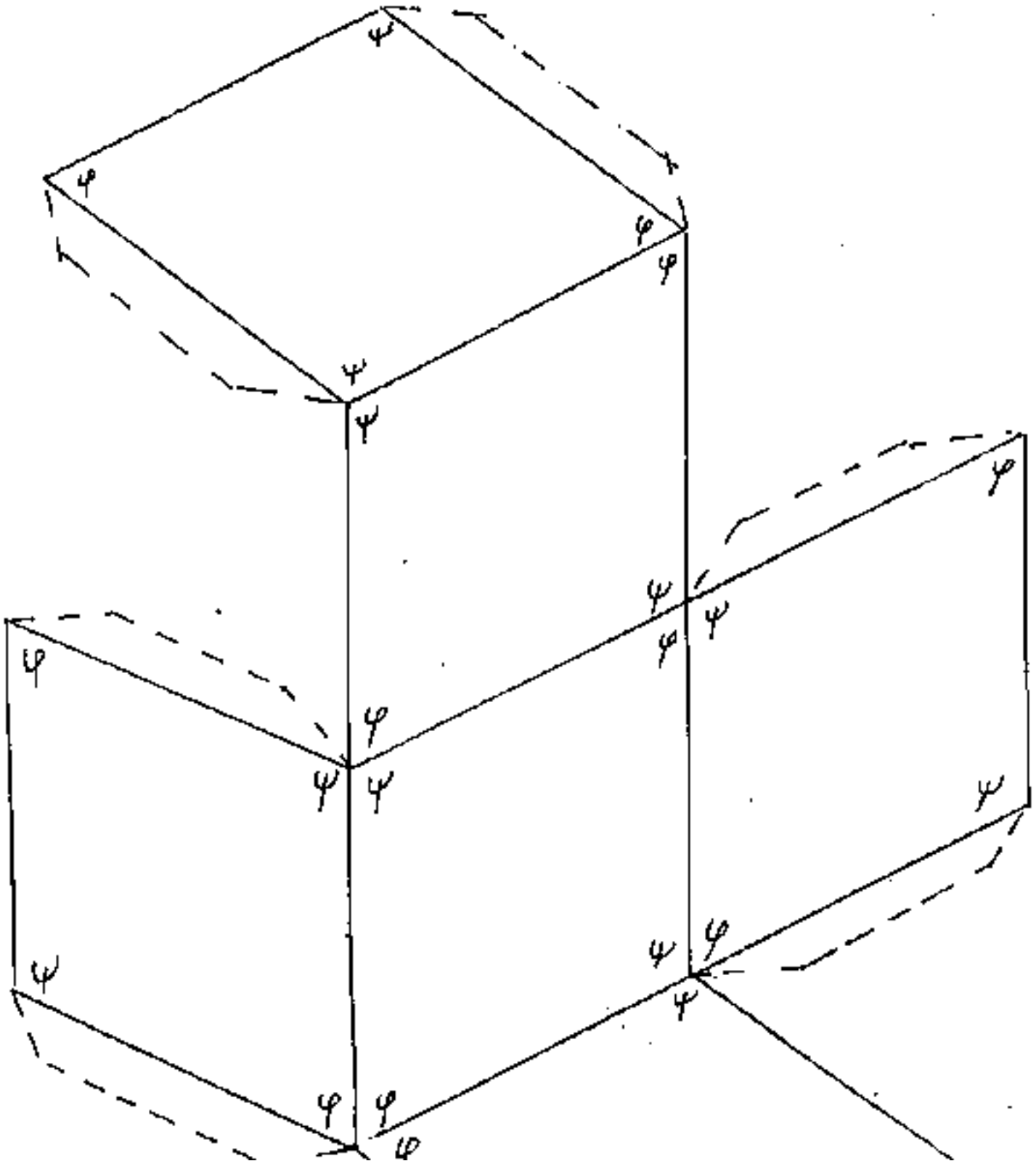
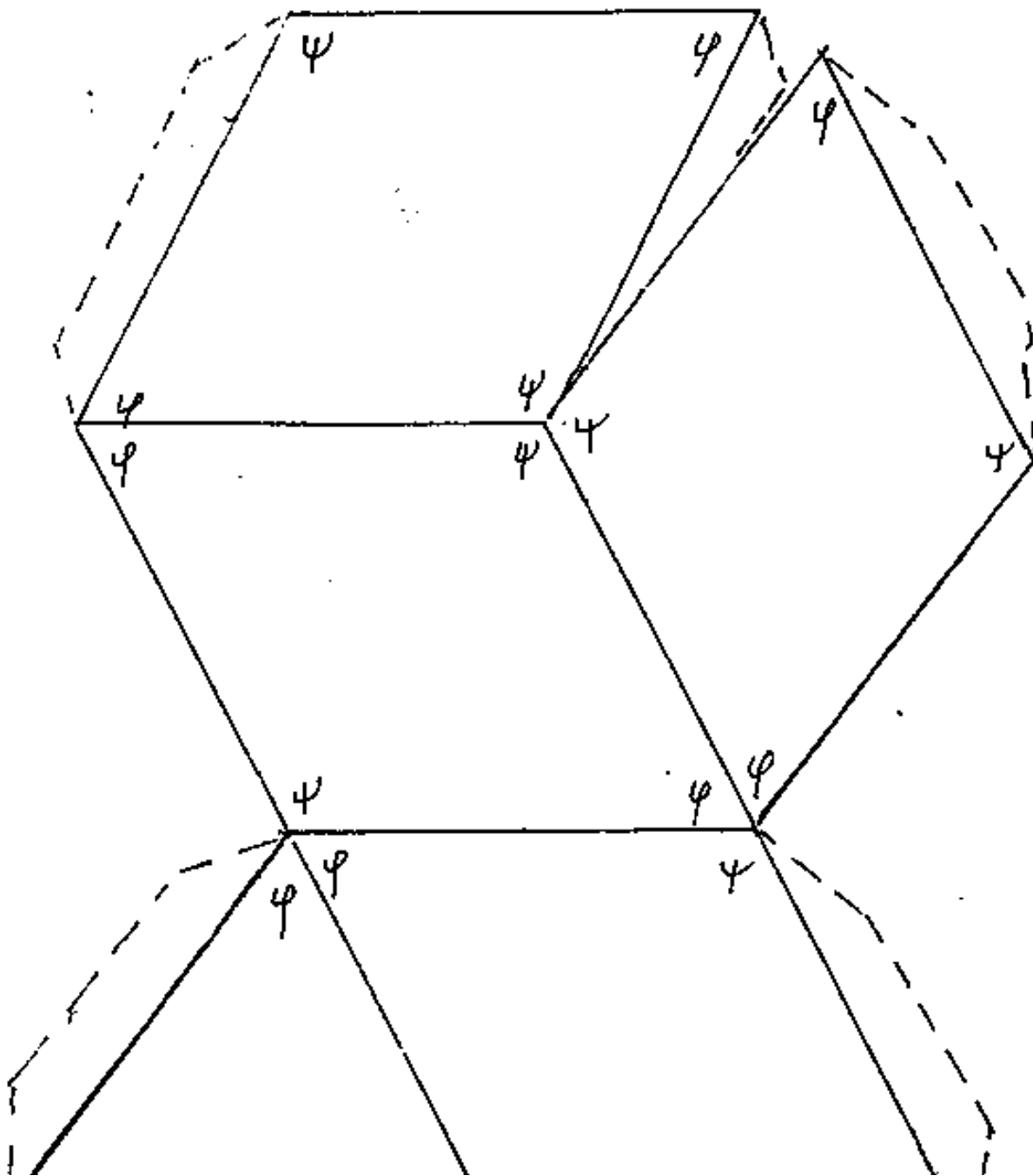
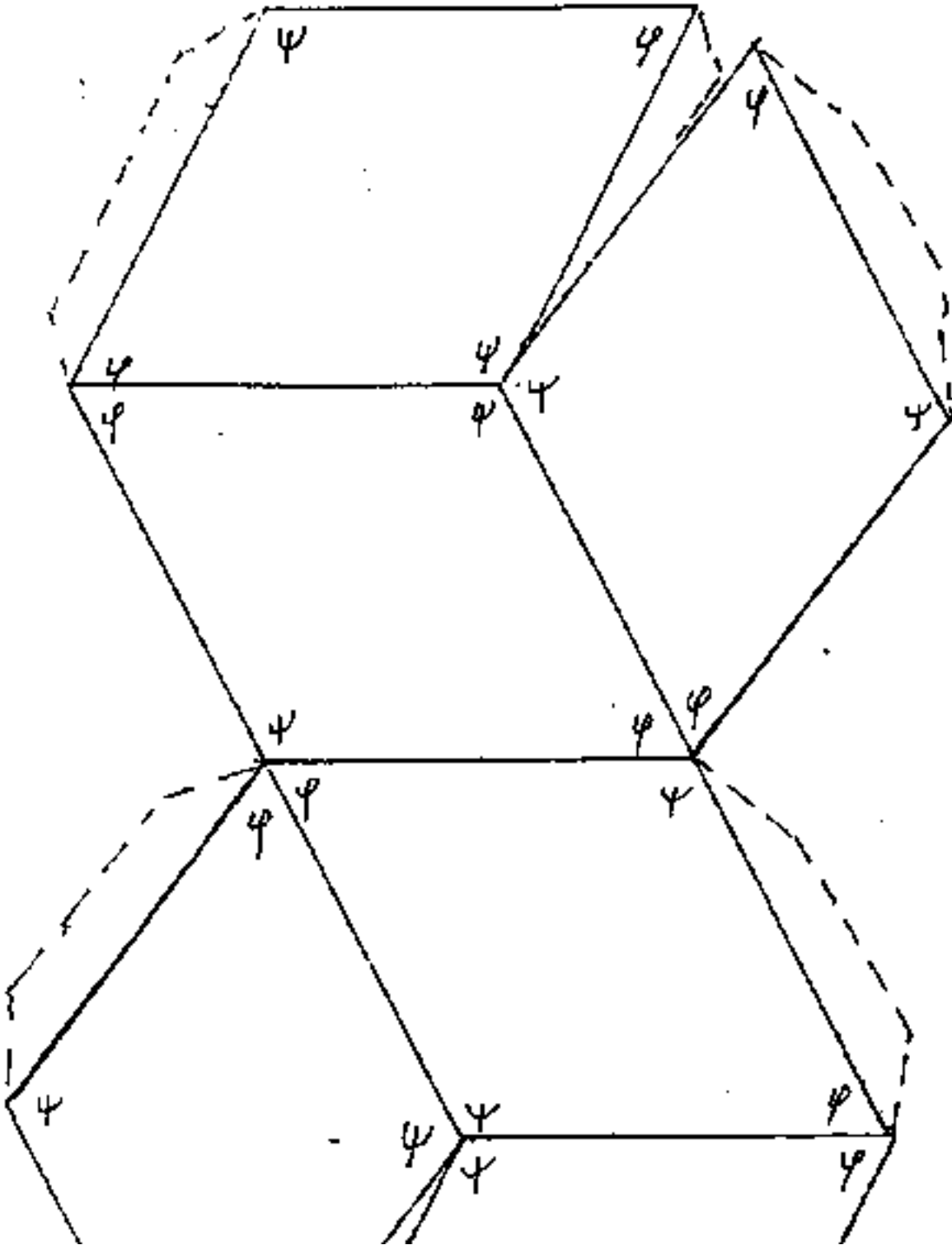
I diedri sugli spigoli uscenti dai vertici 3ψ sono uguali a quelli del rombododecaedro

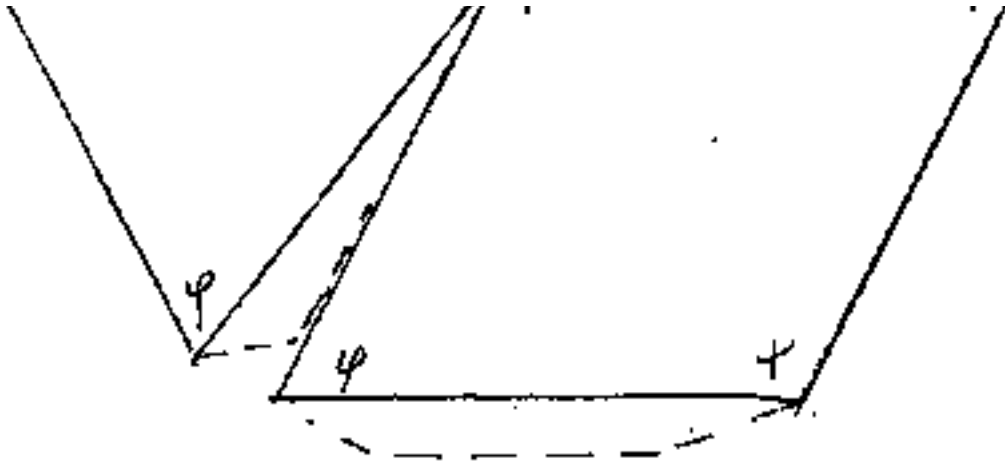
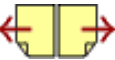
Schema di romboesaedro con facce rombiche uguali a quelle del rombododecaedro: $l = 5$; $\varphi = 70°31'44'' > 60°$ (secondo tipo)

I diedri sugli spigoli uscenti dai vertici 3ψ sono uguali a quelli del rombododecaedro

<u>schema di romboesaedro</u> con facce rombiche uguali a quelle del romboedro a 30 facce: $l = 5$ $\varphi = 63{,}4349488 > 60°$ (primo tipo)

$b = 5{,}25731121$; $2h = 8{,}506508$; $d = 4{,}472136$;

φ φ φ φ φ φ φ φ φ φ φ φ φ φ φ φ φ φ φ

<u>schema di romboesaedro</u> con facce rombiche uguali a quelle del romboedro a 30 facce: $l = 5$ $\varphi = 63{,}4348488 > 60°$ (primo tipo)

$b = 5{,}257311121$; $2L = 8{,}506508$; $d = 4{,}472136$;

<u>Schema di romboesaedro</u> con facce rombiche uguali a quelle del romboedro a 30 facce : $l = 5$; $\varphi = 63°,4349488 > 60°$ (secondo tipo)

angoli spigoli uscenti dai vertici 3ψ sono uguali e quelli

Si noti che gli angoli diedri due
del romboedro a 30 facce.

Si noti che gli angoli di
del contorno è 30 φ

Cristalli impossibili

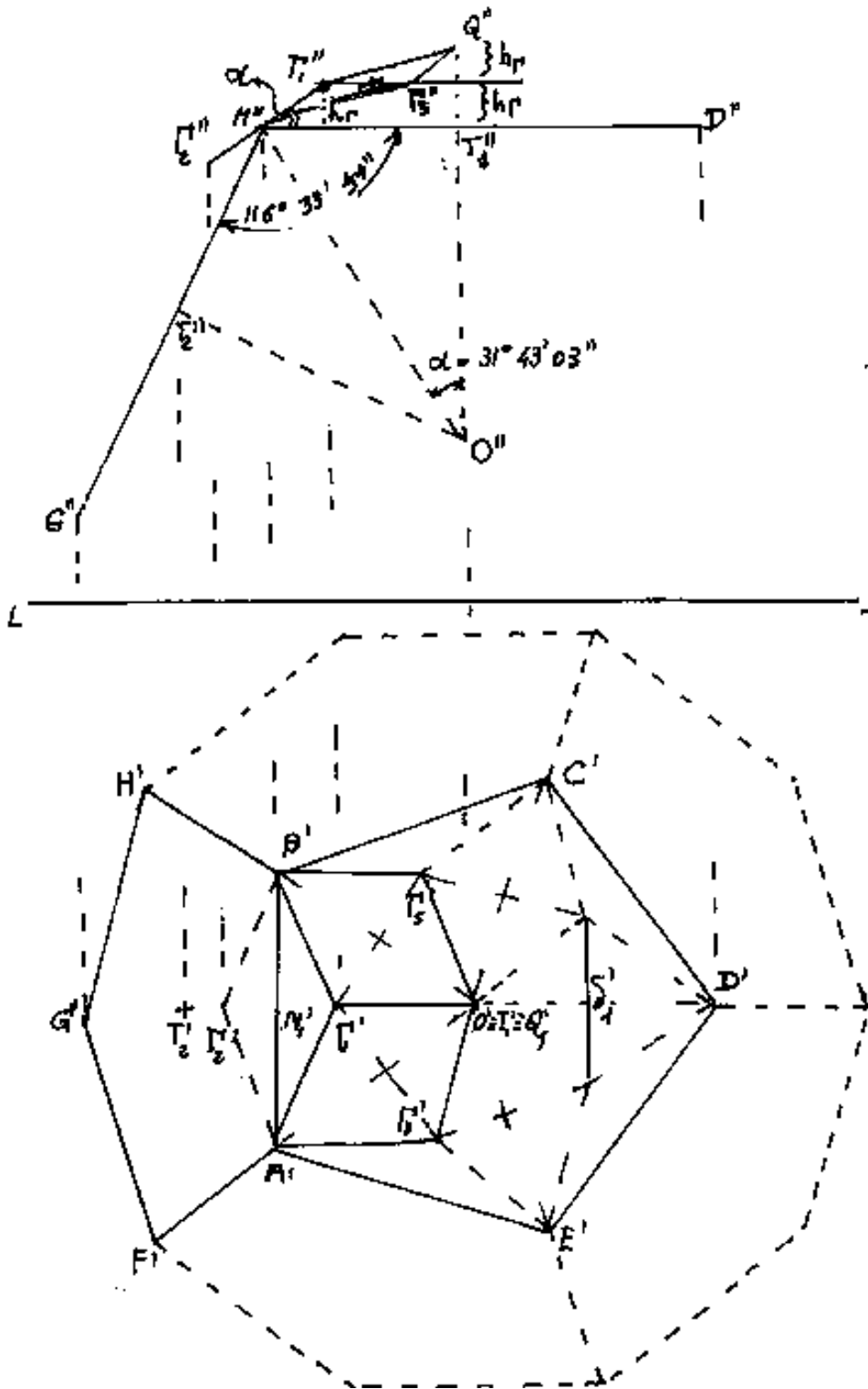
Un articolo di Lucio Loreto professore di mineralogia all'Università "La Sapienza" di Roma, pubblicato su Scienza e Dossier Anno 3° - n° 26 Giugno 1988, intitolato appunto "Cristalli impossibili"; prendendo spunto dalla notizia pubblicata sulla rivista americana: "Physical Review Letters" da Schechtman, I. Blech, D. Gratias, J.W. Cahn, che:

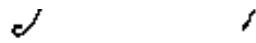
" noduletti di una lega di Al ed Mn delle dimensioni di qualche micron, provenienti da raffreddamento del fuso alla velocità di un milione di gradi al secondo presentano effetti di diffrazione ben netti e distribuiti anche" secondo una simmetria inequivocabilmente pentagonale ".

Nell'articolo è stato dato notevole rilievo ad un solido costituito da facce rombiche di due tipi: 60 facce di un tipo e 30 dell'altro, complessivamente 90 facce (nell'articolo il solido è stato chiamato: "ennaedro", non so se così è stato convenuto personalmente preferisco chiamarlo

se così è stato convenuto, personalmente preferisco chiamarlo "enenecontaedro birombico", riservando il nome "ennaedro" a solidi con nove facce).

L'articolo in parola, m'è capitato sotto gli occhi proprio mentre sto lavorando al presente IV volume di una ambiziosa opera di matematica il cui primo volume è intestato: "La matematica, la geometria, l'analisi, per chi voglia ripartire da zero" Perciò tratto questo solido.

L'Enenecontaedro birombico

Consideriamo le proiezioni di due facce adiacenti di un dodecaedro; (ABCDE);(AFGHB).

Sul prolungamento dei raggi $\overline{OT}$, che dal centro O del dodecaedro, vanno al centro T delle facce, consideriamo il vertice Q_1 comune a cinque facce rombiche del primo tipo del nostro enenecontaedro. Le diagonali maggiori di questi rombi si

proiettano in prima pro-
iezione secondo i segmenti $\overline{Q_1'A'} = \overline{Q_1'B'} = \overline{Q_1'C'} = \overline{Q_1'D'} = \overline{Q_1'E'} = R_p$. Se dai punti medi di tali proiezioni tracciamo le perpendicolari troviamo l'altra diagonale del rombo, che essendo parallela alla faccia del dodecaedro, si proietterà in vera grandezza in prima proiezione; e sarà calcolabile conoscendo lo spigolo ℓ del dodecaedro.

I punti estremi Γ_i di queste diagonali sono comuni ai rombi del primo tipo come $A\Gamma_1 Q_1 \Gamma_3$; $B\Gamma_1 Q_1 \Gamma_5$; e del secondo tipo come $A\Gamma_1 B \Gamma_2$.

Avvalendoci delle note correlazioni fra gli elementi del pentagono e del dodecaedro, facciamo qualche calcolo:

In prima proiezione vale la proporzione:

$$\overline{A'B'} : \overline{M_1'T_1'} = \delta_1' : \overline{T_1'D/2}$$ (ove $\delta_1' = \delta_1 =$ diagonale minore dei rombi)

$$l : a = \delta_1 : R_p/2$$ (ove $l =$ lato pentagono = spigolo dodecaedro; $a =$ apotema del pentagono; $R_p =$ raggio del cerchio circoscritto al pentagono)

$$\delta_1 = \frac{l R_p}{2a} \quad ; \quad a = R_p \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$

$$\delta_1 = \frac{2l}{(\sqrt{5}+1)} \qquad \boxed{\delta_1 = \frac{l}{2}(\sqrt{5}-1)} = (0{,}618033989)\,l$$

Detta h_r la quota (distanza) delle diagonali δ_1 dal piano della faccia pentagonale, basta calcolare h_r per i punti estremi di δ_1 e δ_2 (ove δ_2 è la diago-

nale minore dei rombi 2) $h_P = M_1'\Gamma_1' \tan\alpha$ $\delta_2 = 2\, M_1'\Gamma_1' / \cos\alpha$

Poiche' l'angolo diedro fra le facce del dodecaedro è 116° 33' 54" e quindi: $\widehat{\Gamma_1'' M_1'' T_1''} = \alpha = \widehat{M_1'' O'' T_1''} = 90° - \frac{1}{2}(116° 33' 54")$

$\alpha = 31° 43' 03"$ sappiamo anche: $\tan\alpha = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$; $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$. Dalla prima proiezione abbiamo inoltre:

$$M_1'\Gamma_1' = \frac{l}{2} \tan(\widehat{M_1' B' \Gamma_1'}) \;;$$

Solidi provenienti da sezioni di altri solidi

Abbiamo visto come, partendo dai solidi regolari ed aggiungendo piramidi alle facce, si ricavano le principali forme cristallografiche.

Uno studio di solidi, con disegni di Leonardo da Vinci, si trova nell'opera di Luca Pacioli (1445 - 1517?) "De Divina Proporzione". E' interessante ricordare che, secondo Platone, la sezione aurea o Divina proporzione "... da' l'essere formale alla Quintessenza attraverso la quale Dio conferisce la Virtù Celeste a tutti gli elementi naturali: fuoco, aria, acqua, terra; corrispondenti ai solidi regolari:

duodecedron (dodecaedro) = quintessenza o Cielo.

tetracedron (tetraedro) = fuoco

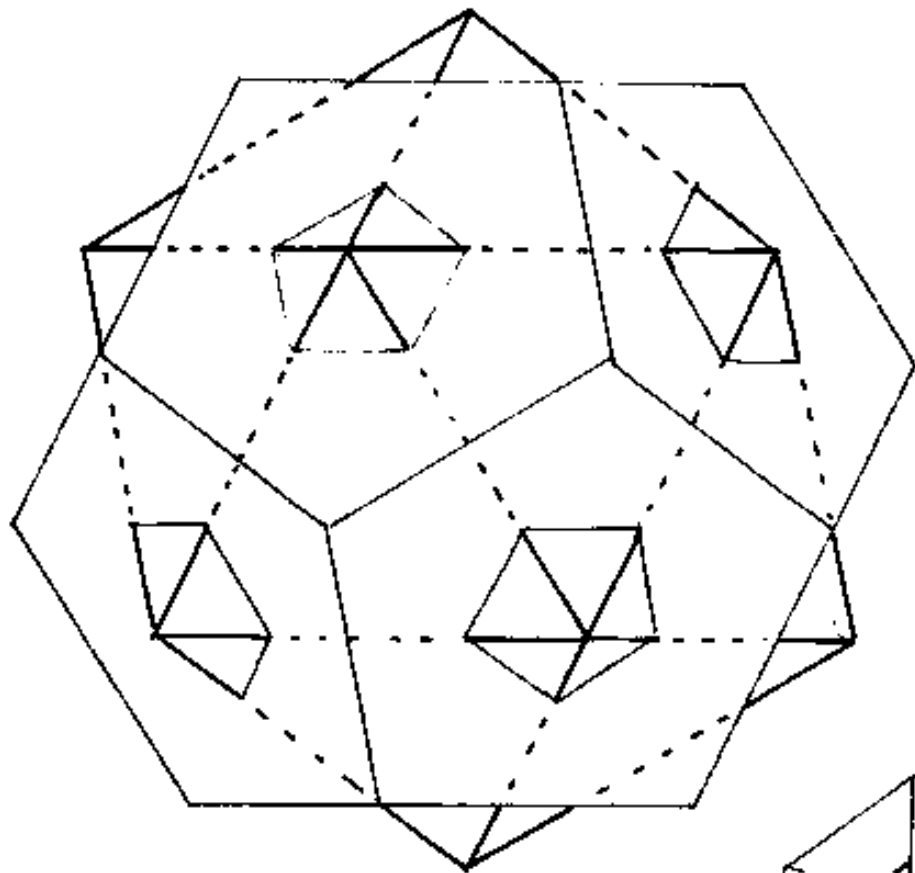
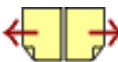
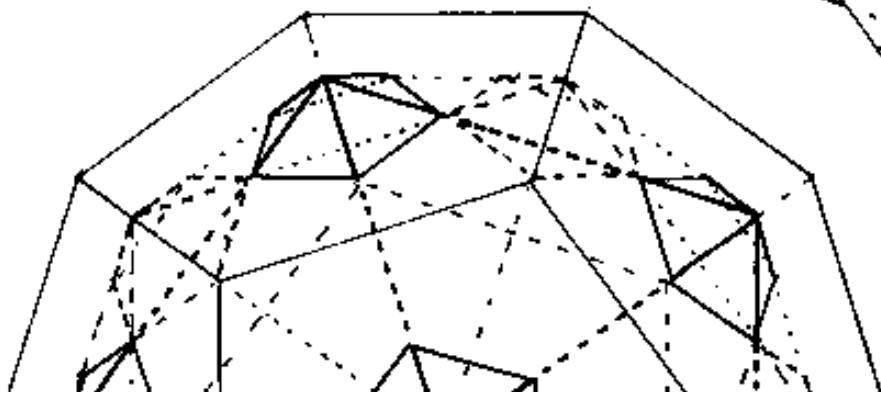
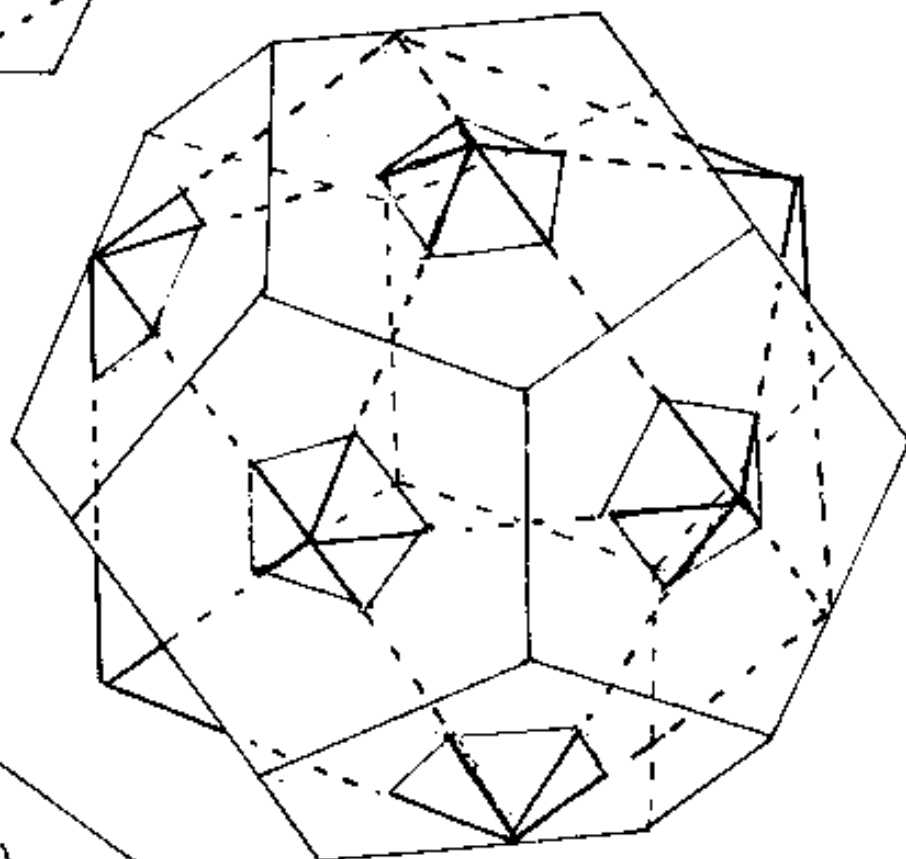
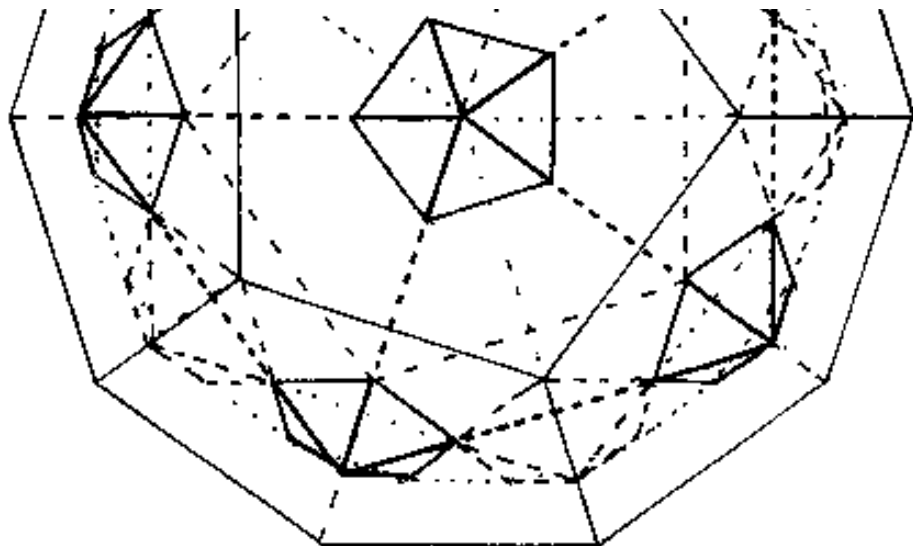
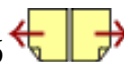
octocedron (ottaedro) = aria

icocedron (icosaedro) = acqua

exacedron (esaedro o cubo) = terra

Questi cinque corpi regolari sono legati, proporzionati fra loro

questi cinque corpi regolari sono legati, proporzionati fra loro e circoscritti da una sfera e solo la Divina Proporzione li accorda"

Nella rappresentazione dei solidi, per evidenziare gli spigoli che rimangono coperti dalle facce, noi usiamo disegnarli a tratteggio. Nei disegni di Leonardo ogni solido è disegnato sia come "Solidus" (cioè pieno) sia come "Vacuus" (cioè vuoto), e disegna solo

Proiezioni del dodecaedro e dell'icosaedro con vertici comuni all'enenecontaedro

materializzati gli spigoli del solido cosicché non esisten-
do piani di facce si vedono anche gli spigoli opposti.
Le sezioni dei solidi possiamo riguardarle come
effettuate in due diverse modalità:

1) Sezioni parallele alle facce

È la modalità di sfaldamento dei cristalli.
Se tutte le sezioni avvengono alla stessa distanza
dalle facce origine, il solido, come configurazione,
resta invariato, anche se impiccolito.
In cristallografia non ha alcuna importanza, se non
tutte le facce sono sfaldate, e se lo sfaldamento ha
profondità diverse, la configurazione del solido
appare variata, ma il sistema cristallino di
appartenenza resta lo stesso. Basta pensare che
le rette di giacitura delle facce restano le stesse.

2) Sezioni in prossimità dei vertici

Per asportare piramidi rette aventi per

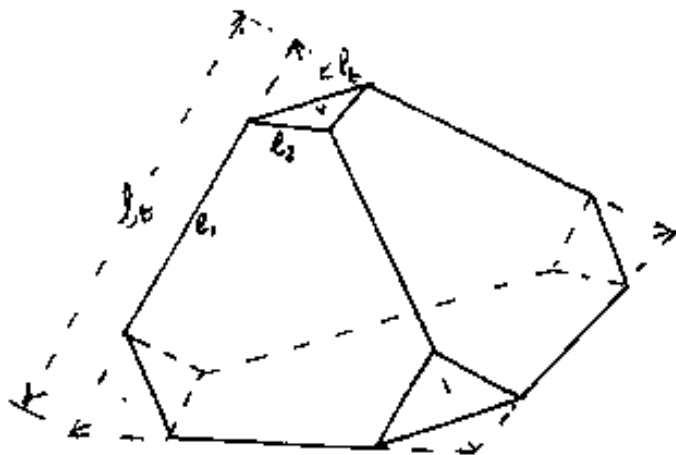
Per asportare piramidi rette, aventi per vertice il vertice stesso. È il procedimento inverso a quello di aggiungere piramidi alle facce e che abbiamo già trattato. Le configurazioni del solido cambiano anche con l'altezza delle piramidi asportate.

È da notare che, per i solidi regolari, solo

tetraedro non ha facce parallele, ed il suo complemento ove si scambiano le facce con i vertici è ancora un tetraedro, mentre: cubo e ottaedro, dodecaedro ed icosaedro, (come abbiamo già visto) si scambiano le facce con i vertici e viceversa.

TETRAEDRO SEZIONATO

Consideriamo le sezioni del secondo tipo. (quelle del primo tipo lasciano la configurazione tetraedrica).

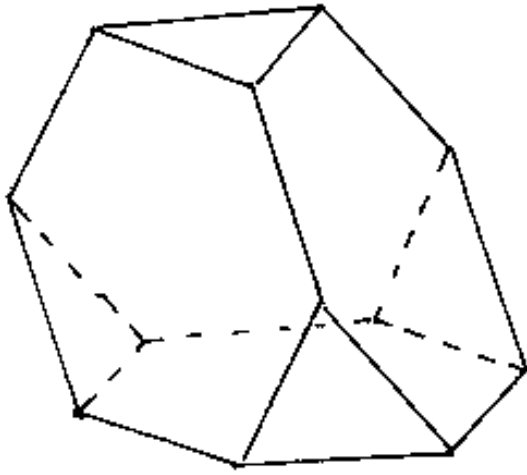
Il tetraedro sezionato presso i vertici diventa:

ove $K\ell_t$ è la distanza dei vertici dalle sezioni; si ha:

$$\ell_2 = \frac{K\ell_t}{2}\sqrt{6}$$

$$\ell_1 = \ell_t - 2\ell_2 = \ell_t(1 - K\sqrt{6})$$

Al crescere di K si hanno configurazioni diverse; quando: $\ell_2 = \ell_1$ cioè quando:

$$\frac{K\ell_t}{2}\sqrt{6} = \ell_t(1 - K\sqrt{6}) \supset \frac{3}{2}K\sqrt{6} = 1 \qquad \boxed{K = \sqrt{6}/9} = 0,27216553,$$

quindi: $\ell_2 = \ell_1 = \frac{1}{3}\ell_t$;

quindi: $\boxed{l_2 = l_1 = \frac{1}{3} l_t}$ si ha un solido che nel libro "De Divina Proporzione" (op. cit.) viene chiamato:

Tetracedron Abscisus

Schema di

TETRACEDRON ABSCISUS

4 3 5 2 2 1 6 3 1 6 7 8 7 11 9 11 10 5 10

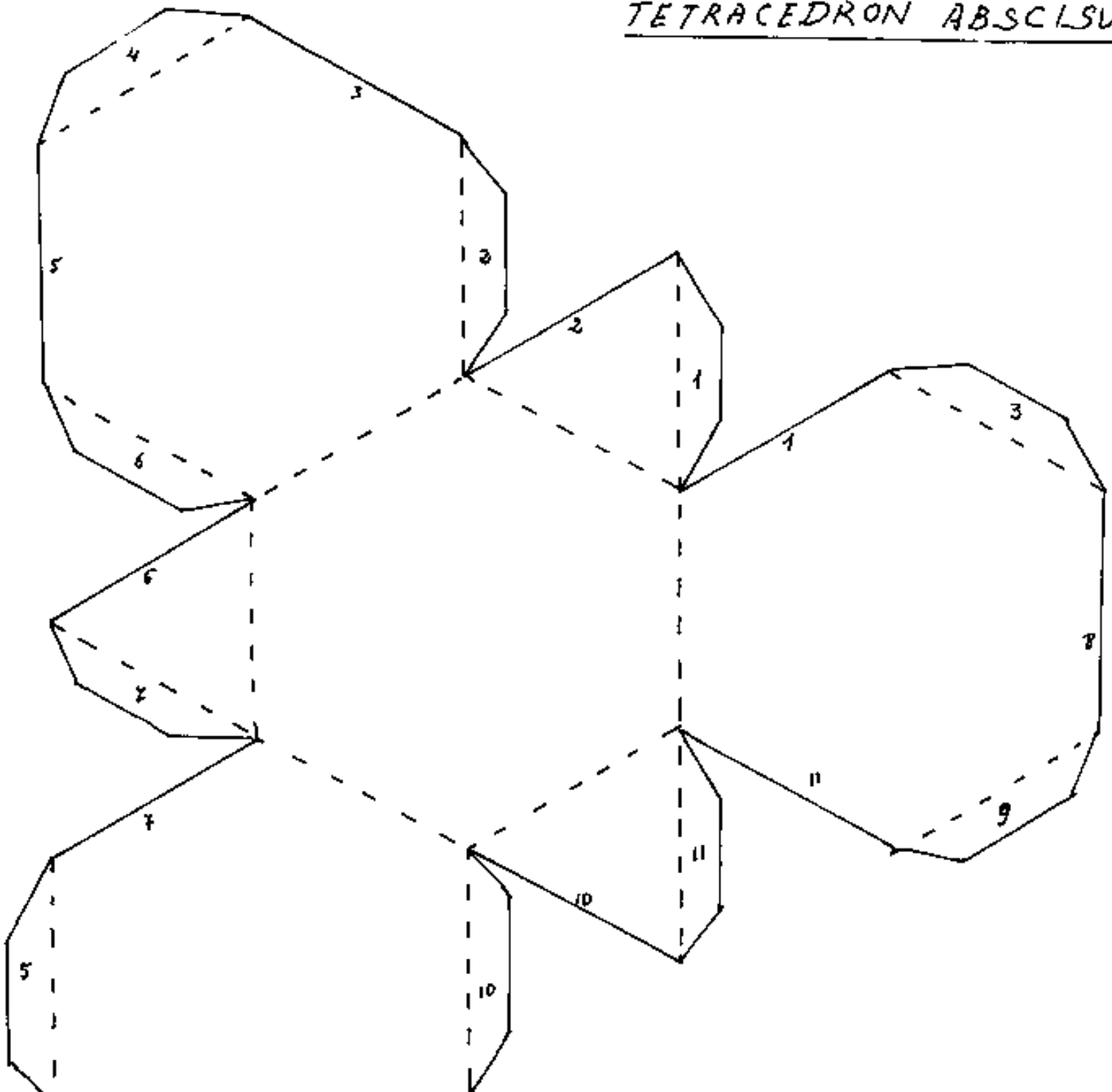
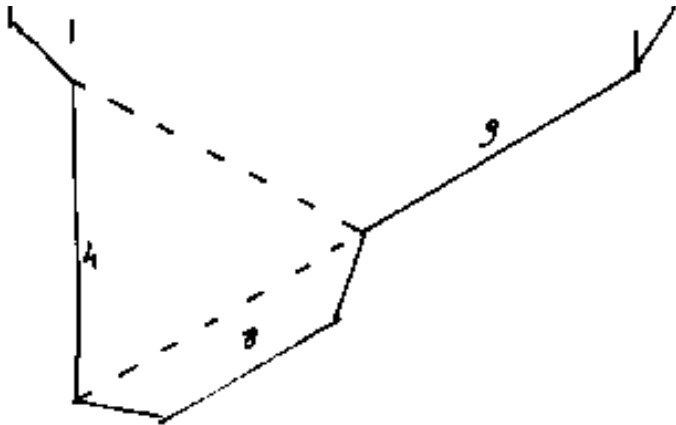
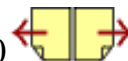
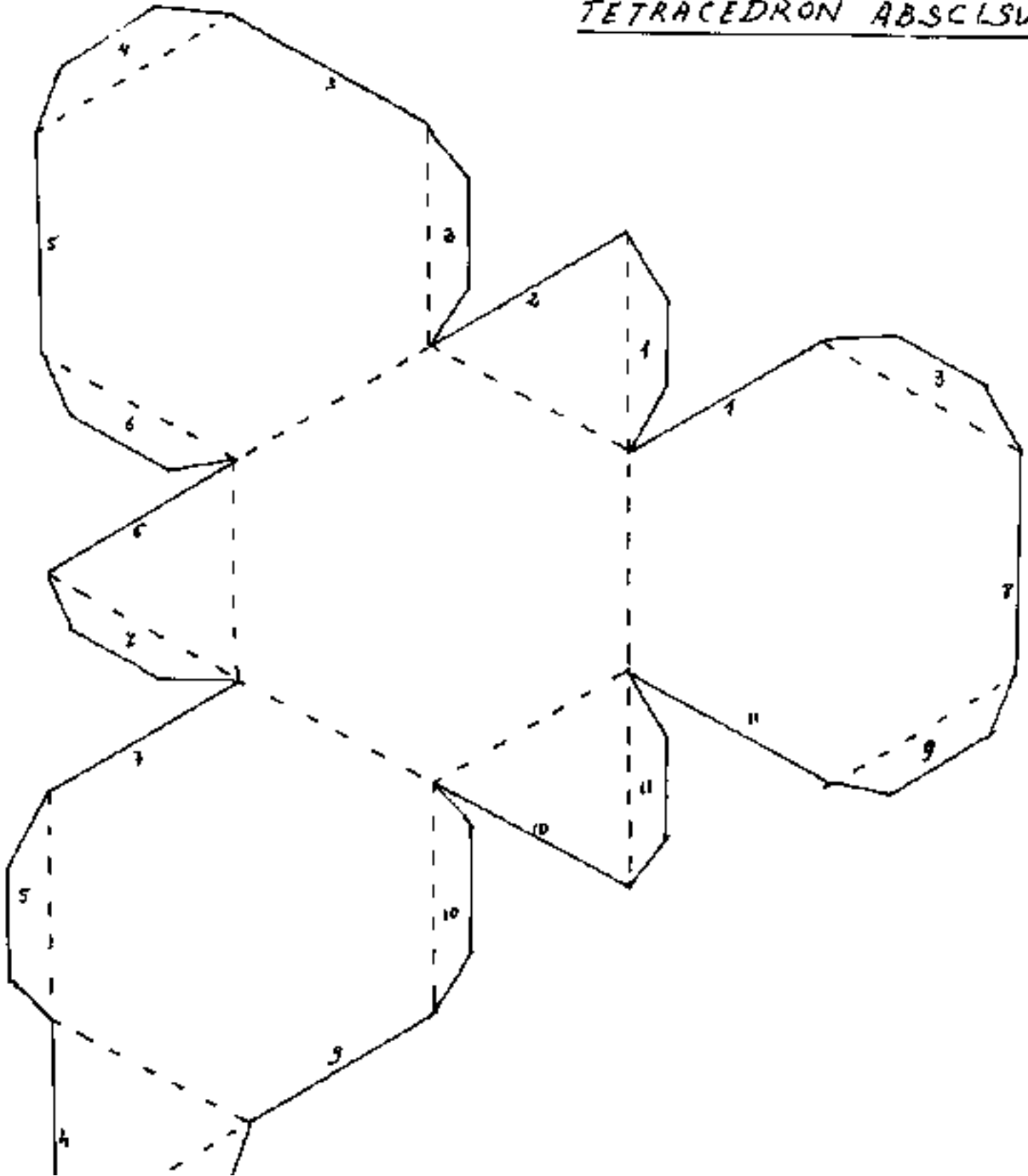
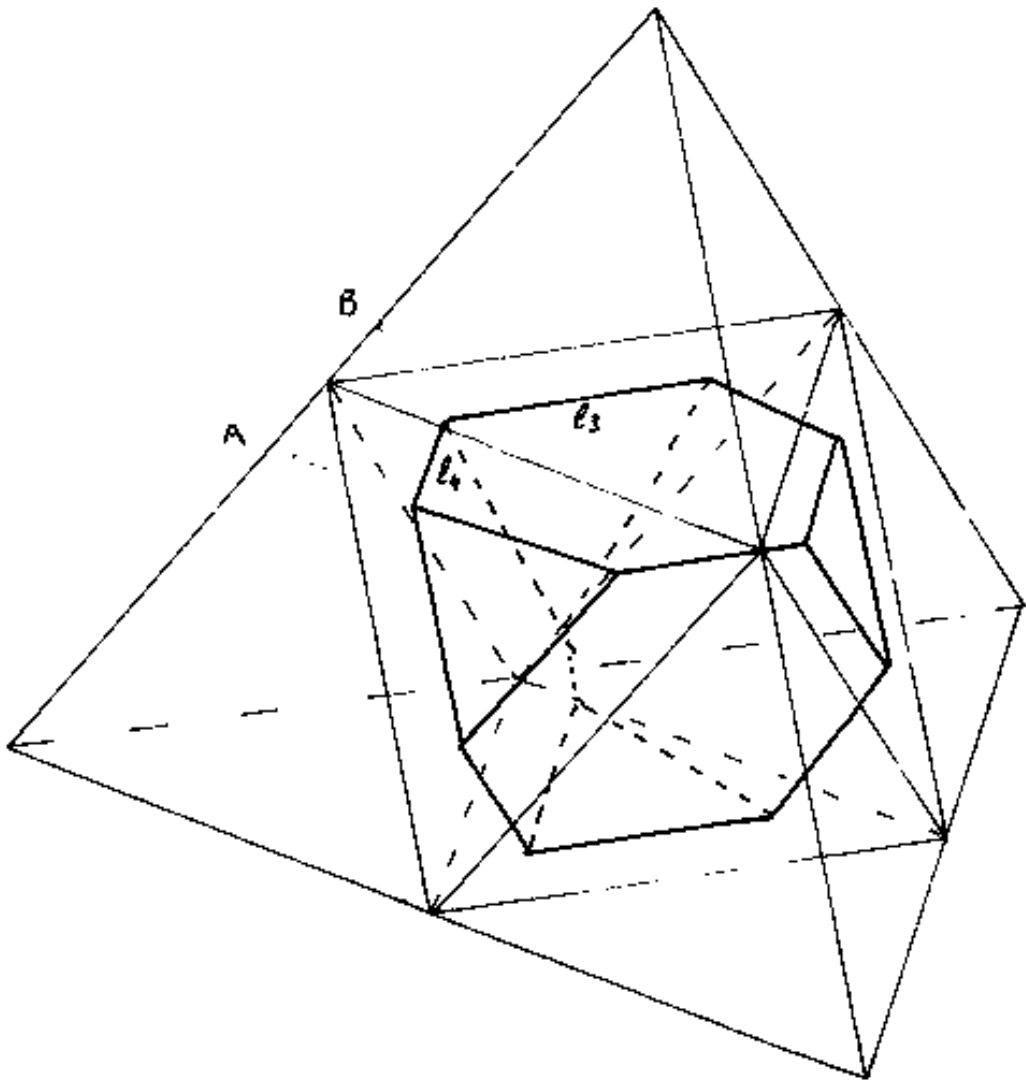
9

4

8

Schema di

TETRACEDRON ABSCISUS

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Aumentando ancora K si arriva al limite max ove $l_1 = 0$ cioè: $K = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,40824829$; $l_2 = l_t/2$; si ha che il tetraedro si è trasformato in un ottaedro di spigolo metà $= l_2 = l_t/2$.

Se continuiamo ad aumentare K si sezionano

con piani paralleli alle facce, quattro facce alterne dell'ottaedro.

Essendo $K > \frac{1}{\sqrt{6}}$ si avrebbe $\ell_1 < 0$, e poiché le sezioni si intersecano anche fra loro, le formule sopra indicate non sono più valide.

$$\ell_1 = \left| \ell_t (1 - K\sqrt{6}) \right| = |\overline{AB}|; \text{ avremo: } \underline{\ell_4 = \overline{AB} = \ell_t (K\sqrt{6} - 1)}$$

$$\ell_3 = \frac{\ell_t K\sqrt{6}}{2} - 2\overline{AB} = \ell_t \left(K\frac{\sqrt{6}}{2} - 2K\sqrt{6} + 2 \right) = \underline{\ell_t \left(2 - K\frac{3}{2}\sqrt{6} \right) = \ell_3}$$

per $\ell_3 = \ell_4$ avremo:

$$-K\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2 = K\sqrt{6} - 1$$

$$\frac{5}{2}K\sqrt{6} = 3 \rightarrow \boxed{K = \frac{\sqrt{6}}{5}} = 0,48990$$

cioè: per $K = \sqrt{6}/5$ ritorna il <u>tetracedron ascisus</u>. con quattro facce esagonali e quattro triangolari regolari.

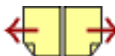
Ma possiamo continuare ad aumentare K fino a che: $K\ell_t = \rho_1$ = raggio della sfera circoscritta al tetraedro, (ove i 4 piani di sezione hanno in comune il centro sfera) cioè K può essere: $K \leq \frac{\sqrt{6}}{4} = 0,61237244$.

Per $K = \frac{\sqrt{6}}{4}$ il solido si riduce ad un punto.

Se: $\ell_3 = 0 \rightarrow \underline{K} = \frac{4}{3\sqrt{6}} = \underline{\frac{2}{9}\sqrt{6} = 0,54433105}$.

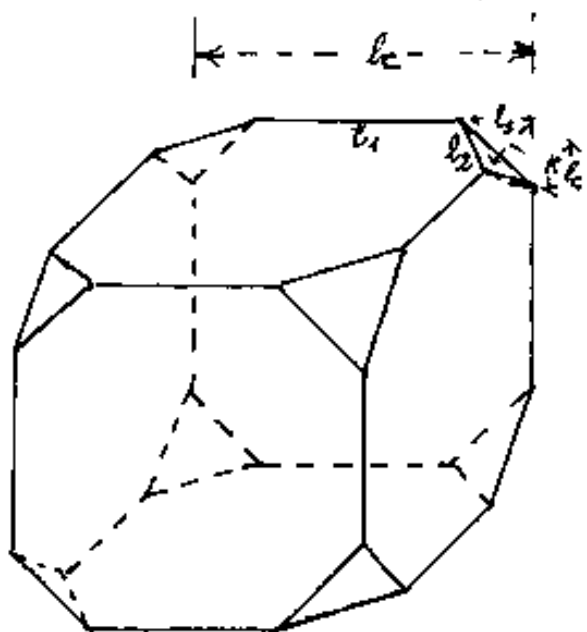
Per tale valore il solido ritorna un tetraedro orientato in modo da aver scambiato le facce con i vertici e viceversa col tetraedro di partenza, ed $\ell_4 = \ell_t/_3$.

$v_4 = vv/3$.

Idealmente possiamo continuare a far crescere K e se consideriamo il solido costituito delle sezioni; (il negativo rispetto al precedente), si ricostituisce il solido tetraedrico primitivo per K = 1. V'è quindi una specie di pulsazione, di frequenza, che costituisce il tetraedro e passando

per l'ottaedro ne amplia la dimensione.
Se consideriamo puramente energetica che abbiamo detto ideale o negativa, e materiale la fase concreta o positiva, la pulsazione sarebbe il continuo trasmutarsi di materia in energia e viceversa.

Possiamo riguardare l'ottaedro come il nucleo e gli elettroni i tetraedri. (un elemento al massimo può avere valenza 8). Meglio forse pensare l'ottaedro ed il tetraedro i primordi di materia ⇄ energia,
Se consideriamo due rette sghembe in direzioni ortogonali e su di esse vibrazioni assiali di campo elettrico su una, e campo magnetico sull'altra, abbiamo fatto il tetraedro che può anche vedersi ponendo l'indice ed il pollice della mano sinistra e della mano destra sui vertici di un ideale tetraedro e simulando la vibrazione avvicinan-

do e allontanando pollice ed indice delle due mani.
Questi paragoni sono solo modelli mentali per cercare di fissare le idee sul costituirsi della fenomenologia che ci circonda, ed andrebbero analizzati meglio, ma ciò esula dall'impostazione matematica di questa parte, ci ripromettiamo uno studio specifico.

Cubo sezionato

Sezionando il cubo (o esaedro) in prossimitá dei vertici, come abbiamo giá fatto per il tetra= edro, detta: $K l_e$ la distanza dal vertice del piano di sezio= ne, abbiamo:

$l_2 = l_3\sqrt{2}$; $l_1 = l_e - 2l_3$; $l_2 = l_e K\sqrt{6}$;

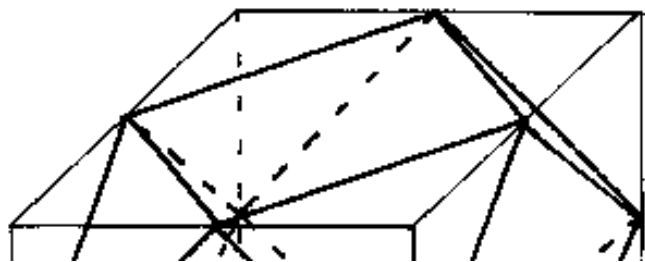
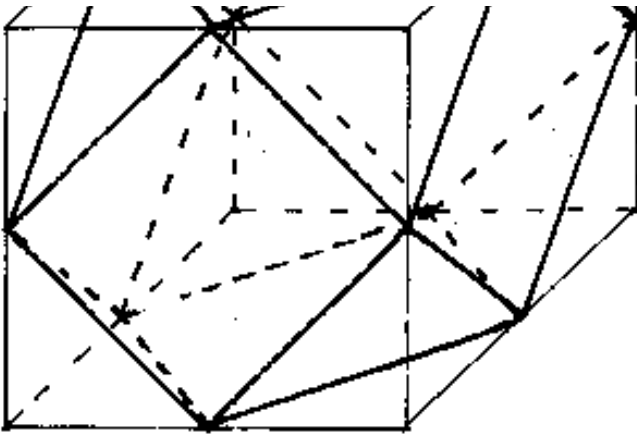
$l_1 = l_e(1-2K\sqrt{3})$; $l_3 = K l_e\sqrt{3}$;

Quando $l_1 = l_2$ le facce diventano ottagoni e triangoli regolari: $K\sqrt{6} = (1-2K\sqrt{3}) \supset K = 0{,}16910197 8$

$K = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $l_1 = l_2 = (\sqrt{2}-1) l_e$;. $l_1 = l_2 = 0{,}4142135 62\, l_e$.

Quando $l_1 = 0$ si ha:

$l_e/\sqrt{2} = l_2 = 0{,}70710678\, l_e$

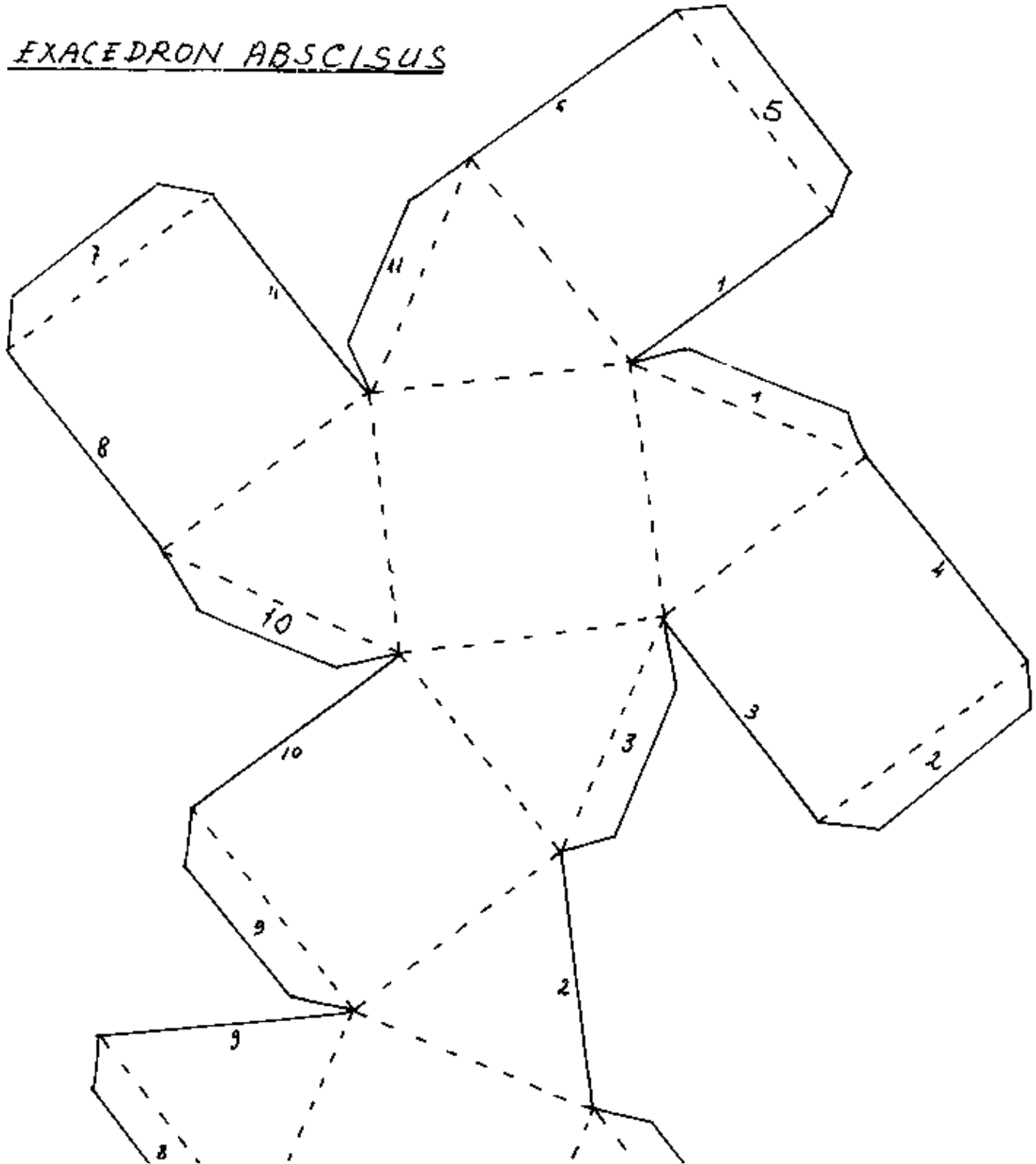
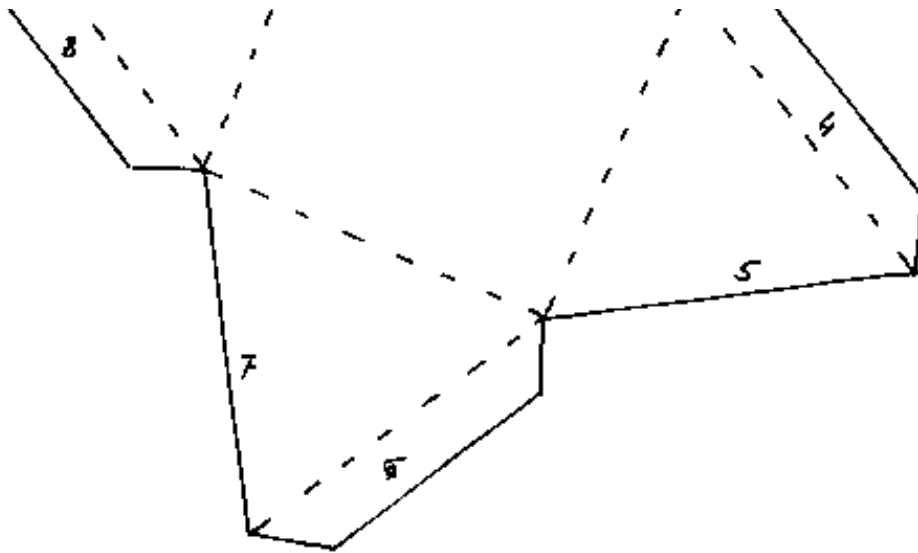
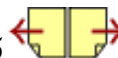
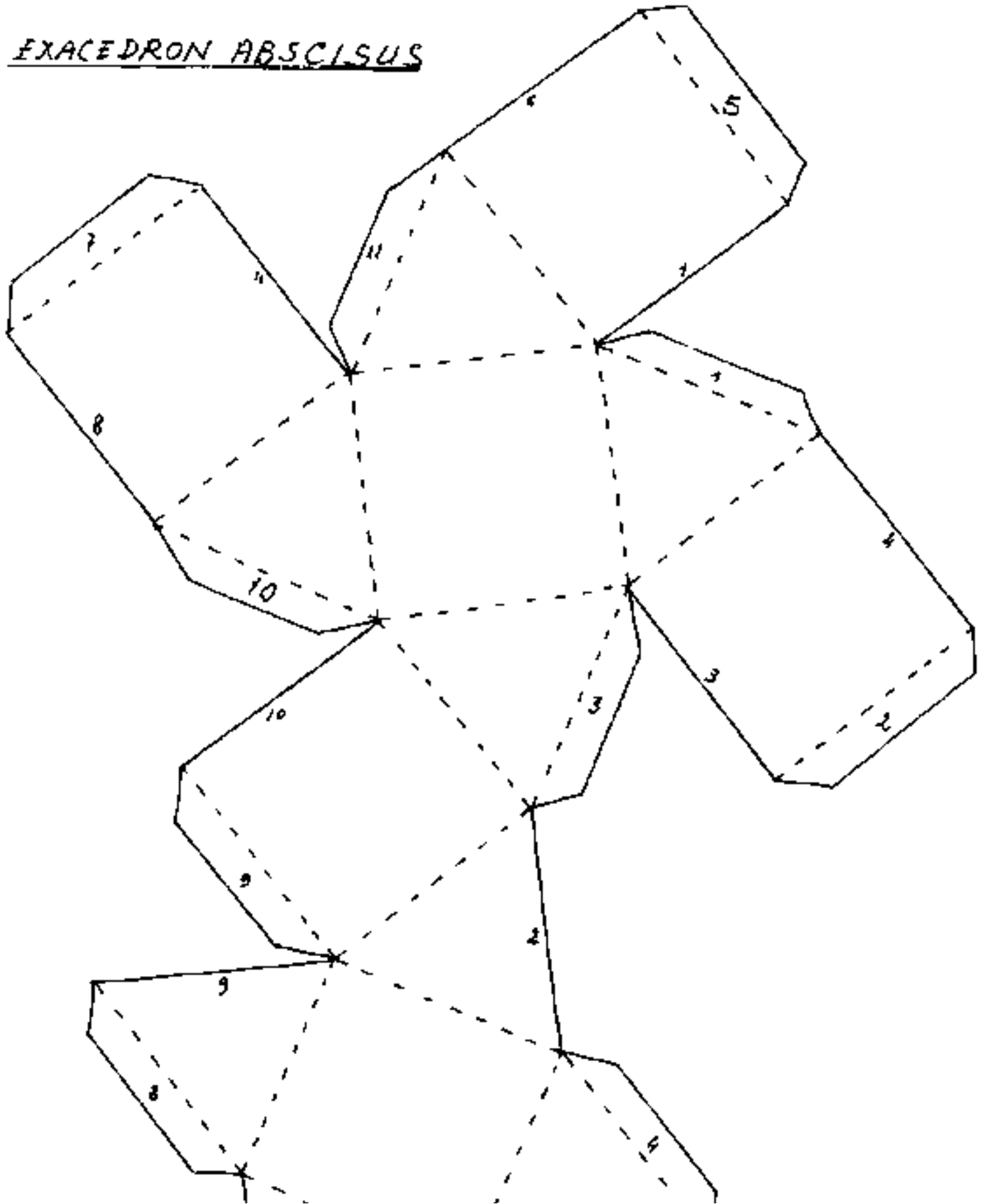
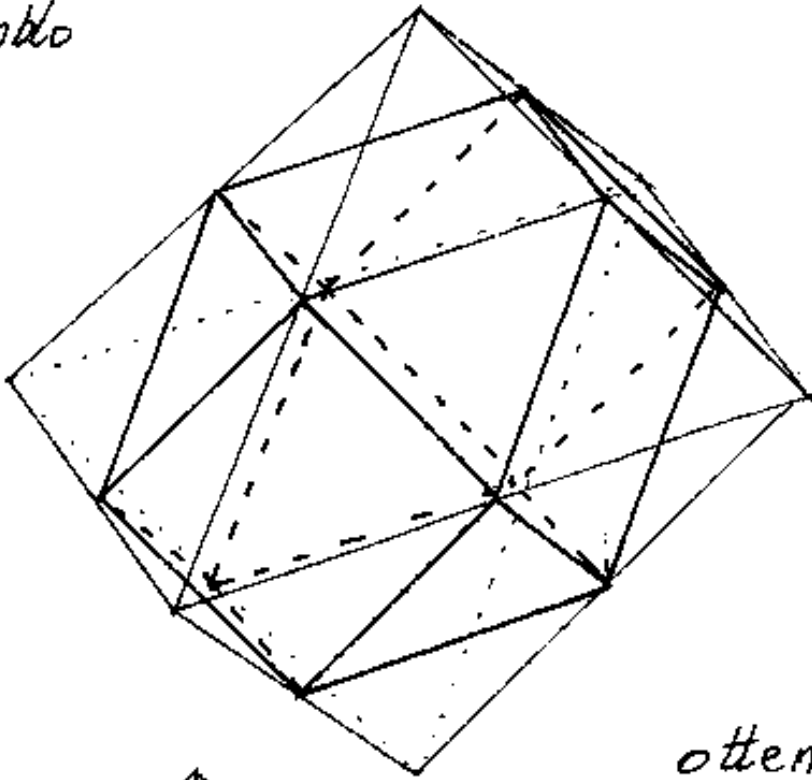
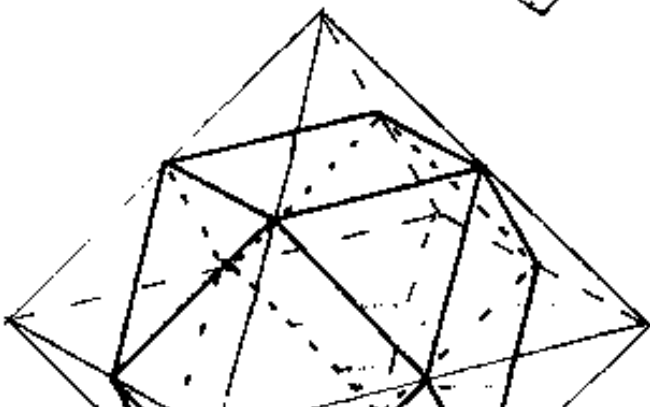
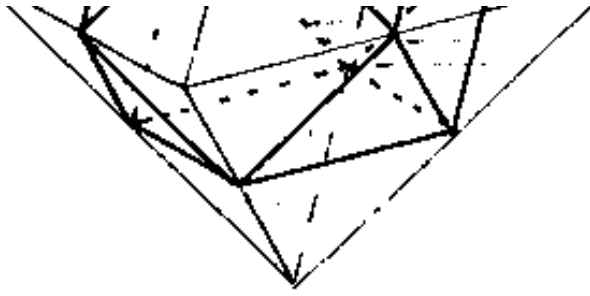
$l_3 = l_e/2 = 0{,}5\, l_e$

$K = \sqrt{3}/6 = 0{,}28867513$.

Le facce del solido diventano quadrati e triangoli equilateri. (Spigoli tutti uguali) Solido che nel testo del Pacioli (op.cit.) viene chiamato:

<u>Exacedron Abscisus</u>

Schema di

EXACEDRON ABSCISUS

Schema di

EXACEDRON ABSCISUS

Peró l'exacedron ascisus, si puó ottenere anche sezionando l'ottaedro con piani che bisecano gli spigoli. Ne diamo la figura nella stessa posizione del=la sezione del cubo e la ripetiamo ponendo l'otta=edro nella posizione in cui dimostravamo che ag=giungendo ad un tetraedro le ottave parti di un ottaedro si ottenevá un cubo. Cioé che la conti=nuitá poteva essere ottenuta con tetraedri ed ottaedri che rimarca=no la continuitá fatta di soli cubi. Abbiamo poi dimostrato che tale

poi dimostrato che tale continuità poteva ottenersi con soli rombododecaedri.

È notevole rilevare che le 8 piramidi a base triangolare tolte al cubo di lato l_c per ottenere l'exacedron abscisus di spigolo $l_c/\sqrt{2}$, messe insieme, formano un ottaedro di spigolo $l_c/\sqrt{2}$. Ciò porta ad

alcune osservazioni:

1) Il volume del cubo di lato l_c è: $V = l_c^3$;
il volume dell'ottaedro di spigolo $l_c/\sqrt{2}$ è: $V_o = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{l_c}{\sqrt{2}}\right)^3 = \left(\frac{1}{6} l_c^3\right)$
quindi il volume dell'exacedron abscissus $V_{ex} = V_c - V_o$
$= \frac{5}{6}$ volume del cubo $= \left(\frac{5}{6} l_c^3\right)$

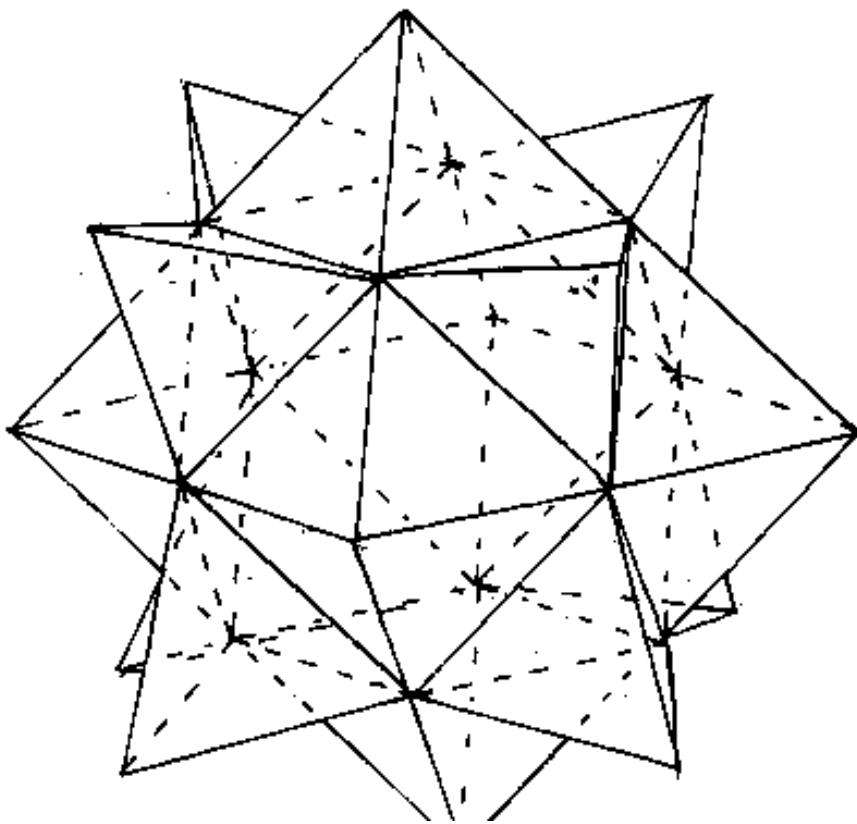
2) Se all'exacedron abscisus di spigolo $l_c/\sqrt{2}$ aggiungiamo sulle 6 facce quadrate 6 semiottaedri di spigolo $l_c/\sqrt{2}$ otteniamo un nuovo ottaedro di spigolo $(l_c\sqrt{2}) = 2\frac{l_c}{\sqrt{2}}$ il cui volume è $\frac{\sqrt{2}}{3}(l_c\sqrt{2})^3 = \frac{4}{3} l_c^3$ cioè il volume di questo nuovo ottaedro è $\frac{4}{3}$ il volume del cubo e poiché il volume del cubo è 6/5 il volume dell'esacedron abscissus; avremo che il volume del nuovo ottaedro è $\frac{8}{5}$ di quello dell'excedron abscisus ed è otto volte il precedente ottaedro di spigolo metà.

3) Si nota l'opportunità di riferire ad uno stesso spigolo certi gruppi di solidi. Se "s_o" è lo spi=

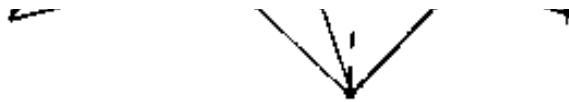
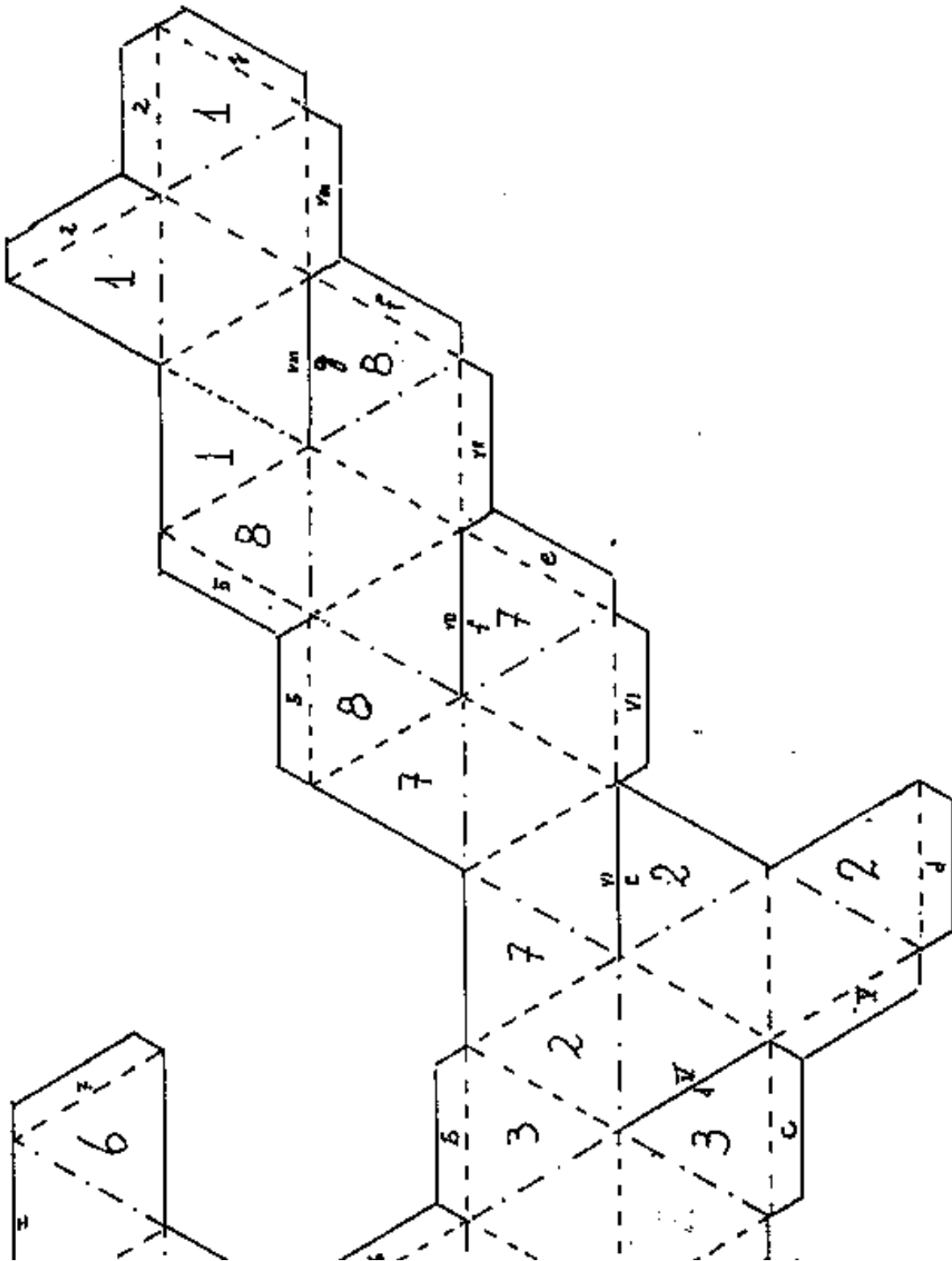
golo del tetraedro, dell'ottaedro, dell'exaedron absissuss che formano una continuità ove si riproducono gli stessi solidi aventi per spigolo un <u>numero intero</u> (razionale) di S_0; analogamente S_1 per <u>la continuità cubica</u>. ed S_2 per <u>la continuità rombododecaedrica</u>, notiamo che:

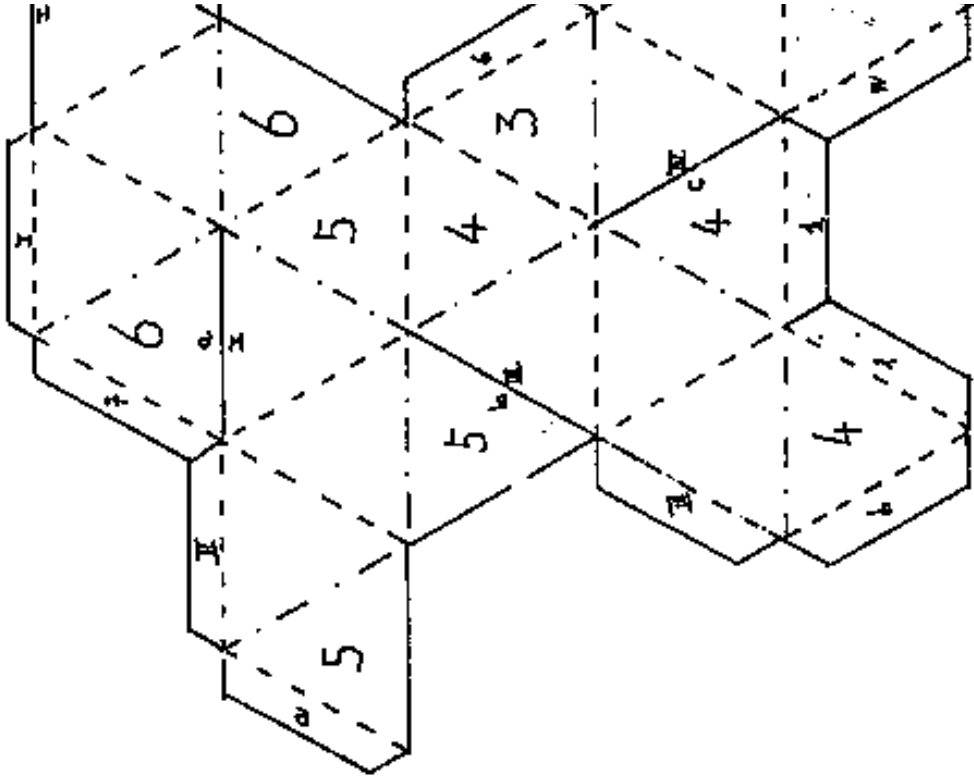
$S_0 = S_1 \sqrt{2}$; $S_2 = \frac{S_1 \sqrt{3}}{2}$; <u>cioè non commensurabili</u>!

L'EXACEDRON ABSCISUS elevatus

Si ottiene sovrapponendo all'exacedron ascisus, dei semiottaedri sulle facce quadrate (6); (con ciò si è fatto un ottaedro di spigolo doppio) e sovrapponendo dei tetraedri sulle facce triangolari (8) (con ciò si sono sostituiti nel cubo originario le piramidi a base triangolare asportate (erano ottavi di ottaedro) con tetraedri. Tutte le facce (56) sono triangoli equilateri, se l è lo spigolo, la superficie laterale sarà:

$$56 \frac{l^2}{4}\sqrt{3} = \boxed{Sl = l^2 14\sqrt{3}}$$

Per il volume possiamo conside-

rare il volume di un ottaedro di spigolo 2ℓ, aumentato del volume di otto tetraedri di spigolo ℓ; cioè: $V = \frac{\sqrt{2}}{3}(2\ell)^3 + 8\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3\right) =$
$V = 8\sqrt{2}\,\ell^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = \boxed{V = \frac{10}{3}\sqrt{2}\,\ell^3}$ poiché $\ell = \frac{\ell_c}{\sqrt{2}}$; $\boxed{V = \frac{5}{3}\ell_c^3}$

È interessante notare che il volume di questo solido rapportato al volume del cubo dà un numero razionale $\left(\frac{5}{3}\right)$; e rapportato all'ottaedro dà $\left(5/4\right)$.

ELEVATS

iegare convesso lungo le linee a tratti, piegare concavo lungo le linee a tratto e punto

Schema di EXACEDRON ABSCISUS E

Tagliare lungo le linee intere, piega

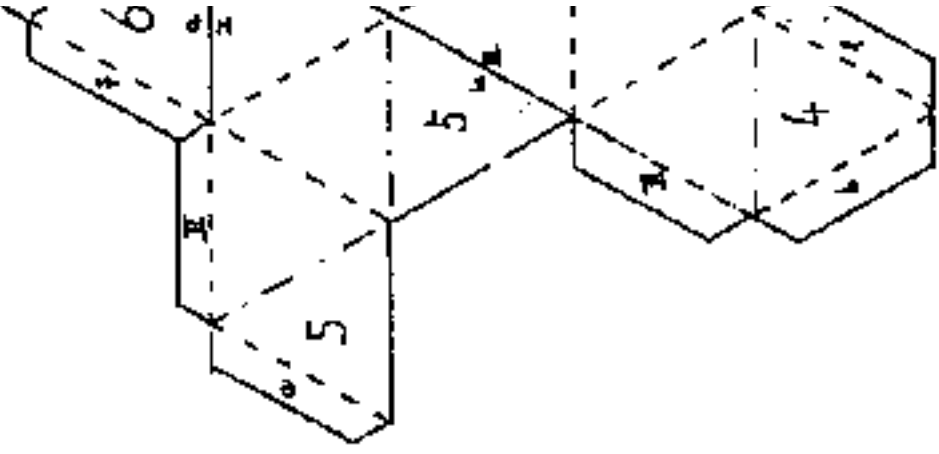
CEDRON ABSCISUS ELEVATS

e linee intere, piegare convesso lungo le linee a tratti, piegare concavo lungo le linee a tratto e punto

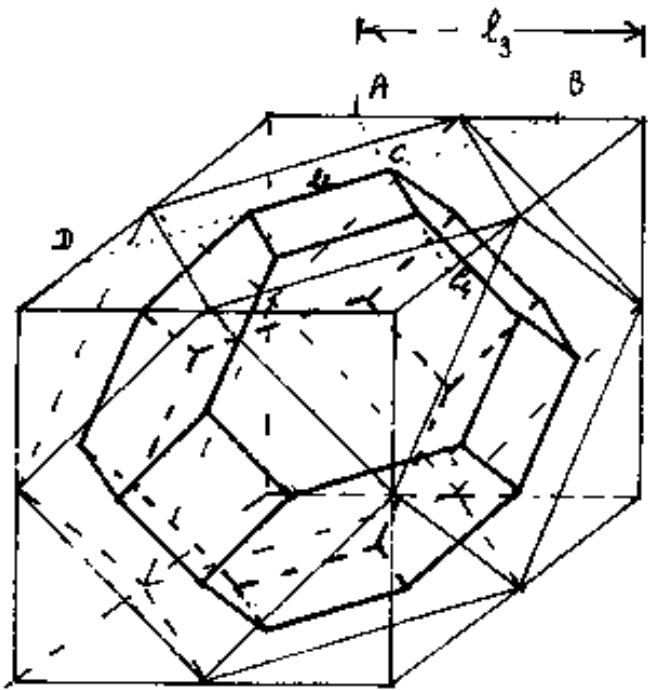
6

5

5

4

Schema di EXACEa

Tagliare lungo le li

Riprendiamo la sezione del cubo (esaedro) fa= cendo aumentare ulteriormente K. Abbiamo visto che per $K = \frac{\sqrt{3}}{6} = 0,28867513$, si ha $l_1 = 0$ (Exacedron ascisus), per $K > \sqrt{3}/6$, analogamente a quan= to avviene per il tetra= edro, le sezioni si inter= secano fra loro, il va= lore di l_1 diverrebbe ne= gativo e le formule non sono più valide:

$$l_1 = \overline{AB} = \left(-l_c\left(1-2K\sqrt{3}\right)\right)$$

D'altra parte l'intersezione fra i piani di sezione ge= nera un nuovo segmento, così che il solido risulta ave= re sei facce quadrate ed otto esagonali irregolari. Le facce esagonali diventano esagoni regolari quan= do $l_2 = l_4$. Poiché questo solido si può ottenere an= che sezionando un ottaedro, nel testo del Pacioli

che sezionando un ottaedro, nel testo del Pacioli (op cit) è stato chiamato: OCTOCEDRON ABSCISVS.

Calcoliamo gli elementi.

$\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB}/\sqrt{2} = \boxed{l_c(K\sqrt{6} - 1/\sqrt{2}) = l_4}$; $\overline{BD} = l_c K\sqrt{6}$;

$l_2 = \overline{BD} - 2CB = l_c(K\sqrt{6} - 2K\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \boxed{l_2 = l_c(\sqrt{2} - K\sqrt{6})}$

per $(l_2 = l_4)$; $(\sqrt{2} - K\sqrt{6}) = (K\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{2}})$; $2K\sqrt{6} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $K = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

$\underline{K = \sqrt{3}/4 = 0,4330127\,0}$

Se continuiamo ad aumentare K arriviamo ad $l_2 = 0$, spariscono le facce quadrate e per $l_2 = 0$, il solido diventa un ottaedro regolare di spigolo $l_o = l_c/\sqrt{2}$.

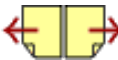
Perciò essendo:

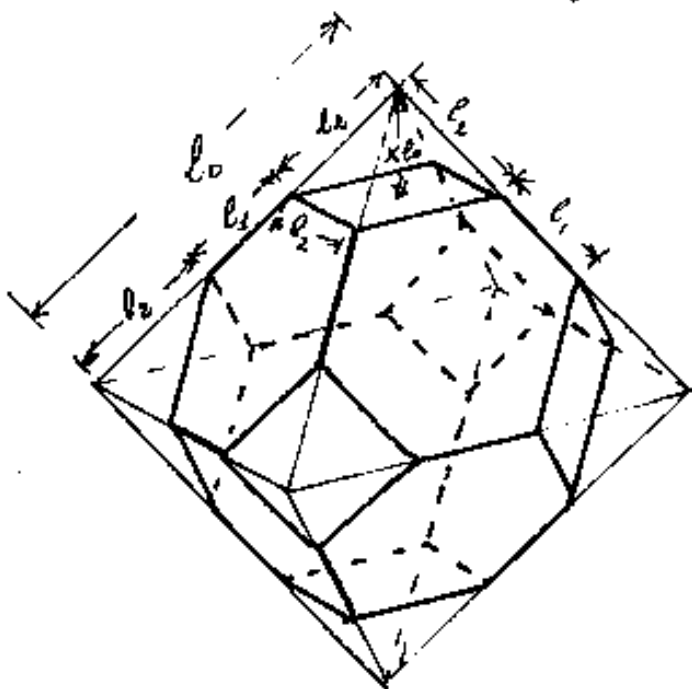
$l_2 = 0$; $l_c(\sqrt{2} - K\sqrt{6}) = 0$ si ha: $K = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

per $K = \sqrt{3}/3 = 0{,}57735027$ si ha l'ottaedro.

Se continuassimo ad aumentare K, in quanto i piani di sezione sono paralleli alle facce dell'ottaedro, si ha lo sfaldamento dell'ottaedro che diventa sempre più piccolo finché per $K = \sqrt{3}/2 = 0{,}866025403$, si ha il solido puntiforme al centro del cubo originario ed è l'intersezione degli otto piani di sezione.

Vedremo ora come sezionando l'ottaedro si ripetono, in sequenza inversa, i solidi della sezione del cubo fino ad arrivare al

della sezione del cubo, fino ad arrivare al cubo stesso ed al suo sfaldamento con piani paralleli alle facce.

OTTAEDRO SEZIONATO

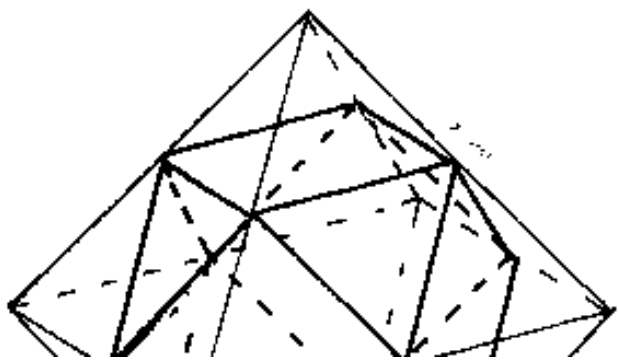
Sezioniamo l'ottaedro con piani perpendicolari agli assi dell'ottaedro stesso, partendo dai vertici. Sia l_0 lo spigolo dell'ottaedro, e Kl_0 la distanza dai vertici dei piani di sezione, avremo:

$l_2 = K\sqrt{2}\, l_0$; $l_1 = l_0(1 - 2K\sqrt{2})$

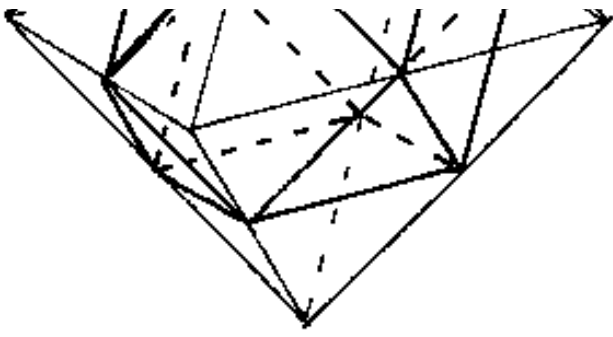
Quando: $l_1 = l_2$ si ha:

$K = 1/3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} = 0,23570226$

$l_1 = l_2 = l_0/3$ il solido è detto: OCTACEDRON ABSCISUS

e lo abbiamo già trovato con le sezioni del cubo.

Quando $l_1 = 0$; $l_2 = l_0/2$; $K = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,35355339$

ritorna L'EXACEDRON ABSCISUS che abbiamo già trovato con le sezioni del cubo.

Aumentando ancora K, si

Aumentando ancora K, si ha il fenomeno del sovrapporsi delle sezioni, impiccoliscono le facce triangolari, mentre le facce che da esagone erano divenute quadrate, diventano ora ottagonali per l'aumento dei segmenti intercettati sui piani di sezione,

Occorre rivedere le formule, perché si intro= duce il segmento l_3, (intersezione fra i piani di sezione) che è lato nell'ottagono ove quattro lati sono uguali ad l_2 e quattro ad l_3. (Per $l_3 = 0$, si ha il caso precedente di exaedron abscissus)

$l_1 < 0$; $\overline{AB} = -l_1$; $-l_1 = l_0(2K\sqrt{2} - 1)$;

Essendo ABC un triangolo equilatero $\overline{AC} = \overline{AB}$ per cui l'accorciamento di l_2 sarà: $2\overline{AB}$, cioè:

$$l_2 = (K\sqrt{2}\, l_0 - 2\overline{AB}) = K\sqrt{2}\, l_0 - 2 l_0(2K\sqrt{2} - 1)$$

$$l_2 = (K\sqrt{2} - 4K\sqrt{2} + 2) l_0 = \boxed{l_2 = (2 - 3K\sqrt{2})\, l_0}$$

mentre $l_3 = \overline{AC}\sqrt{2} = l_0(2K\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = \boxed{l_3 = (4K - \sqrt{2})\, l_0}$

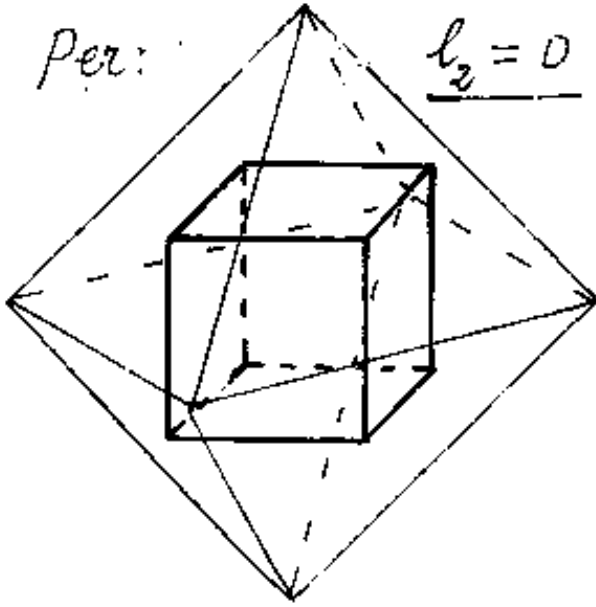
Condizione che l'ottagono sia regolare è che:

$l_2 = l_3$; cioè: $(4K - \sqrt{2}) = (2 - 3K\sqrt{2})$, da cui: $(4 + 3\sqrt{2})K = (2 + \sqrt{2})$;

ed anche: $$K = \frac{2 + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{18}} = \frac{(2 + \sqrt{2})(\sqrt{18} - 4)}{18 - 16} = \frac{6\sqrt{2} + 6 - 8 - 4\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2}$$

$$\boxed{K = (\sqrt{2} - 1)} = 0,414213562$$

$K = (\sqrt{2} - 1) = 0,41421356...$

$l_3 = l_2 = l_0 \left(4(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2} \right)$; $\boxed{l_2 = l_3 = (3\sqrt{2} - 4)\, l_0} = (0,242640687)\, l_0$.

Per: $\underline{l_2 = 0}$ ritorna il cubo : $2 - 3\sqrt{2}K = 0$

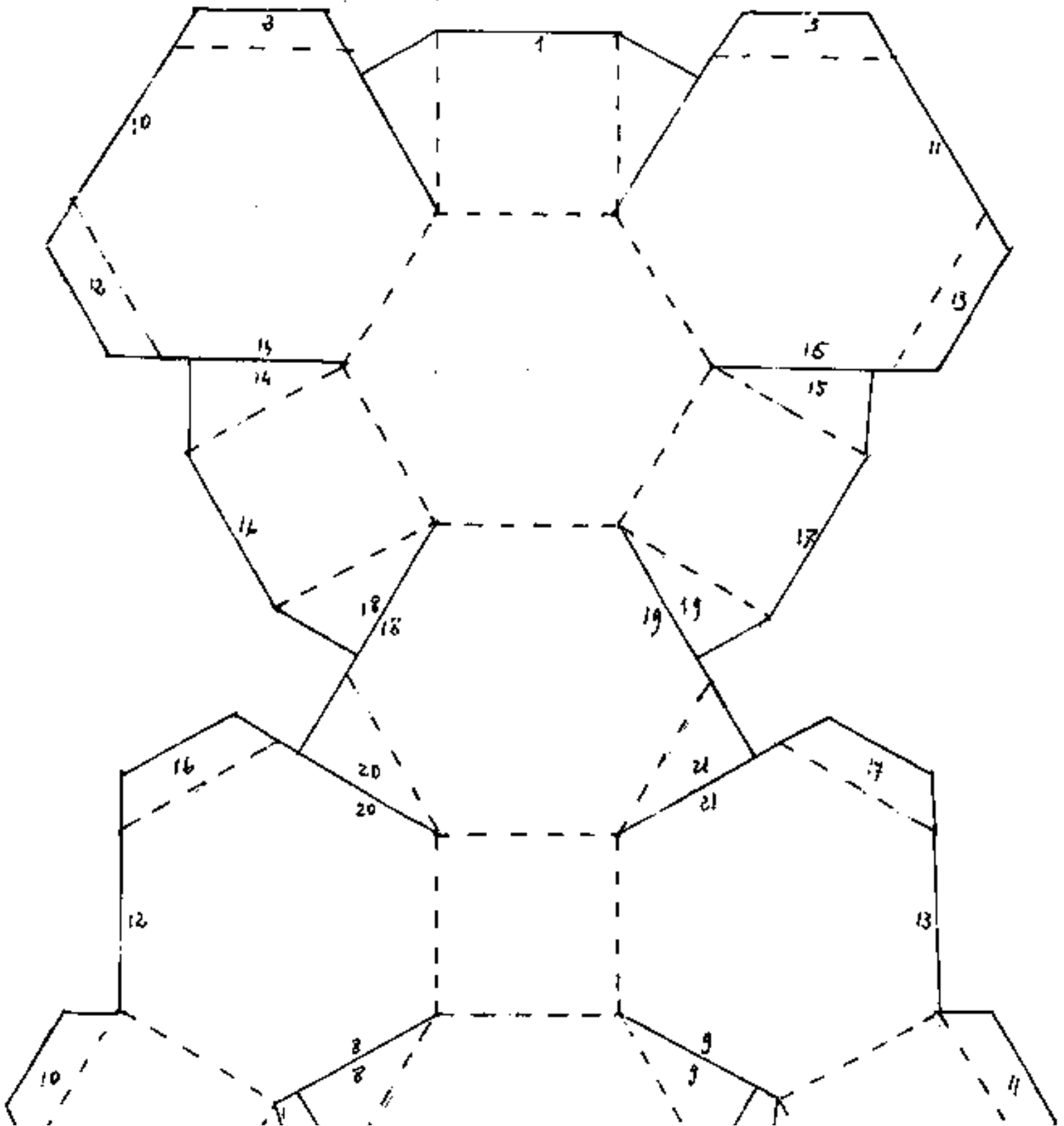
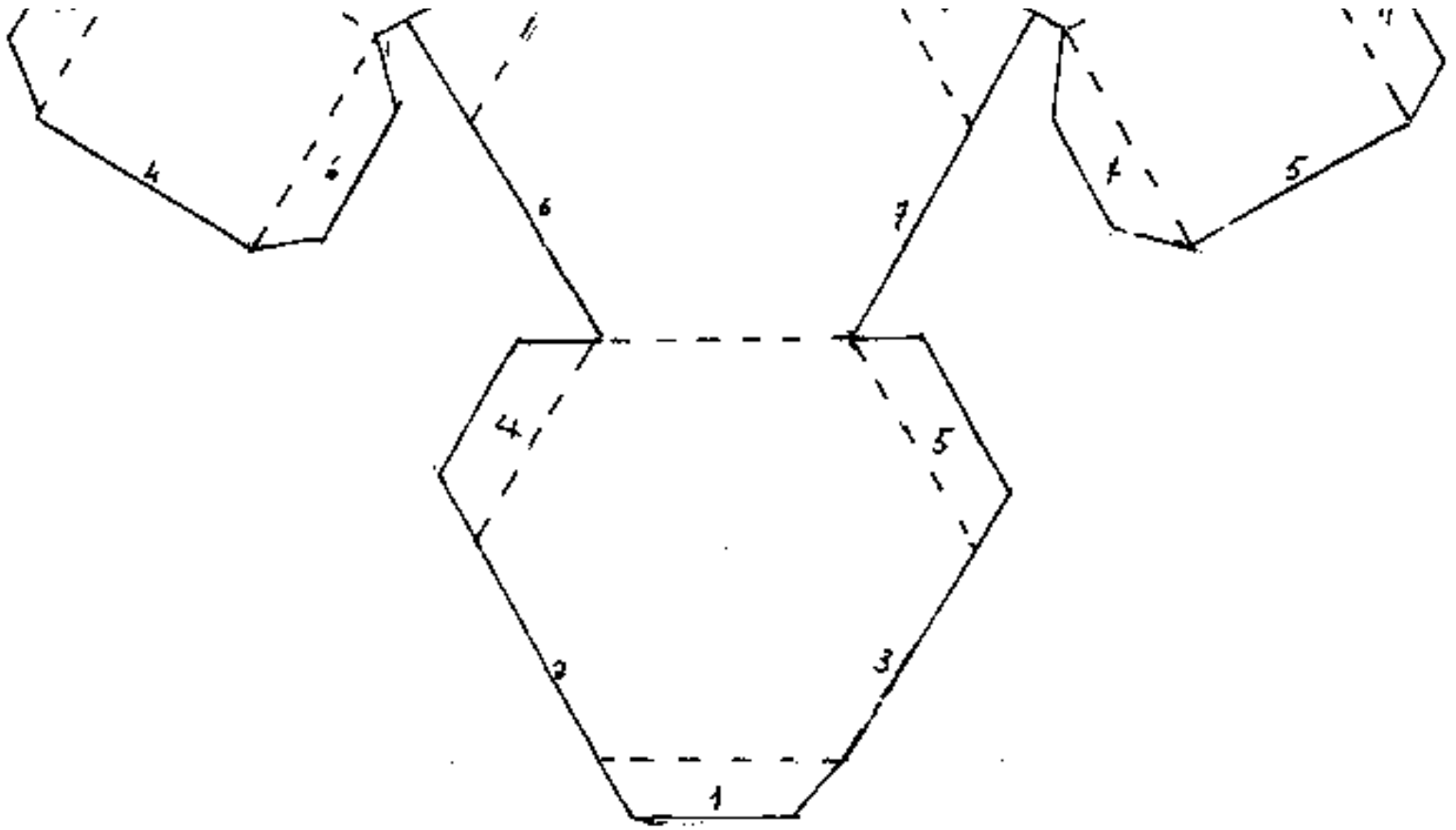
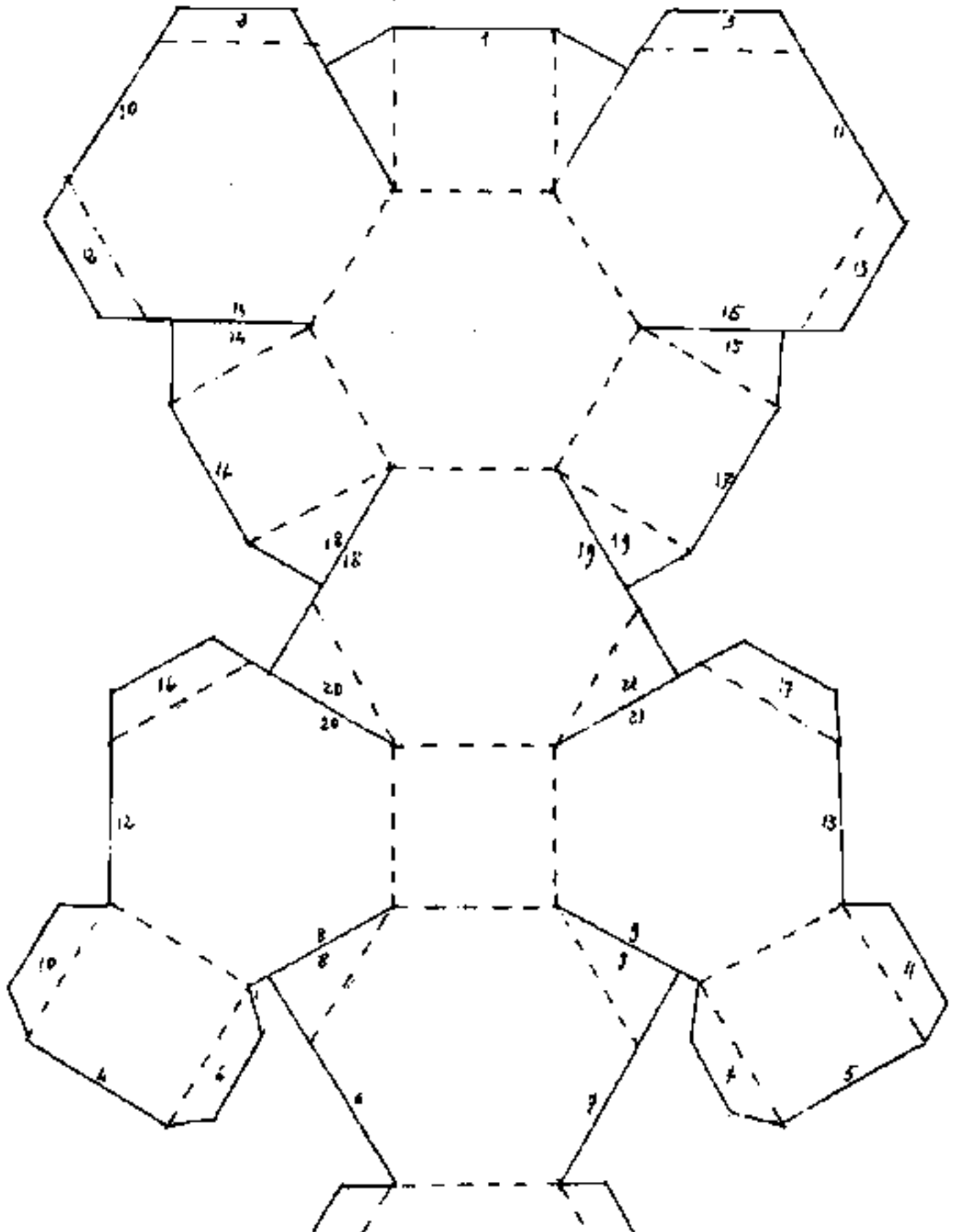
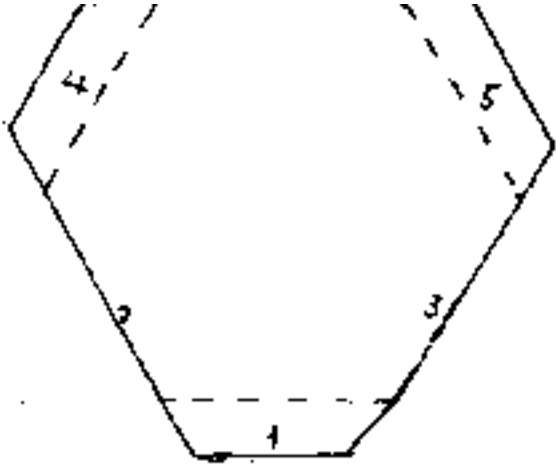
$\underline{K = \sqrt{2}/3 = 0,471404521}$: $l_3 = \left(4\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) - \sqrt{2}\right) l_0 =$

$\underline{l_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) l_0}$ = lato del cubo.

Per $K > \sqrt{2}/3$ si ha lo sfaldamento del cubo.

Schema di OCTOCEDRON ABSCISVS

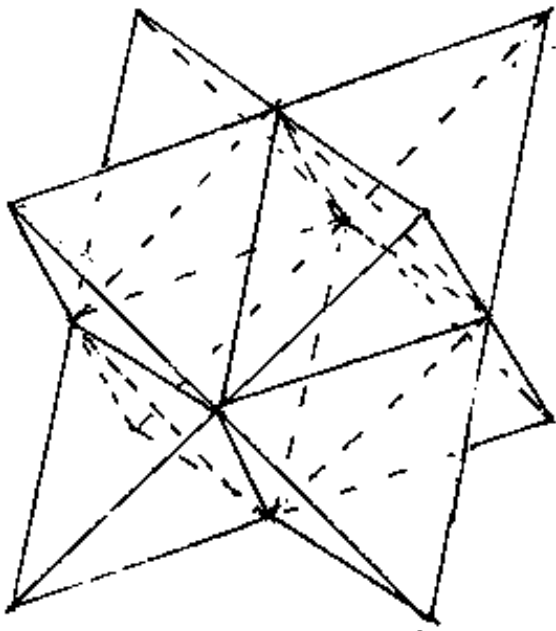
Schema di OCTOCEDRON ABSCISVS

4
5
2
3
1

OCTACEDRON ELEVATUS

Se poniamo otto tetraedri sulle otto facce di un ottaedro di uguale spigolo, otteniamo l'octacedron elevatus, è un solido concavo la cui superficie laterale è data dalle 24 facce triangolari: $S_l = 20\left(\frac{l_o^2}{2}\sqrt{3}\right) = 12\, l_o^2\sqrt{3}$.

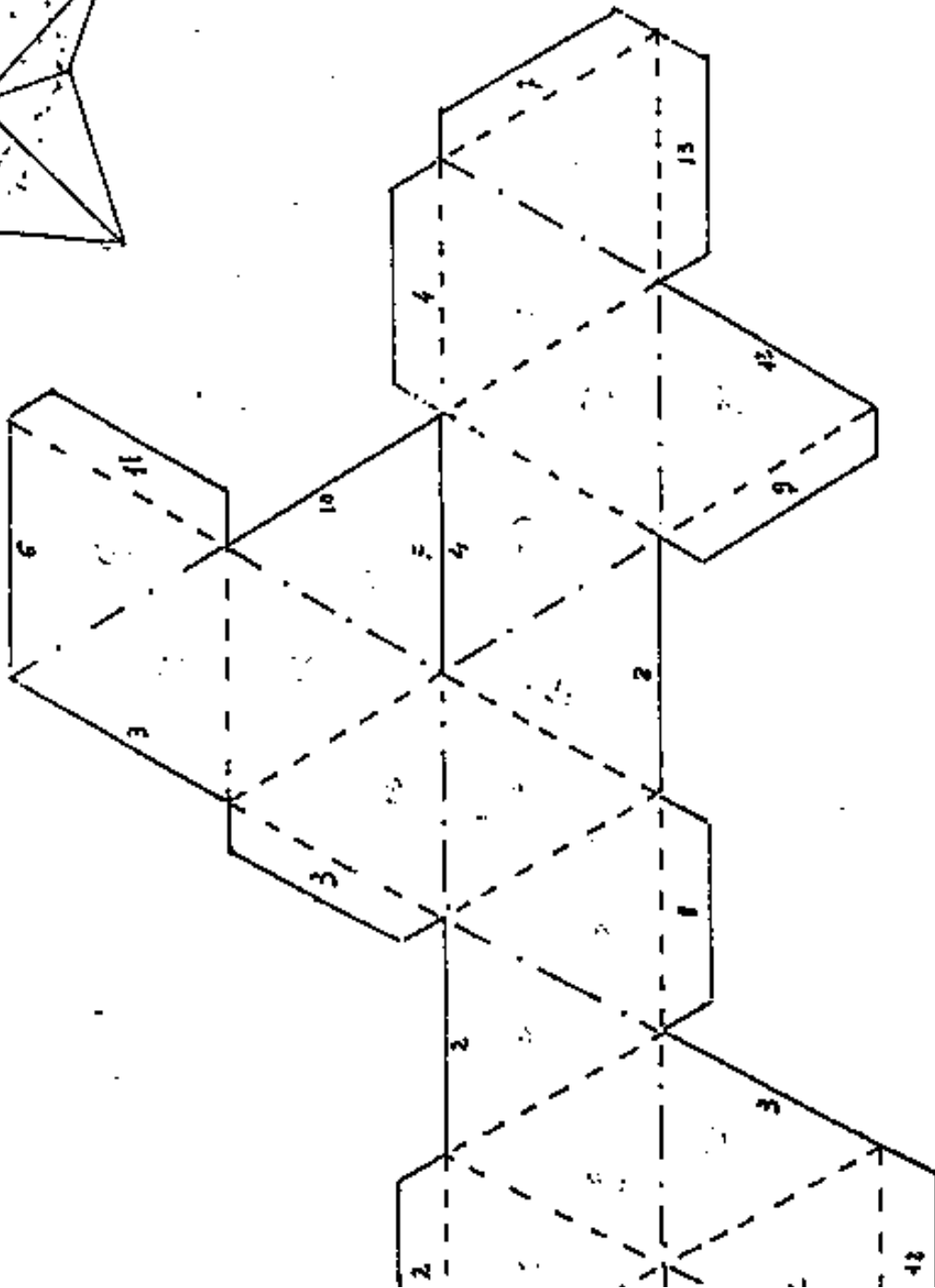
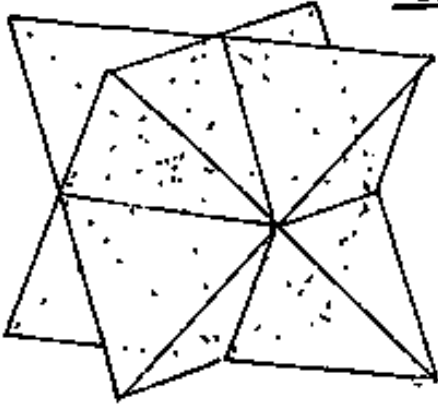
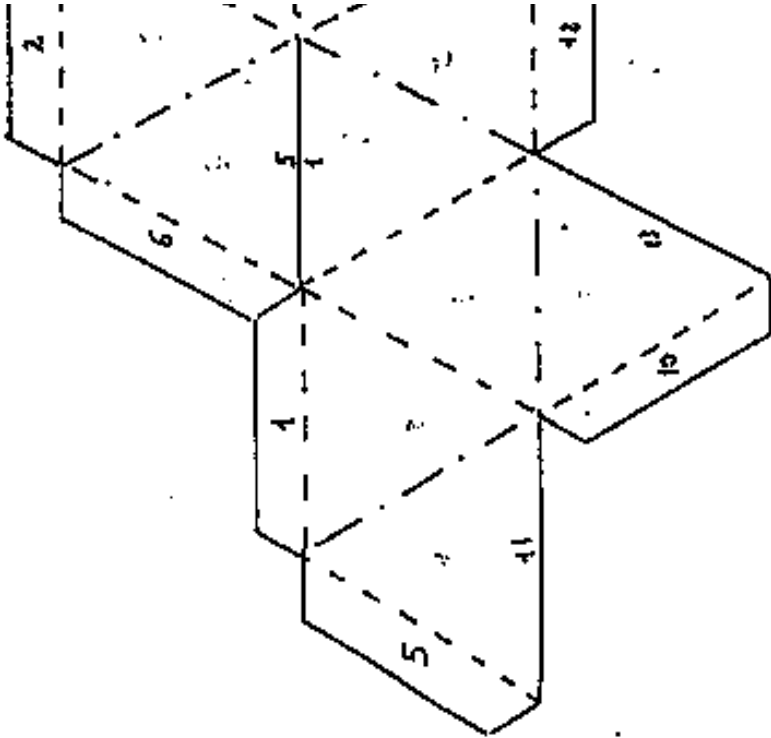
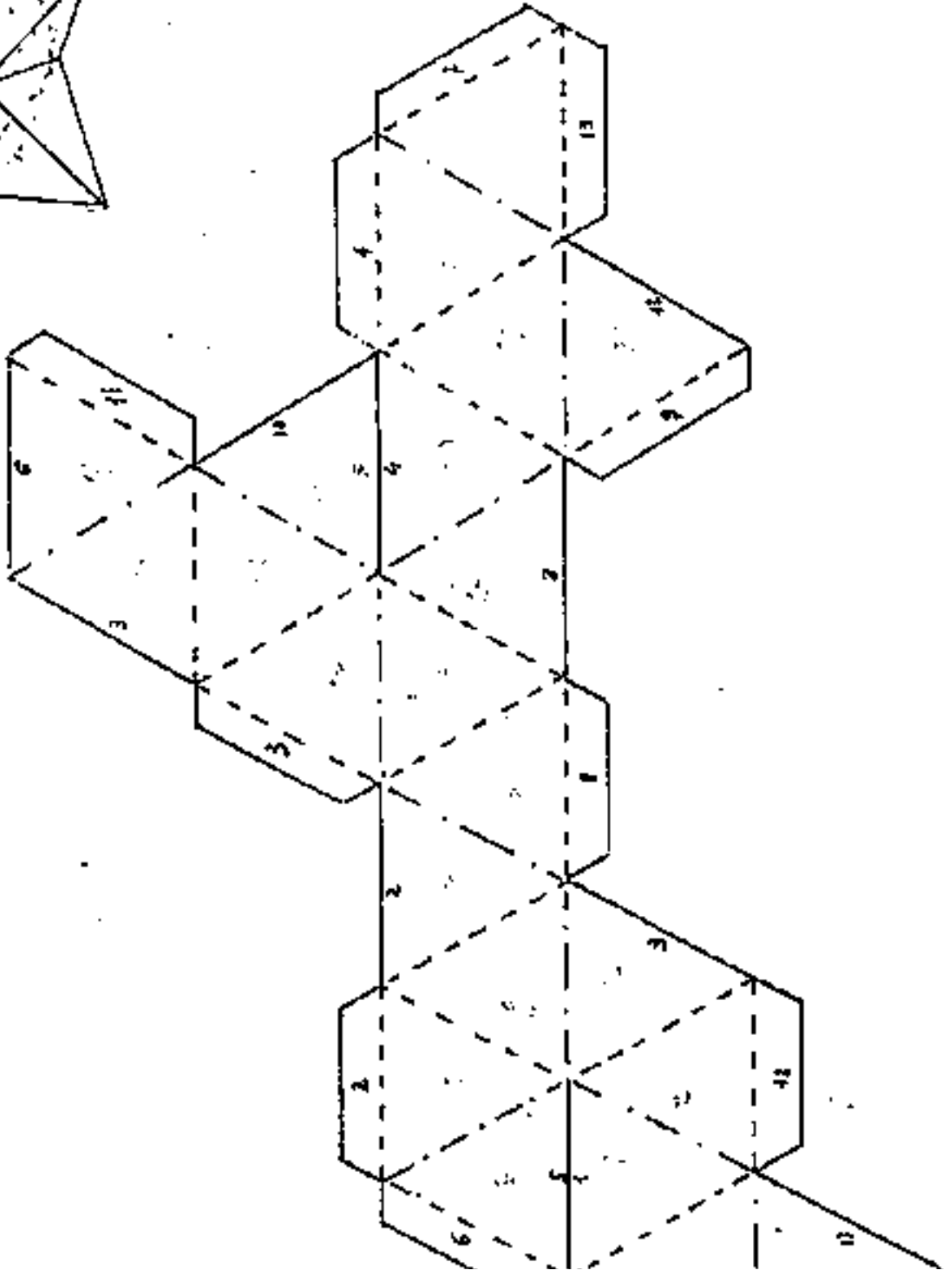
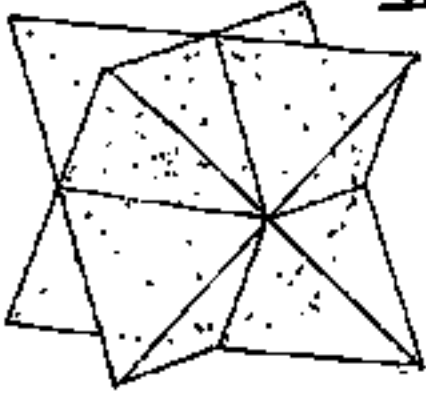
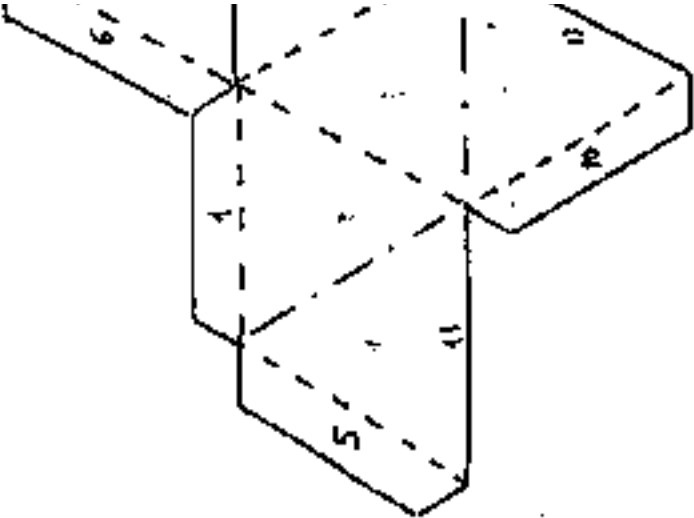
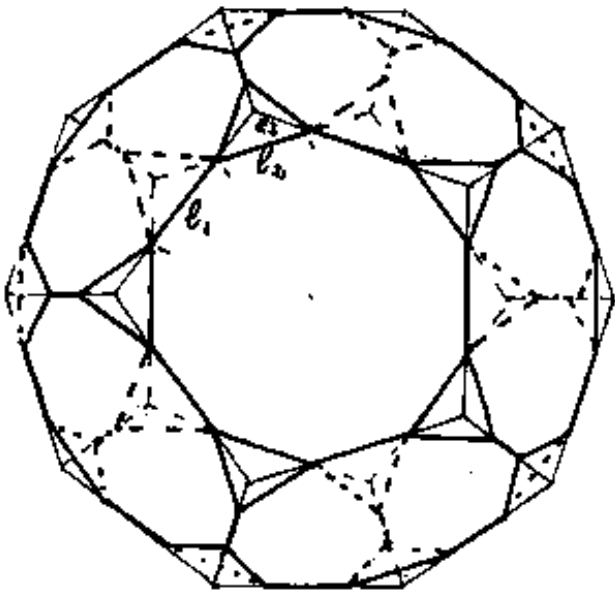
Il volume è dato dal volume dell'ottaedro più otto volte il volume del tetraedro. $V = l_o^3\left(\frac{\sqrt{2}}{3} + 8\frac{\sqrt{2}}{12}\right) =$

$$\boxed{V = l_o^3\sqrt{2}}$$

(Il triplo del volume dell'ottaedro).

Questo solido è identico all'incastro dei due tetraedri che hanno per spigoli le diagonali delle facce di un cubo; solido che abbiamo

già trattato col te=

traedro come solido regolare.

Schema di triacisottaedro formante due tetraedri intrecciati detto OCTACEDRON ELEVATVS

Schema di triacisottaedro formante
due tetraedri intrecciati
detto OCTAEDRON ELEVATVS

DODECAEDRO SEZIONATO

Sia l_d lo spigolo del dodecaedro, e sia Kl_d la distanza dei piani di sezione dai vertici del dodecaedro. I piani di sezione sono normali ai raggi passanti per i rispettivi vertici.

Per $K=0$ si ha il dodecaedro non sezionato.

Detti l_2 i segmenti intersezione fra il piano di sezione e tre facce del dodecaedro, (lato di base della piramide triangolare retta asportata)

Detta l_3 la porzione di spigolo asportata a partire da un vertice, (cioè i segmenti l_3 sono gli spigoli della piramide asportata alta Kl_d).

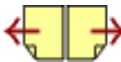
Avremo: $(Kl_d)^2 + \frac{l_2^2}{3} = l_3^2$; detto l_1 il segmento residuo dello spigolo del dodecaedro: $l_1 = l_d - 2l_3$

Ma $l_3 = l_2/2\cos 36° = l_2/2\frac{(\sqrt5+1)}{4} = l_2\frac{2}{\sqrt5+1} = l_2\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right) =$

$l_3 = l_2(0,618034)$. perciò: $K^2 l_d^2 = l_2^2\left(\frac{6-2\sqrt5}{4} - \frac{1}{3}\right) = l_2^2\left(\frac{9-3\sqrt5-2}{6}\right) =$

$= l_2^2\left(\frac{7-3\sqrt5}{6}\right)$; $K l_d = \sqrt{\left(\frac{7-\sqrt{45}}{6}\right)l_2^2} = l_2\left(\sqrt{\frac{7+2}{12}} - \sqrt{\frac{7-2}{12}}\right) = l_2\left(\frac{3-\sqrt5}{2\sqrt3}\right) =$

$K l_d = l_2(0,22053818)$; $\boxed{l_2 = \left(\frac{\sqrt3(3+\sqrt5)}{2}\right)K l_d} = K l_d(4,53456788)$ —

$\boxed{l_3 = \frac{\sqrt3(\sqrt5+1)}{2} K l_d} = (2,80251708)K l_d$. $\boxed{l_1 = \left(1-\sqrt3(\sqrt5+1)K\right) l_d}$

Quando: $\ell_1 = \ell_2$ il solido risulta formato da 12 facce decagoni regolari e 20 facce triangolari equilatere, complessivamente 32 facce.

Posto $\ell_1 = \ell_2$ si ha: $1 - K(\sqrt{15} + \sqrt{3}) = K\left(\frac{\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{2}\right)$;

$K\left(\frac{\sqrt{15} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{3}}{2}\right) = 1$; $K = \frac{2}{3\sqrt{15} + 5\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{135} + \sqrt{75}} =$

$K = \frac{3\sqrt{15} - 5\sqrt{3}}{30} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{45} - 5)}{30} = \boxed{0{,}098623200 = K}$

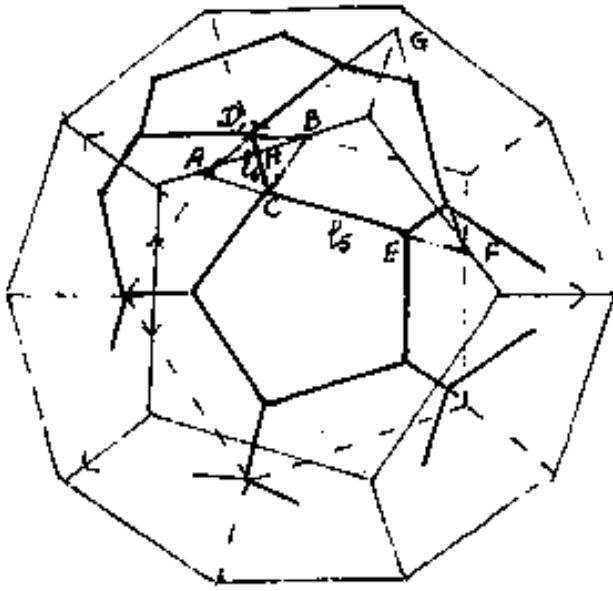
$\ell_1 = \ell_2 = \ell d/\sqrt{5} = \ell d\,(0{,}4472136 0)$.

Facendo crescere K aumenta ℓ_2 e diminuisce ℓ_1, i decagoni non sono più regolari.

Quando $\ell_1 = 0$, cioè quando $K = \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)} = 0{,}17841104$ le dodici facce decagonali diventano pentagoni regolari, le 20 facce triangolari equilatere restano triangolari equilatere, unico spigolo ℓ_2, si ha così il DUODECEDRON ABSCISVS.

$\boxed{\ell_2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)(\ell d) = (0{,}80901698)\,\ell d}$; $(\ell_3 = \ell d/2)$.

Se continuiamo ad aumentare K [illegible]

Se continuiamo ad aumentare K, $(K > 0{,}17841104)$, si ha l'intersezione dei piani di sezione fra loro, nascono nuovi segmenti ed $l_1 < 0$; occorre rivedere le formule.

AFG = piano di sezione

$$\overline{AB} = -l_1 = 2l_3 - l_d = l_d\left(\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)K - 1\right);$$

$$\overline{AB} = l_d\left(5{,}60503415\,K - 1\right)$$

Il quadrilatero ACBD non è piano, detto H il punto medio di $\overline{AB}$ abbiamo:

$\overline{CH} = \frac{\overline{AB}}{2} \tan(36°) = l_d\left[K\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-1\right]\left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2}\right) = \boxed{\overline{CH} = \frac{l_d}{2}\left(K\sqrt{6(5-\sqrt{5})}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}$

$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{2\cos(36°)} = l_d\left[K\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-1\right]\frac{1}{2}\left(\frac{4}{(\sqrt{5}+1)}\right) = \frac{l_d}{2}\left(K\sqrt{6+2\sqrt{5}}-1\right)(\sqrt{5}-1) = \boxed{\overline{AC} = \frac{l_d}{2}\left(4K\sqrt{3}-\sqrt{5}+1\right)}$

$\overline{AC} = l_d\left[K(3{,}46410162)-(0{,}61803399)\right]$

Il triangolo DHC ha l'angolo in $H = D\hat{H}C = 116°33'54'' =$ (diedro del dodecaedro), per cui $\boxed{\overline{DC} = 2\overline{CH}\sin\left(\frac{1}{2}\hat{H}\right) = l_6}$

$l_6 = \overline{DC} = 2\left(\frac{l_d}{2}\left[K\sqrt{6(5-\sqrt{5})}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right]\right)\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) = l_d\left[2K\sqrt{3}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] =$

$$\boxed{l_6 = l_d\left[(3{,}46410162)K - 0{,}618034\right]} = \overline{CD}$$

Indichiamo: $\overline{CE} = l_5$ = (lato facce pentagonali del nuovo solido) $\overline{CE} = l_2 - 2\overline{AC}$

Indichiamo con $l_6 = CD$ = (tre lati facce pentagonali).

Se $l_6 \neq l_5$ gli esagoni sono irregolari.

Se $l_6 = l_5$ gli esagoni sono regolari, e si ha il solido detto: YCOCEDRON ABSCISUS (Fullerene C_{60})

$\overline{CE} = l_5 = \left(l_2 - 2\overline{AC}\right) = l_d\left[\left(\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2}\right)K - 2\left(2K\sqrt{3}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right] =$

$l_5 = l_d\left[\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{8}{2}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)K + \left(\frac{2\sqrt{5}-2}{2}\right)\right] = \frac{l_d}{2}\left[2(\sqrt{5}-1)-K\sqrt{3}(5-\sqrt{5})\right]$

$$l_5 = \left(1{,}23606798-(2{,}39363534?)K\right)$$

[illegible]

Per $l_5 = l_6$, si ha: $\left(2\sqrt{3}K - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \left(\sqrt{5}-1 - \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{3}K\right)$ da cui:

$$\left(\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{3}K = \frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \; ; \; K = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(9-\sqrt{5}\right)} = \boxed{K = 0,316521889}$$

$$l_5 = l_6 = l_d\left[2\,\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{9-\sqrt{5}}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] = \frac{l_d}{2}\left[\frac{12\sqrt{5}-12-10\sqrt{5}+14}{9-\sqrt{5}}\right]$$

$$\boxed{l_5 = l_6 = l_d\left(\frac{\sqrt{5}+1}{9-\sqrt{5}}\right) = \left(0,478429996039\right)l_d} = \overline{AC} = \overline{BC} = \frac{\overline{CF}}{9} \; ; \; \boxed{\overline{AB} = \left(0,4771159964473\right)l_d}$$

Se continuiamo ad aumentare K, si arriva al valore massimo di l_2, quando l_2 coincide con la diagonale della faccia pentagonale del dodecaedro.

In questo caso: $l_2 = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2} K l_d = l_d \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; cioè: $K = \frac{(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{27}+\sqrt{15}}$

$K = \frac{(\sqrt{5}+1)(3-\sqrt{5})\sqrt{3}}{12} = \frac{(2\sqrt{5}-2)\sqrt{3}}{12} = \boxed{K = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{6}} = 0{,}356822090$

$l_2 = (1{,}618033987)\, l_d$.

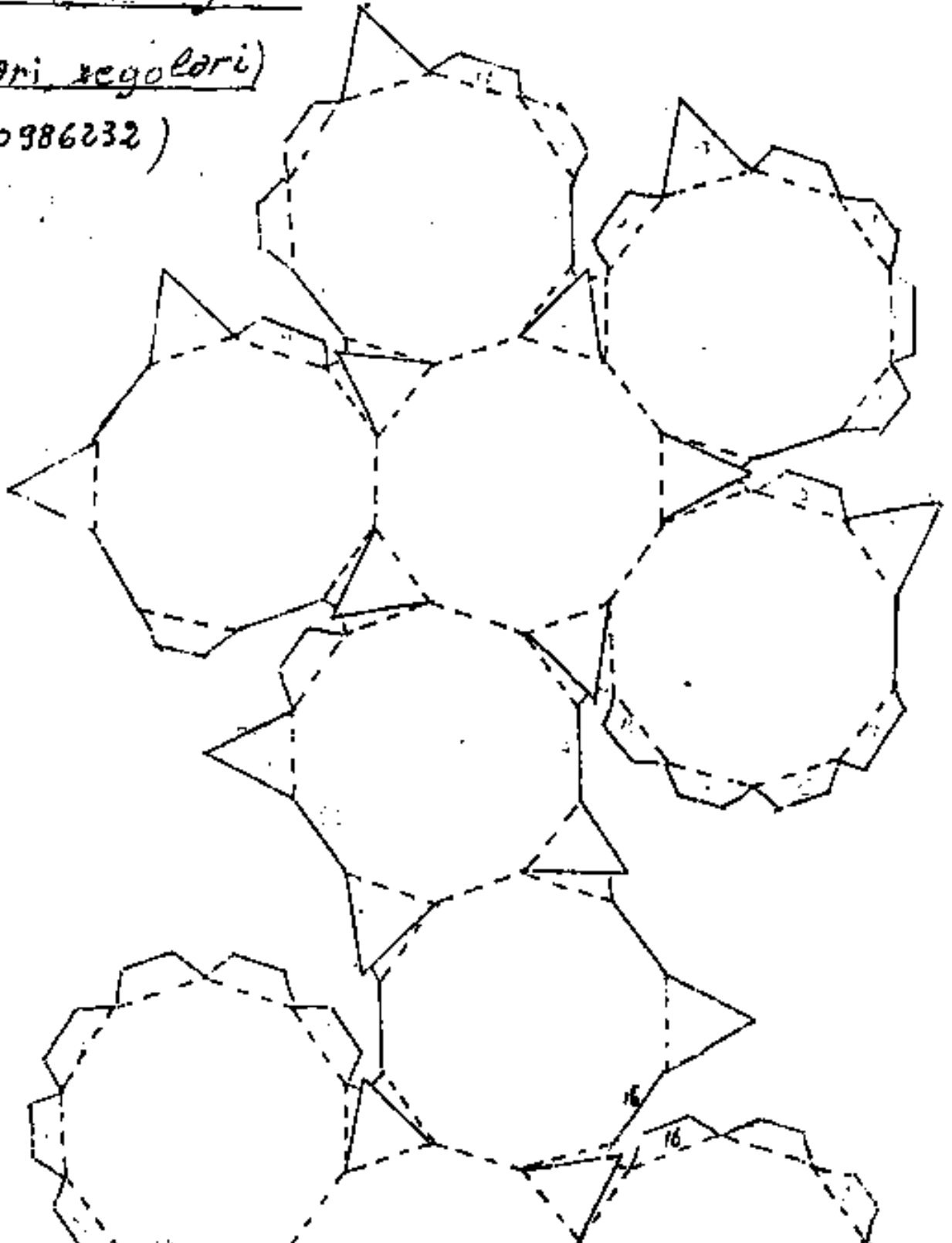
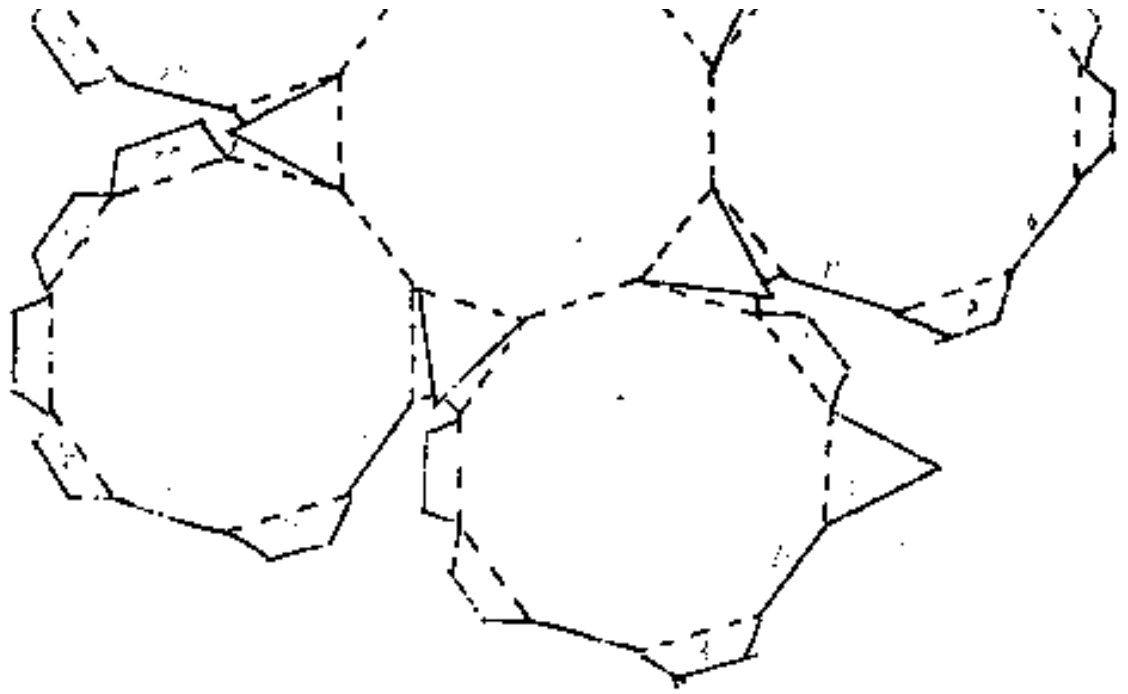
Continuando ad aumentare K oltre questo limite occorre rivedere le formule anche di l_1; il solido che ne deriva ha, con l'aumentare di K, le facce pentagonali sempre più piccole, mentre le facce esagonali non sono più regolari essendo i tre lati $l_6 > l_5$.

Infine quando i piani di sezione passano per i centri-faccia del dodecaedro, cioè quando i segmenti che uniscono i centri-faccia (e che sono gli spigoli di un icosaedro); $g_1 = l_d \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) = l_6$; ed essendo il raggio circoscritto alla faccia pentagonale: $R_p = l_d \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$

avremo: $(K l_d)^2 = R_p^2 - \frac{g_1^2}{3}$; $K^2 l_d^2 = l_d^2 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10} - \frac{70+30\sqrt{5}}{300} \right)$;

$K^2 = \frac{150+30\sqrt{5}-70-30\sqrt{5}}{300} = \frac{80}{300} = \frac{4}{15} \Rightarrow \boxed{K = \frac{2}{\sqrt{15}} = 0{,}516397780}$;

$l_5 = 0$.

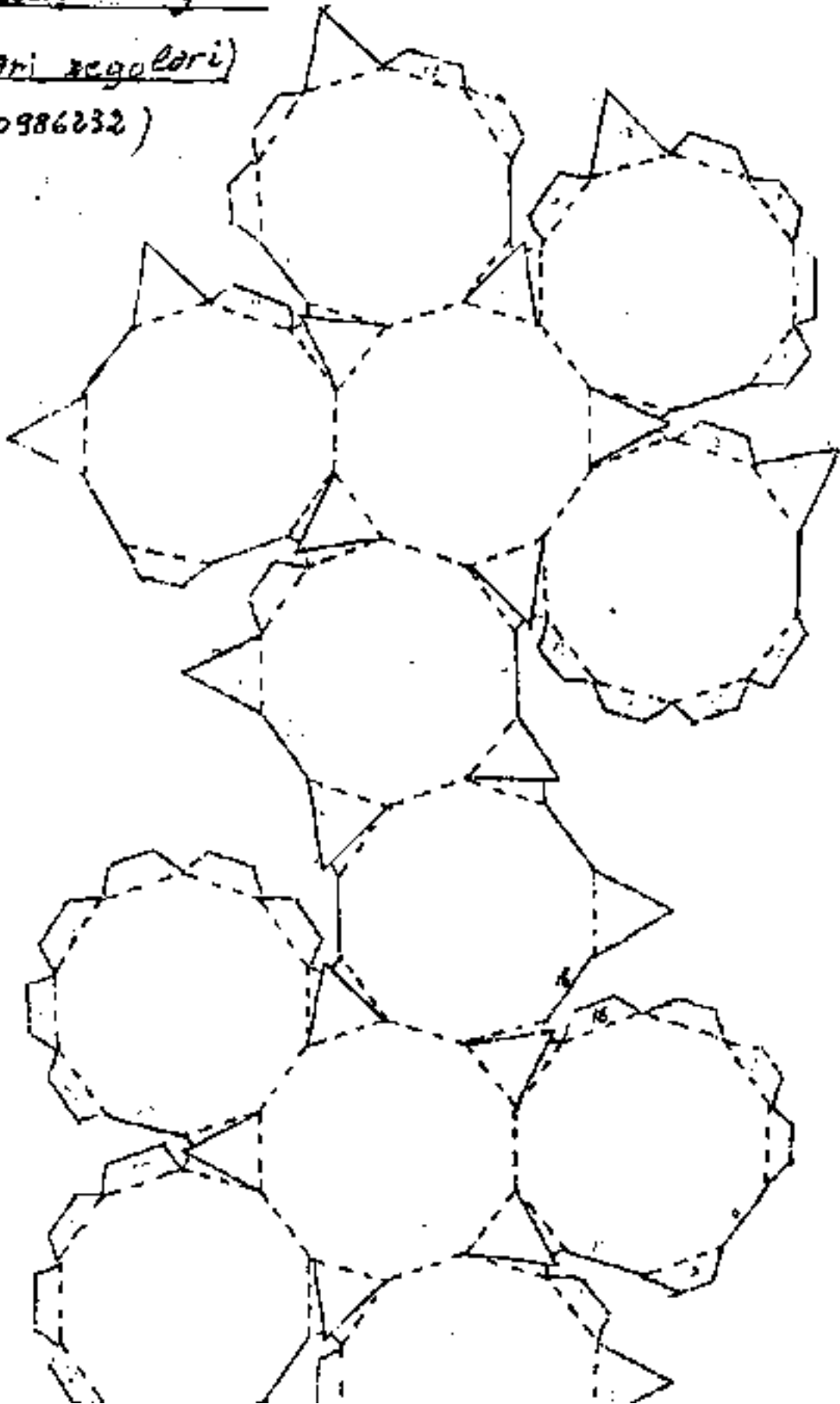
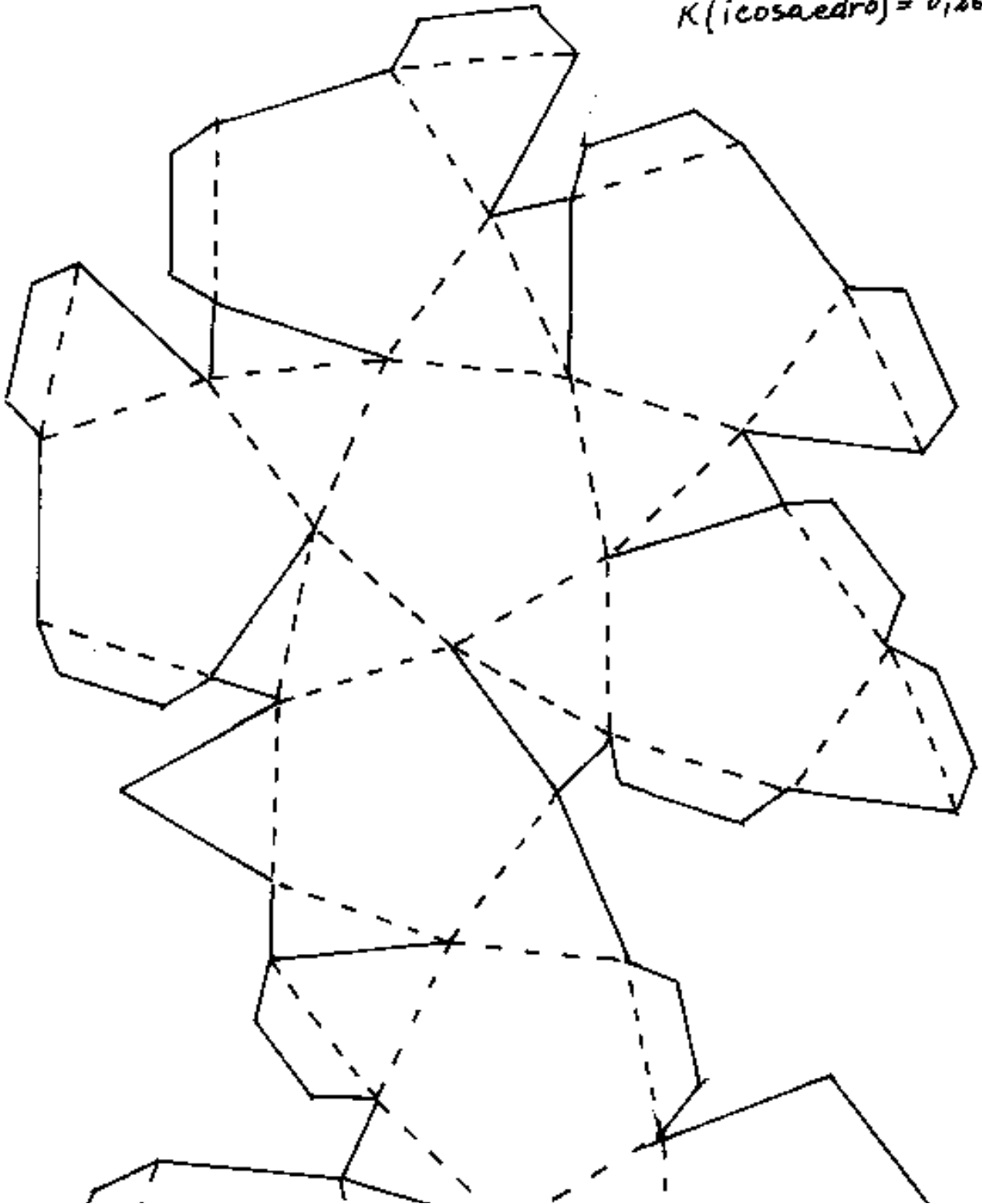
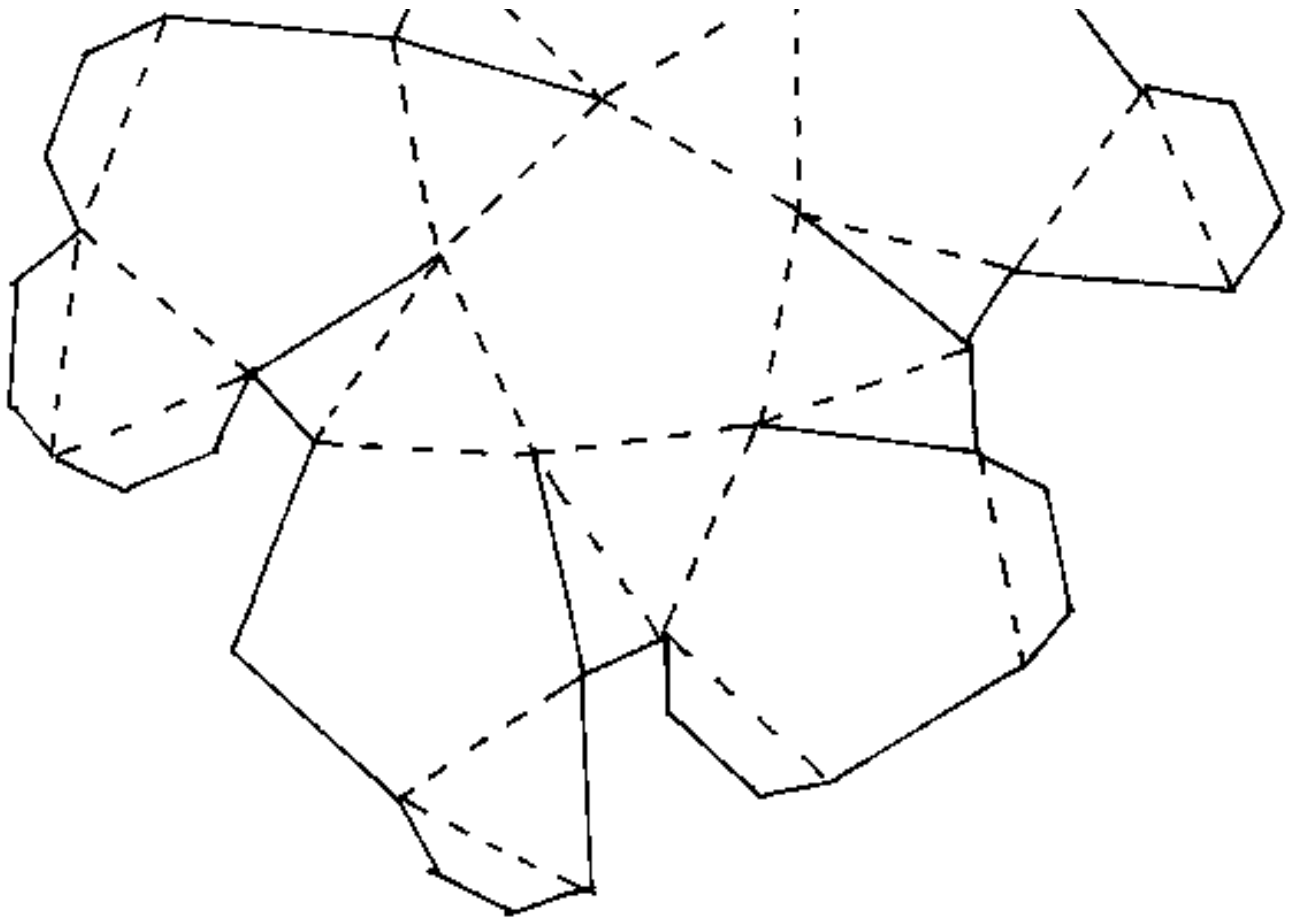
L'ulteriore aumento di K sfalda l'icosaedro ora costituito.

Dodecaedro sezionato

(solido a facce decagonali e triangolari regolari)

($K = 0,0986232$)

Dodecaedro sezionato

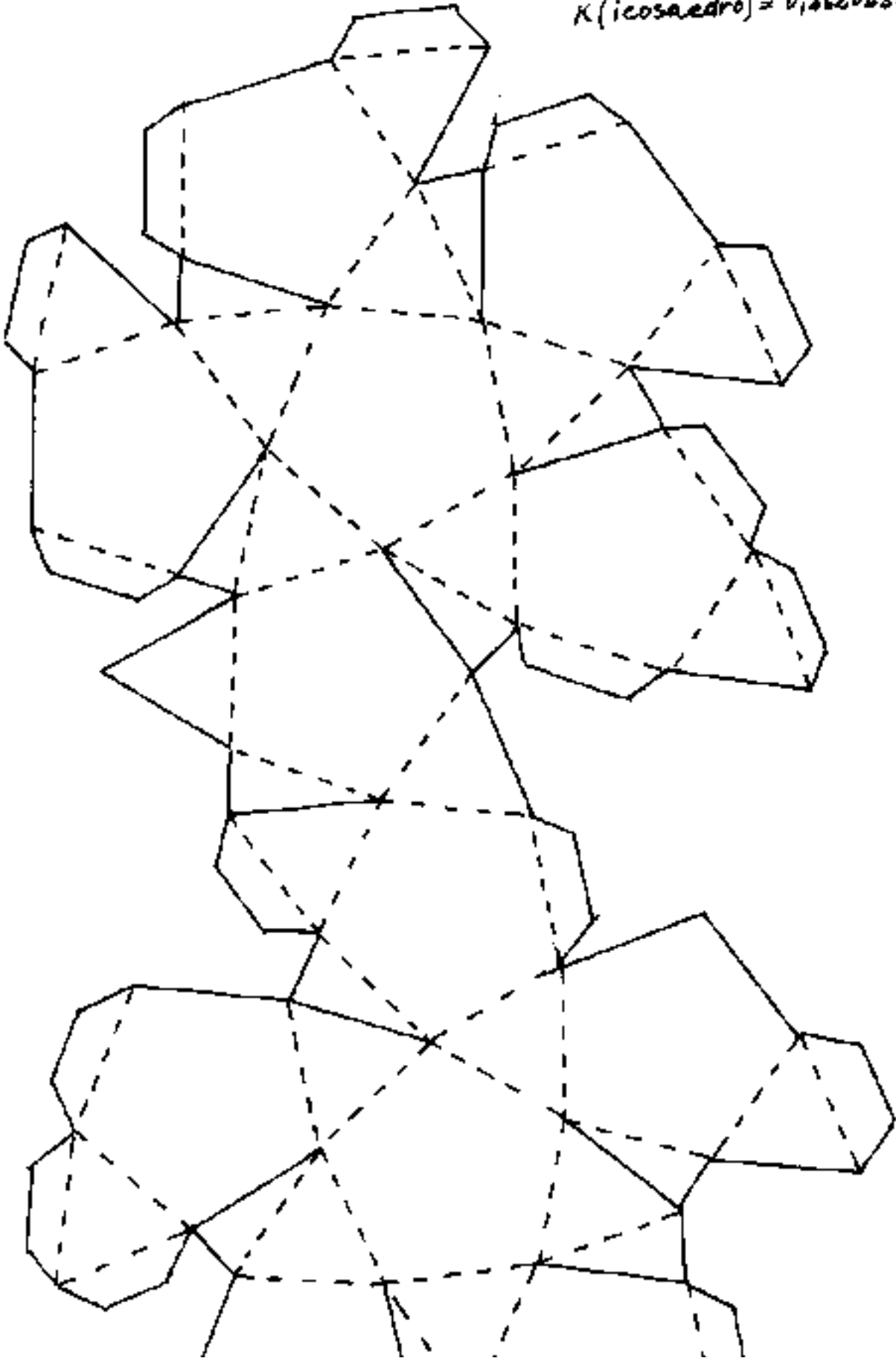
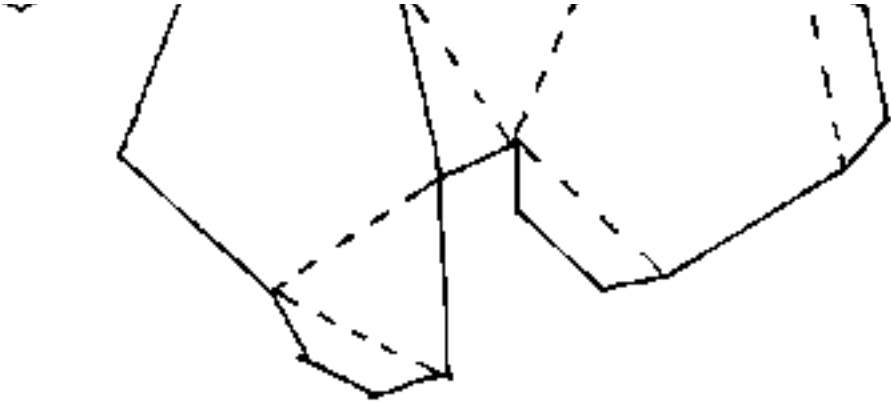
(solido a facce: decagonali e triangolari regolari)

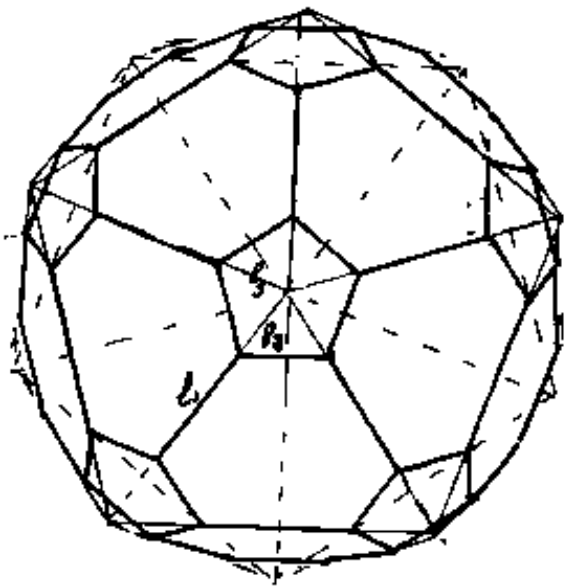
(K = 0,0986232)

DVODECEDRON ABSCISVS

K (dodecaedro) = 0,17841104

K (icosaedro) = 0,262865556

DVODECEDRON ABSCISVS

K (dodecaedro) = 0,17841104

K (icosaedro) = 0,262865556

ICOSAEDRO SEZIONATO

Ricordiamo che il dodecaedro e l'icosaedro sono legati dal fatto che scambiando i vertici con le facce e viceversa, da un solido si passa all'altro; perciò, le sezioni dell'icosaedro porteranno agli stessi solidi che si sono ottenuti dalle sezioni del dodecaedro, però in ordine inverso al crescere della distanza Kl_i dei piani di sezione dai vertici del solido sezionato.

Sia l_i lo spigolo dell'icosaedro. Si noti che l_2 tiene ora il posto di l_5 nelle sezioni del dodecaedro ed $l_1 \equiv l_6$; $l_1 = l_i - 2l_3$; $l_3^2 - l_2^2\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) = K^2 l_i^2$, ma :

$l_2 = l_3 \Rightarrow K^2 l_i^2 = \frac{10-5-\sqrt{5}}{10} l_2^2 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right) l_2^2$; $l_2 = l_i K \sqrt{\frac{10}{5-\sqrt{5}}} =$

$$\boxed{l_2 = l_i K \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = l_i K (1{,}902113033) ; \quad \boxed{l_1 = l_i \left(1 - 2K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)}$$

Quando $l_1 = l_2$ si ha il solido detto: ICOCEDRON

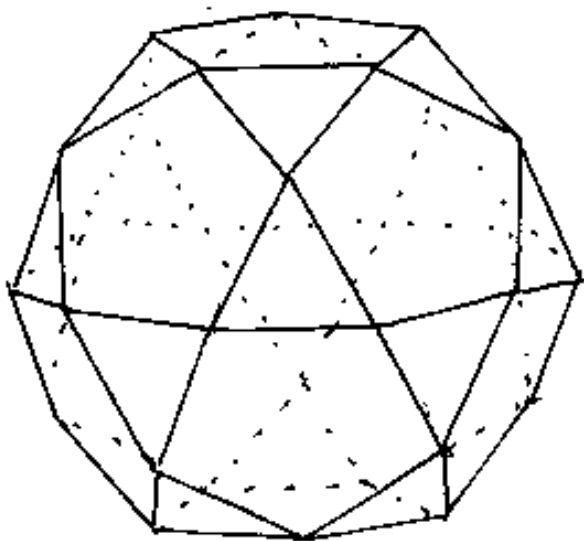
ABSCISVS : $1 - 2K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$; $3K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 1$;

$$\boxed{K} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = 0{,}175243704}$$

$$l_2 = l_1 = l_i \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\frac{(5+\sqrt{5})}{2}} = \frac{l_i}{3}\sqrt{\frac{20}{20}} \qquad \boxed{l_2 = l_i/3}$$

Notare che le facce triangolari dell'icosaedro sezionando sui piani si hanno pentagoni regolari,

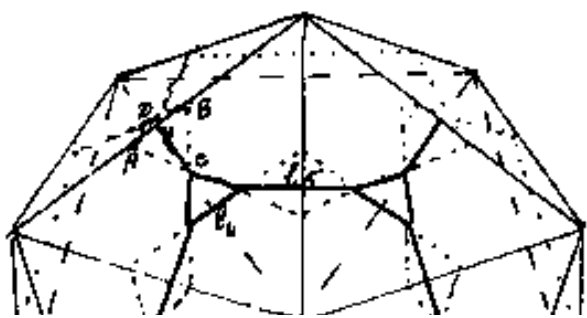
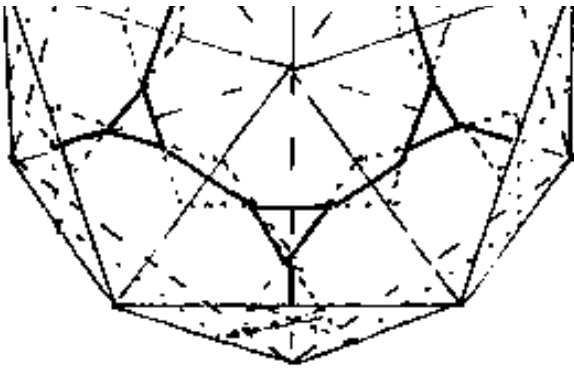
crescenti con K.

Aumentando K si arriva ad $l_1 = 0$; $l_2 = l_i/2$ le facce originarie dell'icosaedro sono tornate triangoli equilateri di lato metà, in questo caso il solido è detto:

DUODECEDRON ABSCISUS

ciò si ha quando: $2K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 1$;

cioè: $K = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} = \boxed{K = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = 0{,}2628655}$

Continuando ad aumentare K i piani di sezione si intersecano fra loro ed occorre rivedere le formule: $l_1 < 0$; allo scopo di evidenziare il solido si sono disegnate a puntini, nella figura a fianco, le tracce dei piani di sezione. Si nota che il solido è formato da facce trian-

golari equilatere e da facce decagonali irregolari.

Si ha: $\overline{AB} = -l_1 = \left(2K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - 1\right) l_i$.

Detto l_4 il lato delle facce triangolari, ed l_5 cinque lati delle facce decagonali; $l_4 = l_2 - 2\overline{AC}$; $\overline{AC} = \overline{AB}$; per cui $l_4 = l_i\left(K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - 4K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + 2\right) =$

$$\boxed{l_4 = l_i\left(2 - 3K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)}$$

; $l_5 = \overline{DC}$, ma il quadrilatero

ACBD non è piano, perciò, detto H il punto medio di $\overline{AB}$, l'angolo $D\hat{H}C = \hat{H} = 138°\,11'\,23''$ = angolo diedro dell'icosaedro: $\overline{DC} = l_5 = 2\,\text{sen}\left(\frac{H}{2}\right)\cdot\overline{CH} = 2\left(\frac{AC}{2}\sqrt{3}\,\text{sen}\left(\frac{H}{2}\right)\right) =$

$$l_5 = l_i\left(2K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - 1\right)\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}\right) = l_i\left(K\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)(6+2\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) =$$

$$l_5 = l_i\left(K\sqrt{\frac{30+6\sqrt{5}+10\sqrt{5}+10}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right);\quad \boxed{l_5 = l_i\left(2K\sqrt{5+2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$$

Quando $l_4 = l_5$ il decagono è regolare perciò:

$$2K\sqrt{5+2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 2 - K3\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow$$

$$\left(2\sqrt{5+2\sqrt{5}} + 3\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)K = \left(2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$K = \frac{(5+\sqrt{5})/2}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}} + 3\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})/2}}{2\sqrt{\frac{2(5+2\sqrt{5})}{5+\sqrt{5}}} + 3} = \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})/2}}{\left(\sqrt{5}+4\right)} =$$

$$\boxed{K = 0{,}3050180}$$

Quando $l_4 = 0$ le facce diventano pentagonali e si ha il dodecaedro.

$$3K\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 2 \Rightarrow K = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \boxed{K = 0{,}35048740 8}$$

$$l_5 = l_i\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{10}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = l_i\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{10}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

$$l_5 = l_i\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \qquad \boxed{l_5 = \frac{l_i}{6}\left(\sqrt{5}+1\right)}$$

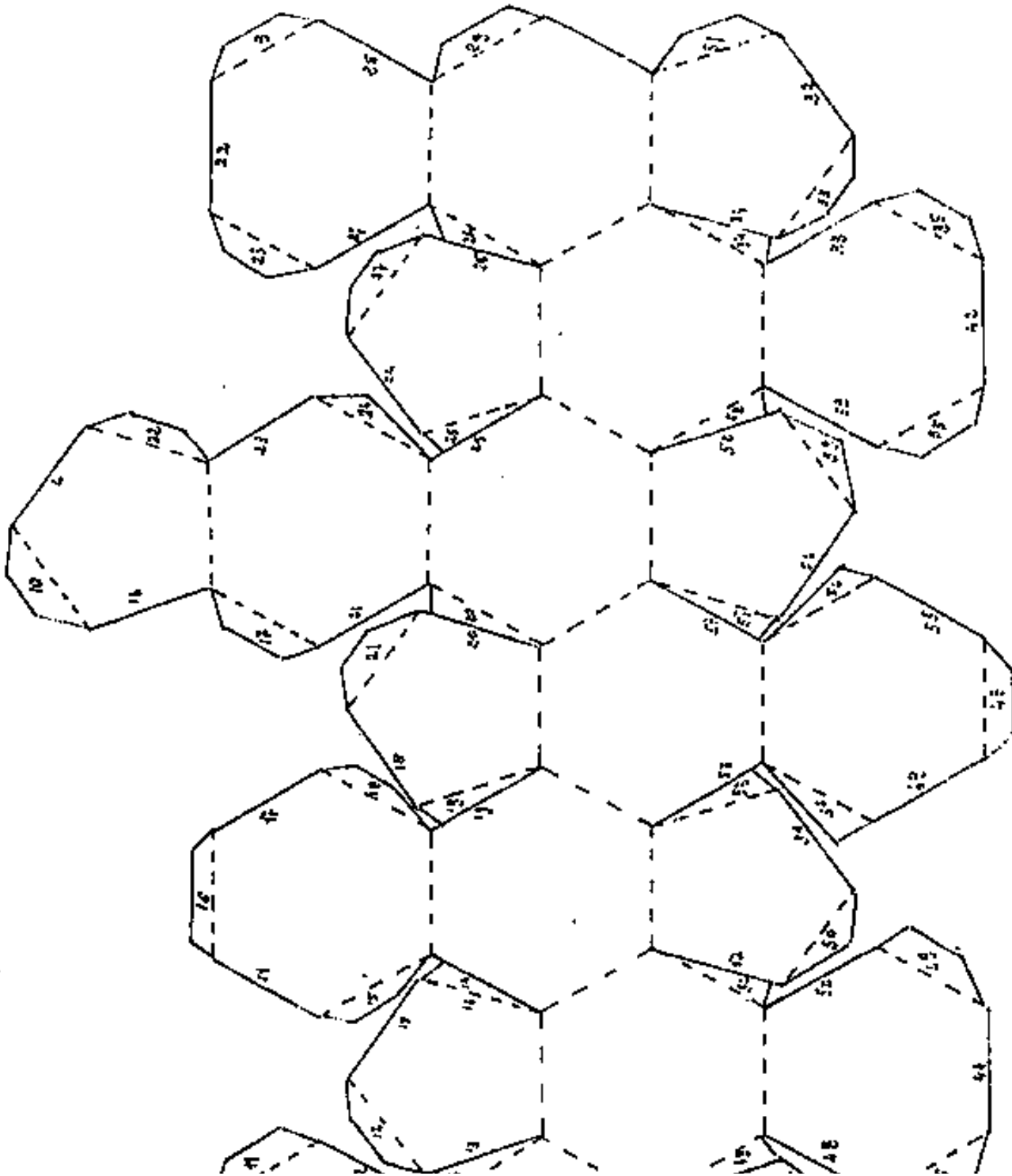
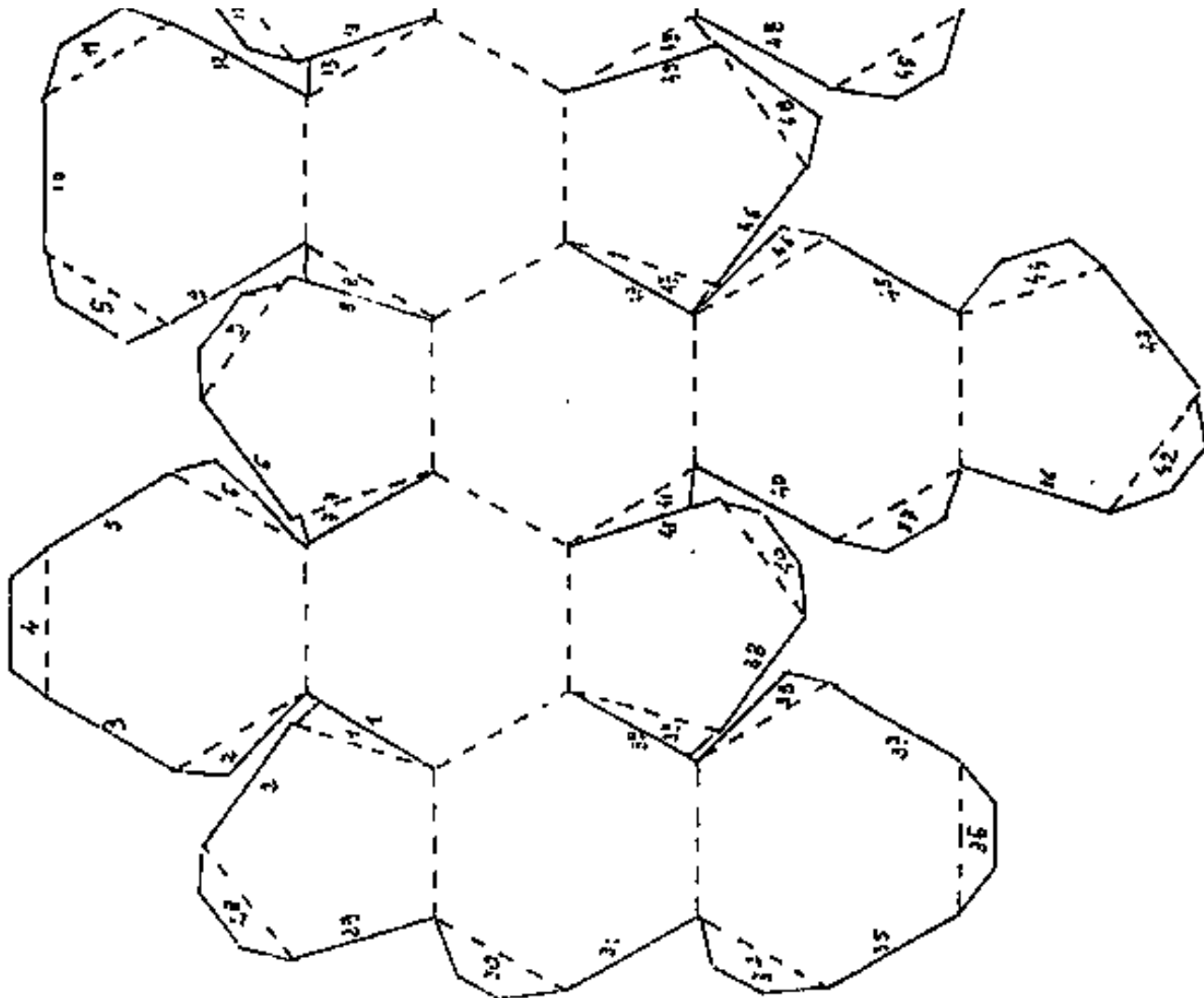
l_5 = distanza fra i centri faccia dell'icosaedro o spigolo del dodecaedro.

L'ulteriore aumento di K provoca lo sfaldamento del dodecaedro.

Schema di sviluppo di

(Fullerene C_{60}) YCOCEDRON ABSCISUS

K = 0,3165218886676103 . (dodecaedro)

K = 0,175243704 (icosaedro)

La geometria naturale

La legge della costanza degli angoli diedri.

Il senese Vannoccio Biringuccio (1480-1539) parlando della pirite esprimeva: " in forme di certe grane hor grosse et hor pichole, Tutte cubiche a similitudine oli dadi, over bisquadre tutte iustamente squadrate. Tal che artefice alcuno, con qual si vogli strumento non potrebbe tirar più iusti, né meglio li lor anguli ". A queste osservazioni dei primi anni del 1500, fece seguito Nils Stensen (Nicolaus Stenone (1638-1686) olandese, italiano di adozione, medico del Granduca di Toscana, studiando l'ematite dell'Elba ed il quarzo, rilevò che anche in cristalli "distorti" valeva la legge che: nei cristalli di uno stesso materiale, gli angoli fra le facce corrispondenti sono uguali. Poco dopo (1688) il medico e matematico bolognese Domenico Guglielmini (1655-1710), portando come esempi il

salgemma, il salnitro, l'allume, il vetriolo, dice che: si possono presentare imperfetti ma: « stabile nulladimeno, purché vi sia principio di cristallizzazione, è sempre l'inclinazione dei piani, e degli angoli, dalla quale ne' cristalli non assai perfetti, ben si conose ove avrebbero a terminarsi, dipendendo da essa necessariamente la determinazione della figura, e

si riconosce in ciò l'intenzione della natura e la propensione della materia, che s'indirizza per quanto può a disporsi nella sua figura geometrica ». Considera anche la trasformazione in trapezi delle facce di ottaedri di allume rilevando che mantengono costante la mutua inclinazione. Molti anni dopo, o meglio nel secolo successivo al Guglielmini, Jean Baptiste Louis Romé De L'Isle (1736-1790) espresse la legge per tutti i cristalli (Legge della costanza degli angoli diedri) che in molti testi stranieri è detta legge di De l'Isle.

Partecipi dello stupore di Biringuccio per la perfezione dell'artefice natura (chissà con quali strumenti lavora?) del pensiero di Stenone che l'apparente irregolarità "distorsione" non invalida il principio, e del pensiero sottilissimo del Guglielmini che esprime: "l'intenzione della natura ... la propensione

esprime: "l'intenzione della natura, .. la propensione della materia ..." verso una geometria.

Abbiamo matematicamente studiato le forme cristalline: come modelli geometrici trovando coefficienti che permettono di capire il passaggio da dodecaedri (regolari o no) a cubi od a rombododecaedri. Da queste basi può partire uno studio più specifico. —

Appendice

Si riporta una tavola di funzioni trigonometriche, esposte in forma di radicale, cioè esatte nella loro espressione e quindi calcolabili con qualsiasi n: di cifre decimali. Gli angoli cui si riferiscono sono solo approssimati ai secondi e trattasi di angoli di solidi. Se trattasi di solidi regolari accanto all'angolo si è posta una R, in modo che risalendo al prospetto riepilogativo nei solidi regolari (pag 165), sia possibile risalire al solido.

L'espressione radicale del valore della funzione trigonometrica consente spesso semplificazioni nei calcoli, non apprezzabili coi valori decimali.

Gli angoli sono posti su 4 colonne, in modo da non ripetere valori uguali.

Le funzioni trigonometriche si riferiscono alla prima colonna di angoli (α): per le altre basta ricordare che:

colonna di angoli (α); per le altre basta ricordare che:

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(180^\circ-\alpha) = (\operatorname{sen}(\alpha)) \\ \cos(180^\circ-\alpha) = (-\cos(\alpha)) \\ \operatorname{tang}(180^\circ-\alpha) = (-\operatorname{tang}(\alpha)) \end{array}\right\} \text{ II}^a \text{ colonna}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(90^\circ-\alpha) = (\cos(\alpha)) \\ \cos(90^\circ-\alpha) = (\operatorname{sen}(\alpha)) \\ \operatorname{tang}(90^\circ-\alpha) = (1/\operatorname{tang}(\alpha)) \end{array}\right\} \text{ III}^a \text{ colonna}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(90^\circ+\alpha) = (\cos(\alpha)) \\ \cos(90^\circ+\alpha) = (-\operatorname{sen}(\alpha)) \\ \operatorname{tang}(90^\circ+\alpha = (-1/\operatorname{tang}\alpha) \end{array}\right\} \text{ IV}^a \text{ colonna}$$

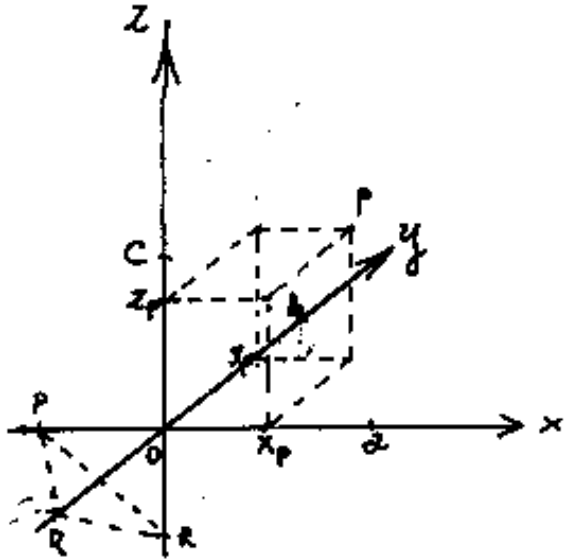
TABELLA delle funzioni trigonometriche di angoli attinenti ai solidi, espresse in forma di radicali

I

N.	α	(180° − α)	(90° − α)	90° + α	sen(α)	cos(α)	tang(α)
1	4° 54' 12"	175° 05' 48"	85° 05' 48"	94° 54' 12"	$(3-2\sqrt{2})/\sqrt{21-12\sqrt{2}}$	$2/\sqrt{31-12\sqrt{2}}$	$(3-2\sqrt{2})/2$
2	5° 46' 06"	174° 13' 54"	84° 13' 54"	95° 46' 06"	$(\sqrt{3/2}-1)/\sqrt{5}$	$(\sqrt{3/2}+1)/\sqrt{5}$	$(5-4\sqrt{3/2})$
3	7° 53' 48"	172° 06' 12"	82° 06' 12"	97° 53' 48"	$\sqrt{(9-5\sqrt{3})/18}$	$\sqrt{(9+5\sqrt{3})/18}$	$(9-\sqrt{5})/\sqrt{6}$
4	8° 25' 16"	171° 34' 44"	81° 34' 44"	98° 25' 16"	$\sqrt{(3-2\sqrt{2})/8}$	$\sqrt{(3+2\sqrt{2})/8}$	$1/\sqrt{23+16\sqrt{2}}$
5	8° 47' 38"	171° 12' 22"	81° 12' 22"	98° 47' 38"	$1/\sqrt{22+12\sqrt{3}}$	$\sqrt{3/(10-4\sqrt{3})}$	$1/(3+2\sqrt{3})$
6	10° 32' 43"	169° 27' 17"	79° 27' 17"	100° 32' 43"	$\sqrt{(2-\sqrt{3})/8}$	$\sqrt{(6+\sqrt{3})/8}$	$1/\sqrt{15+8\sqrt{3}}$
7	10° 43' 43"	169° 16' 17"	79° 16' 17"	100° 43' 43"	$(2-\sqrt{3})/\sqrt{9-4\sqrt{3}}$	$\sqrt{3/(9-4\sqrt{3})}$	$(2-\sqrt{3})/\sqrt{3}$
8	10° 48' 44"	169° 11' 16"	79° 11' 16" R	100° 48' 44" R	$\sqrt{(5-2\sqrt{5})/15}$	$\sqrt{(10+2\sqrt{5})/15}$	$1/(\sqrt{5}+3)$
9	11° 18' 36"	168° 41' 24"	78° 41' 24"	101° 18' 36"	$1/\sqrt{26}$	$5/\sqrt{26}$	$1/5$
10	11° 32' 13"	168° 27' 47"	78° 27' 47"	101° 32' 13"	$1/5$	$2\sqrt{6}/5$	$1/2\sqrt{6}$
11	12° 12' 00"	167° 48' 00	77° 48' 00"	102° 12' 00	$(3-\sqrt{3})/6$	$\sqrt{(4+\sqrt{3})/6}$	$\sqrt{11+6\sqrt{3}}$
12	12° 45' 52"	167° 14' 08"	77° 14' 08"	102° 45' 52"	$1/\sqrt{12+6\sqrt{2}}$	$(3+\sqrt{2})/\sqrt{12+6\sqrt{2}}$	$1/(3+\sqrt{2})$
13	12° 56' 40"	167° 03' 20"	77° 03' 20"	102° 56' 40"	$(\sqrt{12}-1)/11$	$2\sqrt{27+\sqrt{3}}/11$	$1/2\sqrt{3+\sqrt{3}}$

TABELLA delle funzioni trigonometriche di angoli attinenti ai solidi, espresse in forma di radicali II^a

N°	α	(180° − α)	(90° − α)	90° + α	sen (α)	cos (α)	tang (α)
14	12° 58' 19"	167° 01' 41"	77° 01' 41"	102° 58' 19"	$\sqrt{(59-24\sqrt{6})/(63-24\sqrt{6})}$	$2/\sqrt{(63-24\sqrt{6})}$	$2/\sqrt{59-24\sqrt{6}}$
15	13° 15' 46"	166° 44' 14"	76° 44' 14"	103° 15' 46"	$1/\sqrt{19}$	$\sqrt{18/19}$	$1/(3\sqrt{2})$
16	14° 02' 10"	165° 57' 50"	75° 57' 50"	104° 02' 10"	$1/\sqrt{17}$	$4/\sqrt{17}$	$1/4$
17	14° 28' 39"	165° 31' 21"	75° 31' 21"	104° 28' 39"	$1/4$	$\sqrt{15}/4$	$1/\sqrt{15}$
18	15°	165°	75°	105°	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$(2-\sqrt{3})$
19	16° 49' 35"	163° 10' 25"	73° 10' 25"	106° 49' 35"	$11/38$	$21\cdot\sqrt{3}/38$	$21\cdot\sqrt{3}/11$
20	17° 35' 17"	162° 24' 43"	72° 24' 43"	107° 35' 17"	$(4\sqrt{3}-3)/13$	$(2+6\sqrt{3})/13$	$(3-\sqrt{3})/4$
21	18°	162°	72° R	108° R	$(\sqrt{5}-1)/4$	$\sqrt{(5+\sqrt{5})/8}$	$\sqrt{(5-2\sqrt{5})/5}$
22	18° 26' 06"	161° 33' 54"	71° 33' 54"	108° 26' 06"	$1/\sqrt{10}$	$3/\sqrt{10}$	$1/3$
23	19° 28' 16"	160° 31' 44"	70° 31' 44" R	109° 28' 16" R	$1/3$	$2\sqrt{2}/3$	$\sqrt{2}/4$
24	20° 54' 18" R	159° 05' 42"	69° 05' 42" R	110° 54' 18"	$(\sqrt{5}-1)/2\sqrt{3}$	$(\sqrt{5}+1)/2\sqrt{3}$	$(3-\sqrt{5})/2$
25	20° 56' 28"	159° 03' 32"	69° 03' 32"	110° 56' 28"	$\sqrt{(5-2\sqrt{3})/17}$	$2/\sqrt{6-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
26	21° 14' 45"	158° 45' 15"	68° 45' 15"	111° 14' 45"	$(\sqrt{6}-1)/4$	$\sqrt{9+2\sqrt{6}}/4$	$(\sqrt{6}-1)/\sqrt{9+2\sqrt{6}}$

Il campo tridimensionale

Dato il sistema di tre assi cartesiani ortogonali oxyz per i quali la rappresentazio= ne di un punto P, secondo le sue coordinate è scritta:

$$P \equiv (x_P ; y_P ; z_P)$$

vogliamo analizzare il signi= ficato delle espressioni:

$x = a$ significa: "tutti i punti aventi ascissa pa= ri ad a" cioè il piano parallelo ad yz e distante "a" da esso. Analogamente:

$y = b$ = piano parallelo ad xz e distante "b" da esso.

$z = c$ = piano parallelo ad xy e distante "c" da esso.

Cioè dire: "direzione x" significa dire: "giaci= tura x" di tutti i piani perpendicolari ad x.

[illegible] di tutti i piani perpendicolari ad x.

Ciò vale per x, per, y, z, n ed ogni altra direzione verso il nostro pseudo-punto all'infinito.

$\boxed{y = mx}$ per $(z=0)$ = retta sul piano xy, traccia(1) su xy del piano passante per z, costituito

---

(1) Dicesi "traccia" l'intersezione di un piano (o di una retta) con i piani di proiezione.

dalle infinite rette parallele alla: $y=mx$; $z=0$ determinate dal solo variare di z. (Si noti che per determinare una retta occorrono due relazioni, cioè l'intersezione di due piani, il piano: $z=0$, ed il piano ($y=mx$). Analogamente:

$x = mz$ per ($y=0$) = retta sul piano xz, traccia del piano per y.

$z = my$ per ($x=0$) = retta sul piano yz, traccia del piano per x.

Analogamente le forme:

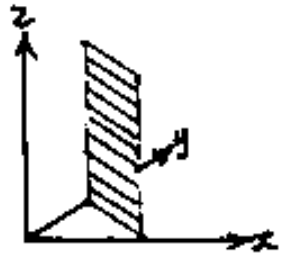
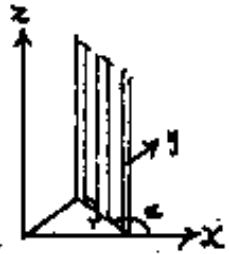
$y = mx + q$

$x = mz + p$

$z = my + r$

Sono le rette, tracce dei piani paralleli all'asse che non figura in formula. Cioè rispettivamente paralleli a z, y, x. Cioè: <u>se l'equazione di un piano è indipendente da un asse, il piano è parallelo a quell'asse;</u> <u>(o passa per quell'asse se è nullo il termine noto)</u>

(o passa per quell'asse se è nullo il termine noto)

Notare, in questi casi, il piano come superficie rigata. Per esempio: $y = mx + q$ è un piano parallelo a z che può essere riguardato come l'insieme delle rette:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ z = K \end{cases} \quad \text{con: } -\infty \leq K \leq +\infty$$

Ma può anche essere riguardato come l'insieme delle rette parallele a z e di traccia T, tali che: $y_T = m x_T + q$ con: $-\infty \leq x_T \leq +\infty$

L'equazione di queste rette può esprimersi per intersezione fra i piani:

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = nx \end{cases}$$

con n variabile da m ad. $\tan[(\arctan m) + 180]$; oppure per intersezione fra i piani (ortogonali)

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = -\frac{1}{m}x + q_1 \end{cases} \quad \text{con: } -\infty \leq q_1 \leq +\infty$$

Notare che il coefficiente $m = \tan(\alpha)$, ove α è l'angolo che la traccia su xy del piano $y = mx + q$ forma con l'asse delle x, e' anche l'angolo diedro fra il piano $y = mx + q$ ed il piano xz.

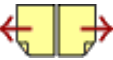
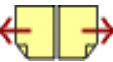
Consideriamo ora l'espressione lineare completa:

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \quad \text{(equazione del piano)}$$

Per trovare l'equazione delle tracce rispettivamente sui piani: xy, xz, yz; basta porre $z=0$, oppure: $y=0$, oppure: $x=0$. Avremo:

su (xy): $\boxed{ax+by+d=0}$; $(z=0)$; cioè: $y=\left(-\frac{a}{b}\right)x-\frac{d}{b}$

su (xz): $\boxed{ax+cz+d=0}$; $(y=0)$; cioè: $x=\left(-\frac{c}{a}\right)z-\left(\frac{d}{a}\right)$

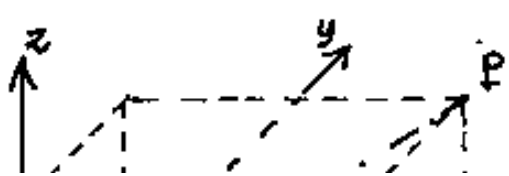
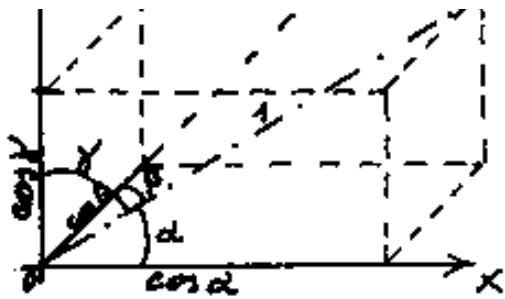
su (zy) $\boxed{by+cz+d=0}$; $(x=0)$; cioè: $z=\left(-\frac{b}{c}\right)y-\frac{d}{c}$

I coefficienti di traslazione lineare:

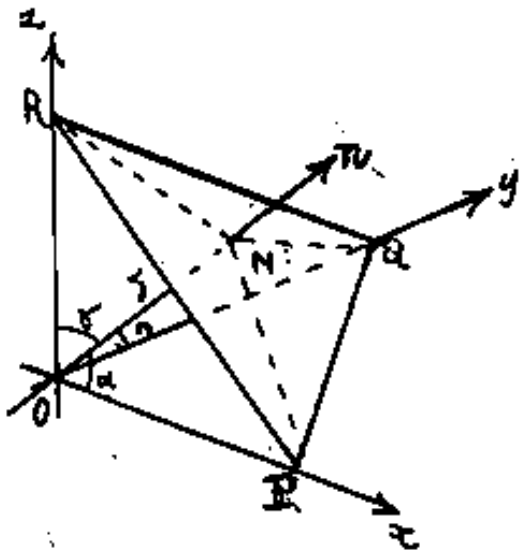
$\left(-\frac{d}{a}\right)$; $\left(\frac{-d}{b}\right)$; $\left(\frac{-d}{c}\right)$; sono le distanze dall'origine "O" degli assi, dei punti di intersezione del piano, con gli assi stessi. (Elementi sufficienti per determinare univocamente il piano, e disegnarlo)

Siano: $\overline{OP} = \left(-\frac{d}{a}\right)$ la distanza sull'asse x

$\overline{OQ} = \left(-\frac{d}{b}\right)$ " " " y

$\overline{OR} = \left(-\frac{d}{c}\right)$ " " " z

Indichiamo con δ la distanza del piano dall'origine "O" degli assi. La retta contenente il segmento δ, essendo perpendicolare al piano, è anche retta di giacitura del piano. Diconsi: Coseni direttori, i coseni degli angoli che una retta orientata forma con gli assi. Avremo cioè che, se consideriamo un parallelepipedo trirettangolo con diagonale $\overline{OP} = 1$

z y P

golo con diagonale $\overline{OP} = 1$ unitaria, i tre spigoli sono i coseni degli angoli da essi formati con la diagonale. Perciò, per il teorema di Pitagora, "La somma dei quadrati dei coseni direttori è sempre uno" ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$)

Nel nostro caso abbiamo: (essendo: $R\hat{N}O = Q\hat{N}O = P\hat{N}O = \pi/2$)

$$\cos(\hat{x n}) = \delta/\overline{OP} = -\delta a/d = \left(-\frac{\delta}{d}\right)a$$

$$\cos(\hat{y n}) = \delta/\overline{OQ} = -\delta b/d = \left(-\frac{\delta}{d}\right)b$$

$$\cos(\hat{z n}) = \delta/\overline{OR} = -\delta c/d = \left(-\frac{\delta}{d}\right)c$$

$$\left(-\frac{\delta}{d}\right)^2(a^2+b^2+c^2) = 1$$

per cui:

$$\boxed{\delta = \frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}} = \overline{ON}$$

Importantissimo notare che: a, b, c, sono proporzionali ai coseni direttori, e che sostituendo il valore di δ abbiamo:

$$\cos(\hat{x n}) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos(\hat{y n}) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos(\widehat{zn}) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

cioè se dividiamo per $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ l'espressione:

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

otteniamo:

$$\boxed{(\cos(\widehat{xn}))\,x + (\cos(\widehat{yn}))\,y + (\cos(\widehat{zn}))\cdot z = \delta} = \overline{ON}$$

ove δ è la distanza del piano dall'origine degli assi. Se a, b, c, fossero già i coseni direttori della retta normale al piano (retta di giacitura di tutti i piani paralleli oltreché del piano dato); $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ sarebbe uguale ad uno (somma dei quadrati dei coseni direttori) e quindi non varierebbero dividendo per l'unità.

Condizione di parallelismo fra piani è che abbiano gli stessi coseni direttori; varia solo la distanza δ del piano dall'origine degli assi

L'equazione di una retta è data da due relazioni lineari, cioè come intersezione di due piani.

Quindi nello spazio tridimensionale, espressioni del tipo: $z = f(x,y)$, cioè funzioni in due variabili, rappresentano in generale una superficie, che sarà piana solo se $z = f(x,y)$ è una relazione lineare.

una relazione lineare.

Due espressioni: $z_1 = f(x_1, y_1)$; $z_2 = f(x_2, y_2)$, riferite agli stessi assi x, y, z, rappresentano la linea intersezione delle due superfici, che potrà ri= sultare curva o rettilinea, piana o gobba a secon= da della specie delle due espressioni.

Tre espressioni rappresentano un punto. Per esempio i tre piani:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \end{cases}$$

da cui è possibile calcolare le coordinate del punto comune.

Vale il principio di <u>dualità</u> scambiando la parola <u>punto</u> con la parola <u>piano</u> e viceversa. (STAUDT)

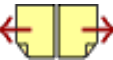
due (piani / punti) determinano una retta

tre (piani / punti) determinano un (punto / piano)

un (piano / punto) (ed una retta non coincidente) determinano un (punto / piano)

due rette incidenti determinano (punto / piano)

piano

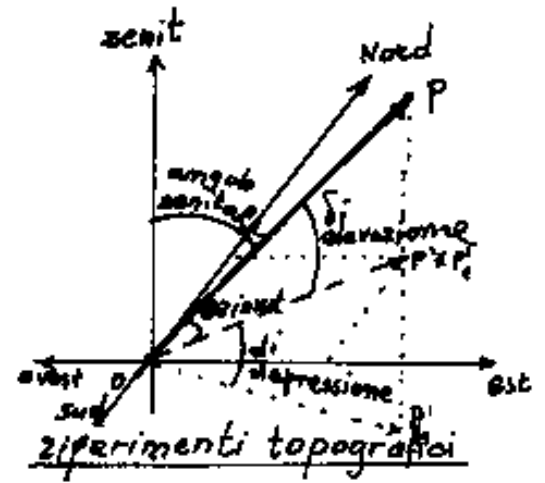
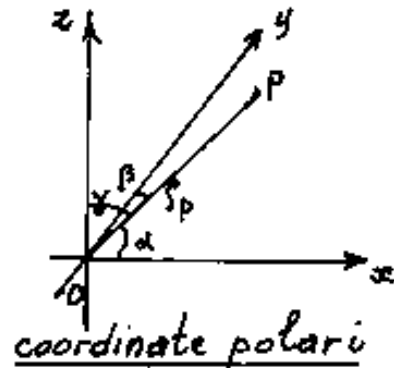
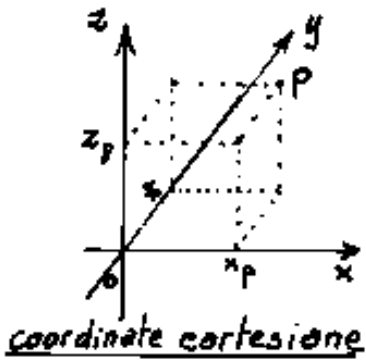
quest'ultima è l'inversa della prima scambiando la parola retta con le parole punto o piano.

La geometria analitica dello spazio

Un punto, nello spazio tridimensionale, risulta definito se si hanno tre determinazioni; per esempio: $P \equiv (x_P, y_P, z_P)$ (le tre coordinate cartesiane); oppure: $P \equiv (\rho_P, \alpha, \beta)$, (ove $\rho_P = \overline{OP}$, ed α e β angoli formati da $\overline{OP}$ rispetto a direzioni arbitrariamente convenute e prefissate): se α e β sono relativi a due assi cartesiani x, y si hanno le coordinate polari; se α è relativo ad una direzione orizzontale e giace su un piano orizzontale, α è detto: "<u>angolo azimutale</u>" o semplicemente: "<u>azimut</u>". (Per esempio sulla terra gli angoli orizzontali misurati rispetto alla direzione Nord). β invece può essere misurato rispetto al piano orizzontale e quindi β è detto <u>angolo di elevazione</u> o <u>di depressione</u> secondo che mira a quote più alte o più basse del piano di riferimento. Se invece β ha per origine la verticale opposta al filo a piombo, è detto <u>angolo zenitale</u> in quanto la direzione

origine è lo zenit. Questi sono riferimenti topografici e gli angoli α e β sono in genere misurati con uno strumento detto: Teodolite.

coordinate cartesiane

coordinate polari

riferimenti topografici

Indice Enciclopedico Indice Pag. 8

Un punto, nello spazio tridimensionale, può anche essere determinato dalle tre equazioni di tre piani non appartenenti allo stesso fascio. (Si dice "fascio di piani" l'insieme dei piani aventi in comune la stessa retta). (Si dice: "stella di piani", l'insieme dei piani aventi in comune lo stesso punto)

Una retta, nello spazio tridimensionale, risulta definita se si hanno due determinazioni; per esempio le due equazioni di due piani non paralleli:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

ove: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Oppure sono date le coordinate di due punti:

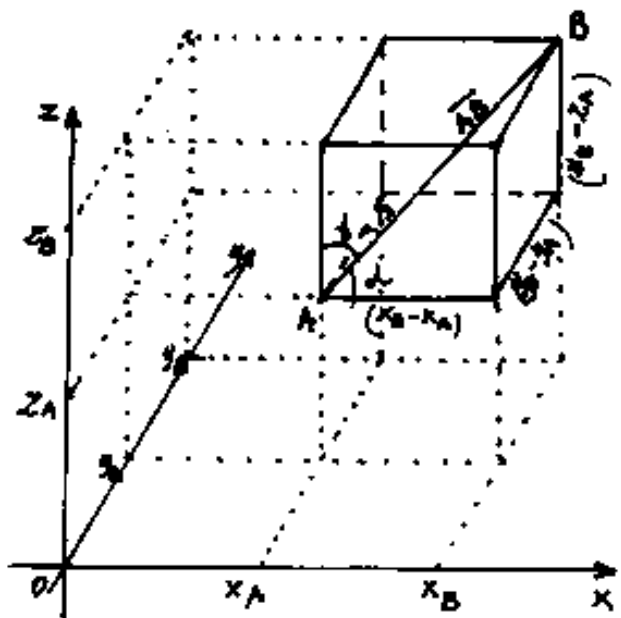
$A = (x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B, z_B)$, appartenenti alla retta. In questo caso si può scrivere una doppia uguaglianza, chiamata: "equazione canonica della retta".

$$\frac{x - x_A}{\quad} = \frac{y - y_A}{\quad} = \frac{z - z_A}{\quad}$$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

Questa doppia uguaglianza resta valida se la moltiplichiamo o dividiamo per costanti arbitrarie: per esempio se per costante moltiplicatore prendiamo il segmento $\overline{AB}$, avremo:

$$\frac{(x - x_A)}{\left(\frac{x_B - x_A}{\overline{AB}}\right)} = \frac{(y - y_A)}{\left(\frac{y_B - y_A}{\overline{AB}}\right)} = \frac{(z - z_A)}{\left(\frac{z_B - z_A}{\overline{AB}}\right)}$$

ma: $\left(\frac{(x_B - x_A)}{\overline{AB}}\right) = \cos(\alpha)$; $\left(\frac{(y_B - y_A)}{\overline{AB}}\right) = \cos(\beta)$; $\left(\frac{(z_B - z_A)}{\overline{AB}}\right) = \cos\gamma$;

cioè i denominatori della doppia uguaglianza diventano i coseni direttori della retta, e poichè: $\alpha = \widehat{xr}$ $\beta = \widehat{yr}$; $\gamma = \widehat{zr}$ l'equazione canonica può scriversi:

$$\frac{(x - x_A)}{\cos(\widehat{xr})} = \frac{(y - y_A)}{\cos(\widehat{yr})} = \frac{(z - z_A)}{\cos(\widehat{zr})}$$

A priori però non possiamo sapere per quale costante arbitraria è stata moltiplicata o divisa la doppia uguaglianza, perciò considerate tre grandezze: l, m, n proporzionali ad $(x_B - x_A)$; $(y_B - y_A)$; $(z_B - z_A)$, cioè proporzionali ai coseni direttori: $\cos(\widehat{xr})$; $\cos(\widehat{yr})$; $\cos(\widehat{zr})$, avremo l'equazione generica della stella di rette passanti per A

$$\frac{x - x_A}{l} = \frac{y - y_A}{m} = \frac{z - z_A}{n}$$

$$\ell \qquad m \qquad n$$

Consideriamo: $\ell^2 = K^2\cos^2\alpha$; $m^2 = K^2\cos^2\beta$; $n^2 = K^2\cos^2\gamma$; sappiamo che: $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$ perciò: $(\ell^2 + m^2 + n^2) = K^2$, per cui basterá dividere i denominatori dell'espressione per $\sqrt{(\ell^2+m^2+n^2)}$, per ottenere ai denominatori i rispettivi coseni direttori. I tre termini della doppia uguaglianza possono considerarsi due a due, avremo così tre equaz=

zioni di tre piani, ove in ciascuno equazione manca una coordinata, perciò i tre piani sono ciascuno parallelo o passante per un asse, oltreché contenere la retta.

$$\cos(\alpha) = \cos(x\hat{A}B) = \cos(\hat{xr}) = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos(\beta) = \cos(y\hat{A}B) = \cos(\hat{yr}) = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos(\gamma) = \cos(z\hat{A}B) = \cos(\hat{zr}) = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

quindi le equazioni dei tre piani sono

$$\frac{x-x_A}{\cos(\hat{xr})} = \frac{y-y_A}{\cos(\hat{yr})} \quad \text{(parallelo a } z\text{)}$$

$$\frac{x-x_A}{\cos(\hat{xr})} = \frac{z-z_A}{\cos(\hat{zr})} \quad \text{(parallelo ad } y\text{)}$$

$$\frac{y-y_A}{\cos(\hat{yr})} = \frac{z-z_A}{\cos(\hat{zr})} \quad \text{(parallelo ad } x\text{)}$$

Ma, conoscendo i coseni direttori della retta, possiamo scrivere l'equazione della giacitura di piani

possiamo scrivere l'equazione della giacitura di piani ad essa perpendicolari:

$$(\cos\alpha)(x) + (\cos\beta)(y) + (\cos\gamma)(z) + \delta = 0$$

ove ogni piano è individuato dal parametro δ che rappresenta la distanza del piano dall'origine degli assi. Ponendo invece, nella doppia uguaglianza, $x=0$, oppure $y=0$, oppure $z=0$ si trovano le cordinate dei punti di intersezione

della retta coi piani: yz, zx, xy.

per $\underline{x=0}$: si ha:

$$\begin{cases} y_i = y_A - \dfrac{\cos(\widehat{yr})}{\cos(\widehat{xr})} x_A \,; \\ z_i = z_A - \dfrac{\cos(\widehat{zr})}{\cos(\widehat{xr})} x_A \,; \end{cases}$$

per $\underline{y=0}$: "

$$\begin{cases} x_i = x_A - \dfrac{\cos(\widehat{xr})}{\cos(\widehat{yr})} y_A \,; \\ z_i = z_A - \dfrac{\cos(\widehat{zr})}{\cos(\widehat{yr})} y_A \,; \end{cases}$$

per $\underline{z=0}$: "

$$\begin{cases} x_i = x_A - \dfrac{\cos(\widehat{xr})}{\cos(\widehat{zr})} z_A \,; \\ y_i = y_A - \dfrac{\cos(\widehat{yr})}{\cos(\widehat{zr})} z_A \,; \end{cases}$$

Ove l'indice "i" vuol dire intersezione col piano definito da: $\underline{x=0}$; $\underline{y=0}$; $\underline{z=0}$ e quindi coordinate diverse; cioè: y_i per $x=0$ è diverso, generalmente, da y_i per $z=0$. così le altre coordinate.

Proponiamoci ora il problema inverso:

"<u>Date le equazioni di due piani che definiscono</u>

una retta, scrivere l'equazione della retta secondo la doppia uguaglianza!"

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Siano le equazioni dei due piani. Se cerchiamo le tracce dei due piani sui piani di proiezione, i punti comuni a due tracce omonime, sono punti della

retta.

Cerchiamo le due tracce (intersezioni) col piano xy; basterà porre $z=0$ nelle due equazioni ed avremo:

$$\left.\begin{aligned} t'_1 &= a_1x+b_1y+d_1=0 \\ t'_2 &= a_2x+b_2y+d_2=0 \end{aligned}\right\} \quad x_A = \frac{-\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y_A = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad z_A = 0$$

Cerchiamo le tracce col piano XZ; $(y=0)$

$$\left.\begin{aligned} t''_1 &= a_1x+c_1z+d_1=0 \\ t''_2 &= a_2x+c_2z+d_2=0 \end{aligned}\right\} \quad x_B = \frac{-\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}; \quad z_B = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}; \quad y_B = 0$$

cerchiamo le tracce col piano: yz; $(x=0)$

$$\left.\begin{aligned} t'''_1 &= b_1y+c_1z+d_1=0 \\ t'''_2 &= b_2y+c_2z+d_2=0 \end{aligned}\right\} \quad y_C = \frac{-\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}; \quad z_C = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}; \quad x_C = 0$$

I punti A, B, C debbono risultare allineati, bastano due di essi per scrivere la doppia uguaglianza. Deve verificarsi, per l'allineamento, che:

verificarsi, per

$$\boxed{\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \; ; \quad \text{da cui:}$$

$$\cos\alpha = \frac{(x_B - x_A)}{\overline{AB}} \; ; \quad \cos\beta = \frac{(y_B - y_A)}{\overline{AB}} \; ; \quad \cos\gamma = \frac{(z_B - z_A)}{\overline{AB}}$$

$$\boxed{\frac{(x - x_A)}{\cos\alpha} = \frac{(y - y_A)}{\cos\beta} = \frac{(z - z_A)}{\cos\gamma}}$$

Condizioni di appartenenza

1) Un punto appartiene ad una retta se le sue coordinate verificano l'equazione della retta.

2) Un punto appartiene ad un piano se le sue coordinate verificano l'equazione del piano.

3) Una retta appartiene ad un piano se le coordinate sopracalcolate di A, B, C verificano le equazioni delle tracce del piano.

Esempi numerici

1) Dato il punto $P \equiv (3, 1, -2)$ scrivere l'equazione della stella di piani passanti per P

$$a(x-3) + b(y-1) + c(z+2) = 0$$

$$ax + by + cz - (3a + b - 2c) = 0$$

possiamo anche scrivere:

$$\cos(\alpha)(x-3) + \cos(\beta)(y-1) + \left(\sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta}\right)(z+2) = 0$$

ove al variare dei parametri α e β si ha la individuazione dei piani della stella

zione dei piani della stella.

---

2) Dato il punto $P \equiv (3, 1, -2)$ scrivere l'equazione della stella di rette passanti per P.

$$\frac{(x-3)}{\cos(\alpha)} = \frac{(y-1)}{\cos(\beta)} = \frac{(z+2)}{\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}$$

---

3) Data la retta: $r \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

trovare le coordinate delle tracce della retta sui piani di riferimento. (Diconsi tracce di una retta i punti di intersezione della retta coi piani di riferimento.)

Sul piano: xy; $z=0$ $\quad \begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ $\quad y_{T_1} = \frac{-1}{3}$; $x_{T_1} = \frac{-4}{3}$;

sul piano: xz; $y=0$ $\quad \begin{cases} x + z = -1 \\ x - z = -2 \end{cases}$ $\quad x_{T_2} = \frac{-3}{2}$; $z_{T_2} = \frac{1}{2}$

sul piano: yz; $x=0$ $\quad \begin{cases} -y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$ $\quad y_{T_3} = -3$; $z_{T_3} = -4$

Le coordinate delle tracce sono:

$$T_1 \equiv \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right); \quad T_2 \equiv \left(-\frac{3}{2}, 0, +\frac{1}{2}\right); \quad T_3 \equiv (0, -3, -4)$$

4) Data la retta $r \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ scrivere l'equazione del fascio di piani passanti per r

L'equazione della retta è quella dell'esercizio precedente per cui ci avvarremo dei punti di traccia calcolati:

deste per cui ci avvarremo dei punti di traccia calcolati

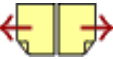
Scriviamo l'equazione del piano: $\left(\frac{a}{d}\right)x+\left(\frac{b}{d}\right)y+\left(\frac{c}{d}\right)z+1=0$

passante per T_3 avremo $0+\left(\frac{b}{d}\right)(-3)+\left(\frac{c}{d}\right)(-4)+1=0$ da cui:

$\frac{b}{d}=\frac{1}{3}\left(1-4\frac{c}{d}\right) \rightarrow \left(\frac{a}{d}\right)x+\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\frac{c}{d}\right)y+\left(\frac{c}{d}\right)z+1=0$; il piano

passante per T_2 : $\left(\frac{a}{d}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+1=0$; da cui $\frac{a}{d}=\left(-1-\frac{1}{2}\frac{c}{d}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$

$\frac{a}{d}=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{c}{d}\right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{3}\left(2+\frac{c}{d}\right)x+\frac{1}{3}\left(1-4\frac{c}{d}\right)y+\left(\frac{c}{d}\right)z+1=0}$ ove

l'unico parametro per definire un piano del fascio è c/d.

Basterebbero le coordinate di un punto non appartenente alla retta per definire il piano. Se sostituiamo T_1 (che appartiene alla retta si ha:

$$-\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\frac{c}{d}\right)+0+1=0$$

$$-\frac{8}{9}-\frac{4}{9}\frac{c}{d}-\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\frac{c}{d}+1=0$$

verifica che il punto T_1 appartiene al piano indipendentemente da c/d cioè appartiene alla retta del fascio.

posto: $\frac{c}{d}=\lambda$ e moltiplicando per 3 si ha:

$$\boxed{(2+\lambda)x+(1-4\lambda)y+(3\lambda)z+3=0}$$

equazione del fascio di piani passanti per la retta, con λ parametro. Per $\lambda=0 \rightarrow 2x+y+3=0$ (piano parallelo a z).

---

5) Dato il fascio di piani: $(2+\lambda)x+(1-4\lambda)y+(3\lambda)z+3=0$ trovare l'equazione del piano passante per $P\equiv(3,1,-2)$.

sostituendo:

$$(2+\lambda)3+(1-4\lambda)1+(3\lambda)(-2)+3=0$$

$$(2+\lambda)3+(1-4\lambda)1+(3\lambda)(-2)+3=0$$

$$6+3\lambda+1-4\lambda-6\lambda+3=0 \rightarrow 7\lambda=10 \quad \boxed{\lambda=\frac{10}{7}}$$

$$\left(2+\frac{10}{7}\right)x+\left(1-\frac{40}{7}\right)y+\frac{30}{7}z+3=0$$

$$24x-33y+30z+21=0 \rightarrow \boxed{8x-11y+10z+7=0}$$

che è l'equazione cercata. Verifica: $8\cdot 3-11\cdot 1-10\cdot 2+7=0$

$$\cos(\alpha)=\frac{8}{\sqrt{285}}; \quad \cos\beta=\frac{-11}{\sqrt{285}}; \quad \cos\gamma=\frac{10}{\sqrt{285}}; \quad \delta=\frac{-7}{\sqrt{285}}$$

6) Data la retta: $r \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ verificare che appartiene al piano: $8x - 11y + 10z + 7 = 0$.

di questa retta abbiamo già calcolato le tracce (esercizio 3)

$T_1 \equiv \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$; $T_2 \equiv \left(-\frac{3}{2}, 0, +\frac{1}{2}\right)$; $T_3 \equiv (0, -3, -4)$.

basta che due punti soddisfino l'equazione del piano.

Sostituendo T_1: $8\left(-\frac{4}{3}\right) - 11\left(\frac{-1}{3}\right) + 7 = 0 \rightarrow -32 + 11 + 21 = 0$

Sostituendo T_2: $8\left(-\frac{3}{2}\right) + 10\left(\frac{1}{2}\right) + 7 = 0 \rightarrow -24 + 10 + 14 = 0$

è già sufficiente, ma sostituiamo anche T_3

$$(-11)(-3) + (10)(-4) + 7 = 0 \rightarrow +33 - 40 + 7 = 0$$

---

7) Dati tre punti: $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$; $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$; $C \equiv (x_C, y_C, z_C)$ scrivere l'equazione del piano passante per essi.

Sostituendo ordinatamente le coordinate dei punti nell'equazione generica di un piano: $\boxed{\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0}$

otteniamo tre equazioni nelle incognite: $\frac{a}{d}$; $\frac{b}{d}$; $\frac{c}{d}$.

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{d}\right)x_A + \left(\frac{b}{d}\right)y_A + \left(\frac{c}{d}\right)z_A = -1 \\ \left(\frac{a}{d}\right)x_B + \left(\frac{b}{d}\right)y_B + \left(\frac{c}{d}\right)z_B = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{d}\right)x_B + \left(\frac{b}{d}\right)y_B + \left(\frac{c}{d}\right)z_B = -1 \\ \left(\frac{a}{d}\right)x_C + \left(\frac{b}{d}\right)y_C + \left(\frac{c}{d}\right)z_C = -1 \end{cases}$$

applicando Cramer:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = \Delta \; ; \; \begin{vmatrix} -1 & y_A & z_A \\ -1 & y_B & z_B \\ -1 & y_C & z_C \end{vmatrix} = \Delta_{a/d} \; ; \; \begin{vmatrix} x_A & -1 & z_A \\ x_B & -1 & z_B \\ x_C & -1 & z_C \end{vmatrix} = \Delta_{b/d} \; ; \; \begin{vmatrix} x_A & y_A & -1 \\ x_B & y_B & -1 \\ x_C & y_C & -1 \end{vmatrix} = \Delta_{c/d}$$

avremo che:

$$\frac{a}{d} = \frac{\Delta_{a/d}}{\Delta} \; ; \quad \frac{b}{d} = \frac{\Delta_{b/d}}{\Delta} \; ; \quad \frac{c}{d} = \frac{\Delta_{c/d}}{\Delta} \; ;$$

sostituendo nell'equazione generica del piano e moltiplicando per Δ si ha:

$$\boxed{(\Delta_{a/d})x + (\Delta_{b/d})y + (\Delta_{c/d})z + \Delta = 0}$$

in dettaglio:

$$\begin{vmatrix} -1 & y_A & z_A \\ -1 & y_B & z_B \\ -1 & y_C & z_C \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_A & -1 & z_A \\ x_B & -1 & z_B \\ x_C & -1 & z_C \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_A & y_A & -1 \\ x_B & y_B & -1 \\ x_C & y_C & -1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = 0$$

8) Scrivere l'equazione del piano per i punti: $P \equiv (3, 1, -2)$ $M \equiv (-1 -1 -1)$; $N \equiv (-2, 1 +2)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & +2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & +2 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7$$

$$\Delta_{a/d} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & +2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-4) = +8$$

$$\Delta_{y/d} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & +2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & +2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -5 & +2 \end{vmatrix} = -6-5 = -11$$

$$\Delta_{e/d} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1+1)5 = +10$$

L'equazione del piano sarà:

$$\boxed{8x - 11y + 10z + 7 = 0}$$

(equazione identica a quella dell'esercizio 5)

9) Verificare che i punti: $M \equiv (-1, -1, -1)$; ed $N \equiv (-2, +1, +2)$; appartengono alla retta:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

basta sostituire:

$$M) \quad \begin{cases} -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \\ -1 - 2 + 1 + 2 = 0 \end{cases} \quad (M \text{ verificato})$$

$$N) \quad \begin{cases} -2 - 1 + 2 + 1 = 0 \\ -2 + 2 - 2 + 2 = 0 \end{cases} \quad (N \text{ verificato})$$

Possiamo scrivere l'equazione della retta per $\overline{MN}$ nella forma:

$$\frac{(x+1)}{(-2+1)} = \frac{(y+1)}{(1+1)} = \frac{(z+1)}{(2+1)}$$

cioè:

$$\boxed{\frac{(x+1)}{-1} = \frac{(y+1)}{2} = \frac{(z+1)}{3}}$$

poiché: $\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$ i coseni direttori della retta $\overline{MN}$ saranno: $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{14}}$; $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$; $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

I piani paralleli agli assi contenenti la retta $\overline{MN}$ saranno:

parallelo a z: $2x + 2 = -y - 1 \supset 2x + y + 3 = 0$

parallelo a z : $2x + 2 = -y - 1 \quad \supset \quad 2x + y + 3 = 0$

parallelo ad y : $3x + 3 = -z - 1 \quad \supset \quad 3x + z + 4 = 0$

parallelo ad x : $3y + 3 = 2z + 2 \quad \supset \quad 3y - 2z + 1 = 0$

Le tracce della retta $\overline{MN}$ sui piani di riferimento saranno:

per $z = 0$ sul piano xy : $x_{T_1} = -\frac{4}{3}$; $y_{T_1} = -\frac{1}{3}$; $T_1 \equiv \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$

per $y = 0$ " " xz $x_{T_2} = -\frac{3}{2}$; $z_{T_2} = +\frac{1}{2}$; $T_2 \equiv \left(-\frac{3}{2}, 0, +\frac{1}{2}\right)$

per $x = 0$ " " yz $y_{T_3} = -3$; $z_{T_3} = -4$; $T_3 \equiv (0, -3, -4)$

(v. esercizio 3)

10) Date le equazioni di tre piani, trovare il punto comune.

$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \\ 3x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & +1 \\ 1 & +2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & +1 \\ 2 & +2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11 \Rightarrow \boxed{x = \frac{11}{10}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8 \qquad \boxed{y = \frac{8}{10}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7 \qquad \boxed{z = \frac{7}{10}}$$

Se Q è il punto comune ai tre piani: $\boxed{Q \equiv (1{,}1;\ +0{,}8,\ +0{,}7)}$

Osserviamo che se il determinante dei coefficienti è zero, il punto è all'infinito, cioè le tre rette, intersezione dei tre piani, sono fra loro parallele, ma basta che anche due piani siano paralleli per far sì che il punto comune sia al=

l'infinito, ed in questo caso è all'infinito anche la terza retta di intersezione. Se due piani sono paralleli, due righe del determinante dei coefficienti sono proporzionali o addirittura uguali, per cui $\Delta = 0$. Se i tre piani sono paralleli, le tre rette intersezione sono all'infinito, e le tre righe del determinante dei coefficienti hanno elementi proporzionali. ($\Delta = 0$).

Se due righe sono indipendenti fra loro, ci domandiamo come deve esse la terza riga affinché le tre rette di intersezione dei tre piani, siano parallele. E' evidente che: il terzo piano deve essere parallelo alla retta comune agli altri due.

In questo caso, la terza riga del determinante dei coefficienti, non sarà proporzionale ad una delle altre due righe fra loro indipendenti, ma sarà combinazione lineare delle altre due righe, ciò implica: $\Delta = 0$: ma implica anche che ciascuna

implica: $\Delta = 0$; ma implica anche che ciascuna riga può essere riguardata come combinazione lineare delle altre due, cioè: <u>ciascun piano è parallelo alla retta comune agli altri due.</u>

Questo problema ci porta a considerare <u>le condizioni di parallelismo e di perpendicolarità</u>, fra rette, fra piani, fra piani e rette.

Condizioni di parallelismo

1) Rette parallele hanno gli stessi coseni direttori.

cioè se scriviamo l'equazione di due rette in forma canonica:

$$r \equiv \left(\frac{x - x_A}{l_1} = \frac{y - y_A}{m_1} = \frac{z - z_A}{n_1} \right)$$

$$s \equiv \left(\frac{x - x_B}{l_2} = \frac{y - y_B}{m_2} = \frac{z - z_B}{n_2} \right)$$

dovrà essere:

$$\boxed{l_1/l_2 = m_1/m_2 = n_1/n_2 = K = \text{costante},}$$

affinché le due rette siano parallele.

Se invece le due rette sono espresse dalle equazioni di due coppie di piani:

$$r \equiv \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \end{cases}$$

Poiché, se le due rette sono parallele, ogni piano deve essere parallelo alla retta comune di altri due.

deve essere parallelo alla retta comune di altri due, avremo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

ove nessuna riga è proporzionale alle altre affinché le rette siano reali. In ogni caso, se le rette sono parallele, qualsiasi determinante ottenuto da una qualsiasi combinazione di tre righe (1-2-3, 1-2-4, 1-3-4, 2-3-4) deve essere nullo. (basta verificarne due).

2) Piani paralleli hanno gli stessi coseni direttori

cioè:

$$\pi_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Se i due piani sono paralleli dovrà essere:

$$a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2 = K \neq d_1/d_2$$

Se anche $d_1/d_2 = K$ allora i due piani sono coincidenti.

---

3) La condizione di parallelismo fra rette e piani può esprimersi in vari modi:

3A) Se il piano è parallelo ad uno dei due piani determinanti la retta.

$$r \equiv \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

Cioè se: $a_3/a_1 = b_3/b_1 = c_3/c_1 = K$ = costante. oppure se:

$$a_3/a_2 = b_3/b_2 = c_3/c_2 = K = \text{costante}$$

3B) Se il determinante dei coefficienti è zero (comprende il caso precedente) cioè la retta ed il piano sono paralleli se:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

3c) Se la retta è espressa in forma canonica, può sempre ridursi a due distinte equazioni la doppia uguaglianza ricadendo così nei casi precedenti:

$$r \equiv \left(\frac{x - x_A}{l} = \frac{y - y_A}{m} = \frac{z - z_A}{n} \right)$$

si riduce:

$$r \equiv \begin{cases} mx - ly - mx_A + ly_A = 0 \\ nx - lz - nx_A + lz_A = 0 \end{cases}$$

e se il piano ha per equazione:

$$\pi \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

per il parallelismo dovrà essere:

$$\begin{vmatrix} m & -l & 0 \\ n & 0 & -l \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

3d) <u>Un retta è parallela ad un piano se é retta di giacitura di un piano perpendicolare</u>

retta di giacitura di un piano perpendicolare al piano dato

Ciò vuol dire che i coseni direttori della retta debbono uguagliare i coseni del piano perpendicolare. Se il piano perpendicolare al piano dato ha per equazione: $\pi = ax + by + cz + d = 0$ e la retta: $\frac{x - x_A}{l} = \frac{y - y_A}{m} = \frac{z - z_A}{n}$ dovrà essere: $a/l = b/m = c/n = K =$ costante.

Equazione segmentaria del piano.

Siano: P, Q, R tre punti rispettivamente sull'asse x, sull'asse y, sull'asse z; e siano: p, q, r, le distanze dall'origine degli assi di questi tre punti. Cioè, sia: $\overline{OP} = p$; $\overline{OQ} = q$; $\overline{OR} = r$.

Le equazioni delle tracce del piano passante per P, Q, R, sui piani: xy, xz, yz; espresse in forma segmentaria saranno:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad ; \quad \frac{x}{p} + \frac{z}{r} = 1 \quad ; \quad \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

e poiché i punti del piano debbono soddisfare le tre equazioni, rispettivamente quando sono nulli: z, y, x, avremo che l'equazione segmentaria del piano sarà:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \tag{1}$$

ove moltiplicando per: $(p \cdot q \cdot r)$, abbiamo:

$$(qr)x + (pr)y + (pq)z - pqr = 0 \tag{2}$$

che e' l'equazione ordinaria del piano ove:

$$a = (qr) \quad ; \quad b = (pr) \quad ; \quad c = (pq) \; ; \quad d = (pqr).$$

Si noti che p, q, r, sono gli spigoli di un parallelepipedo trirettangolo ove a, b, c, sono le aree delle facce sui piani: yz, xz, xy; mentre "$(-d)$" è il volume del parallelepipedo.

Dividendo la (2) per: $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(qr)^2+(pr)^2+(pq)^2}$,

abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{(qr)^2+(pr)^2+(pq)^2}} = \frac{1}{(pqr)\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}}$$

quindi:

$$\boxed{0 = \frac{x}{p\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}} + \frac{y}{q\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}} + \frac{z}{r\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}}}$$

che poteva ottenersi direttamente dalla (1) dividendo per: $\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}$.

Quindi la distanza del piano dall'origine degli assi: $\boxed{-\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}}}$ e quindi possiamo dire:

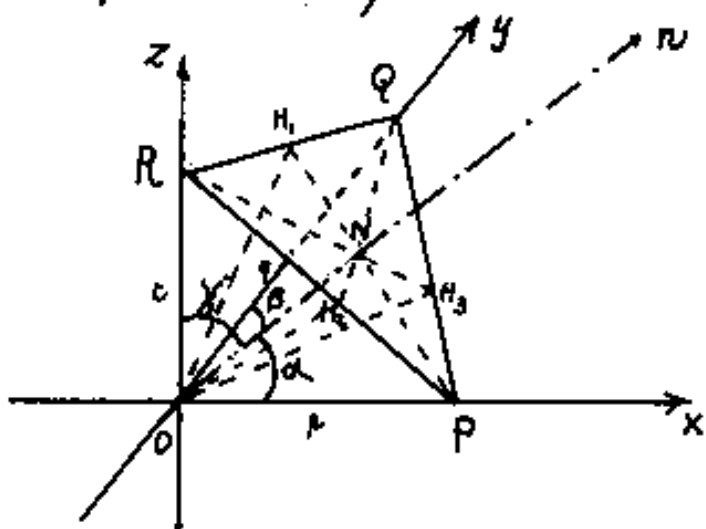
$$\boxed{-\delta/p = \cos\alpha} \; ; \quad \boxed{-\delta/q = \cos\beta} \; ; \quad \boxed{-\delta/r = \cos\gamma}$$

Interessante notare:

"Lo distanza di un piano dall'origine

degli assi è il reciproco della radice quadrata della somma dei quadrati dei reciproci dei segmenti staccati dal piano sugli assi e misurati a partire dall'origine stessa."

Si noti che i segni possibili di p, q, r sono le disposizioni con ripetizione di due elementi (+, -) di classe tre cioè $2^3 = 8$.
e quindi è indeterminato il segno di δ (da assumere assoluto)

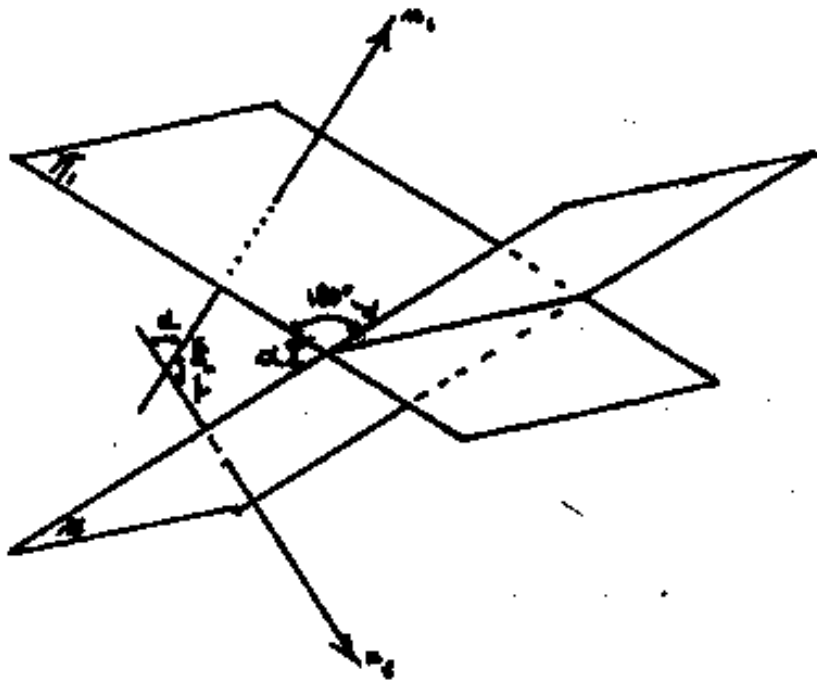
Dimostriamo che il punto N, intersezione di un piano con la normale (retta di giacitura) uscente dall'origine degli assi, è l'ortocentro del triangolo PQR (delimitato dalle tracce del piano sui piani di proiezione).

sia: ($ax+by+cz+d=0$) l'eq. di PQR

Nel fascio di piani passanti per $\overline{ON}$, (tutti perpendicolari a PQR), vi sono anche i piani che passano per gli assi: x, y, z; per esempio il piano passante per l'asse z (quindi perpendicolare ad xy) e per $\overline{ON}$ (quindi perpendicolare a PQR) è necessariamente perpendicolare alla retta comune $\overline{PQ}$; esso avrà per traccia su xy la retta $\overline{OH_3}$ ed incontrerà PQR secondo l'altezza $\overline{RH_3}$ (dovendo tutte le rette per H_3, appartenenti a questo piano, essere perpendicolari a $\overline{PQ}$). Analogo discorso per il piano

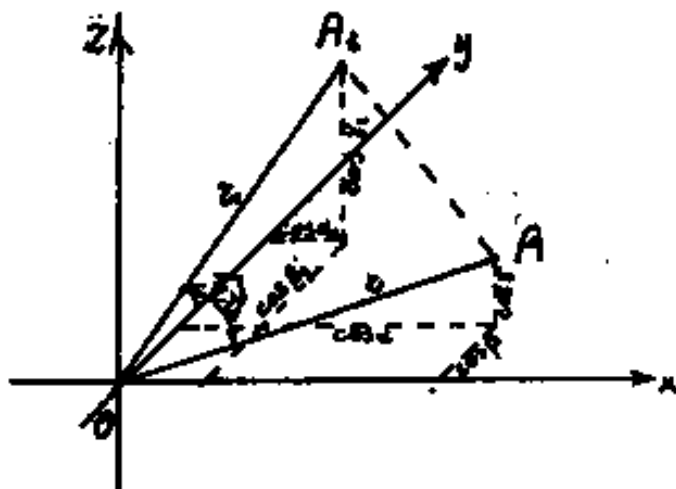
perpendicolare a R H). Analogo discorso per il piano passante per y e per $\overline{ON}$ che traccerà l'altezza $\overline{QH_2}$, e per il piano passante per x e per $\overline{ON}$ che traccerà l'altezza $\overline{PH_1}$. Per cui essendo N comune alle tre altezze PH_1, QH_2, RH_3 è l'ortocentro del triangolo PQR.

$\overline{ON} = \delta$; $x_N = -\delta\cos\alpha$; $y_N = -\delta\cos\beta$; $z_N = -\delta\cos\gamma$; $N \equiv -\delta(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\boxed{N \equiv \frac{-d}{(a^2+b^2+c^2)}(a, b, c)}$$ coordinate di N.

Angolo fra due piani (fra due rette)

Due piani che hanno una retta in comune formano quattro angoli diedri, due a due uguali, se opposti al vertice, o supplementari, se adiacenti. Gli stessi angoli sono formati dalle rette di giacitura.

Consideriamo quindi due rette di giacitura uscenti dall'origine "O" degli assi; stacchiamo su di esse i segmenti unitari $\overline{OA} = 1$; $\overline{OA_1} = 1$; rispettivamente su r ed r_1. Le coordinate di A e di A_1, sono i coseni diret-

tori di r ed r_1, cioè:

$$A \equiv (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \; ; \; A_1 \equiv (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$$

Perciò essendo:

$$(\overline{AA_1})^2 = (x_A - x_{A_1})^2 + (y_A - y_{A_1})^2 + (z_A - z_{A_1})^2$$

avremo anche:

$$(\overline{AA_1})^2 = (\cos\alpha - \cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta - \cos\beta_1)^2 + (\cos\gamma - \cos\gamma_1)^2$$

Sviluppando i quadrati:

$$(\overline{AA_1})^2 = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1) - 2(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)$$

ricordando che la somma dei quadrati dei coseni direttori è $=1$,

$$\boxed{AA_1^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)}$$

Applichiamo ora il teorema di Carnot al triangolo AOA_1, e sia $A\hat{O}A_1 = \widehat{rr_1}$ l'angolo opposto ad $\overline{AA_1}$; tenendo conto che $\overline{OA} = \overline{OA_1} = 1$, abbiamo:

$(\overline{AA_1})^2 = 1^2 + 1^2 + -2\cos(A\hat{O}A_1)$ cioè:

$$\boxed{(\overline{AA_1})^2 = 2 - 2\cos(\widehat{rr_1})}$$

Confrontando le due espressioni di $(\overline{AA_1})^2$ abbiamo:

$$\boxed{\cos(\widehat{rr_1}) = (\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)}$$

Formula molto importante che fornisce l'angolo fra due direzioni, considerate di giacitura, è anche

l' ...

l'angolo diedro fra due piani.

Abbiamo detto direzioni anziché rette perché la formula vale anche per rette sghembe

Poiché: ($\cos 90° = 0$) l'annullarsi dell'espressione è anche condizione di perpendicolarità fra piani e fra rette non sghembe, cioè complanari.

Condizione di perpendicolarità fra piani e fra rette

siano:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

le equazioni dei due piani; sappiamo che i coefficienti sono proporzionali ai coseni direttori.

cioè: $K_1 \cos\alpha_1 = a_1$; $K_1 \cos\beta_1 = b_1$; $K_1 \cos\gamma_1 = c_1$

$K_2 \cos\alpha_2 = a_2$; $K_2 \cos\beta_2 = b_2$; $K_2 \cos\gamma_2 = c_2$

La condizione di perpendicolarità: $(\cos(\widehat{n_1, n_2}) = 0)$

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$$

sostituendo abbiamo:

$$\frac{a_1 a_2}{K_1 K_2} + \frac{b_1 b_2}{K_1 K_2} + \frac{c_1 c_2}{K_1 K_2} = 0$$

e moltiplicando per $K_1 K_2$ si ha:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

condizione di perpendicolarità

condizione di perpendicolarità fra piani

Se l_1, m_1, n_1; ed l_2, m_2, n_2; sono valori proporzionali ai coseni direttori di due rette complanari

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

si ha la condizione di perpendicolarità fra rette complanari (o fra direzioni di rette non complanari)

Il seno dell'angolo diedro di due piani

Sia "θ" l'angolo diedro dei due piani, cioè l'angolo fra le direzioni di giacitura, abbiamo:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{K_1 K_2}\left(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2\right)$$

ove: $K_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$; $K_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$;

sviluppando e semplificando avremo anche:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{1}{K_1 K_2}\sqrt{a_1^2 b_2^2 + a_1^2 c_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 c_2^2 + c_1^2 a_2^2 + c_1^2 b_2^2 - 2\left(a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1 a_2 c_1 c_2 + b_1 b_2 c_1 c_2\right)}$$

dimostriamo che l'espressione sotto radice equivale a:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2$$

infatti:

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 = a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2$$

$$(b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 = b_1^2 c_2^2 + c_1^2 b_2^2 - 2 b_1 b_2 c_1 c_2$$

$$(c_1 a_2 - a_1 c_2)^2 = c_1^2 a_2^2 + a_1^2 c_2^2 - 2 a_1 a_2 c_1 c_2$$

sommando $= a_1^2 b_2^2 + a_1^2 c_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 c_2^2 + c_1^2 b_2^2 + c_1^2 a_2^2 - 2\begin{pmatrix} a_1 a_2 b_1 b_2 + \\ b_1 b_2 c_1 c_2 + \\ a_1 a_2 c_1 c_2 \end{pmatrix}$

perciò possiamo scrivere:

perciò possiamo scrivere:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{K_1 K_2} \sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2}$$

ed anche:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2} \Big/ \sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}$$

I coseni direttori della retta.

Quando la retta è definita dall'intersezione di due piani, i suoi coseni direttori sono comuni alla direzionalità delle rette ad essa parallele; e sono legati alle due direzionalità delle rette di giacitura dei due piani.

Consideriamo quindi la retta parallela passante per l'origine degli assi: (avente gli stessi coseni direttori):

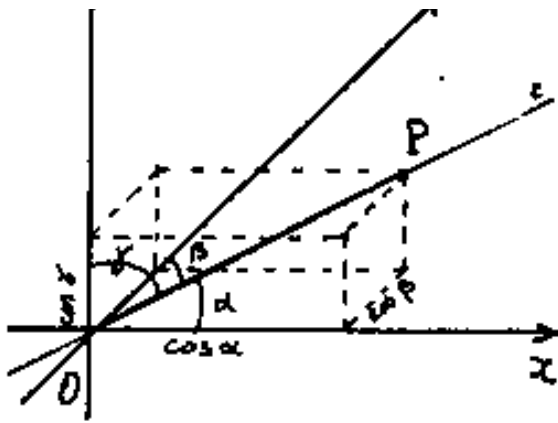
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

Consideriamo, su tale retta, il punto P tale che sia unitaria la sua distanza dall'origine degli assi: $\overline{OP} = 1$; Avremo che i coseni direttori della retta:

$$\cos(\widehat{xr}) = \frac{x_P}{OP}\ ;\ \cos(\widehat{yr}) = \frac{y_P}{OP}\ ;\ \cos(\widehat{zr}) = \frac{z_P}{OP};$$

sono le coordinate di P.

z

y

sono le coordinate di P:

$$X_P = \cos(\widehat{xr})$$

$$y_P = \cos(\widehat{yr})$$

$$z_P = \cos(\widehat{zr})$$

Poiché P è un punto della retta, possiamo sostituire le sue coordinate nell'equazione della retta stessa. Avremo:

$$\begin{cases} a_1 \cos(\widehat{xt}) + b_1 \cos(\widehat{yt}) + c_1 \cos(\widehat{zt}) = 0 \\ a_2 \cos(\widehat{xt}) + b_2 \cos(\widehat{yt}) + c_2 \cos(\widehat{zt}) = 0 \end{cases}$$

Questa coppia di equazioni omogenee nelle tre incognite $\cos(\widehat{xt})$; $\cos(\widehat{yt})$; $\cos(\widehat{zt})$ può essere scritta:

$$a_1 \cos(\widehat{xt}) + b_1 \cos(\widehat{yt}) = -c_1 \cos(\widehat{zt})$$

$$a_2 \cos(\widehat{xt}) + b_2 \cos(\widehat{yt}) = -c_2 \cos(\widehat{zt})$$

risolvendo in funzione di $\cos(\widehat{zt})$ abbiamo:

$$\cos(\widehat{xt}) = \frac{-\cos\widehat{zt}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad ; \quad \cos(\widehat{yt}) = \frac{-\cos(\widehat{zt})\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Poichè <u>scambiando</u> due righe o <u>due colonne</u> un determinante cambia segno, possiamo scrivere:

$$\frac{\cos(\widehat{xt})}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cos(\widehat{yt})}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cos(\widehat{zt})}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = K = (\text{cost})$$

Abbiamo così le uguaglianze:

$$\cos(\widehat{xt}) = K\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \end{vmatrix} \quad \cos(\widehat{yt}) = K\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \end{vmatrix} \quad \cos(\widehat{zt}) = K\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$\cos(\widehat{xr}) = K\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} ; \cos(\widehat{yr}) = K\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} ; \cos(\widehat{zr}) = K\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

ma la somma dei quadrati dei coseni direttori è uno, perciò:

$$K^2\left\{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2\right\} = 1$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

E' ora possibile esprimere i coseni direttori della retta in funzione dei coefficienti dell'equazione:

$$\cos(\widehat{xr}) = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

$$\cos(\widehat{yr}) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

$$\cos(\widehat{zr}) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

coseni direttori della retta:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

indipendenti da d_1 e d_2

Per memorizzare il calcolo dei coseni direttori possiamo considerare il determinante ottenuto dalla matrice dei coefficienti orlata superiormente con i coseni direttori:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(\widehat{xr}) & \cos(\widehat{yr}) & \cos(\widehat{zr}) \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

sviluppando questo determinante per gli

elementi della prima riga e scambiando le colonne al secondo minore per cambiare segno, si ha:

$$\Delta = \cos(\widehat{xr})\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \cos(\widehat{yr})\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \cos(\widehat{zr})\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

sostituendo il valore dei minori:

$$\Delta = \frac{1}{K}\left(\cos^2(\widehat{xr}) + \cos^2(\widehat{yr}) + \cos^2(\widehat{zr})\right)$$ cioè

$$\Delta = \frac{1}{K} = \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

cioè scritto il determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(\widehat{xr}) & \cos(\widehat{yr}) & \cos(\widehat{zr}) \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

"Il valore di un coseno direttore è dato dal suo minore diviso $\Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}$ "

Abbiamo visto che detto θ l'angolo diedro dei due piani determinanti la retta si ha anche:

$$\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} = \operatorname{sen}\theta\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}$$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \text{sen}\,\theta \ldots$$ [illegible]

quindi:

$\cos(\widehat{xt}) = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \Big/ \text{sen}\,\theta \sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}$
$\cos(\widehat{yt}) = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \Big/ \text{sen}\,\theta \sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}$
$\cos(\widehat{zt}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \Big/ \text{sen}\,\theta \sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}$

Alcune considerazioni sul parallelismo e sulla perpendicolarità

Abbiamo già esposto le condizioni di parallelismo e di perpendicolarità, che sinteticamente riepiloghiamo.

Parallelismo: fra rette (stessi coseni direttori)

fra piani (stessi coseni direttori)

fra piani e rette: $\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \right)$

Perpendicolarità: fra rette: $(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0)$

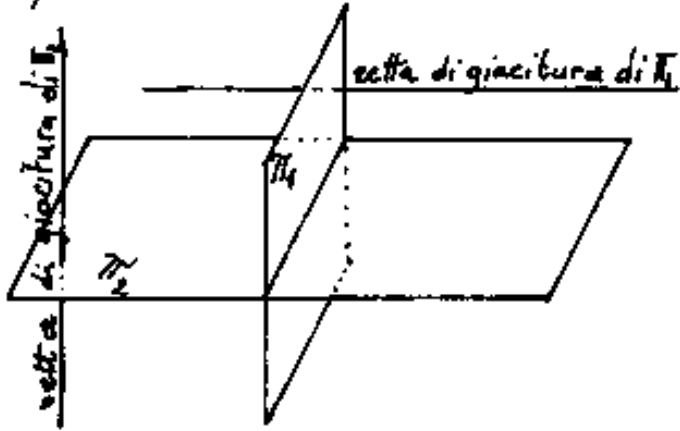
fra piani: $(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0)$

fra rette e piani: (la retta è di giacitura del piano) stessi coseni direttori $\left(\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \right)$

La condizione di perpendicolarità fra piani, afferma: "essere nulla la somma dei prodotti dei coseni omonimi o di valori ad essi proporzionali". In formule:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

E' evidente che un piano perpendicolare ad un altro, è parallelo alle rette di giacitura del piano di cui è perpendicolare. Quindi se l'equazione del piano π_1 ha come coefficienti: a_1, b_1, c_1, (proporzionali ai coseni direttori delle sue rette di giacitura) e π_1 è perpendicolare a π_2 le cui

rette di giacitura abbiano i coseni direttori propor= zionali ad (l_2, m_2, n_2) per la condizione di perpendi= colarità fra π_1 e π_2 avremo:

$$\boxed{a_1 l_2 + b_1 m_2 + c_1 n_2 = 0}$$

questa formula è <u>condizione di parallelismo</u> fra il piano: $\pi_1 \equiv (a_1 x + b_1 y + c z + d_1 = 0)$ e la retta:

$$r \equiv \left(\frac{(x - x_A)}{l_2} = \frac{(y - y_A)}{m_2} = \frac{(z - z_A)}{n_2}\right)$$

Possiamo così esprimere in modo diverso la <u>condizione di parallelismo fra piani e rette</u>:

"<u>Condizione necessaria e sufficiente affinché un piano ed una retta siano paralleli è che sia nulla la somma dei prodotti dei coseni omonimi o di valori ad essi proporzionali</u>"

Al fine di affrontare gli esercizi è bene ricordare che:

1) Data una retta, le rette ad essa parallele sono infinite, ma ve n'è una sola passante per un punto dato.

2) Data una retta, le direzioni ad essa perpendicolari sono

infinite nello spazio tridimensionale, e le rette ad essa perpendicolari sono pure infinite. Se fissiamo un punto sulla retta data, le rette ad essa perpendicolari e passanti per quel punto sono pure infinite e costituiscono il piano normale alla retta passante per quel punto. Ma data una retta ed un punto fuori di essa, vi è

una sola retta che passi per quel punto e sia perpendicolare alla retta data.

3) Data una retta esistono infiniti piani ad essa paralleli, ma vi è un solo piano parallelo che passi per un'altra retta data che sia sghemba rispetto alla prima. Cioè date due rette sghembe esiste un solo piano passante per una di esse che sia parallelo all'altra.

4) Data una retta esistono infiniti piani ad essa perpendicolari (giacitura di piani), ma uno solo passa per un punto assegnato qualsiasi, cioè esterno o sulla retta.

5) Dato un piano esistono infiniti piani paralleli, dei quali uno solo per un punto assegnato

6) Dato un piano esistono infiniti piani perpendicolari (un fascio per ogni retta di giacitura) ma ne esiste uno solo passante per una retta assegnata non ortogonale

passante per una retta assegnata non ortogonale

7) Dato un piano esistono infinite rette parallele a distanza assegnata, ma una sola che giace su un altro piano assegnato che non sia parallelo al primo. Cioé dati due piani non paralleli esiste una sola retta che, a distanza assegnata, giace su un piano ed è parallela all'altro.

8) Dato un piano, fra le infinite rette ad esso perpendicolari (rette di giacitura) una sola passa per un punto assegnato.

Esercizi sul parallelismo

1) Data la retta $r \equiv \left(\frac{(x-x_A)}{l} = \frac{(y-y_A)}{m} = \frac{(z-z_A)}{n} \right)$ scrivere l'equazione della retta parallela passante per $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$.

l'equazione sarà:

$$\frac{(x-x_B)}{l} = \frac{(y-y_B)}{m} = \frac{(z-z_B)}{n}$$

2) Data la retta $r \equiv \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ trovare l'equazione della retta parallela, passante per: $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$

l'equazione sarà:

$$\frac{(x-x_B)}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{(y-y_B)}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{(z-z_B)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

3) Dato il piano: $ax + by + cz + d = 0$, scrivere l'equazione del piano parallelo passante per $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$

L'equazione sarà: $a(x-x_B) + b(y-y_B) + c(z-z_B) = 0$

cioè:

$$ax + by + cz - (ax_B + by_B + cz_B) = 0$$

avremmo potuto dire in quanto i coseni direttori sono gli

avremmo potuto dire in quanto i coseni direttori sono gli stessi proporzionali ad a, b, c, nel piano parallelo varierà solo "d" che indicheremo con d_1 e poiché l'equazione deve essere soddisfatta dalle coordinate di B avremo:

$$a x_B + b y_B + c z_B + d_1 = 0$$

da cui: $d_1 = -(a x_B + b y_B + c z_B)$ cioè:

$$\boxed{ax + by + cz - (a x_B + b y_B + c z_B) = 0}$$

4) Dato il piano: $(ax + by + cz + d = 0)$ scrivere l'equazione del piano parallelo distante h e sia più lontano dal centro assi (a pari distanza i piani sono due uno più vicino ed uno più lontano)

dividiamo l'equazione per $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e si ha

$$(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z - \delta = 0$$

perciò l'equazione richiesta sarà:

$$(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z - (\delta + h) = 0$$

Esempio numerico

sia: $x - 2y - 3z - 7 = 0$ il piano dato e sia $h = 2$

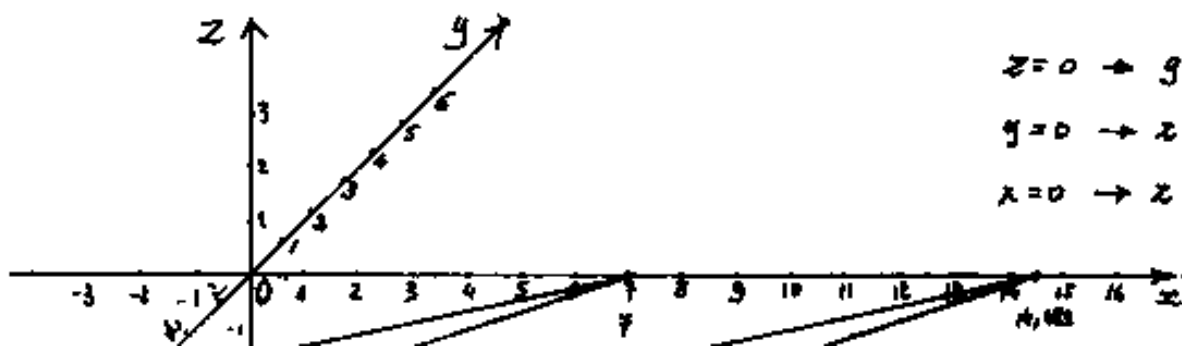
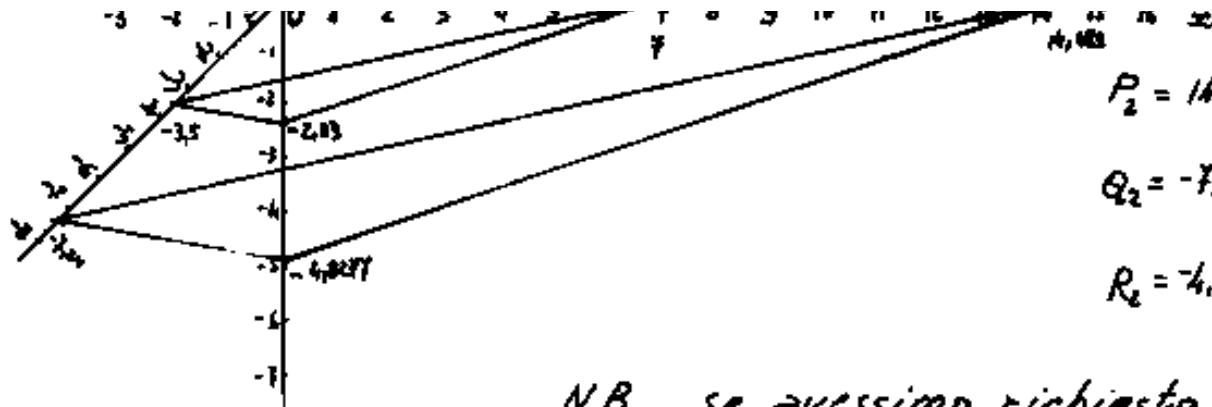
$$\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}}x - \frac{2}{\sqrt{14}}y - \frac{3}{\sqrt{14}}z - \frac{7}{\sqrt{14}} - 2 = 0$$

$$x - 2y - 3z - (7 + 2\sqrt{14}) = 0 \qquad x - 2y - 3z - 14,48331 = 0$$

$z = 0 \rightarrow y = \frac{x}{2} - 7,5$

$y = 0 \rightarrow z = \frac{x}{3} - 4,827$

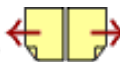
$x = 0 \rightarrow z = -\frac{2}{3}y - 4,827$

$P_2 = 14,48331$; $P_1 = 7$

$Q_2 = -7,24116$; $Q_1 = -3,5$

$R_2 = -4,82777$; $R_1 = -2,33$

N.B. se avessimo richiesto il piano parallelo più vicino al centro assi l'equazione sarebbe stata $x - 2y - 3z + (-7 + 2\sqrt{14}) = 0$ cioè:

$$\boxed{x - 2y - 3z + 0,48331 = 0}$$

---

5) Piano parallelo ad una data retta

La condizione di parallelismo è già stata discussa: se la retta è espressa da: $\left(\frac{x-x_A}{l} = \frac{y-y_A}{m} = \frac{z-z_A}{n}\right)$ oppure dalla coppia di piani: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ ed il piano lo esprimiamo con:

$$\boxed{a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0}$$

avremo:

$$\boxed{a_3l + b_3m + c_3n = 0}$$

oppure:

$$\boxed{a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0}$$

questa seconda forma che esprime lo stesso concetto della prima equivale a:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

che abbiamo trattato all'inizio.

Ma tuttociò non basta per definire un piano, cioè trovare le tre incognite a_3/d_3, b_3/d_3, c_3/d_3.

trovare le tre incognite a_3/d_3 , b_3/d_3 , c_3/d_3 .

Non basta aggiungere che il piano sia passante per $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$, perché per B passa una retta parallela alla retta data ed asse del fascio di piani tutti paralleli alla retta data, meno quello che la contiene.

Il piano non è definito neppure se diciamo: distante "h" dalla retta data perché abbiamo l'insieme dei

piani tangenti al cilindro di raggio "h" di cui la retta data è asse. Quindi per formulare un problema possibile si dirà:

"Date due rette sghembe r e s tracciare il piano passante per s e parallelo ad r."

Per esempio se la retta $s \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$, abbiamo visto: (esercizio 4 pag 45) che l'equazione del fascio di piani è espressa da:

$$(2+\lambda)x + (1-4\lambda)y + (3\lambda)z + 3 = 0$$

ora se la retta r è espressa da: $\frac{x - x_A}{l} = \frac{y - y_A}{m} = \frac{z - z_A}{n}$

per il parallelismo dovrà essere:

$$(2+\lambda)l + (1-4\lambda)m + (3\lambda)n = 0$$

$$\lambda(l - 4m + 3n) = (-2l - m)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{-(2l+m)}{(l-4m+3n)}}$$

e sostituendo λ nell'equazione del fascio di piani

passanti per s, otteniamo l'equazione del piano che è anche parallelo ad r.

Se invece la retta r fosse data nella forma:

$$r \equiv \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

basterà risolvere il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ (2+\lambda) & (1-4\lambda) & (3\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

in funzione di λ e sostituire come sopra detto.

6) retta parallela ad un piano dato

Come abbiamo già avvertito, il problema ammette infinite soluzioni, occorrono altri dati affinché la retta parallela sia determinata. Se imponiamo che passi per un punto $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$ non basta, perché abbiamo tutte le rette del piano parallelo per B.
Se imponiamo che la retta appartenga ad un piano non parallelo; non basta, perché abbiamo tutte le rette parallele alla retta comune ai due piani. In quest'ultima ipotesi basterà imporre una distanza h della retta dal piano cui è parallela.
Il problema potrà formularsi: "Dati due piani $\pi_1 \equiv (a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0)$; $\pi_2 \equiv (a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0)$ scrivere l'equazione della retta appartenente a π_1, parallela a π_2 e distante da esso h. dalla parte più lontana dall'origine degli assi"

Utilizzando esercizi già fatti, troviamo il piano

Utilizzando esercizi già fatti, troviamo il piano parallelo a π_2 e distante h da esso (dalla parte specificata), se π_3 è questo piano, la coppia di equazioni di π_1 e π_3 è l'equazione della retta richiesta.

Prima di affrontare un problema è sempre bene rendersi conto se ammette soluzioni determinate.

7) Retta parallela a due piani e passante per il punto $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$

Siano: $\pi_1 \equiv (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0)$

$\pi_2 \equiv (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0)$

i due piani dati; la retta richiesta avrá i coseni direttori proporzionali a: $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$;

perciò l'equazione richiesta sarà:

$$\frac{(x - x_B)}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{(y - y_B)}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{(z - z_B)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

---

8) Piano perpendicolare ad altri due e passante per il punto $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$.

La retta comune ai due piani è retta di giacitura del piano cercato. La giacitura di tali piani sarà:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z - \delta \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} = 0$$

ove δ = distanza dal centro assi è il valore parametrico

ove δ = distanza dal centro assi e il valore parametrico

se il piano deve passare per B

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x_B + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} y_B + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z_B}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

sostituendo δ si ha:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z - \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x_B + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} y_B + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z_B \right) = 0$$

che poteva scriversi:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} (x - x_B) + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} (y - y_B) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (z - z_B) = 0$$

9) equazione dell'insieme di piani perpendicolari a due piani dati.

Tenuto conto che la retta comune ai due piani: $\pi_1 \equiv (a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0)$ e $\pi_2 \equiv (a_2x+b_2y+c_2z+d_2)$ è retta di giacitura per i piani perpendicolari; detta δ la distanza dei singoli piani dall'origine ed assunta come parametro dell'equazione avremo:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z + \delta \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} = 0$$

equazione che avevamo già scritto nell'esercizio 8).

---

10) equazione della giacitura di piani paralleli perpendicolari ad una retta, (retta di giacitura), espresso in forma canonica.

Esercizio analogo al precedente: sia δ la distanza di ciascun piano dall'origine degli assi, ed assumiamola come parametro dell'equazione avremo:

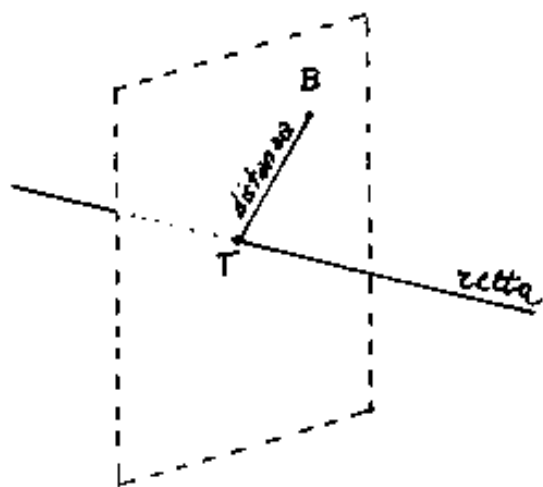
come parametro dell'equazione, avremo:

$$lx + my + nz - \vartheta \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 0$$

che è l'equazione richiesta.

---

11) Distanza di un punto da una retta

La distanza di un punto $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$ da una retta è misurata perpendicolarmente alla retta, cioè giace su un piano ad essa perpendicolare e passante per B.

Esercizio che abbiamo risolto, per cui l'equazione del piano:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}(x - x_B) + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}(y - y_B) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}(z - z_B) = 0$$

Interesso trovare le coordinate del punto T di intersezione fra la retta ed il piano ad essa perpendicolare, che sono determinate dall'intersezione di tre piani perciò:

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \Delta$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x_B + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} y_B + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z_B = \delta \sqrt{\Delta}$$

$$\begin{vmatrix} \delta\sqrt{\Delta} & \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ -d_1 & b_1 & c_1 \\ -d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta x \quad \rightarrow \quad T_x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

analogamente: $T_y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$; $T_z = \dfrac{\Delta z}{\Delta}$

e la distanza.

$$\overline{BT} = \sqrt{(x_B - x_T)^2 + (y_B - y_T)^2 + (z_B - z_T)^2}$$

12) Distanza di un punto da un piano

Tale distanza si misurerà sulla retta passante per il punto: $C \equiv (x_C, y_C, z_C)$ e perpendicolare al piano $\pi \equiv (ax + by + cz + d = 0)$ tale retta sarà:

$$\frac{(x - x_C)}{a} = \frac{(y - y_C)}{b} = \frac{(z - z_C)}{c}$$

equazione che può scriversi:

$$\begin{cases} bx - ay + 0 = (bx_C - ay_C) \\ cx \quad 0 \quad - az = (cx_C - az_C) \end{cases}$$

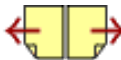
Il punto "T" di intersezione fra la retta ed il piano dato è comune ai tre piani, perciò:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ c & 0 & -a \\ a & b & c \end{vmatrix} \begin{matrix} b & -a \\ c & 0 \\ a & b \end{matrix} = a(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Delta x_T = \begin{vmatrix} (bx_C - ay_C) & -a & 0 \\ (cx_C - az_C) & 0 & -a \\ -d & b & c \end{vmatrix} \rightarrow \frac{\Delta x_T}{\Delta} = X_T = \frac{-da + (b^2 + c^2)x_C - ba\,y_C - ca\,z_C}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ -d & b & c \end{vmatrix}$$

$$\Delta y_T = \begin{vmatrix} b & (bx_c - ay_c) & 0 \\ c & (cx_c - az_c) & -a \\ a & -d & c \end{vmatrix} \rightarrow \frac{\Delta y_T}{\Delta} = \boxed{y_T = \frac{-db + (a^2+c^2)y_c - abx_c - bcz_c}{(a^2+b^2+c^2)}}$$

$$\Delta z_T = \begin{vmatrix} b & -a & (bx_c - ay_c) \\ c & 0 & (cx_c - az_c) \\ a & b & -d \end{vmatrix} \rightarrow \frac{\Delta z_T}{\Delta} = \boxed{z_T = \frac{-cd + (a^2+b^2)z_c - acx_c - bcy_c}{(a^2+b^2+c^2)}}$$

da queste possiamo ricavare:

$$(x_T - x_c) = \frac{-a(ax_c + by_c + cz_c + d)}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$(y_T - y_c) = \frac{-b(ax_c + by_c + cz_c + d)}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$(z_T - z_c) = \frac{-c(ax_c + by_c + cz_c + d)}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

elevando a quadrato, sommando, ed estraendo la radice quadrata otteniamo la distanza $\overline{CT}$ del punto dal piano:

$$\overline{CT} = \frac{ax_c + by_c + cz_c + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Alla stessa formula si può giungere molto più rapidamente, considerando la distanza fra il piano dato ed il piano parallelo per C, che è

piano dato ed il piano parallelo per C, che è data dalla differenza delle distanze dei due piani dall'origine degli assi : $\overline{CT} = \delta_1 - \delta_2$

$$\frac{ax + by + cz + d = 0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad ; \quad \frac{a(x-x_c) + b(y-y_c) + c(z-z_c) = 0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\overline{CT} = (\delta_1 - \delta_2) = \frac{d - (-ax_c - by_c - cz_c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

che è la formula di cui sopra.

13) Piano parallelo ad una retta, e passante per il punto P, ove la distanza di P dalla retta sia minima rispetto a tutti gli altri punti del piano.

Questo esercizio prepara a comprendere il problema del segmento di minima distanza fra due rette sghembe. — Il punto $P \equiv (3, 1, -2)$ e la retta sia

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

L'equazione dei piani normali alla retta è:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} z + d = 0$$

cioè:

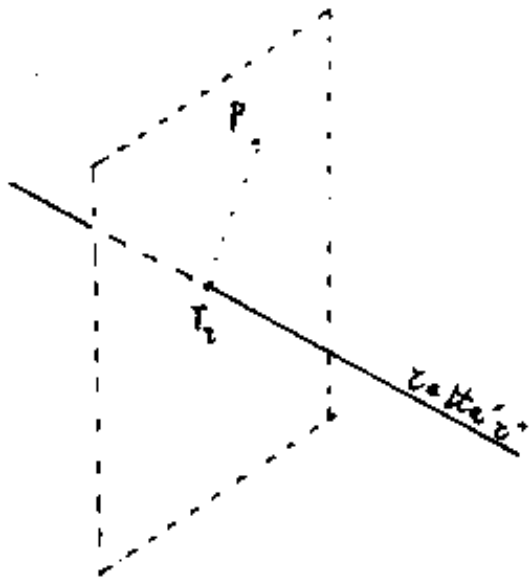
$$\boxed{-x + 2y + 3z + \delta\sqrt{14} = 0}$$

dovendo passare per $P \equiv (3, 1, -2)$ avremo:

$$-3 + 2 - 6 + \delta\sqrt{14} = 0 \qquad \boxed{\delta = \frac{7}{\sqrt{14}}}$$

cambiando i segni:

$$\boxed{x - 2y - 3z - 7 = 0}$$

(Piano per P ⊥ ad r)

dal sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x - 2y - 3z = +7 \end{cases}$$

abbiamo le coordinate del punto di intersezione:

$$x_{T_r} = -\frac{11}{14} \; ; \quad y_{T_r} = \frac{-20}{14} \; ; \quad z_{T_r} = \frac{-23}{14}$$

I coseni direttori della retta per "P" e per T_r essendo questa perpendicolare al piano cercato saranno anche i coseni del piano cercato

L'equazione della retta per due punti:

$$\frac{x - x_P}{x_{T_r} - x_P} = \frac{y - y_P}{y_{T_r} - y_P} = \frac{z - z_P}{z_{T_r} - z_P}$$

cioè:

$$\frac{(x - x_P)}{\left(-\frac{11}{14} - 3\right)} = \frac{(y - y_P)}{\left(-\frac{20}{14} - 1\right)} = \frac{z - z_P}{\left(-\frac{23}{14} + 2\right)}$$

$$\boxed{\frac{(x - 3)}{(-53)} = \frac{(y - 1)}{(-34)} = \frac{(z + 2)}{(+5)}}$$

perciò l'equazione del piano richiesto sarà:

$$53(x - 3) + 34(y - 1) - 5(z + 2) = 0$$

$$\boxed{53x + 34y - 5z - 203 = 0}$$

Verifichiamo la condizione di parallelismo:

$$\boxed{al + bm + cn = 0}$$

$$53\begin{vmatrix}-1 & 1\end{vmatrix} + 34\begin{vmatrix}1 & 1\end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix}1 & -1\end{vmatrix} = 0$$

$$53\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 34\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$53(-1) + 34(2) + -5(3) = 0$$

$$\boxed{-53 + 68 - 15 = 0}$$ verificata.

La distanza $\overline{PT_r} =$

$$\overline{PT_r} = \sqrt{\frac{53^2 + 34^2 + (-5)^2}{14^2}} = \frac{1}{14}\sqrt{3990} = 4{,}51..$$

Il parametro nell'equazione del fascio di piani

La retta comune, asse del fascio, sia rappresentata da: $\pi_1 \equiv (a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0)$ e $\pi_2 \equiv (a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0)$.
È evidente che anche π_1 e π_2 sono due piani del fascio.
L'equazione più generale del fascio è:

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)\, x + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)\, y + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)\, z + (\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) = 0$$

In questa equazione, ove ogni coefficiente è combinazione lineare dei coefficienti omonimi di π_1 e π_2, figurano <u>due</u> parametri ciò è dovuto al fatto di voler includere nella formula entrambi i piani π_1 e π_2. Infatti per $\lambda_2 = 0$, si ha π_1 per qualunque valore di λ_1; viceversa per $\lambda_1 = 0$, si ha π_2 per qualunque valore di λ_2. Però basta prendere un piano come riferimento (per esempio π_2, cioè $\lambda_2 = 1$) ed avremo che l'equazione si riduce ad un solo parametro:

$$(\lambda_1 a_1 + a_2)\, x + (\lambda_1 b_1 + b_2)\, y + (\lambda_1 c_1 + c_2)\, z + (\lambda_1 d_1 + d_2) = 0$$

ove i coefficienti sono ancora combinazioni lineari dei coefficienti omonimi di π_1 e π_2.

Nell'esercizio che noi abbiamo già svolto sul fascio di piani, abbiamo scritto l'equazione di un piano generico e le equazioni di π_1 e π_2 nella forma:

$$\left(\frac{a}{d}\right)x + \left(\frac{b}{d}\right)y + \left(\frac{c}{d}\right)z + 1 = 0$$

in tal modo le incognite per definire un piano, erano ridotte a tre quindi risolvendo: a/d e b/d in funzione di c/d, nelle due equazioni di π_1 e π_2, sostituendo nell'equazione del piano generico e chiamando $\lambda = c/d$ avevamo ottenuto: $(2+\lambda)x + (1-4\lambda)y + (3\lambda)z + 3 = 0$; ove i piani $\pi_1 \equiv (x - y + z + 1 = 0)$ e $\pi_2 \equiv (x + 2y - z + 2) = 0$.

Anche la nostra equazione generale può essere ridotta ad avere λ solo nei coefficienti a, b, c, infatti:

$$\left(\frac{\lambda_1 a_1 + a_2}{\lambda_1 d_1 + d_2}\right)x + \left(\frac{\lambda_1 b_1 + b_2}{\lambda_1 d_1 + d_2}\right)y + \left(\frac{\lambda_1 c_1 + c_2}{\lambda_1 d_1 + d_2}\right)z + 1 = 0$$

Ma è più pratica la forma precedente. Riduciamo ora π_1 e π_2 alla forma:

$$\cos\alpha_1 x + \cos\beta_1 y + \cos\gamma_1 z + \delta_1 = 0 \; ; \; \cos\alpha_2 x + \cos\beta_2 y + \cos\gamma_2 z + \delta_2 = 0$$

sostituendo

$$(\lambda_1 \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)x + (\lambda_1 \cos\beta_1 + \cos\beta_2)y + (\lambda_1 \cos\gamma_1 + \cos\gamma_2)z + (\lambda\delta_1 + \delta_2) = 0$$

ma:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1^2 \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\,\lambda_1 \\
&\lambda_1^2 \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + 2\cos\beta_1\cos\beta_2\,\lambda \\
&\lambda_1^2 \cos^2\gamma_1^2 + \cos^2\gamma_2 + 2\cos\gamma_1\cos\gamma_2\,\lambda_1
\end{aligned}\right\} = \boxed{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda\cos(\theta)}$$

sommando:

ove θ è l'angolo diedro fra π_1 e π_2.

quindi:

$$\left(\frac{\lambda_1\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda\cos\theta}}\right)x + \left(\frac{\lambda_1\cos\beta_1 + \cos\beta_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda\cos\theta}}\right)y + \left(\frac{\lambda_1\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda\cos\theta}}\right)z + \delta = 0$$

Questa formula ci consente di scegliere, fra i piani del fascio quello che dista δ dall'origine degli assi infatti:

$$\delta = \frac{\lambda_1\delta_1 + \delta_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda_1\cos\theta}}$$

$$\delta^2\lambda_1^2 + \delta^2 + 2\lambda_1\delta^2\cos\theta = \lambda_1^2\delta_1^2 + 2\lambda_1\delta_1\delta_2 + \delta_2^2$$

$$(\delta^2-\delta_1^2)\lambda_1^2 - 2(\delta_1\delta_2-\delta^2\cos\theta)\lambda - (\delta_2^2-\delta^2) = 0$$

$$\lambda = \left(\frac{\delta_1\delta_2-\delta^2\cos\theta}{\delta^2-\delta_1^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_1\delta_2-\delta^2\cos\theta}{\delta^2-\delta_1^2}\right)^2 + \frac{\delta_2^2-\delta^2}{\delta^2-\delta_1^2}}$$

$$\lambda = \left(\frac{\delta_1\delta_2-\delta^2\cos\theta}{\delta^2-\delta_1^2}\right) \pm \sqrt{\frac{\delta_1^2\delta_2^2+\delta^4\cos^2\theta-2\delta^2\delta_1\delta_2 + \delta_2^2\delta^2 - \delta_1^2\delta_2^2 - \delta^4+\delta_1^2\delta^2}{(\delta^2-\delta_1^2)^2}}$$

$$\lambda = \frac{(\delta_1\delta_2-\delta^2\cos\theta) \pm \sqrt{\delta^2(\delta_1^2+\delta_2^2)-\delta^4\sin^2\theta-2\delta^2\delta_1\delta_2}}{(\delta^2-\delta_1^2)}$$

$$\lambda = \frac{(\delta_1\delta_2-\delta^2\cos\theta) \pm \delta\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2-2\delta_1\delta_2-\delta^2\sin^2\theta}}{(\delta^2-\delta_1^2)}$$

$$\lambda = \frac{(\delta_1\delta_2-\delta\cos\theta) \pm \delta\sqrt{(\delta_1-\delta_2)^2-\delta^2\sin^2\theta}}{(\delta^2-\delta_1^2)}$$

Noto λ basta sostituirlo nell'equazione del piano.

Noto λ, basta sostituirlo nell'equazione del piano.

λ può essere determinato anche assegnando al piano un particolare coseno direttore alla giacitura:

$\cos\alpha = \left(\dfrac{\lambda\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda_1\cos\theta}}\right)$; $\cos\beta = \dfrac{\lambda\cos\beta_1 + \cos\beta_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda_1\cos\theta}}$; infine:

$\cos\gamma = \left(\dfrac{\lambda_1\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1 + 2\lambda_1\cos\theta}}\right)$. Facciamo un esempio.

15) Piano passante per una retta s e parallelo ad una retta r

sia: $s \equiv \left(\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+30}{28} \right)$

sia: $r \equiv \left(\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \right)$ $\qquad \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \Delta$

Possiamo scrivere l'equazione dei piani paralleli ad r, e fra essi trovare il piano passante per s. Oppure possiamo scrivere l'equazione del fascio di piani per s e poi trovare il piano parallelo ad r. Seguiremo questa seconda sequenza.

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 28y - z - 30 = 0 \end{cases}$$

$T_1 \equiv \left(\frac{43}{7}, \frac{15}{14}, 0\right)$; $T_2 \equiv (1, 0, -30)$

$T_3 \equiv \left(0 - \frac{1}{2} - 44\right)$.

moltiplicando per λ la prima equazione e sommando la seconda si ha:

$$\boxed{(\lambda)x + (28-2\lambda)y - z - (30+\lambda) = 0}$$

equazione del fascio

I coseni direttori della retta r sono:

$$\begin{vmatrix} -1 & +1 \\ +2 & -1 \end{vmatrix} \Big/ \Delta = -1/\Delta \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \Big/ \Delta = +2/\Delta \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Big/ \Delta = 3/\Delta$$

per la condizione di parallelismo:

per la condizione di parallelismo:

$$(\lambda)(-1)+(28-2\lambda)(2)+(-1)(3)=0$$

$$5\lambda=(56-3) \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{53}{5}=10{,}6$$

sostituendo $\lambda=\frac{53}{5}$ e moltiplicando per 5 si ha:

$$(53)x+(34)y-(5)z-203=0$$

equazione del piano richiesto.

verifichiamo che il piano passa per due punti della s (Tracce T_z, T_y)

$53+(-5)(-30)-203=0$; $(+34)(-\frac{1}{2})+(-5)(-44)-203=0$; verificato.

16) Piano passante per la retta r e perpendicolare al piano π_1.

sia $r \equiv \left(\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \right)$

$$\pi_1 \equiv (53x + 34y - 5z - 203 = 0)$$

Notiamo che, per l'esercizio precedente, la retta r ed il piano π_1 sono paralleli.

Moltiplicando per λ la prima equazione della retta r, e sommando la seconda si ha:

$$(\lambda+1)x + (-\lambda+2)y + (\lambda-1)z + (\lambda+2) = 0$$

(l'equazione del fascio di piani)

Per la condizione di perpendicolarità con π_1 (o di parallelismo con le rette di giacitura di π_1) si ha:

$$(53)(\lambda+1) + (34)(-\lambda+2) + (-5)(\lambda-1) = 0$$

La condizione è con tutta la giacitura di piani paralleli a π_1, perciò è indipendente da δ.

Risolvendo: $\lambda(53 - 34 - 5) = (-53 - 68 - 5)$ $\quad \lambda = \frac{-126}{14} = -9$

$$(8)x - (11)y + (10)z + 7 = 0$$ equazione del piano richiesto

$$\boxed{(8)x-(11)y+(10)z+7=0}$$ equazione del piano richiesto

Verifiche: due punti della retta sono: $M\equiv(-1,-1,-1)$
$N\equiv(-2,1,2)$

$M \rightarrow -8+11-10+7=0$

$N \rightarrow -16-11+20+7=0$ verificato

La retta $\begin{cases} 8x-11y+10z+7=0 \\ 53x+34y-5z-203=0 \end{cases}$ è parallela alla retta data "r".

Distanza fra due rette parallele

Siano: $r_1 \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ ed $r_2 \equiv \begin{cases} 8x - 11y + 10z + 7 = 0 \\ 53x + 34y - 5z - 203 = 0 \end{cases}$

le rette date.

Verifichiamo, prima di tutto, il parallelismo.

$$\frac{\begin{vmatrix} -1 & +1 \\ +2 & -1 \end{vmatrix} = -1}{\begin{vmatrix} -11 & 10 \\ 34 & -5 \end{vmatrix} = -285} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = +2}{\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ -5 & 53 \end{vmatrix} = +570} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3}{\begin{vmatrix} 8 & -11 \\ 53 & 34 \end{vmatrix} = 855}$$ verificato.

Un piano ad esse perpendicolare, per esempio passante per l'origine degli assi, sarà:

$$\boxed{x - 2y - 3z = 0}$$

cerchiamo il punto comune di questo piano con la I° retta:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2 = -14$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 15 + 3 = 18 \qquad x_1 = \frac{18}{-14} = -\frac{9}{7}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & +2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2+8=+6 \qquad y_1 = \frac{+6}{-14} = -\frac{3}{7}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & +1 & -1 \\ 1 & +4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2+4=+2 \qquad z_1 = \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7}$$

cerchiamo il punto comune di questo piano con la II^a retta

$$\begin{vmatrix} 8 & -11 & 10 \\ 53 & 34 & -5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & +5 & 34 \\ 53 & +140 & +154 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 770 - 4760 = -3990 .$$

$$\begin{vmatrix} -7 & -11 & 10 \\ +203 & 34 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -11 & 10 \\ 0 & -285 & +285 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = +1425(-7) \quad x_2 = \frac{-9975}{-3990} = \frac{5}{2} = +2,5$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -7 & 10 \\ 53 & 203 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -7 & 34 \\ 53 & 203 & +154 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1078 - 6902 = 5824 \quad y_2 = \frac{-7980}{-3990} = +2$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -11 & -7 \\ 53 & 34 & 203 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 & -7 \\ 53 & 140 & 203 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} +1015 \\ +980 \end{matrix} = 1995 \quad z_2 = \frac{+1995}{-3990} = -\frac{1}{2}$$

La distanza $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$d = \sqrt{\left(2,5 + \frac{9}{7}\right)^2 + \left(2 + \frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right)^2}$$

$$d = \frac{1}{7}\sqrt{(702,25)+(289)+(6,25)}$$

$$d = \frac{1}{7}\sqrt{997,5} = \boxed{d = 4,51189}$$

In questo genere di esercizi è molto facile commettere errori di calcolo, perciò si consiglia di controllare elemento per elemento con modellini o disegni in scala.

18) Piano passante per due rette parallele.

Le rette siano quelle dell'esercizio precedente; avremo: $(\lambda+1)x + (-\lambda+2)y + (\lambda-1)z + (\lambda+2) = 0$ l'equazione del fascio passante per la I retta; poiché:

$P \equiv (2{,}5,\ 2,\ -0{,}5)$ è un punto della seconda retta

$$(\lambda+1)2{,}5 + (-\lambda+2)2 + (\lambda-1)(-0{,}5) + (\lambda+2) = 0$$

$$\lambda(2{,}5-2-0{,}5+1) = (-2{,}5-4-0{,}5-2)$$

$$\boxed{\lambda = -9}$$

$$\boxed{8x - 11x + 10z + 7 = 0}$$ è l'equazione del piano passante per le due rette parallele

19) Piano passante per la I° retta e perpendicolare a: $\pi_2 \equiv (8x - 11x + 10z + 7) = 0$

$$(8+11+10)\lambda = (-8+22+10) \qquad \boxed{\lambda = \frac{24}{29}}$$

$$(24+29)x + (-24+58)y + (24-29)z + 24+58 = 0$$

$$\boxed{53x + 34y - 5z + 82 = 0}$$

l'altro piano parallelo passante per la II° retta

l'altro piano parallelo passante per la II^a retta è

$$\boxed{53x + 34y - 5z - 203 = 0}$$

La distanza fra i due piani sarà:

$$d = \frac{82 + 203}{\sqrt{53^2 + 34^2 + (-5)^2}} = \frac{285}{\sqrt{3990}}$$

$$\boxed{d = 4{,}51189..}$$

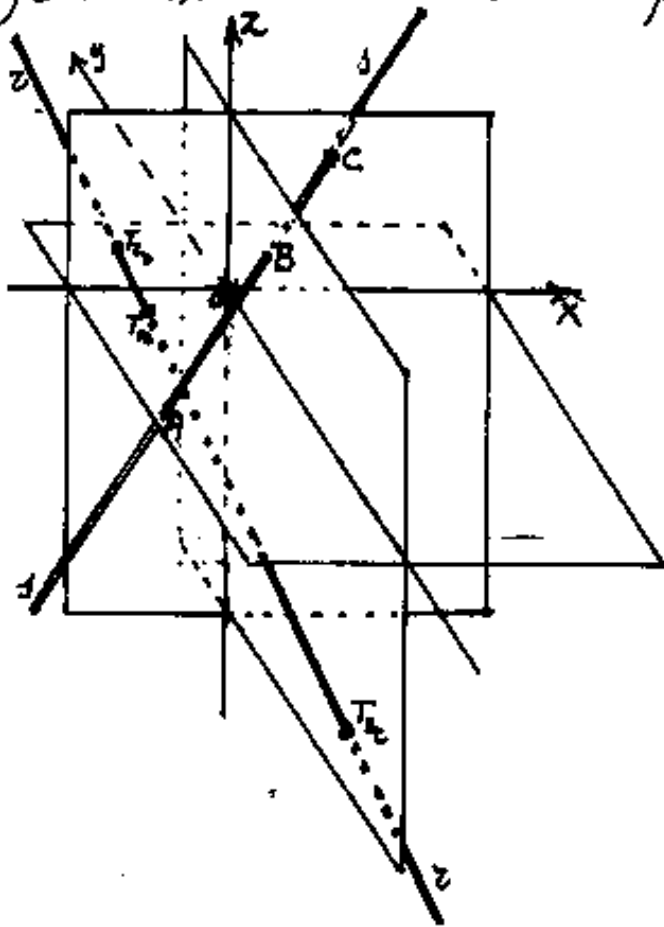
Che verifica la distanza fra le due rette parallele.

Coppia di piani paralleli passanti per due rette sghembe

Siano:

$$r \equiv \left(\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \right)$$

$$s \equiv \left(\frac{x + 1,5}{0 + 1,5} = \frac{y + 2}{-1 + 2} = \frac{z - 0}{1 - 0} \right)$$

Le due rette sghembe. La prima retta è stata oggetto di molti esercizi precedenti, la seconda è una retta passante per i punti

$$A \equiv (-1,5, -2, 0)$$

$$B \equiv (0 \; -1, +1)$$

e quindi:

$$C \equiv (1,5, 0, 2)$$

ove A, B, C sono le tracce della retta s. Le tracce di r le conosciamo:

$$T_{1r} \equiv \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right); \; T_{2r} \equiv \left(-\frac{3}{2}, 0 + \frac{1}{2}\right); \; T_{3r} \equiv (0, -3 -4)$$

La seconda retta può essere rappresentata da

La seconda retta può essere rappresentata da

$$\left\{\begin{array}{l} x + 0 - (1,5)z + (1,5) = 0 \\ x - 1,5y + 0 - 1,5 = 0 \end{array}\right\} \equiv s$$

Il fascio di piani passanti per r è

$$(\lambda+1)x + (-\lambda+2)y + (\lambda-1)z + (\lambda+2) = 0$$

affinché sia parallelo ad s, dovrà essere:

$$(1,5 - 1 + 1)\lambda = (-1,5 - 2 + 1) \quad > \quad \lambda = \frac{-2,5}{1,5} = \frac{-5}{3}.$$

$$(-5+3)x + (5+6)y + (-5-3)z + (-5+6) = 0$$

$$\boxed{2x - 11y + 8z - 1 = 0}$$

equazione del piano per r, parallelo ad s. Analogamente: $(\lambda+1)x - (1{,}5)y - (1{,}5\lambda)z + (1{,}5\lambda - 1{,}5) = 0$ è l'equazione del fascio per s.

Sappiamo che i coseni direttori di r sono proporzionali a (−1 ; 2 ; 3) per cui

$$+\lambda(-1+0-4{,}5) = (1+3+0)$$

$$\lambda = \frac{4}{-5{,}5} = \left(-\frac{8}{11}\right)$$

$$(-8+11)x - (1{,}5)(11)y + (12)z - 12 - (1{,}5)(11) = 0$$

$$\boxed{3x - 16{,}5y + 12z - 28{,}5 = 0}$$

Che i due piani sono paralleli si può vedere da $\left(\frac{2}{3} = \frac{-11}{-16{,}5} = \frac{8}{12}\right)$ possono scriversi:

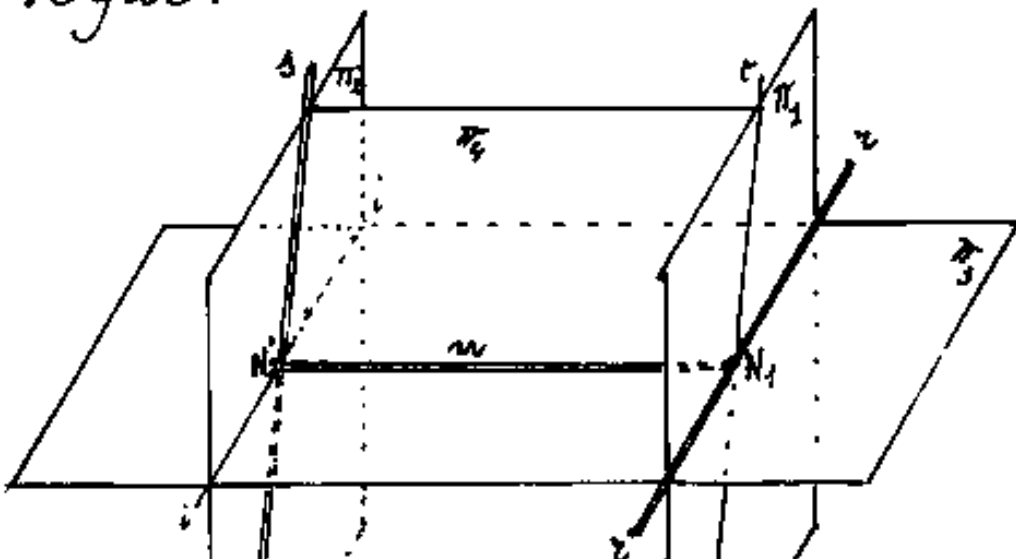
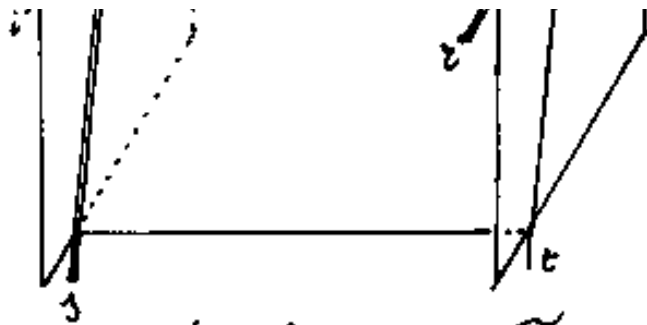
$$6x - 33y + 24z - 3 = 0$$

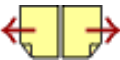
$$6x - 33y + 24z - 57 = 0$$

perciò la distanza fra i due piani (che è anche la minima distanza fra le due rette sghembe) sarà:

$$d = \frac{57 - 3}{\sqrt{6^2 + 33^2 + 24^2}} = \frac{54}{\sqrt{1701}} = 1,30931$$

Segmento di minima distanza fra due rette sghembe.

Mentre per conoscere la minima distanza fra due rette sghembe, è sufficiente conoscere la distanza della coppia di piani paralleli che le contiene; (v. es. prec.); per trovare il *segmento di minima distanza*, occorre trovare la retta perpendicolare ad entrambe le rette sghembe, sulla quale è il segmento di minima distanza. Questo problema (che ritroveremo identico in geometria descrittiva) si risolve come segue:

Siano "r" ed "s" le due rette sghembe, e sia π_1 il piano per "r" parallelo ad "s"; e π_2 il piano per "s" parallelo ad "r".

parallelo ad "r".

Se per "r" tracciamo un piano π_3 perpendicolare a π_2; la coppia di piani π_2 e π_3 avrà in comune una retta "i", che incontra in N_2 la retta "s". Se per "s" tracciamo un piano π_4 perpendicolare a π_1; la coppia π_1 e π_4 avrà in comune la retta "t",

che incontra in N_1 la "r". Il segmento $\overline{N_1 N_2}$ è il segmento di minima distanza fra le rette sghembe "r" ed "s". La retta "n", che lo contiene, è la retta comune ai piani π_3 e π_4, che essendo perpendicolari alla coppia di piani paralleli π_1 e π_2, contenenti le rette sghembe "r" ed "s", anche la loro retta comune "n" è perpendicolare a π_1 e π_2 e poiché "n" è una volta complanare con "r" su π_3 ed una volta complanare con "s" su π_4, si può affermare che la retta "n" è normale ad entrambe le rette sghembe.

Esempio numerico

Siano: $r \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

$$s \equiv \left(\frac{x+1.5}{1.5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \right)$$

Calcoliamo π_1 per r parallelo ad s.

Il fascio per $r :\equiv \left((\lambda+1)x + (-\lambda+2)y + (\lambda-1)z + (\lambda+2) = 0 \right)$

per la condizione di parallelismo con s.

$$(\lambda+1)(1,5) + (-\lambda+2)(1) + (\lambda-1)(1) = 0$$

cioè: $\lambda(1,5 - 1 + 1) = (-1,5 - 2 + 1) \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-2,5}{1,5} = \frac{-5}{3}$

sostituendo:

$$(-5+3)x + (+5+6)y + (-5-3)z + (-5+6) = 0$$

$$\pi_1 \equiv (2x - 11y + 8z - 1 = 0)$$

calcoliamo π_2 per "s" parallelo ad r

s può rappresentarsi:

$$s \equiv \begin{cases} x - 1{,}5z = -1{,}5 \\ x - 1{,}5y = 1{,}5 \end{cases}$$

Il fascio di piani per s sarà:

$$(\lambda + 1)x + (-1{,}5)y + (-1{,}5\lambda)z + (1{,}5\lambda - 1{,}5) = 0$$

per il parallelismo con "r" avremo:

$$(\lambda+1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1{,}5)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1{,}5\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda+1)(-1) + (-1{,}5)(2) + (-1{,}5\lambda)(3) = 0$$

$$\lambda(-1-4{,}5) + (-1-3) = 0 \qquad \lambda = \frac{4}{-5{,}5} \;;\; \left(\lambda = \frac{-8}{11}\right)$$

sostituendo:

$$(-8+11)x + ((-1{,}5)(11))y + ((-1{,}5)(8))z + ((1{,}5)(8) + (-1{,}5)(11)) = 0$$

$$\pi_2 \equiv ((3)x - (16{,}5)y + (12)z - (28{,}5) = 0)$$

Questi due piani sono paralleli infatti: moltiplicando per $2/3$ l'espressione di π_2 si ha:

cando per $z/3$ e espressione di $''_2$ si ha:

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv (2x - 11y + 8z - 1 = 0) \\ \pi_2 \equiv (2x - 11y + 8z - 19 = 0) \end{cases}$$

hanno gli stessi coseni direttori:

$$\sqrt{2^2+11^2+8^2} = \sqrt{189} = 3\sqrt{21} ;$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3\sqrt{21}} ; \quad \cos\beta = \frac{-11}{3\sqrt{21}} ; \quad \cos\gamma = \frac{8}{3\sqrt{21}} ; \quad \delta_1 = \frac{-1}{3\sqrt{21}} ; \quad \delta_2 = \frac{-19}{3\sqrt{21}}$$

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{6}{\sqrt{21}} = 1,30931 .$$

Calcoliamo ora π_3 passante per "r" e perpendicolare a π_2. Dall'equazione del fascio per "r" per la perpendicolarità con π_2 (e quindi anche con π_1) avremo:

$$(\lambda+1)(2)+(-\lambda+2)(-11)+(\lambda-1)8=0$$

$$\lambda(2+11+8)+(2-22-8)=0 \qquad \lambda=\frac{+28}{21}=\frac{4}{3}$$

sostituendo:

$$(4+3)x+(-4+6)y+(4-3)z+(4+6)=0$$

$$\boxed{\pi_3 \equiv [(7x+2y+z+10)=0]}$$

Calcoliamo π_4 passante per "s" e perpendicolare a π_1; dall'equazione del fascio per "s", la condizione di perpendicolarità fra piani:

$$(\lambda+1)2+(-1{,}5)(-11)+(-1{,}5\lambda)8=0$$

$$\lambda(2-12)+(2+16{,}5)=0 \qquad \lambda=\frac{-18{,}5}{-10}=1{,}85=\frac{37}{20}$$

sostituendo:

Sostituendo:

$$(37+20)x-(1{,}5)(20)y-(1{,}5)(37)z+(1{,}5)(37)-(1{,}5)(20)=0$$

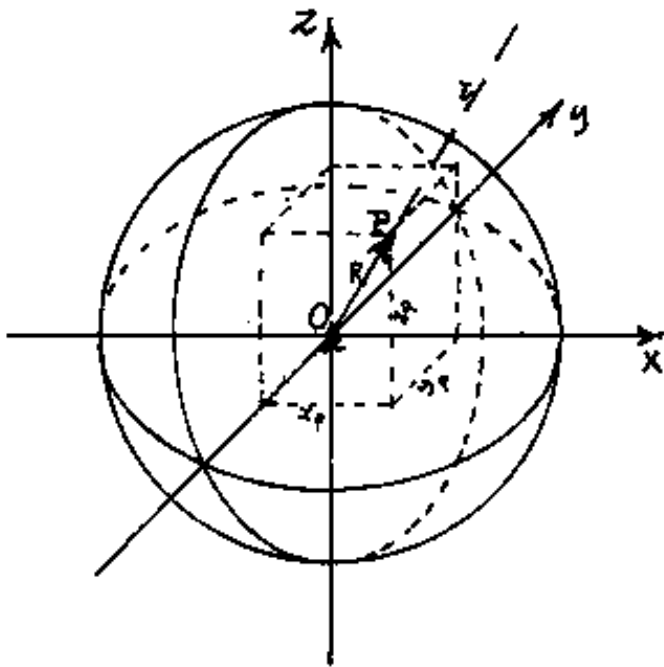
$$(57)x-(30)y-(55{,}5)z+25{,}5=0$$

$$\Pi_4 \equiv (114x-60y-111z+51=0)$$

La coppia di piani Π_3 e Π_4 hanno in comune la retta "n" perpendicolare alle due rette sghembe: "r" e "s". Il loro angolo diedro è l'angolo delle direzioni di "r" e "s"

Le superfici elementari come luoghi geometrici

La Sfera

"Luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto "C" detto centro" (definisce la superficie sferica)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Equazione dei punti della superficie di un sfera al centro assi. (R = raggio)

Ad ogni punto della superficie sferica, corrisponde una direzione $\overrightarrow{OP}$ ove: $|\overrightarrow{OP}| = R$ per cui:

$$R\cos(\widehat{xr}) = x_p \quad ; \quad R\cos(\widehat{yr}) = y_p \quad ; \quad R\cos(\widehat{zr}) = z_p \quad ;$$

Quindi il piano tangente in P alla sfera, avrà per equazione:

$$\frac{x_p}{R}(x - x_p) + \frac{y_p}{R}(y - y_p) + \frac{z_p}{R}(z - z_p) = 0$$

$$x_p(x - x_p) + y_p(y - y_p) + z_p(z - z_p) = 0$$

$$x_p(x - x_p) + y_p(y - y_p) + z_p(z - z_p) = 0$$

$$(x_p)x + (y_p)y + (z_p)z - (x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) = 0$$

ma: $(x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) =$

$$\boxed{(x_p)x + (y_p)y + (z_p)z = R^2}$$

(eq. del piano tangente la sfera al centro assi)

L'equazione della retta "r" (di giacitura del piano) sarà:

$$\boxed{\frac{x - x_p}{x_p} = \frac{y - y_p}{y_p} = \frac{z - z_p}{z_p}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 7 & -10 & 1 \\ 114 & -51 & -111 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 27 & -10 & +81 \\ 216 & -51 & +297 \end{vmatrix} = -9477(-1)$$

$$y_{N_1} = \frac{+9477}{-15309} = -0{,}61905$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -11 & 1 \\ 7 & 2 & -10 \\ 114 & -60 & -51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 27 & -108 & -10 \\ 216 & -621 & -51 \end{vmatrix} = 6561$$

$$z_{N_1} = \frac{6561}{-15309} = -0{,}42857$$

$$\begin{vmatrix} 19 & -11 & 8 \\ -10 & 2 & 1 \\ -51 & -60 & -111 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 99 & -27 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1161 & +162 & -111 \end{vmatrix} = +15309$$

$$x_{N_2} = \frac{+15309}{-15309} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 19 & 8 \\ 7 & -10 & 1 \\ 114 & -51 & -111 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -54 & 99 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ +891 & -1161 & -111 \end{vmatrix} = 25515$$

$$y_{N_2} = \frac{25515}{-15309} = -\frac{5}{3}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -11 & 19 \\ 7 & 2 & -10 \\ \dots & \dots & -51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -9 & 9 \\ 7 & 2 & -10 \\ 114 & -60 & -51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & -17 \\ 114 & 54 & -115 \end{vmatrix} = -5103$$

$$\begin{vmatrix} 114 & -60 & -51 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 114 & -60 & -51 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 114 & 54 & -165 \end{vmatrix}$$

$$z_{N_2} = \frac{-5103}{-15309} = +\frac{1}{3}$$

$$(x_{N_2} - x_{N_1})^2 = \left(\frac{15309 - 18225}{(-15309)}\right)^2 = \frac{(2916)^2}{(15309)^2} = \frac{8503056}{(15309)^2}$$

$$(y_{N_2} - y_{N_1})^2 = \frac{(25515 - 9477)^2}{(-15309)^2} = \frac{(16038)^2}{(15309)^2} = \frac{257217444}{(15309)^2}$$

$$(z_{N_2} - z_{N_1})^2 = \frac{(-5103 - 6561)^2}{(15309)^2} = \frac{(11664)^2}{(15309)^2} = \frac{136048896}{(15309)^2}$$

$$\delta = \overline{N_1N_2} = \frac{\sqrt{401769396}}{15309} = \frac{20044,19}{15309} = 1,30931.$$

Equazione generale della sfera

Sfera di centro: $C \equiv (x_c, y_c, z_c)$

avrà per equazione:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = R^2$$

sviluppando i quadrati:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_c x - 2y_c y - 2z_c z + (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - R^2) = 0 \quad (1)$$

l'espressione può essere moltiplicata per una costante "K" arbitraria; ma tale costante sarà il coefficiente di x^2, di y^2, di z^2, per cui dividendo, l'equazione assumerà la forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

Equazione caratteristica della sfera, ove:

$$\begin{cases} x_c = -a/2 \\ y_c = -b/2 \\ z_c = -c/2 \end{cases}$$

sono le coordinate del centro C

$$R = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - d} \qquad R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$$

$R = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - d}$; $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$

R = raggio della sfera può esprimersi: $R = \frac{1}{2}\sqrt{(\overline{OC})^2 - 4d}$

ove: $\overline{OC}$ è la distanza del centro sfera dal centro assi.

Notiamo che ogni equazione riducibile alla forma (1) rappresenta una sfera, e dai coefficienti dell'equazione è facile ricavare gli elementi della sfera.

Equazione del piano tangente in P alla sfera

Anche quì, (come nell'equazione al centro assi), ad ogni punto P della superficie sferica corrisponde una direzione $\overrightarrow{CP}$ ove: $|\overline{CP}| = R$; per cui:

$$\frac{(x_p - x_c)}{R} = \cos(\widehat{xr}) ; \quad \frac{(y_p - y_c)}{R} = \cos(\widehat{yr}) ; \quad \frac{(z_p - z_c)}{R} = \cos(\widehat{zr})$$

Quindi l'equazione del piano tangente in P una sfera di centro: $C \equiv (x_c, y_c, z_c)$ e raggio $R = \overline{CP}$, sarà:

$$\boxed{(x_p - x_c)(x - x_p) + (y_p - y_c)(y - y_p) + (z_p - z_c)(z - z_p) = 0} \quad (1)$$

possiamo scrivere:

$$(1') \quad \boxed{(x_p - x_c)x + (y_p - y_c)y + (z_p - z_c)z - (x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) + x_c x_p + y_c y_p + z_c z_p = 0}$$

Se consideriamo che: $R^2 = (x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2 + (z_p - z_c)^2$; cioè:

$$R^2 = (x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) + (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2) - 2(x_c x_p + y_c y_p + z_c z_p)$$

$$(x_c x_p + y_p y_c + z_p z_c) - \overline{OP}^2 = \frac{\overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - R^2}{2} - \overline{OP}^2 = \frac{\overline{OC}^2 - \overline{OP}^2 - R^2}{2}$$

avremo:

$$\boxed{(x_p - x_c)x + (y_p - y_c)y + (z_p - z_c)z - \left(\frac{R^2 + \overline{OP}^2 - \overline{OC}^2}{2}\right) = 0}$$

dividendo questa per R si ha:

$$\left(\cos(\widehat{xr})\right)X + \left(\cos(\widehat{yr})\right)Y + \left(\cos(\widehat{zr})\right)Z - \delta = 0$$

ove $\delta = \left(\frac{R^2+\overline{OP}^2-\overline{OC}^2}{2R}\right)$ = distanza del piano dal centro assi. $= \overline{ON}$

le rette di giacitura: $\overline{ON}$ o $\overline{CP}$, (parallele), possono esprimersi in funzione delle coordinate di N o di P : $N \equiv \left(\delta\cos(\widehat{xr}); \delta\cos(\widehat{yr}); \delta\cos(\widehat{zr})\right)$.

Dall'equazione della sfera notiamo che i coeffi=cienti indipendenti sono 4 : a, b, c, d; quindi occorrono quattro condizioni, (equazioni) o correlazioni indipendenti per determinare una sfera.

Le condizioni possono essere:

1) Le tre coordinate del centro ed il raggio.

2) Le tre coordinate del centro e le tre coordinate di un punto sulla superficie sferica.

3) tre equazioni di tre piani tangenti alla sfera ed il raggio

4) Le coordinate di quattro punti sulla superficie sfe=rica.

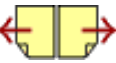
5) Vi sono molte altre condizioni che definiscono la sfera, noi vogliamo esaminare brevemente quelle sopra enunciate; ricordando che occorrono 4 "equazioni" per determinare 4 coefficienti.

Dare un punto generico è una condizione.

Dare il centro vale tre condizioni, perciò dato il centro, basta un'altro punto generico, oppure il raggio.

Dato il raggio è una condizione;

L'equazione di un piano tangente è una condizione

Ricordiamo anche che quattro incognite sono determinate da quattro equazioni lineari, o due eq. di 2° grado, o una eq. di 4° grado.

Sfera passante per quattro punti

Siano: 1, 2, 3, 4 i punti avremo con $i = \text{int}(1 \div 4)$
cioè: (i variabile per interi da 1 a 4)

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + ax_i + by_i + cz_i + d = 0$$

ove: x_i, y_i, z_i; sono noti, ed a, b, c, d, incognite.
quindi il determinante dei coefficienti: e la colonna dei termini noti, da sostituire nei determinanti delle incognite,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \Delta \qquad \begin{vmatrix} -(x_1^2+y_1^2+z_1^2) \\ -(x_2^2+y_2^2+z_2^2) \\ -(x_3^2+y_3^2+z_3^2) \\ -(x_4^2+y_4^2+z_4^2) \end{vmatrix}$$

(colonne: a, b, c, d)

porteranno, una volta risolti alla determinazione dei coefficienti: $a = \frac{\Delta a}{\Delta}$; $b = \frac{\Delta b}{\Delta}$; $c = \frac{\Delta c}{\Delta}$; $d = \frac{\Delta d}{\Delta}$;
ed il problema è risolto.

Esempio numerico:

$1 \equiv (1, 0, 2)$; $2 \equiv (0, 3, -1)$; $3 \equiv (2, 0, 1)$; $4 (1, 2, 0)$

$(x_1^2+y_1^2+z_1^2) = 5$; $(x_2^2+y_2^2+z_2^2) = 10$; $(x_3^2+y_3^2+z_3^2) = 5$; $(x_4^2+y_4^2+z_4^2) = 5$

$|1\ 0\ 2\ 1| \quad |1\ 0\ 0\ 0|$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)(-\ \ +4) = \qquad \Delta = -2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 5(-1)(2) = 0 \quad ; \quad a = \frac{+10}{-2} = +5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = b = \frac{-10}{-2} \; ; \quad b = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(-10+5) = -10 \qquad C = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 0 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 0 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-10+30)2 = +40$$

$$d = \frac{40}{-2} = -20$$

verifiche:

$$x^2+y^2+z^2+5x+5y+5z-20=0$$

$$5 \quad +5 \quad +0 \quad +10 \quad -20 = 0 \quad \text{(bene)}$$

$$10 \quad +0 \quad +15 \quad -5 \quad -20 = 0 \quad \text{(bene)}$$

$$5 \quad +10 \quad 0 \quad +5 \quad -20 = 0 \quad \text{(bene)}$$

$$5 \quad +5 \quad +10 \quad 0 \quad -20 = 0 \quad \text{(bene)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_c &= -a/2 = -5/2 \\ y_c &= -b/2 = -5/2 \\ z_c &= -c/2 = -5/2 \end{aligned}\right\} \text{coordinate del centro}$$

$$R = \sqrt{\frac{75}{4}+20} = \frac{1}{2}\sqrt{155}$$

$$\underline{R = 6{,}22495}$$

Riportiamo un grafico assonometrico

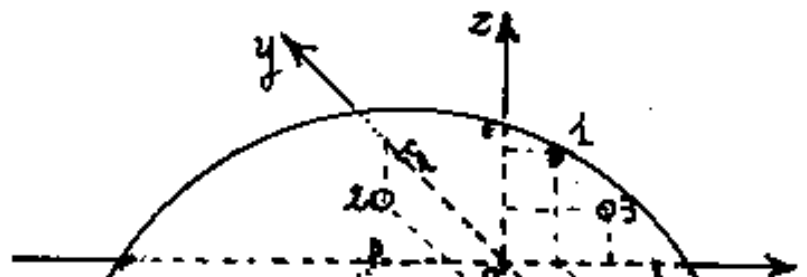
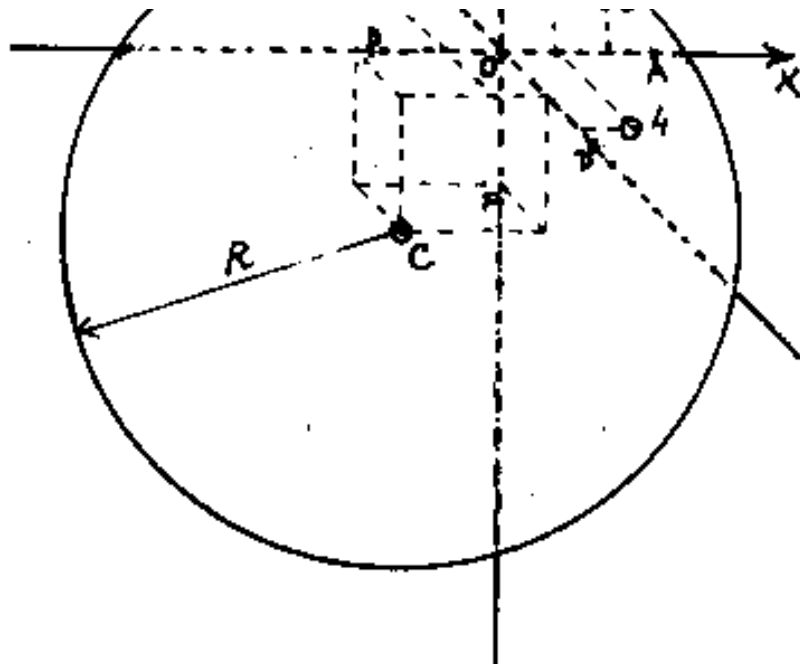
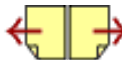



grafico assonometrico della sfera in scala:

1 = 0,5 cm. in x e z.

1 = 0,25 cm in y.

(Si è indicata anche la posizione dei punti 1,2,3,4.)

I punti A,B,C,D,E,F sono le tracce degli assi sulla sfera.

Sfera di raggio R, passante per tre punti

I tre punti determinano un piano, e, come vertici di un triangolo, un cerchio circoscritto di raggio r. Il problema è possibile se $R \geq r$. Per $R < r$ il problema è impossibile.

Ma due sfere dello stesso raggio R possono avere in comune un cerchio di raggio $r < R$. Se: $r = R$ le due sfere sono coincidenti. Perciò in generale

per $r < R$ si hanno due risoluzioni reali

per $r = R$ si ha una risoluzione reale

per $r > R$ non si hanno risoluzioni reali.

Quindi per avere una determinata risoluzione non basta sapere $r < R$, ma occorre sia noto da che parte del piano del triangolo si trova il centro C della sfera.

Esempio numerico

Se i tre punti sono: $(5, 11, 1); (12, 10, 1); (4, 4, 1)$

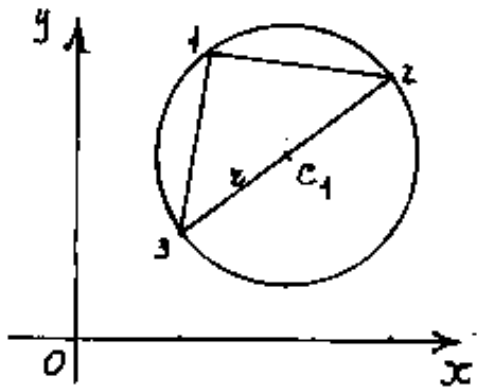
Se i tre punti sono: $(5,11,1)$, $(12,10,1)$, $(4,4,1)$

notiamo, (caso particolare) che tutti hanno: $(z=1)$ cioè la stessa quota, perciò: $(z=1)$ è anche l'equazione del piano che contiene il triangolo (e quindi il cerchio)

lato: $(1-2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(5-12)^2+(11-10)^2} = \sqrt{50}$

lato $(1-3) = \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2} = \sqrt{(5-4)^2+(11-4)^2} = \sqrt{50}$

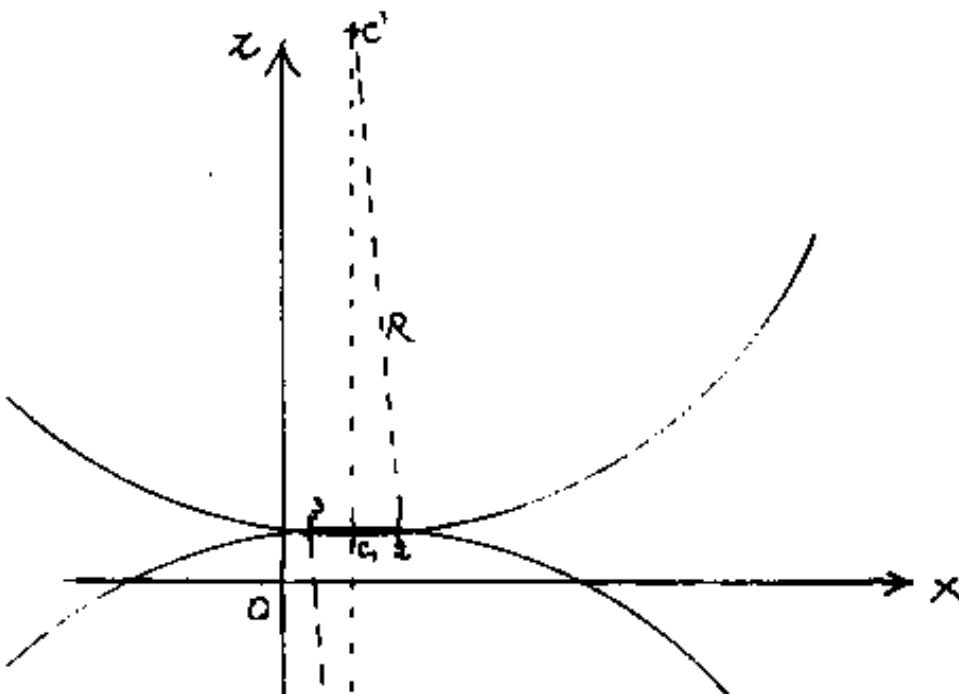
lato $(2-3) = \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} = \sqrt{(12-4)^2+(10-4)^2} = \sqrt{100} = 10 = (\sqrt{50})\sqrt{2}$

I valori dei lati del triangolo ci dicono trattarsi di un triangolo isoscele che ha per base $l\sqrt{2}$ cioè metà quadrato, per cui $r = 10/2 = 5$; $x_{c_1} = \frac{x_2+x_3}{2} = \frac{12+4}{2} = 8$; $y_{c_1} = \frac{y_2+y_3}{2} = \frac{10+4}{2} = 7$.

Agli stessi risultati saremmo pervenuti utilizzando il sistema:

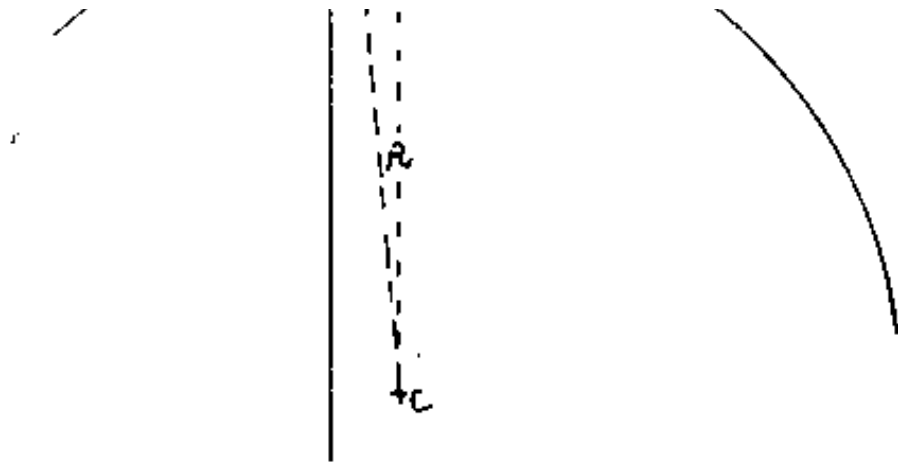
$$\begin{cases} (5-x_c)^2+(11-y_c)^2 = r^2 \\ (12-x_c)^2+(10-y_c)^2 = r^2 \\ (4-x_c)^2+(4-y_c)^2 = r^2 \end{cases}$$

Dovrà essere:

$$(z_{c_1}-z_c)^2 = R^2 - r^2$$

posto: $\underline{R=13}$ $(z_{c_1}-z_c) = \sqrt{13^2-5^2} = 12$

Come si vede dalla figura a fianco, le sfere che rispondono al problema sono due, quindi nella formulazione

R

C

nella formulazione del problema, (se vogliamo che la risoluzione sia unica, occorre spe-specificare per esempio che: $Z_c > 0$. Quindi 3 punti ed il raggio non individuano una sfera, ma due.

Piani tangenti ad una sfera. (per un punto)

Abbiamo già scritto le equazioni del piano tan= gente in un punto P della superficie sferica, sia per sfere al centro, sia per sfere in posizione generica.

Se i piani tangenti debbono passare per un punto esterno alla sfera, gli infiniti piani tangenti invilup= pano un cono, con vertice nel punto e circoscritto alla sfera.

Per un punto interno alla sfera non può esservi alcun piano tangente.

Esempio numerico:

Sia: $x^2+y^2+z^2-6x-8y+2z+1=0$, l'equazione del= la sfera, e sia: $P \equiv (5, 3, (\sqrt{20}-1))$ il punto

Dall'equazione della sfera si trovano le coordina= te del centro: $C \equiv (3, 4, -1)$ ed il raggio: $R = 5$.

$$(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 + (z_c - z_p)^2 \gtreqless R^2 = 25$$

$(5-3)^2 + (3-4)^2 + (\sqrt{20}-1+1)^2 = 4+1+20 = 25 = R^2$ il punto

$(5-3) + (3-4) + (\sqrt{20}-1+1) = 4+1+20 = 25 - 10$ il punto è sulla superficie sferica. quindi l'equazione del piano tangente: $(x_p-x_c)(x-x_p)+(y_p-y_c)(y-y_p)(z_p-z_c)(z-z_c)=0$

$$2x - y + (\sqrt{20})z - (10-3+20-\sqrt{20}) = 0$$

$$\boxed{2x - y + (\sqrt{20})z - (27-\sqrt{20}) = 0}$$

Verifico che il piano passa per P.

$$2 \cdot 5 - 3 + (\sqrt{20})(\sqrt{20}-1) - 27 + \sqrt{20} = 0 \qquad \text{(verificato)}$$

Tracciamo per P la retta normale al piano (retta di giacitura che ha gli stessi coseni direttori del piano)

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{(-1)} = \frac{z-(\sqrt{20}-1)}{\sqrt{20}}$$

verifico che tale retta passa per $C \equiv (3,4,-1)$

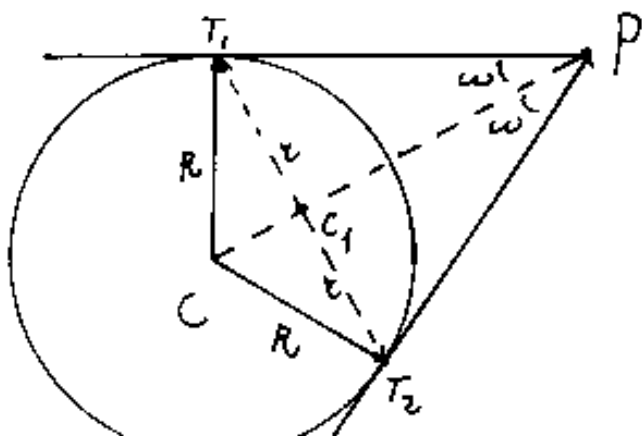
$$\frac{3-5}{2} = \frac{4-3}{(-1)} = \frac{-1-\sqrt{20}+1}{\sqrt{20}} = (-1) \quad \text{(verificato)}$$

Quindi:

1) essendo P sulla sfera

2) il piano passa per P

3) la normale per P al piano passa anche per C

cioè il segmento $\overline{PC} = R$ è minimo, resta dimostrato che il piano: $2x - y + (\sqrt{20})z - (27-\sqrt{20}) = 0$ è tangente alla sfera: $x^2+y^2+z^2-6x-8y+2z+1=0$ nel punto $P \equiv (5, 3, (\sqrt{20}-1))$.

<u>Qualora il punto "P" fosse esterno alla sfera</u>, ogni piano che passa per $\overline{CP}$ presenta una sezione come la figura

T_2

a fianco; dalla quale è possibile ricavare : $\overline{CP} = \sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 + (z_c - z_p)^2}$; $\overline{PT_1}^2 = \overline{PT_2}^2 = \overline{CP}^2 - R^2$;

la equazione della retta $\overline{CP}$ (asse del cono contenente la sfera)

$CP \equiv \text{asse} = \frac{(x - x_p)}{(x_c - x_p)} = \frac{(y - y_p)}{(y_c - y_p)} = \frac{(z - z_p)}{(z_c - z_p)}$; il raggio: $r = \frac{R\,\overline{PT}}{\overline{CP}}$;

la distanza $\overline{CC_1} = \sqrt{R^2 - r^2}$; i coseni direttori della retta

$CP \equiv \text{asse}$: $\cos\alpha = \frac{x_c - x_p}{\overline{CP}}$; $\cos\beta = \frac{y_c - y_p}{\overline{CP}}$; $\cos\gamma = \frac{z_c - z_p}{\overline{CP}}$; e quindi le coordinate di $C_1 \equiv \left(x_{c_1} = x_c + \overline{CC_1}\cos\alpha\right); \left(y_{c_1} = y_c + \overline{CC_1}\cos\beta\right); \left(z_{c_1} = z_c + \overline{CC_1}\cos\gamma\right)$

Quindi è possibile scrivere l'equazione del piano contenente il cerchio di raggio "r" e centro "C_1" ottenuto come sezione con la sfera. La circonferenza, in tale sezione, è il luogo geometrico dei punti "T" di tangenza fra gli infiniti piani per "P" e la sfera. L'equazione del piano di cui sopra; (contenente quindi oltre C_1 anche i punti "T") sarà:

$$(x_c - x_p)(x - x_{c_1}) + (y_c - y_p)(y - y_{c_1}) + (z_c - z_p)(z - z_{c_1}) = 0$$

Abbiamo visto che: $\overline{PT} = \sqrt{\overline{CP}^2 - R^2}$; l'insieme delle rette contenenti $\overline{PT}$, è l'equazione del cono di vertice "P", asse "s", ed angolo di apertura "2w" ove:

$$2w = \arcsin\left(\frac{R}{\overline{CP}}\right)$$

Possiamo anche scrivere:

$$(x - x_{c_1})^2 + (y - y_{c_1})^2 + (z - z_{c_1})^2 = r^2$$

che è l'equazione di una sfera di raggio r e centro C_1 e che unita all'equazione del piano di cui sopra è

l'equazione della circonferenza, (luogo dei punti T).

<u>Esempio numerico:</u>

La sfera sia $x^2+y^2+z^2-6x-8y+2z+1=0$ di cui sappiamo: $C\equiv(3,4,-1)$; $R=5$ e sia: $P\equiv(11,4,5)$.

La distanza $\overline{CP}=\sqrt{(3-11)^2+(4-4)^2+(-1-5)^2} = 10 > R=5$

perciò il <u>punto P è esterno alla sfera</u>.

L'equazione della retta contenente $(\overline{CP})$ sarà:

$$\frac{(x-11)}{-8} = \frac{(y-4)}{0} = \frac{(z-5)}{-6}$$

(parallela al piano (zx) e può scriversi:

$$\begin{cases} z = \frac{3x}{4} - \frac{13}{4} \\ y = 4 \end{cases}$$

Le distanze: $\overline{PT} = \sqrt{\overline{CP}^2 - R^2} = \sqrt{100-25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{5}$

Il raggio: $r = \frac{R \cdot \overline{PT}}{\overline{CP}} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{5}}{10} = \frac{5}{2}\sqrt{5} = \boxed{4,33 = r}$

I coseni direttori di $\overline{CP}$ $\cos(\alpha) = \frac{-8}{10}$; $\cos\beta = \frac{0}{10}$; $\cos\gamma = \frac{-6}{10}$;

La distanza $\overline{CC_1} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - \frac{75}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2,5$

Le coordinate di "C_1": $x_{C_1} = 3 + 2,5 \cdot \frac{4}{5} = 5$; $y_{C_1} = 4$; $z_{C_1} = -1 + 2,5 \frac{6}{10} = \frac{1}{2}$

$$C_1 \equiv (+5, +4, +0,5)$$

Il piano dei T:

$$8(x-5) + 0(y-4) + 6(z-0,5) = 0$$

cioè:

$$z = -\frac{4}{3}x + \frac{43}{6}$$

è un piano parallelo ad y.

... asse y.

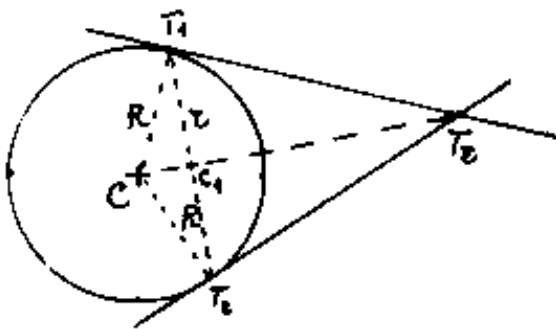
L'angolo $2w$ di apertura del cono sarà $2w = 2\arcsen\left(\frac{5}{10}\right) = 60°$

L'equazione:

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-0,5)^2 = 75/4 \\ z = -\frac{4}{3}x + \frac{43}{6} \end{cases}$$

E' l'equazione della circonferenza dei T ove scelta per es. $y_T = \lambda$ = parametro è possibile per ogni λ calcolare le coordinate di T e quindi il piano tangente in T.

Piani tangenti ad una sfera (passanti per una retta)

- Se la retta data è secante la sfera, il problema è impossibile, perchè tutti i piani passanti per quella retta, taglieranno la sfera e non possono essere tangenti
- Se la retta data è tangente la sfera in un punto P, vi sarà un solo piano passante per la retta e tangente (in P) alla sfera. (Problema già trattato se noto P).
- Se la retta data è esterna alla sfera, si hanno due piani tangenti la sfera. I piani possono essere visualizzati sezionando con un piano perpendicolare alla retta e passante per il centro sfera C, T_1 e T_2 sono i punti di tangenza, T_1T_r e T_2T_r sono le tracce dei due piani, mentre T_r è la traccia della retta sul piano normale.

Fra tutti i piani del fascio passanti per r, ve ne sarà uno passante per C. (Si può calcolare il segmento: $\overline{CT_r}$)

... per C. (Si può calcolare il segmento: C_1T_2)

Si possono calcolare i segmenti $\overline{T_1T_2} = \overline{T_2T_2}$, r, e le coordinate di C_1, di T_1 e T_2.

Ottenute le coordinate di T_1 e T_2 sappiamo trovare le equazioni dei piani tangenti e verificare che appartengono al fascio che ha per asse la retta data.

Insieme dei piani tangenti ad una sfera.

Consideriamo un generico punto: (x,y,z) della superficie sferica di centro $C \equiv (x_c, y_c, z_c)$ avremo:

$$\cos\alpha = \frac{(x-x_c)}{R} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{(y-y_c)}{R} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{(z-z_c)}{R}$$

ove: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; sono i coseni direttori della retta contenente R che va da C al punto di tangenza (x,y,z) ed è normale al piano di tangenza (retta di giacitura)

ma:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha\,(x-x_c) &= (x-x_c)^2/R \\ \cos\beta\,(y-y_c) &= (y-y_c)^2/R \\ \cos\gamma\,(z-z_c) &= (z-z_c)^2/R \end{aligned}\right\}$$

essendo: $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2$

sommando avremo:

$$\boxed{\cos\alpha(x-x_c)+\cos\beta(y-y_c)+\cos\gamma(z-z_c)=R}$$

che è l'equazione generale dei piani tangenti la sfera di centro "C" e raggio "R" nei pa

[illegible] pa-
rametri: "$\cos\alpha$", "$\cos\beta$", "$\cos\gamma$"; che possono essere ri-
dotti a due utilizzando la relazione: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
e l'equazione diventa:

$$\cos\alpha(x-x_c)+\cos\beta(y-y_c)+\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\,(z-z_c)=R$$

ove sostituendovi le coordinate di due punti di una retta, si hanno due equazioni che risolvono "$\cos\alpha$" e "$\cos\beta$" e quindi il problema dei piani tangenti per una retta.

In linea di principio avremmo potuto scrivere l'equazione del fascio di piani passanti per la retta (l'equazione presenta una sola incognita per esempio a/d). Una tale impostazione sarebbe comoda se avessimo elementi sui punti di tangenza in tal caso il punto di tangenza risolverebbe l'unica incognita: a/d.
Ma anche utilizzando il piano normale alla retta e passante per C (e T_2), la risoluzione è più elaborata.
Facciamo un esempio numerico:

Data la sfera: $x^2+y^2+z^2=1$; trovare l'equazione dei piani tangenti per i punti: $P_1 \equiv (1,1,2)$; $P_2 \equiv (2,2,1)$.

La sequenza delle operazioni da effettuare è la seguente:

1) Dall'equazione della sfera ricavare gli elementi: $C \equiv (x_c, y_c, z_c)$; R.

nel nostro caso: $x_c = y_c = z_c = 0$; $R = 1$.

2) fare subito un disegno prospettico, che eviterà errori grossolani.

3) Dall'equazione della retta ricavare le tracce, o almeno le coordinate di due punti P_1 e P_2 e riportare la retta nel disegno prospettico (Nel nostro caso conosciamo già le coordinate di P_1 e P_2)

4) scrivere l'equazione generale dei piani tangenti la sfera:

(nel nostro caso:)

$$\boxed{\cos\alpha(x) + \cos\beta(y) + \cos(\gamma) z = 1}$$

5) Sostituire nell'equazione generale le coordinate di due tracce (o due punti della) retta ottenendo due equazioni:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) + \cos(\beta) + 2\cos(\gamma) = 1 \\ 2\cos\alpha + 2\cos\beta + \cos\gamma = 1 \end{cases}$$

nel nostro caso è possibile trovare subito $\cos(\gamma)$ moltiplicando per 2 la prima equaz. e sottraendo la seconda

$$\boxed{\cos(\gamma) = \frac{1}{3}}$$

$$(\cos\alpha + \cos\beta) = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\cos\alpha^2 = \left(\frac{1}{3} - \cos\beta\right)^2 = \frac{1}{9} + \cos^2\beta - \frac{2}{3}\cos\beta \quad ; \quad \text{sostituendo}$$

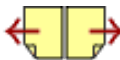
$$2\cos^2\beta - \frac{2}{3}\cos\beta - \frac{7}{9} = 0$$

$$1 \qquad 3 \qquad 1 \qquad 9$$

$$\cos\beta = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{7}{18}} = \frac{1}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{15}$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{6}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3} - \cos\beta = \frac{2 - 1 \mp \sqrt{15}}{6} = \frac{1 \mp \sqrt{15}}{6}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1 \mp \sqrt{15}}{6}}$$

Il verso delle giaciture di piani

Consideriamo una retta passante per due punti:

$$A \equiv (x_A, y_A, z_A) \quad ; \quad B \equiv (x_B, y_B, z_B) \ ;$$

i coseni direttori saranno:

per retta orientata: $\overrightarrow{AB}$; $\cos(\alpha) = \dfrac{x_B - x_A}{\overline{AB}}$; $\cos\beta = \dfrac{(y_B - y_A)}{\overline{AB}}$; $\cos\gamma = \dfrac{(z_B - z_A)}{\overline{AB}}$

per retta orientata $\overline{BA}$; $\cos\alpha = \dfrac{(x_A - x_B)}{\overline{AB}}$; $\cos\beta = \dfrac{(y_A - y_B)}{\overline{AB}}$; $\cos\gamma = \dfrac{(z_A - z_B)}{\overline{AB}}$

Poiché ogni retta è di giacitura ai piani ad essa perpendicolari considereremo positiva la faccia del piano che guarda il verso positivo delle sue rette di giacitura, e negativa la faccia opposta.

Ciò comporta che cambiando i segni all'equazione di un piano, esso non cambia, ma muta il suo orientamento.

Poiché nell'equazione di un piano figura un "δ", che è la sua distanza dall'origine degli assi, che cambia segno se moltiplichiamo per (-1): avremo che

cambia segno se moltiplichiamo per (-1); avremo che se: $\delta = \overrightarrow{ON} < 0$; $\delta = \overrightarrow{NO} > 0$; conforme al verso delle rette di giacitura.

---

sostituendo:

$$-\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\cos\alpha + \sqrt{1-\cos^2\alpha - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\cos\alpha\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$-\frac{7}{2}\cos\alpha + \sqrt{1-\cos^2\alpha - \left(\frac{3}{4}+\frac{25}{4}\cos^2\alpha+\frac{5}{2}\sqrt{3}\cos\alpha\right)} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{29}{4}\cos^2\alpha - \frac{5}{2}\sqrt{3}\cos\alpha} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{7}{2}\cos\alpha\right)$$

elevando a quadrato:

$$\frac{1}{4} - \frac{29}{4}\cos^2\alpha - \frac{5}{2}\sqrt{3}\cos\alpha = \frac{27}{4} + \frac{49}{4}\cos^2\alpha + \frac{21}{2}\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$\frac{78}{4}\cos^2\alpha + \frac{26}{2}\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{26}{4} = 0$$

semplificando:

$$\boxed{\cos^2\alpha + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cos\alpha + \frac{1}{3} = 0}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$$ (un solo valore)

$$\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{2\sqrt{3}} = \boxed{\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \qquad \boxed{\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$ sostituendo:

$\cos\gamma = \sqrt{1 - (\sqrt{3}) - (\sqrt{3})}$ $\quad \cos\delta = \sqrt{3}$ $\quad$ sostituendo:

$$\frac{(x-1)}{-\sqrt{3}} + \frac{(y+3)}{\sqrt{3}} + \frac{(z+1)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$-x + y + z = 3 - 3 - 2$$

e l'equazione del piano taugente:

$$\boxed{-x + y + z + 2 = 0}$$

Moltiplicando per (−1) otterremmo il precedente risultato (con questi segni è positiva la faccia opposta cioè giacitura $\overrightarrow{CA}$.)

Caso generale

L'esempio ora trattato è un caso particolare in quanto la retta è tangente alla sfera e quindi si ha un solo piano tangente. Anche l'esempio precedente è un caso particolare perché la sfera è al centro assi.

Per trattare il caso generale spostiamo la sfera del secondo esempio in modo che non sia più tangente alla retta.

Esempio numerico:

Sia: $(x-1)^2+(y+5)^2+(z+1)^2=3$ l'equazione della sfera nella nuova posizione: $C\equiv(1-5-1)$; $R=\sqrt{3}$

La retta passa per $A\equiv(0,-2,0)$; $B(\frac{2}{3},0,\frac{2}{3})$; $D\equiv(4,1,1)$ è immutata: A è la traccia sull'asse y; B è la traccia sul piano zx, D è il punto dell'equazione canonica della retta.

L'equazione di tutti i piani tangenti alla sfera:

$$\cos\alpha(x-x_c)+\cos\beta(y-y_c)+\cos\gamma(z-z_c)=R$$

sostituendo le coordinate di C ed R:

sostituendo le coordinate di C, ed R:

$$\cos\alpha(x-1)+\cos\beta(y+5)+\cos\gamma(z+1)=\sqrt{3}$$

deve passare per A: $(-1)\cos\alpha+(3)\cos\beta+(1)\cos\gamma=\sqrt{3}$

deve passare per B: $-\frac{5}{3}\cos\alpha+5\cos\beta+5\cos\gamma=\sqrt{3}$

$$\begin{cases}-\cos\alpha+3\cos\beta+\cos\gamma=\sqrt{3}\\ \cos\alpha+3\cos\beta+\cos\gamma=\frac{3}{5}\sqrt{3}\end{cases}\longrightarrow 2\cos\alpha=-\frac{2}{5}\sqrt{3}\qquad \cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{5}$$

$$+6\cos\beta+2\cos\gamma=\frac{8}{5}\sqrt{3}\longrightarrow \cos\gamma=\frac{4}{5}\sqrt{3}-3\cos\beta$$

considieriamo ora:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\frac{3}{25} + \cos^2\beta + \frac{48}{25} + 9\cos^2\beta - \frac{24}{5}\sqrt{3}\cos\beta = 1$$

$$(10)\cos^2\beta - \frac{24}{5}\sqrt{3}\cos\beta + \frac{26}{25} = 0$$

$$\boxed{\cos^2\beta - 2\left(\frac{6}{25}\sqrt{3}\right)\cos\beta + \frac{13}{125} = 0}$$

$$\cos\beta = \frac{6\sqrt{3}}{25} \pm \sqrt{\frac{108}{625} - \frac{65}{625}} = \frac{6\sqrt{3} \pm \sqrt{43}}{25} \begin{cases} = \frac{16,95}{25} = 0,67799 \\ = \frac{3,83}{25} = 0,15399 \end{cases}$$

$$\cos\gamma = \frac{20}{25}\sqrt{3} - \frac{18\sqrt{3} \pm 3\sqrt{43}}{25} = \frac{2\sqrt{3} \mp 3\sqrt{43}}{25} = \begin{cases} \frac{-16,21}{25} = -0,64833 \\ \frac{23,14}{25} = +0,925467 \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{5} = -0,346410$$

Scriviamo l'equazione dei piani tangenti:

$$-\frac{\sqrt{3}}{5}(x-1) + \frac{6\sqrt{3}+\sqrt{43}}{25}(y+5) + \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{43}}{25}(z+1) = \sqrt{3}$$

$$-5(x-1) + \left(6+\sqrt{43/3}\right)(y+5) + \left(2-\sqrt{129}\right)(z+1) = 25$$

$$\boxed{-5x + \left(6+\sqrt{\frac{43}{3}}\right)y + \left(2-\sqrt{129}\right)z + \left(12+\frac{2}{3}\sqrt{129}\right) = 0}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{5}(x-1)+\left(\frac{6\sqrt{3}-\sqrt{43}}{25}\right)(y+5)+\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{43}}{25}=\sqrt{3}$$

$$\boxed{-5x+\left(6-\sqrt{\frac{43}{3}}\right)y+\left(2+\sqrt{129}\right)z+\left(12-\frac{2}{3}\sqrt{129}\right)=0}$$

verifichiamo che questi piani passano per $A\equiv(0,-2,0)$; $\left(\sqrt{\frac{43}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{129}\right)$

verifichiamo che passano per $D\equiv(4,1,1)$

$-20+6+\frac{1}{3}\sqrt{129}+2-\frac{2}{3}\sqrt{129}+12+\frac{2}{3}\sqrt{129}\simeq 0$; $-20+6-\frac{1}{3}\sqrt{129}+2+\frac{2}{3}\sqrt{129}+12-\frac{2}{3}\sqrt{129}=0$;

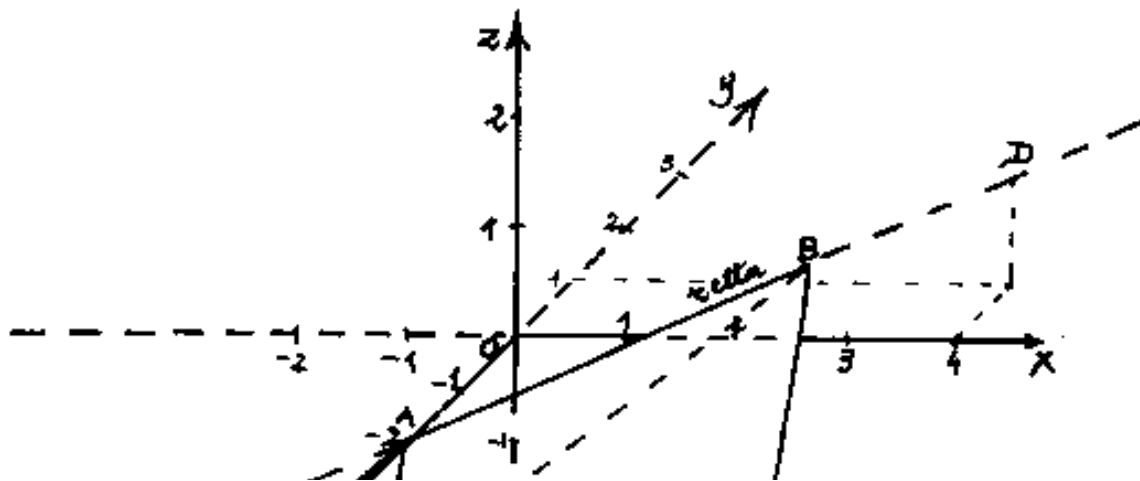
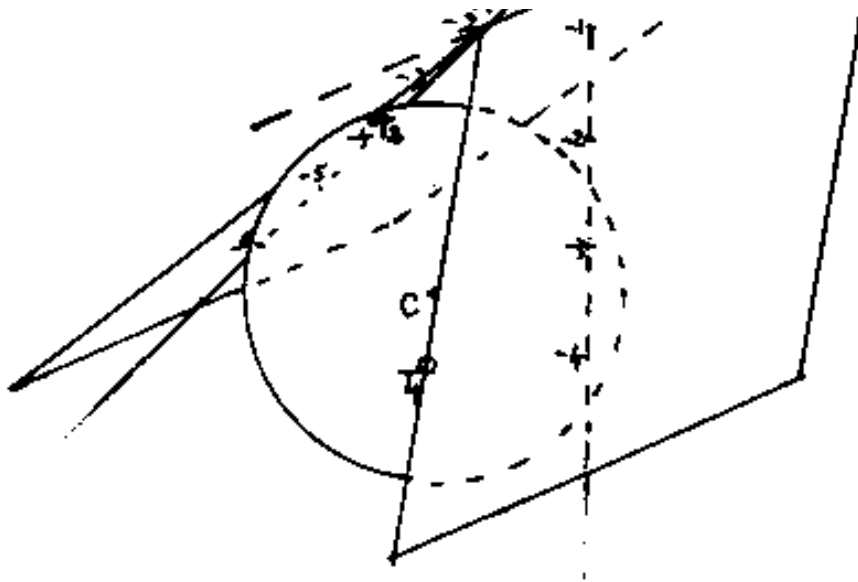
Calcoliamo le coordinate dei punti di tangenza.

$R\cos\alpha = (x_T - x_c)$; $R\cos\beta = (y_T - y_c)$; $R\cos\gamma = (z_T - z_e)$

$x_{T_1} = x_{T_2} = \left(-\frac{1}{5}\sqrt{3}\right)\sqrt{3} + 1 = 2/5$ $\boxed{x_{T_1} = x_{T_2} = +0,4}$

$$\left.\begin{matrix} y_{T_1} \\ y_{T_2} \end{matrix}\right\rangle = \left(\frac{6}{25}\sqrt{3} \pm \frac{\sqrt{43}}{25}\right)\sqrt{3} - 5 = \begin{cases} \frac{-107+\sqrt{129}}{25} = \boxed{y_{T_1} = -3,82568733} \\ \frac{-107-\sqrt{129}}{25} = \boxed{y_{T_2} = -4,73431267} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} z_{T_1} \\ z_{T_2} \end{matrix}\right\rangle = \left(\frac{2}{25}\sqrt{3} \mp \frac{3\sqrt{43}}{25}\right)\sqrt{3} - 1 = \begin{cases} \frac{-19-3\sqrt{129}}{25} = \boxed{z_{T_1} = -2,1229380} \\ \frac{-19+3\sqrt{129}}{25} = \boxed{z_{T_2} = +0,6029380} \end{cases}$$

Disegno prospettico

N.B: abbiamo tagliato i piani tangenti secondo le rette: AT_1 ed AT_2 e per B le parallele, e le paralle alla retta comune.

Intersezione di una retta con una sfera.

Sia: $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2$ l'equazione della sfera, e sia: $\frac{x-x_A}{l}=\frac{y-y_A}{m}=\frac{z-z_A}{n}$; l'equazione della retta. Ricavando da quest'ultima una incognita; per es. $z=\frac{n}{l}(x-x_A)+z_A$; $z=\frac{n}{m}(y-y_A)+z_A$; che possiamo sostituire nell'equazione della sfera:

$$\begin{cases} (x-x_c)^2+(y-y_c)^2+\left(\frac{n}{l}(x-x_A)+z_A-z_c\right)^2=R^2 \\ (x-x_c)^2+(y-y_c)^2+\left(\frac{n}{m}(y-y_A)+z_A-z_c\right)^2=R^2 \end{cases}$$

si ha così un sistema di due equazioni in due incognite x, y; dal quale possono aversi due radici reali, se la retta interseca la sfera; una sola radice reale, se è tangente; nessuna radice reale, se è esterna alla sfera.

Spesso, ad evitare di cadere in equazioni di 4°, conviene sostituire o risolvere binomi del tipo: $(x-x_c)$; $(y-y_c)$; $(z-z_c)$.

Esempio numerico

L'equazione della sfera sia:

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$$

e l'equazione della retta sia:

$$\frac{(x-4)}{3}=\frac{(y+1)}{2}=\frac{z-1}{1}$$

avremo:

Sostituiamo nella prima equazione:

$(z-1) = \frac{(x-4)}{3}$; $(y+1) = \frac{2}{3}(x-4)$; ed avremo:

$$(x-1)^2 + \left(\frac{2}{3}(x-4)\right)^2 + \left(\frac{x-4}{3}\right)^2 = 4$$

$$9(x^2-2x+1) + 4(x^2-8x+16) + (x^2-8x+16) = 36$$

$$14x^2 - 58x + 53 = 0$$

$$x = \frac{58 \pm \sqrt{3364-2968}}{2\cdot 14} = \frac{58 \pm \sqrt{396}}{2\cdot 14} = \boxed{\frac{29 \pm 3\sqrt{11}}{14} = x}$$

$$y = \frac{2}{3}(x-4) - 1 = \frac{2x-11}{3} = \frac{29 \pm 3\sqrt{11}}{7\cdot 3} - \frac{11}{3} = \boxed{y = \frac{-16 \pm \sqrt{11}}{7}}$$

$$z = \frac{x-4}{3} + 1 = \frac{x-1}{3} = \frac{29 \pm 3\sqrt{11} - 14}{14\cdot 3} = \boxed{z = \frac{+5 \pm \sqrt{11}}{14}}$$

$$x = \begin{cases} \boxed{x_1 = 2{,}78213} \\ \boxed{x_2 = 1{,}36072} \end{cases} ; \quad y = \begin{cases} \boxed{y_1 = -1{,}8119107} \\ \boxed{y_2 = -2{,}7595178} \end{cases} ; \quad z = \begin{cases} \boxed{z_1 = 0{,}5940446} \\ \boxed{z_2 = 0{,}1202411} \end{cases}$$

<u>verifiche:</u>

$$\left(\frac{15+3\sqrt{11}}{14}\right)^2 + \left(\frac{-18+2\sqrt{11}}{14}\right)^2 + \left(\frac{-9+\sqrt{11}}{14}\right)^2 = 4$$

$$225 + 90\sqrt{11} + 99 + 324 - 72\sqrt{11} + 44 + 81 - 18\sqrt{11} + 11 = 4\cdot 196 = 784$$

$$225+90\sqrt{11}+99+324-72\sqrt{11}+44+81-18\sqrt{11}+11=4\cdot 196=784$$ √ bene.

$$225-90\sqrt{11}+99+324+72\sqrt{11}+44+81+18\sqrt{11}+11=784$$. √ bene.

$T_1\equiv(x_1,y_1,z_1)$ e $T_2\equiv(x_2,y_2,z_2)$ appartengono alla superficie sferica.

$$\left(\frac{\frac{29\pm3\sqrt{11}}{14}-4}{3}\right)=\left(\frac{\frac{-16\pm\sqrt{11}}{7}+1}{2}\right)=\left(\frac{5\pm\sqrt{11}}{14}-1\right)=\boxed{\frac{-9\pm\sqrt{11}}{14}}$$

I punti T_1 e T_2 appartengono alla retta.

Intersezione di un piano con una sfera.

La sfera sia: $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=R^2$; ed il piano sia: $ax+by+cz+d=0$; Sappiamo che la distanza di "C" dal piano è data da:

$$\overline{CT}=\frac{ax_c+by_c+cz_c+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \gtreqless R$$

a seconda che:

$\overline{CT}>R$ il piano è esterno alla sfera

$\overline{CT}=R$ " " è tangente in T alla sfera

$\overline{CT}<R$ " " taglia la sfera.

Poiché $\overline{CT}$ è sulla retta normale al piano, "T" sarà anche il centro "C_1" della circonferenza intersezione fra piano e sfera, il cui raggio "r" è dato da:

$$r=\sqrt{R^2-\overline{CT}^2}$$

Le due equazioni rappresentano una (linea) circonferenza nello spazio.

<u>esempio numerico</u>:

esempio numerico :

Sfera : $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$; piano : $x-3z-1=0$

$(a=1\,;\,b=0\,;\,c=-3\,;\,d=-1)$; $\overline{CT}=\dfrac{(1)(1)+0(-1)+(-3)(1)-1}{\sqrt{1+0+9}}=\dfrac{-3}{\sqrt{10}}=|0{,}95|$

$$r=\sqrt{4-\frac{9}{10}}=\sqrt{\frac{31}{10}}=1{,}76$$

possiamo calcolare le coordinate di "T", vedi "distanza di un punto da un piano" avremo :

$$x_T = \frac{-da + (b^2+c^2)x_c - ba\,y_c - ca\,z_c}{a^2+b^2+c^2} = \frac{-(-1)(1)+(0+9)(1)-0-(-3)(1)(1)}{10}$$

$$x_T = \frac{13}{10} = 1{,}3$$

$$y_T = \frac{-db + (a^2+c^2)y_c - ab\,x_c - bc\,z_c}{a^2+b^2+c^2} = \frac{-(-1)(0)+(1+9)(-1)-0-0}{10}$$

$$y_T = \frac{-10}{10} = -1$$

$$z_T = \frac{-cd + (a^2+b^2)z_c - ac\,x_c - bc\,y_c}{a^2+b^2+c^2} = \frac{-(-3)(-1)+(1+0)(1)-(1)(-3)(1)-0}{10}$$

$$z_T = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Verifichiamo che: $T \equiv (1{,}3,\ -1,\ 0{,}1)$ appartiene al piano

$$\frac{13}{10} - \frac{3}{10} - \frac{10}{10} = 0$$

$$\left(\frac{10}{10} - \frac{13}{10}\right)^2 + \left(-\frac{10}{10} + \frac{10}{10}\right)^2 + \left(\frac{10}{10} - \frac{1}{10}\right)^2 = \overline{CT}^2$$

$$\sqrt{\frac{9}{100} + \frac{81}{100}} = \sqrt{\frac{90}{100}} \qquad CT = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{(torna)}$$

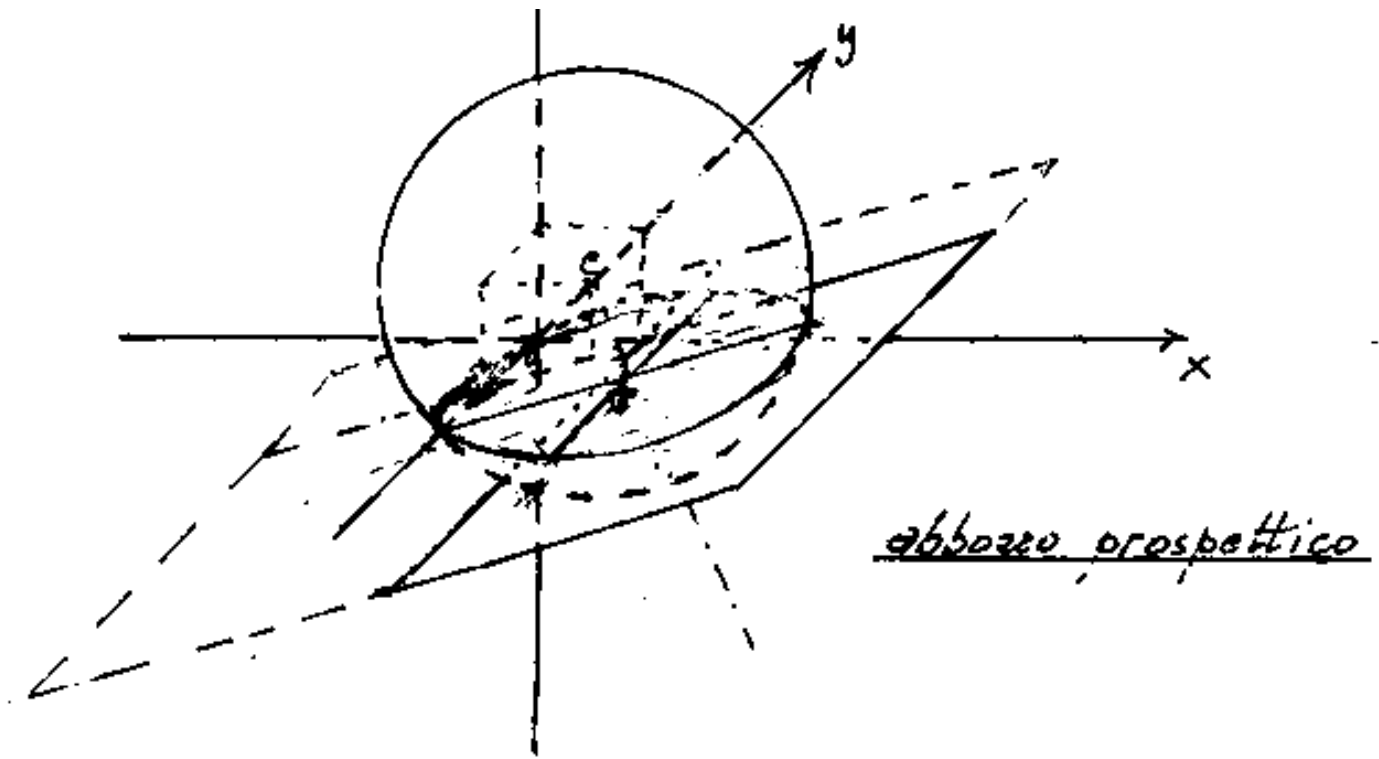
z

y

y

x

abbozzo prospettico

Indice Enciclopedico Indice Pag. 96

Interzezione fra due sfere

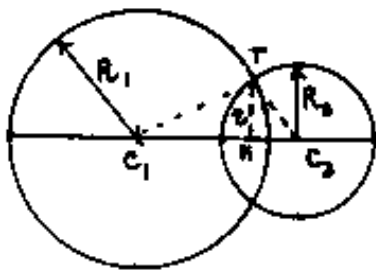
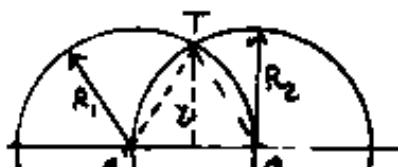
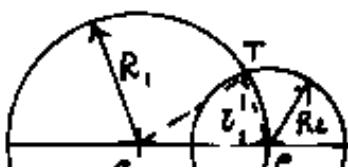
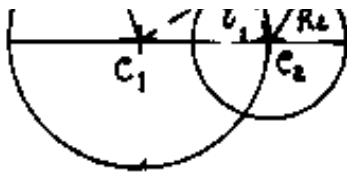
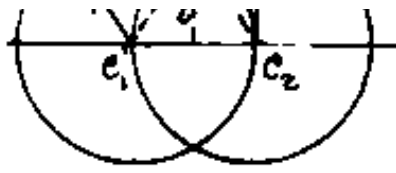
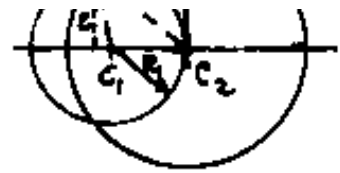
Consideriamo due sfere, rispettivamente di centri: "C_1" e "C_2" e di raggi R_1 ed R_2, la distanza $\overline{C_1C_2}$

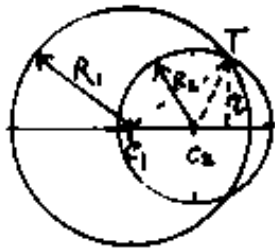
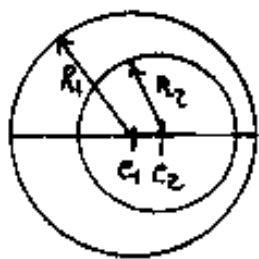
$$\overline{C_1C_2} = \sqrt{(x_{C_1}-x_{C_2})^2+(y_{C_1}-y_{C_2})^2+(z_{C_1}-z_{C_2})^2} \gtreqless (R_1+R_2) \quad \text{e sia}$$

Se: $\overline{C_1C_2} > (R_1+R_2)$ le sfere sono esterne, e non si intersecano fra loro.

Se: $\overline{C_1C_2} = (R_1+R_2)$ le sfere sono tangenti esterne.

Se: $\overline{C_1C_2} = |R_1-R_2|$ le sfere sono tangenti interne

Se: $\overline{C_1C_2} < (R_1+R_2)$ ma $\overline{C_1C_2} > R_1 > R_2$ le sfere si intersecano, ed il piano della circonferenza comune è intermedio ai centri; il raggio della circonferenza comune è l'altezza relativa a $\overline{C_1C_2}$ del triangolo che ha per lati R_1, R_2, $\overline{C_1C_2}$.

Se: $\overline{C_1C_2} = R_1 > R_2$; $\overline{C_1C_2} = R_1 = R_2$; $\overline{C_1C_2} = R_1 < R_2$

$$r = \frac{R_2}{R_1}\sqrt{R_1^2 - \frac{R_2^2}{4}} \qquad r = \frac{R_1\sqrt{3}}{2} = \frac{R_2\sqrt{3}}{2} \qquad r = \frac{R_2}{R_1}\sqrt{R_1^2 - \frac{R_2^2}{4}}$$

se: $\overline{C_1C_2} < R_1 > R_2$ ed $\overline{C_1C_2} > (R_1 - R_2)$ le due sfere si interse= cano, C_2 è interno alla sfera R_1 il piano è esterno al segmento $\overline{C_1C_2}$ ed il raggio r è l'altezza del triangolo C_1TC_2 rispetto a $\overline{C_1C_2}$.

Se $\overline{C_1C_2} < (R_1 - R_2)$ con $R_1 > R_2$ la seconda sfera è interna alla prima e non si verificano intersezioni. Al caso limite di $\overline{C_1C_2} = 0$, le sfere sono concentriche

Esempio numerico

Si abbiano le sfere: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$

ed $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 3$: studiare l'intersezione.

$$C_1 \equiv (1, -1, +1) \; ; \; R_1 = 2 \; ; \quad C_2 \equiv (1, -3, -1) \; ; \; R_2 = \sqrt{3}$$

abbiamo indicato $R_1 > R_2$. $\overline{C_1C_2}\ \sqrt{0+4+4} = \boxed{2\sqrt{2} = \overline{C_1C_2}}$

$2\sqrt{2} = 2{,}82843 < R_1 + R_2 = 2 + 1{,}7321 = \underline{3{,}7321}$ ed $\overline{C_1C_2} > R_1$

perciò si ha una intersezione reale.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 1 = 0 \qquad \text{(prima sfera)}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0 \qquad \text{(seconda sfera)}$$

$$4y + 4z + 9 = 0 \qquad \text{equaz. del piano comune}$$

alla intersezione che risulta parallelo all'asse X ed

inclinato a 45° sugli assi y e z che incontra a $-\frac{9}{4} = -2{,}25$.

$\cos(T\widehat{C_1}C_2) = \frac{R_1^2 + \overline{C_1C_2}^2 - R_2^2}{2R_1\overline{C_1C_2}} = \frac{4+8-3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2}} = \frac{9}{8\sqrt{2}} = 0{,}79550$;

$\overline{C_1H} = R_1\cos(T\widehat{C_1C_2}) = 1{,}590990$; $r = \sqrt{R_1^2 - \overline{C_1H}^2} = \boxed{1{,}21191996. = r}$

L'equazione della retta $\overline{C_1C_2}$ = $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{(-3+1)} = \frac{(z-1)}{-1-1}$

$\cos\alpha = \pi/2$ (perpendicolare alla x) ; $\sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$

$\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $X_H = X_{C_1} = X_{C_2} = +1$; $y_H = y_{C_1} + \overline{C_1H}\cos\gamma$

$y_H = -1 - \frac{1{,}590990}{\sqrt{2}} = -1 - 1{,}125 = -2{,}125000$; $Z_H = Z_{C_1} - \overline{C_1H}\cos\gamma = +1 - 1{,}125$

Proiettiamo sul piano YZ la figura in scala 1:1cm

in modo da verificare

i nostri calcoli:

$\overline{C_1C_2} = 3\sqrt{2} = 2,82843$

$T\widehat{C_1C_2} = 37° 17' 52''$

$r = 1,21191996$

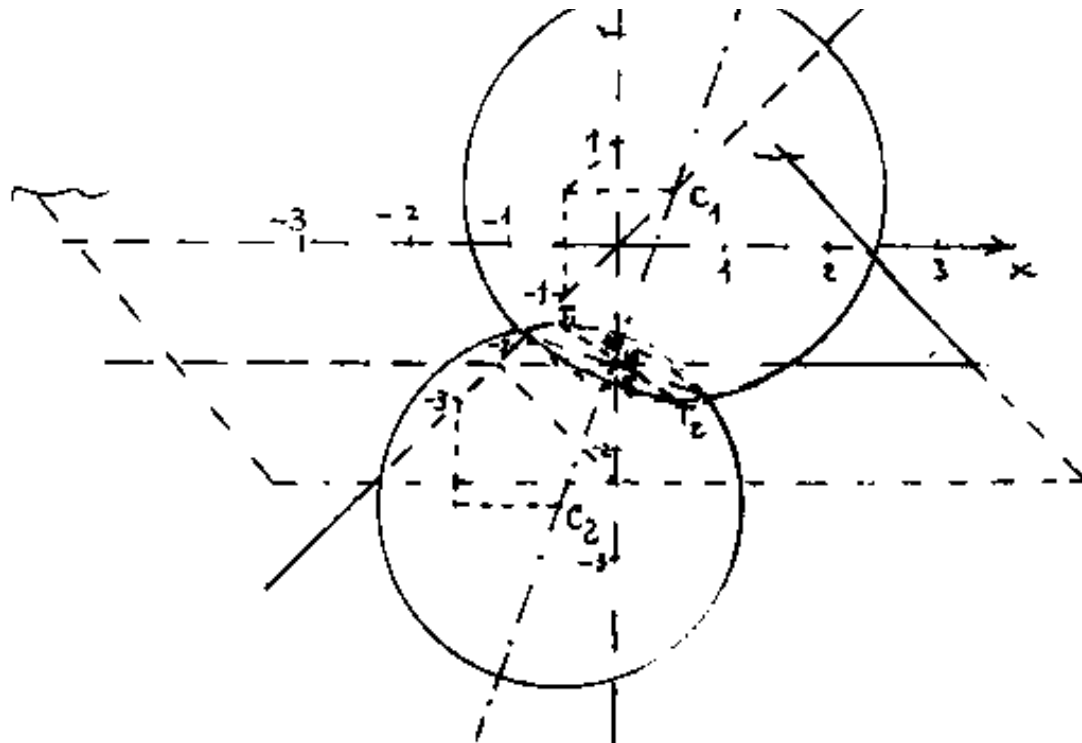
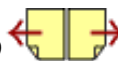
$\overline{CH} = 1,590990$

$H \equiv (1, -2,125, -0,125)$

che nei limiti dell'errore di graficismo, possono ritenersi esatti.

verifichiamo che H centro della circonferenza appartiene al piano: $4y + 4z + 9 = 0$; infatti: $4(-2,125) + 4(-0,125) + 9 = 0$.

Per il confronto con la proiezione in scala: 1 = 1cm. facciamo anche un

disegno prospettico

Il cilindro

Dicesi superficie cilindrica ogni superficie che sia generata da una retta (detta generatrice) che trasla mantenendosi parallela ad un'altra retta. (detta direttrice).

Dicesi "sezione retta" di una superficie cilindrica l'intersezione delle rette generatrici con un piano ad esse normale. Cioè, si ha "sezione retta" quando le rette generatrici sono di giacitura del piano di sezione.

Dicesi sezione obliqua l'intersezione con un piano inclinato rispetto al precedente, cioè con piani che fanno rette di giacitura oblique rispetto alla direttrice ed alle generatrici sue parallele.

Tutte le sezioni rette sono uguali fra loro.
Tutte le sezioni oblique, con piani di ugual giacitura sono uguali fra loro.

La linea intersezione della sezione retta de-

La linea intersezione della sezione retta denomina il cilindro; avremo così cilindri circolari, parabolici, catenari, cicloidi, ecc.

La sezione cilindrica, può essere: "chiusa", come nel caso del cerchio, dell'ellisse, della cardioide, ecc.; può essere "aperta", come nel caso della parabola, della catenaria, ecc.

Abbiamo già visto che se una espressione: $f(x,y,z)=0$ risulta mancante di una coordinata: ($f(x,y)=0$; $f(x,z)=0$; $f(y,z)=0$) si ha una superficie cilindrica con direttrice parallela all'asse mancante, e la sezione retta sarà la funzione dei due assi restanti. (per es. $(y-2)^2+(z-3)^2-25=0$; è un cilindro circolare retto, con direttrice parallela all'asse x, asse in $(y=+2)$; $(z=+3)$; raggio 5).

Supponiamo ora che la retta per l'origine degli assi: $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$; sia parallela alla direttrice e quindi alle generatrici del cilindro. Il piano per l'origine degli assi normale alle generatrici del cilindro sarà quindi: $lx+my+nz=0$.

Se vogliamo tracciare un cerchio su questo piano, dobbiamo trovare l'intersezione con una sfera, che, per semplicità, consideriamo anch'essa con centro nell'origine degli assi; avremo: $x^2+y^2+z^2=R^2$

– Se fra queste due equazioni (del piano e della sfera)

— — e già queste due equazioni (del piano e della sfera) eliminiamo una variabile, per es. la z, troviamo l'equazione del cilindro ellittico con asse direttrice z, e per sezione retta: "l'ellisse", che risulta dalla proiezione su xy, del cerchio intersezione delle due espressioni.

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2 = \left(\frac{l}{n}x + \frac{m}{n}y\right)^2$$

$$\boxed{(l^2+n^2)x^2 + (m^2+n^2)y^2 + 2lmxy - n^2R^2 = 0}$$

Sappiamo che la proiezione di un cerchio è un ellisse che ha per semiasse maggiore il raggio del cerchio e per semiasse minore il raggio per il coseno dell'angolo di rotazione.

La retta di giacitura $\hat{r}$ del piano del cerchio, ha per coseni direttori:

$$\cos(\widehat{xr}) = \cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}; \quad \cos(\widehat{yr}) = \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};$$

$$\cos(\widehat{zr}) = \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};$$

perciò il semiasse minore dell'ellisse sarà:

$$\boxed{b = \frac{nR}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}}; \quad \boxed{a = R}$$

L'equazione del cilindro con direttrice Σ è quindi l'equazione dell'ellisse sul piano xy; ellisse solo ruotato perchè ha il centro nel centro assi:

Ricordando (v. Volume II) che l'equazione di un ellisse ad assi solo ruotati è del tipo:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$$

che confrontiamo con:

$$(l^2+n^2)x^2 + (m^2+n^2)y^2 + (2lm)xy - n^2R = 0$$

Nel problema inverso sulle coniche (v. Vol. II) abbiamo trovato che:

$$\left.\begin{matrix} a^2 \\ b^2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{-2a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) \mp \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+2a_{12}^2}}$$

ove sostituendo si ha:

$$\left.\begin{matrix} a^2 \\ b^2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{2n^2R^2}{(l^2+m^2+2n^2) \mp \sqrt{(l^4+m^4-2l^2m^2+4l^2m^2)}} = \frac{2n^2R^2}{(l^2+m^2)+2n^2 \mp (l^2+m^2)}$$

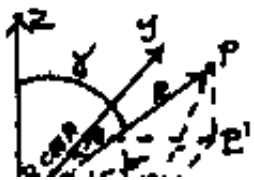
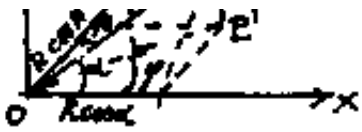
che, com'è facile vedere, verificano i valori sopra indicati.

Più delicata è la questione angolare: le rette uscenti dall'origine degli assi ed inclinate dello stesso angolo γ rispetto all'asse z formano una superficie conica. Ciascuna di esse può essere retta di giacitura del piano contenente il cerchio di raggio "R", che si proietta sul piano xy, secondo un ellisse di semiassi: R ed $R\cos\gamma$. Però, per ciascuna di dette, rette corrisponderà una particolare rotazione degli assi dell'ellisse, rispetto agli assi x,y. Detto φ tale angolo, sappiamo (v. Vol II) che:

$$\left.\begin{matrix}\varphi \\ 90+\varphi\end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}\right)\left\langle\begin{matrix}\text{se } 2a_{12}<0 \\ \text{se } 2a_{12}>0\end{matrix}\right.$$

ove sostituendo abbiamo:

$$\left.\begin{matrix}\varphi \\ 90°+\varphi\end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2lm}{l^2-m^2}\right)$$

se consideriamo la proiezione sul piano xy del segmento di retta: "R"; avremo: $\overline{OP'} = b = R\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}$; da cui:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}} \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}}$$

poiché $tg(2\varphi) = \left(\frac{2}{\frac{1}{tg\varphi} - tg(\varphi)} \right)$;

$$tang(2\varphi) = \frac{2}{\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}} = \frac{2\cos\alpha\cos\beta}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \frac{2lm/(l^2+m^2+n^2)}{(l^2-m^2)/(l^2+m^2+n^2)}$$

ritorna:

$$\boxed{tang(2\varphi) = \frac{2lm}{l^2-m^2}}$$

Analogamente, se dalle due equazioni del piano e della sfera, avessimo eliminato la x o la y, avremmo trovato un cilindro ellittico con direttrice x od y.

A noi interessa l'equazione del cilindro circolare avente per direttrice la retta: $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

Una qualsiasi retta parallela a tale direttrice, e passante per un punto P, avrà per equazione:

$$\frac{x - x_p}{l} = \frac{y - y_p}{m} = \frac{z - z_p}{n}$$

che può ridursi:

$$\frac{x - x_p}{\cos\alpha} = \frac{y - y_p}{\cos\beta} = \frac{z - z_p}{\cos\gamma}$$

ove: $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 1$

Ove: x_p, y_p, z_p sono le coordinate di un generico punto P_i di un luogo geometrico da definirsi.

Se conosciamo la sezione retta del cilindro questa sarà il luogo dei punti P_i. Tale sezione deve stare sul piano: $\boxed{\cos\alpha\, x_p + \cos\beta\, y_p + \cos\gamma\, z_p = 0}$ e sulla giacitura di tutti i piani ad esso paralleli.

Dall'equazione delle rette passanti per P_i abbiamo:

Dall'equazione delle rette passanti per P_i abbiamo:

$$\begin{cases} x_p = x - \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}(y - y_p) \\ z_p = z - \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}(y - y_p) \end{cases}$$

sostituendo nell'equazione del piano normale:

$$\cos\alpha\left(x - \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}(y - y_p)\right) + \cos\beta\, y_p + \cos\gamma\left(z - \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} y - y_p\right) = 0$$

possiamo scrivere:

$$(\cos\alpha)x - \left(\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\gamma}{\cos\beta}\right)y + (\cos\gamma)z + \left(\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{\cos\beta}\right)y_p = 0$$

ma: $(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=1$; $(\cos^2\alpha+\cos^2\gamma)=(1-\cos^2\beta)$

$$(\cos\alpha)x - \left(\frac{1-\cos^2\beta}{\cos\beta}\right)y + (\cos\gamma)z + \frac{y_p}{\cos\beta} = 0$$

da cui:

$$y_p = (1-\cos^2\beta)y - (\cos\beta\cos\alpha)x - (\cos\beta\cos\gamma)z$$

$$\frac{y-y_p}{\cos\beta} = (\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z$$

dalla: $x_p = x - \cos\alpha\left(\frac{y-y_p}{\cos\beta}\right)$

$$x_p = (\cos^2\beta+\cos^2\gamma)x - (\cos\alpha\cos\beta)y - (\cos\alpha\cos\gamma)z$$

analogamente dalla $z_p = z - \cos\gamma\left(\frac{y-y_p}{\cos\beta}\right)$

$$z_p = (\cos^2\alpha+\cos^2\beta)z - (\cos\alpha\cos\gamma)x - (\cos\beta\cos\gamma)y$$

$$\frac{x-x_p}{\cos\alpha} = \frac{y-y_p}{\cos\beta} = \frac{z-z_p}{\cos\gamma} = (\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z$$

Se vogliamo che il nostro cilindro sia circolare, cioè abbia per sezione retta un cerchio; essendo un cerchio determinato dalla intersezione di un piano con una sfera, nel nostro caso, è necessario che "P" verifichi l'equazione della superficie sferica:

$$X_P^2 + Y_P^2 + Z_P^2 = R^2$$

Eleviamo a quadrato le coordinate di P sopracalcolate e sostituiamole nell'equazione della superficie sferica: (Per brevità di scrittura poniamo: $(l^2+m^2+n^2)=1$

$$\cos\alpha = l \; ; \quad \cos\beta = m \; ; \quad \cos\gamma = n)$$

$$x_p^2 = (m^2+n^2)^2x^2 + l^2m^2y^2 + l^2n^2z^2 - 2lm(m^2+n^2)xy - 2ln(m^2+n^2)xz + 2(l^2mn)yz$$

$$y_p^2 = (l^2m^2)x^2 + (l^2+n^2)^2y^2 + (n^2m^2)z^2 - 2lm(l^2+n^2)xy + 2(lnm^2)xz - 2nm(l^2+n^2)yz$$

$$z_p^2 = (l^2n^2)x^2 + (n^2m^2)y^2 + (l^2+m^2)z^2 + 2(lmn^2)xy - 2nl(l^2+m^2)xz - 2nm(l^2+m^2)yz$$

$$R^2 = (m^2+n^2)(l^2+m^2+n^2)x^2 + (l^2+n^2)(l^2+m^2+n^2)y^2 + (l^2+m^2)(l^2+m^2+n^2)z^2 + 2lm(-l^2-m^2-n^2)xy - 2ln(l^2+m^2+n^2)xz$$
$$- 2mn(l^2+m^2+n^2)yz$$

$$R^2 = (m^2+n^2)x^2 + (l^2+n^2)y^2 + (l^2+m^2)z^2 - (2lm)xy - (2ln)xz - (2mn)yz$$

$$R^2 = (1-l^2)x^2 + (1-m^2)y^2 + (1-n^2)z^2 - 2lmxy - 2lnxz - 2mnyz$$

$$(x^2+y^2+z^2-R^2) = (l^2x^2+m^2y^2+n^2z^2+2lmxy+2lnxz+2mnyz)$$

$$x^2+y^2+z^2-R^2 = (lx+my+nz)^2$$: torniamo ai simboli estesi:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-R^2 = \left((\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z\right)^2}$$

Che è l'equazione del nostro cilindro.

Cioè possiamo dire:

"L'equazione di un cilindro circolare avente per asse una retta per l'origine degli assi è data dall'uguaglianza dell'equazione della sfera al centro assi, (di raggio R uguale a quello della sezione cilindrica) con l'equazione del piano di sezione per l'origine, elevata a quadrato ed avente per coefficienti i coseni direttori.

Se spostiamo il centro assi in un punto C qualsiasi del piano, una tale equazione diventa l'equazione generale:

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2-R^2=\left[\cos\alpha(x-x_c)+\cos\beta(y-y_c)+\cos\gamma(z-z_c)\right]^2$$

che è l'equazione di un cilindro circolare, avente l'asse direttrice passante per un punto C e di coseni direttori: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Cilindro al centro assi. (cioè con l'asse per O) (problema inverso)

l'equazione:

$$(1-\cos^2\alpha)x^2+(1-\cos^2\beta)y^2+(1-\cos^2\gamma)z^2-2(\cos\alpha\cos\beta)xy-2(\cos\alpha\cos\gamma)xz-2(\cos\beta\cos\gamma)yz=R^2$$

può scriversi

$$(\cos^2\beta+\cos^2\gamma)x^2+(\cos^2\alpha+\cos^2\gamma)y^2+(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)z^2-2(\cos\alpha\cos\beta)xy-2(\cos\alpha\cos\gamma)xz-2(\cos\beta\cos\gamma)yz=R^2$$

moltiplicata per un K arbitrario si presenta:

$$(a)x^2+(b)y^2+(c)z^2+(d)xy+(e)xz+(f)yz+(g)=0$$

rendiamo $g<0$ ovvero $K>0$

Affinché sia un cilindro deve essere: $(a>0;\ b>0;\ c>0)$; $(g<0)$ se fosse un cilindro al centro:

$$a=K(\cos^2\beta+\cos^2\gamma);\quad b=K(\cos^2\alpha+\cos^2\gamma);\quad c=K(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)$$

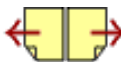
$$(a+b+c)=K(2\cos^2\alpha+2\cos^2\beta+2\cos^2\gamma)=2K \qquad K=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{(b+c-a)}{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)} = 2\cos^2\alpha + \cos^2\gamma + \cos^2\beta - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\cos^2\alpha$$

cioè: $\boxed{\sqrt{\frac{a+b-c}{a+b+c}} = \cos\gamma}$; $\boxed{\sqrt{\frac{a-b+c}{a+b+c}} = \cos\beta}$; $\boxed{\sqrt{\frac{-a+b+c}{a+b+c}} = \cos\alpha}$

<u>dovrà essere:</u>

$$d = -2K\cos\alpha\cos\beta = -(a+b+c)\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)^2}} = \boxed{-\sqrt{(a-b+c)(b+c-a)} = d}$$

analogamente: $\boxed{e = \sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)}}$ $\boxed{f = -\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}}$

quindi : $$\boxed{R = \sqrt{\frac{2g}{(a+b+c)}}}$$

dovendo essere: $-\frac{d}{K} = 2\cos\alpha\cos\beta$; $-\frac{e}{K} = 2\cos\alpha\cos\gamma$; $\frac{f}{K} = 2\cos\beta\cos\gamma$

$\frac{ed}{2Kf} = -\cos^2\alpha$; $\frac{df}{2Ke} = -\cos^2\beta$; $\frac{ef}{2Kd} = -\cos^2\gamma$; avremo:

$$\frac{ed}{2f} + \frac{df}{2e} + \frac{ef}{2d} = \frac{d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2}{2edf} = -K = -\frac{a+b+c}{2}$$

che verifica essere l'equazione di un cilindro al centro assi,

---

esempio numerico

studiare l'equazione:

$$\boxed{160x^2 + 153y^2 + 25z^2 - 24xy - 72xz - 96yz - 676 = 0}$$

$a > 0$; $b > 0$; $c > 0$; $g < 0$ → può essere un cilindro

$$K = \frac{160+153+25}{2} = 169$$

$$\frac{24^2 \cdot 72^2 + 24^2 96^2 + 72^2 96^2}{-(2)(24)(72)(96)} = \frac{2985984 + 5308416 + 47775744}{-(165888)\,2} = -169$$

è un cilindro al centro assi; per cui, dividendo per 169

si ha: $$\frac{160}{169}x^2+\frac{153}{169}y^2+\frac{25}{169}z^2-2\frac{12}{169}xy-2\frac{36}{169}xz-2\frac{48}{169}yz-\frac{676}{169}=0$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{160}{169}}=\frac{3}{13}\;; \quad \longrightarrow \alpha=76°\,39'\,27''$$

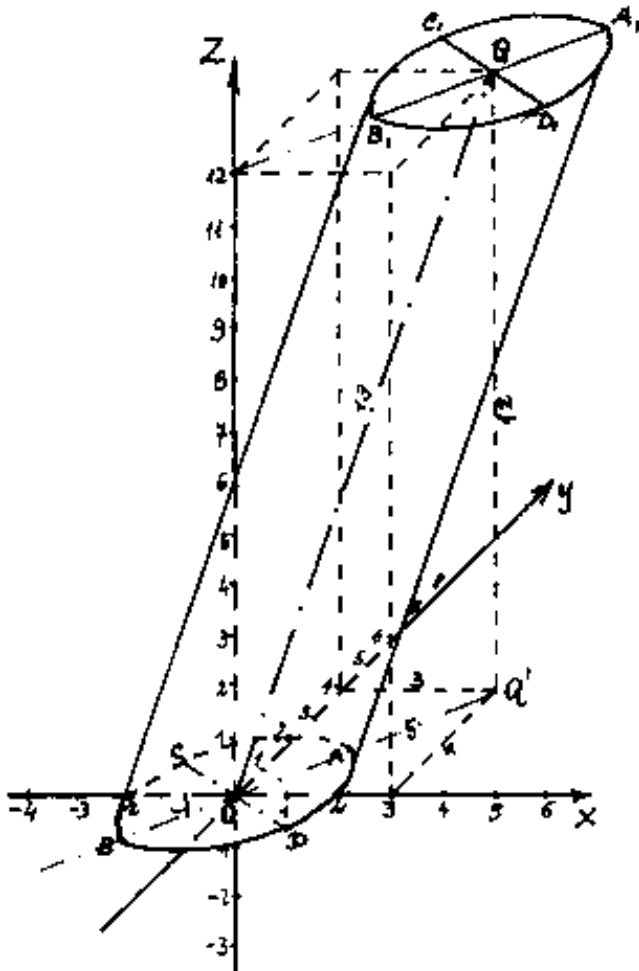
$$\cos\beta=\sqrt{1-\frac{153}{169}}=\frac{4}{13}\;; \quad \longrightarrow \beta=72°\,04'\,47''$$

$$\cos\gamma=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}\;; \quad \longrightarrow \gamma=22°\,37'\,12''$$

verifica: $2\cos\alpha\cos\beta=2\frac{3\cdot4}{169}$; $2\cos\alpha\cos\gamma=2\frac{3\cdot12}{169}$; $2\cos\beta\cos\gamma=2\frac{4\cdot12}{169}$

$$R=\sqrt{\frac{676}{169}}=2.$$

Facciamo un disegno del cilindro:

disegno prospettico

Per $z = 0$, l'equazione di-venta quella di un ellisse solo ruotato: cioè:

$$160x^2 + 153y^2 - 24xy - 676 = 0$$

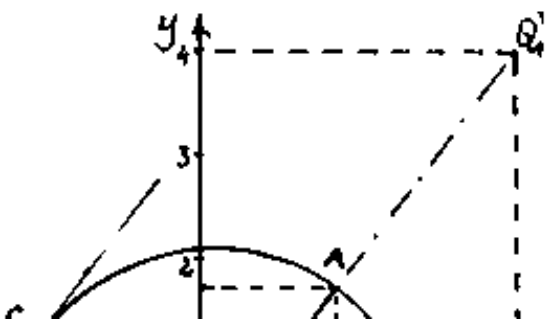
$$\varphi_{+90} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{-24}{160-153}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}\varphi \\ 90°+\varphi\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{-24}{7}\right) = \begin{matrix} 90° \; 00' \; 00'' \\ -36° \; 52' \; 12'' \end{matrix}$$

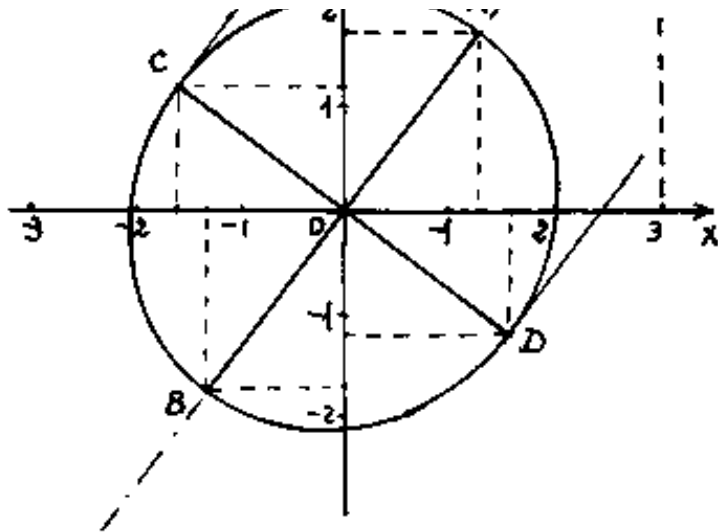
$$\varphi = 53° \; 07' \; 48''$$

$$a = 2/\cos\gamma = \frac{13}{12} 2 = \frac{13}{6} = 2{,}166\bar{6} = \overline{OA}$$

$$b = 2 = R = \overline{OC} = \overline{OD}$$

Notiamo che non è una proie-zione della circonferenza di raggio 2, ma una sezione cilin-drica inclinata, perciò il semiasse $a > R$.

Nel nostro caso era facile cal-colare $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) = 53° \, 07' \, 48''$.

Le coordinate di A, B, C, D, saran-

no: $X_A = -X_B = \frac{3}{5}\frac{13}{6} = \frac{13}{10} = 1{,}3$

$y_A = -y_B = \frac{4}{5}\frac{13}{6} = \frac{26}{15} = 1{,}7333\overline{3}$

$+X_D = -X_C = \frac{4}{5}2 = 1{,}6$

$-y_D = +y_C = \frac{3}{5}2 = 1{,}2$

Ponendo $Z = 12$ si ottiene

l'equazione: $160x^2 + 153y^2 - 24xy - 864x - 1152y + 2924 = 0$ stesso ellisse

traslato in $Q \equiv (3, 4, 12)$ (dall'equazione appare in Q')

Nell'esempio numerico ora effettuato si nota che l'asse del cilindro congiunge i punti $O \equiv (0,0,0)$ e $Q \equiv (3,4,12)$ $\overline{OQ} = 13$ ed il punto Q si proietta nel I quadrante di xy. per cui: $\cos\alpha = \frac{3}{13}$; $\cos\beta = \frac{4}{13}$; $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.

Vogliamo vedere se Q si proiettasse nel II quadrante di xy, cioè se $\cos\alpha = \frac{-3}{13}$ come diventa l'equazione (fermo restando $K = 169$)

$$160x^2 + 153y^2 + 25z^2 + 24xy + 72xz - 96yz - 676$$

quindi sono cambiati i segni solo dei coefficienti "d", "e"

avremo quindi la seguente tabella sui segni:

d	e	f	quadrante	note	$z_Q > 0$ possibilità	$z_Q < 0$
−	−	−	I	con $g < 0$	$\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$,	$\cos\alpha < 0$, $\cos\beta < 0$
+	+	−	II	$a > 0$ $b > 0$	$\cos\alpha < 0$, $\cos\beta > 0$	$\cos\alpha > 0$, $\cos\beta < 0$
−	+	+	III	$c > 0$	$\cos\alpha < 0$, $\cos\beta < 0$,	$\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$,
+	−	+	IV		$\cos\alpha > 0$, $\cos\beta < 0$	$\cos\alpha < 0$ $\cos\beta > 0$
					$\cos\gamma > 0$	$\cos\gamma < 0$

Dalla quale è possibile individuare subito la direzione dell'asse del cilindro al centro

direzione dell'asse del cilindro al centro.

Affrontiamo ora il problema del cilindro circolare in posizione qualsiasi rispetto agli assi; cioè abbia per direttrice la retta:

$$\frac{x - x_e}{l} = \frac{y - y_e}{m} = \frac{z - z_e}{n}$$

Equazione generale del cilindro

Consideriamo un polinomio completo di secondo grado, nelle variabili: x, y, z; indiciziamo: x con 1, y con 2, z con 3 ed i termini noti o costanti con 4; (si noti che per le coniche il polinomio di secondo grado era ed è in due variabili per cui le costanti hanno indice 3)

Nell'esempio precedente (caso particolare di cilindro avente l'asse direttrice passante per l'origine degli assi) abbiamo indicato: a, b, c, d, e, f, g che corrispondono: a_{11}, a_{22}, a_{33}, $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$, a_{44} (mancano i coefficienti di x, y, z.)

Il nostro polinomio completo sarà

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Se "c" è un punto qualsiasi dell'asse direttrice di un cilindro circolare, possiamo traslare da O a C la nostra equazione del cilindro al centro, ed avremo:

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2-R^2=\left[\cos\alpha(x-x_c)+\cos\beta(y-y_c)+\cos\gamma(z-z_c)\right]^2$$

Sviluppando il quadrato al secondo membro si ha:

$$(1-\cos^2\alpha)(x-x_c)^2+(1-\cos^2\beta)(y-y_c)^2+(1-\cos^2\gamma)(z-z_c)^2-2(\cos\alpha\cos\beta)(x-x_c)(y-y_c)-$$

$$-2(\cos\alpha\cos\gamma)(x-x_c)(z-z_c)-2(\cos\beta\cos\gamma)(y-y_c)(z-z_c)-R^2=0$$

Sviluppiamo ora i quadrati e i prodotti della traslazione di assi;

avremo:

$$\underset{a_{11}}{(1-\cos^2\alpha)}x^2+\underset{a_{22}}{(1-\cos^2\beta)}y^2+\underset{a_{33}}{(1-\cos^2\gamma)}z^2-\underset{2a_{12}}{2(\cos\alpha\cos\beta)}xy-$$

$$-\underset{2a_{13}}{2(\cos\alpha\cos\gamma)}xz-\underset{2a_{23}}{2(\cos\beta\cos\gamma)}yz-\underset{a_{44}}{R^2}\ldots\ldots$$

Questa parte di equazione è identica a quella del cilindro al centro assi, continuando lo sviluppo si ha:

$$\ldots\ldots-2\underset{2a_{14}}{\left[(1-\cos^2\alpha)x_c-(\cos\alpha\cos\beta)y_c-(\cos\alpha\cos\gamma)z_c\right]}x+$$

$$-2\underset{2a_{24}}{\left[(1-\cos^2\beta)y_c-(\cos\alpha\cos\beta)x_c-(\cos\beta\cos\gamma)z_c\right]}y+$$

$$-2\underset{2a_{34}}{\left[(1-\cos^2\gamma)z_c-(\cos\beta\cos\gamma)y_c-(\cos\alpha\cos\gamma)x_c\right]}z+$$

$$+\underset{a_{44}}{\left[(1-\cos^2\alpha)x_c^2+(1-\cos^2\beta)y_c^2+(1-\cos^2\gamma)z_c^2-2(\cos\alpha\cos\beta)x_cy_c-2(\cos\alpha\cos\gamma)x_cz_c-2(\cos\beta\cos\gamma)y_cz_c\right]}=0$$

Poiché questa seconda parte dello sviluppo è funzione dei coefficienti della prima parte, possiamo scrivere:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}$$ (equazione al centro) (coefficienti di orientamento e dimensionamento)

$$-2(a_{11}x_c + a_{12}y_c + a_{13}z_c)x -$$

$$-2(a_{22}y_c + a_{12}x_c + a_{23}z_c)y -$$

$$-2(a_{33}z_c + a_{23}y_c + a_{13}x_c)z +$$

} coefficienti di traslazione

$$+\left[\left(a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + a_{33}z_c^2 + 2a_{12}x_cy_c + 2a_{13}x_cz_c + 2a_{33}y_cz_c\right) - R^2\right]$$ (termine noto)

Si noti che a_{44} è l'intera equazione al centro (escluso R^2) ove al posto delle variabili si sono poste le coordinate di "c".

occorre fare molta attenzione ai segni dei coeffi= cienti: a_{11}, a_{22}, a_{33}, debbono tutti e tre essere maggiori di zero, se non lo sono, si può moltiplicare l'intera equazione per (-1); ma se il loro segno è discorde, cioè non sono tutti e tre dello stesso segno ciò vuol dire che l'equazione non rappresenta un cilindro.

L'esame del polinomio completo di secondo gra= do, sarà fatto dopo aver trattato il cono. Comunque fin da ora possiamo dire che, se nel polinomio di 2° grado consideriamo la intersezione con un piano qualsiasi la curva sarà una conica (reale se l'intersezione avviene realmente, degenere, o immaginaria se l'intersezione non avviene). (Piano parallelo al cilindro).

Per ora possiamo dire:

se: $a_{11} = a_{22} = a_{33}$; $2a_{12} = 2a_{13} = 2a_{23} = 0$; l'equazione è

una sfera. ove: $a_{14} = x_c$; $a_{24} = y_c$; $a_{34} = z_c$; $R^2 = x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - a_{44}$.

se a_{11}, a_{22}, a_{33} sono dello stesso segno, (che rendiamo positivo), e se le sezioni con piani paralleli danno le stesse figure, ugualmente orientate, sia pure traslate; l'equazione è un cilindro. Ma cerchiamo di definire meglio queste sezioni.

Ponendo uguale a zero, oppure ad un valore costante una qualsiasi delle tre variabili (per es la z) otteniamo l'intersezione con il piano che ha per retta di giacitura l'asse posto uguale a zero oppure = costante. (per es xy). Il polinomio si riduce all'espressione di una conica, infatti eliminando i termini, (per esempio in z), abbiamo:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0$$

Ove, (vedi Vol II), il termine noto è indicato con a_{44} anziché con a_{33} perché l'indice 3 è stato assunto per la z.

Quindi avremo: (ricordando che $a_{ij} = a_{ji}$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} = \Delta \begin{cases} = 0 = \text{conica degenere} \\ \neq 0 = \text{conica non degenere} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{..} & a_{..} \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0 \text{ caso ellittico} \begin{cases} \Delta a_{11} > 0;\ \Delta a_{22} > 0 = \text{ellisse immaginaria} \\ \Delta a_{11} < 0;\ \Delta a_{22} < 0 = \text{ellisse reale} \end{cases} \\ = 0 \text{ caso parabolico} \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \searrow < 0 \text{ caso iperbolico}$$

sostituendo i valori nel minore del determinante abbiamo:

$$\begin{vmatrix} (1-\cos^2\alpha) & -\cos\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\cos\beta & (1-\cos^2\beta) \end{vmatrix} = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta = \underline{\cos^2\gamma}$$

che, necessariamente, essendo un quadrato; $\underline{\cos^2\gamma > 0}$ e quindi l'intersezione è un caso ellittico; affinché sia reale, avendo ridotto $a_{11}>0$; $a_{22}>0$ deve essere: $\Delta < 0$.

Per assicurarci che è un cilindro; nell'equazione, al posto della z, poniamo una costante H arbitraria; avremo: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + f_1(H)x + f_2(H)y + \left(a_{44} + f_3(H)\right) = 0$

Dovremo trovare <u>la stessa sezione</u> che per $z=0$; cioè lo stesso ellisse con la stessa ruotazione di assi, con gli stessi assi, solo traslato. Infatti (v. II volume) i coefficienti $f_{11}(H)$ ed $f_{12}(H)$ servono per trovare le coordinate del centro dell'ellisse spostato, ma non influenzano né la rotazione, né le dimensioni degli assi dell'ellisse, ciò può essere verificato, riducendo le due espressioni per $z=0$ e per $z=H$ all'espressione dell'ellisse ad <u>assi solo ruotati</u>. (Qualora non variasse la ruotazione degli assi, ma variassero le dimensioni della sezione, mantenendo lo stesso rapporto, l'equazione rappresenterebbe un cono.)

Facciamo una analisi del significato dei coefficienti:

$$a_{11}/K = (1-\cos^2\alpha) = (\cos^2\beta + \cos^2\gamma) = (\operatorname{sen}^2\alpha) \quad (a)/K$$

$$a_{22}/K = (1-\cos^2\beta) = (\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) = (\operatorname{sen}^2\beta) \quad (b)/K \qquad K = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{2}$$

$$a_{33}/_K = (1-\cos^2\gamma) = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = (\mathrm{sen}^2\gamma) \quad (e/_K)$$

$$a_{12}/_K = (-\cos\alpha\cos\beta) = \frac{1}{K}\sqrt{(-a_{11}+a_{22}+a_{33})(a_{11}-a_{22}+a_{33})} \quad (f/_K)$$

$$a_{13}/_K = (-\cos\alpha\cos\gamma) = \frac{1}{K}\sqrt{(-a_{11}+a_{22}+a_{33})(a_{11}+a_{22}-a_{33})} \quad (g/_K)$$

$$a_{23}/_K = (-\cos\beta\cos\gamma) = \frac{1}{K}\sqrt{(a_{11}-a_{22}+a_{33})(a_{11}+a_{22}-a_{33})} \quad (g/_K)$$

$$a_{14}/_K = \left(-(1-\cos^2\alpha)x_c + (\cos\alpha\cos\beta)y_c + (\cos\alpha\cos\gamma)z_c\right)$$

$$a_{24}/_K = \left(-(1-\cos^2\beta)y_c + (\cos\alpha\cos\beta)x_c + (\cos\beta\cos\gamma)z_c\right)$$

$$a_{34}/_K = \left(-(1-\cos^2\gamma)z_c + (\cos\beta\cos\gamma)y_c + (\cos\alpha\cos\gamma)x_c\right)$$

questi coefficienti sono nulli nel caso di cilindro al centro assi

$$a_{44} = \left(a_{11} x_c^2 + a_{22} y_c^2 + a_{33} z_e^2 + 2a_{13} x_c y_e + 2a_{13} x_e z_e + 2a_{23} y_e z_e - R^2 \right)$$

notiamo che:

$$a_{11} x_c + a_{12} y_e + a_{13} z_e = -a_{14}$$

$$a_{12} x_e + a_{22} y_e + a_{23} z_e = -a_{24}$$

$$a_{13} x_e + a_{23} y_e + a_{33} z_e = -a_{34}$$

Il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33} A_{33} - a_{23} A_{22} + a_{13} A_{13} = \Delta$$

$$\Delta = a_{33}\left(a_{11} a_{22} - a_{12}^2\right) - a_{23}\left(a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}\right) + a_{13}\left(a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}\right)$$

sostituiamo i valori dei coefficienti:

$$(1-\cos^2\gamma)\left((1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) - \cos^2\alpha\cos^2\beta\right) = \left(+\cos^2\alpha\cos^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma\right)$$

$$+(\cos\beta\cos\gamma)\left((1-\cos^2\alpha)(-\cos\beta\cos\gamma) - (-\cos\alpha\cos\beta)(\cos\alpha\cos\gamma)\right) = \left(-\cos^2\beta\cos^2\gamma\right)$$

$$(-\cos\alpha\cos\gamma)\left[(-\cos\alpha\cos\beta)(-\cos\beta\cos\gamma) - (\cos\alpha\cos\gamma)(1-\cos^2\beta)\right] = \left(-\cos^2\alpha\cos^2\gamma\right)$$

sommando si ha: $\Delta = 0$

Cioè le tre equazioni non sono indipendenti, ma sono combinazioni lineari, (si può dimostrare che il sistema è indeterminato)

Ciò implica che possiamo attribuire un valore arbitrario ad una coordinata per ricavare il valore delle altre due. (conviene in questi casi porre $z=0$, oppure: $x=0$, oppure $y=0$, per determinare l'asse del cilindro.

Esempio numerico

studiare l'equazione:

$$160x^2+153y^2+25z^2-24xy-72xz-96yz-1160x-1434y+768z+5239=0$$

I primi sei coefficienti sono quelli dell'esempio precedente, per cui: $K=169$; $\cos\alpha=\frac{3}{13}$; $\cos\beta=\frac{4}{13}$; $\cos\gamma=\frac{12}{13}$;

Qualora i primi sei coefficienti fossero stati diversi, si sarebbero ripetuti i procedimenti dell'esempio precedente per determinare K ed i coseni direttori.

Abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} 160x-12y-36z=+580 \\ -12x+153y-48z=+717 \\ -36x-48y+25z=-384 \end{cases}$$

che sappiamo essere indeterminato, infatti dividendo per 4 la prima riga, per 3 la seconda, e sommandole:

$$\begin{array}{rrrcr} 40 & -3 & -9 & = & 145 \\ -4 & +51 & -16 & = & 239 \\ \hline +36 & +48 & -25 & = & +384 \end{array}$$

abbiamo la III riga cambiato di segno.

$+36 \quad +48 \quad -25 \quad = +384$ cambiata di segno.

Ponendo $z_C = 0$, e considerando le prime due equazioni

$$\begin{vmatrix} 40 & -3 \\ -4 & 51 \end{vmatrix} = 2040 - 12 = 2028 \; ; \quad \begin{vmatrix} 145 & -3 \\ 239 & 51 \end{vmatrix} = 7395 + 717 = 8112 \; ;$$

$$x_C = \frac{8112}{2028} = 4 \; ; \quad \begin{vmatrix} 40 & 145 \\ -4 & 239 \end{vmatrix} 9560 + 580 = 10140 \; ; \quad y_C = \frac{10140}{2028} = 5$$

$$\boxed{C = (4, 5, 0)}$$

Nell'esempio precedente abbiamo calcolato che per $z = 12$ l'asse passava per il punto $Q \equiv (3,4,12)$ sostituiamo $z = 12$ nelle equazioni ed avremo

$$\begin{cases} 40x - 3y - 9\cdot 12 = 145 \\ -4x + 51y - 16\cdot 12 = 239 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 40x - 3y = 253 \\ -4x + 51y = 431 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 253 & -3 \\ 431 & 51 \end{vmatrix} = 12903 + 1293 = 14196 \; ; \quad \frac{14196}{2028} = x_{(Q)} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 40 & 253 \\ -4 & 431 \end{vmatrix} = 17240 + 1012 = 18252 \; ; \quad \frac{18252}{2028} = y_{(Q)} = 9$$

Quindi se alle coordinate di Q, (che aveva nel cilindro all'origine assi) aggiungiamo le coordinate di "C" si ha:

$$x_Q = 3 + x_C = (3+4) = x_{(Q)} = 7$$

$$y_Q = 4 + y_C = (4+5) = y_{(Q)} = 9$$

$$z_Q = 12 + z_C = (12+0) = z_{(Q)} = 12$$

Ponendo ...

Ponendo $z = 0$ nell'equazione data si ha:

$$160x^2 + 153y^2 - 24xy - 1160x - 1434y + 5229 = 0$$

che è la conica intersezione col piano xy.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 160 & -12 & -580 \\ -12 & 153 & -717 \\ -580 & -717 & +5229 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} 5129(24480 - 144) = 5129(24336) = +124819344 \\ +717(114720 + 6960) = -717(121680) = -87244560 \\ -580(8604 + 88740) = -580(97344) = -56459520 \end{array}$$

Il determinante $\neq 0$ = (conica non degenere) $\Delta = -18884736$

Sezione retta di un cilindro circolare

L'equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

sia di un cilindro. Un piano perpendicolare avrà per rette di giacitura la direttrice e le generatrici del cilindro, perciò avrà per equazione: $\left(K = \frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}}{2}\right)$

$$\left(\sqrt{1-\frac{a_{11}}{K}}\right)x + \left(\sqrt{1-\frac{a_{22}}{K}}\right)y + \left(\sqrt{1-\frac{a_{33}}{K}}\right)z + \delta = 0$$

(ove δ è la distanza del piano dall'origine degli assi.) Le due equazioni rappresentano la sezione retta del cilindro, ma trattandosi di una linea spaziale, è difficile riconoscere subito di quale curva si tratti.

Poichè il polinomio del cilindro, è un polinomio di secondo grado in x, y, z, l'intersezione con qualsiasi piano è una conica. Supponiamo che, nelle sezioni coi piani: $z=0$; $y=0$; $x=0$; si siano trovati tre casi ellittici; con ciò resta l'ambiguità di sapere se trattasi

tasi di un cilindro ellittico, o di un cilindro circolare.
Questa ambiguità è presto risolta:
Se con l'intersezione del piano $z=0$ abbiamo trovato l'ellissi di semiassi "a" e "b" con "a" > "b" ed: $a(\cos\gamma)=b$, allora il cilindro è circolare di raggio b.

Qualora avessimo sezionato il cilindro con un piano $z=12$ abbiamo visto che il centro si sposta nel punto (Q) ove $(Q)\equiv(+7,+9,+12)$; ponendo $z=12$ nell'equazione data abbiamo:

$$160x^2+153y^2+25\cdot(12)^2-24xy-96\cdot 12y-72\cdot 12x-1160x-1434y+768\cdot 12z+5229=0$$

cioè:

$$160x^2+153y^2-24xy-(1160+864)x-(1434+1152)y+(3600+9216+5229)=0$$

$$\boxed{160x^2+153y^2-24xy-2024x-2586y+18045=0}$$

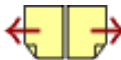
Si ha una equazione di una conica che differisce solo nei coefficienti: $2a_{14}$, $2a_{24}$, a_{44} dalla precedente.

$$\begin{vmatrix} 160 & -12 & -1012 \\ -12 & 153 & -1293 \\ -1012 & -1293 & +18045 \end{vmatrix} \begin{matrix} 18045\,(\underset{A_{33}}{24336}) = & = +439143120 \\ +1293\,(\underset{-A_{32}=(-219024)}{-206880-12144}) & = -283198032 \\ -1012\,(\underset{A_{31}=(170352)}{+15516+154836}) & = -172396224 \\ & = -66887496 \end{matrix}$$

$$\frac{A_{31}}{A_{33}}=\frac{170352}{24336}=x_{(Q)}=7\;;\qquad \frac{A_{32}}{A_{33}}=\frac{219024}{24336}=y_{(Q)}=9$$

valori che avevamo già trovato. Il valore del determinante minore di terzo (come nel caso precedente) con $A_{33}>0$ si determina

minore di zero (come nel caso precedente) con $A_{33} > 0$ si determina che la conica è un ellisse reale di centro: $(Q) = (7, 9, 12)$ ed assi e ruotazione immutati perché calcolabili con gli stessi coefficienti: a_{11}, a_{22}, $2a_{12}$: $a = 2,166\bar{6}$; $b = 2$; $\varphi = 53° 07' 48''$

Tuttociò conferma che l'equazione data è un cilindro che interseca il piano xy con un ellisse di centro $C \equiv (4, 5, 0)$, ruotato di $\varphi = 53° 07' 48''$ con assi $a = 2,166\bar{6}$; $b = 2$.

Cioè dovrà essere:

$$\sqrt{\frac{K s_1^2 s_2^2}{(a_{11}+a_{22})-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}}\cdot\sqrt{\frac{a_{11}+a_{22}-a_{33}}{a_{11}+a_{22}+a_{33}}}=\sqrt{\frac{K s_1^2 s_2^2}{(a_{11}+a_{22})+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}}$$

elevando a quadrato e semplificando si ha:

$$\left[(a_{11}+a_{22})-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}\right]\left[(a_{11}+a_{22})+a_{33}\right]=\left[(a_{11}+a_{22})+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}\right]\left[(a_{11}+a_{22})-a_{33}\right]$$

$$(a_{11}+a_{22})^2+a_{33}(a_{11}+a_{22})-a_{33}\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}-(a_{11}+a_{22})\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}=$$

$$=(a_{11}+a_{22})^2-a_{33}(a_{11}+a_{22})-a_{33}\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}+(a_{11}+a_{22})\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}$$

$$2a_{33}(a_{11}+a_{22})=2(a_{11}+a_{22})\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}$$

$$\boxed{a_{33}=\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2+(2a_{12})^2}}$$

Condizione affinché il cilindro abbia sezione retta circolare.

verifichiamo il nostro cilindro dell'esempio numerico

$$25=\sqrt{(160-153)^2+(24)^2}$$

$$25=\sqrt{(7)^2+24^2}=$$

$$25 = \sqrt{(7)^2 + 24^2} =$$

$$25 = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625}$$

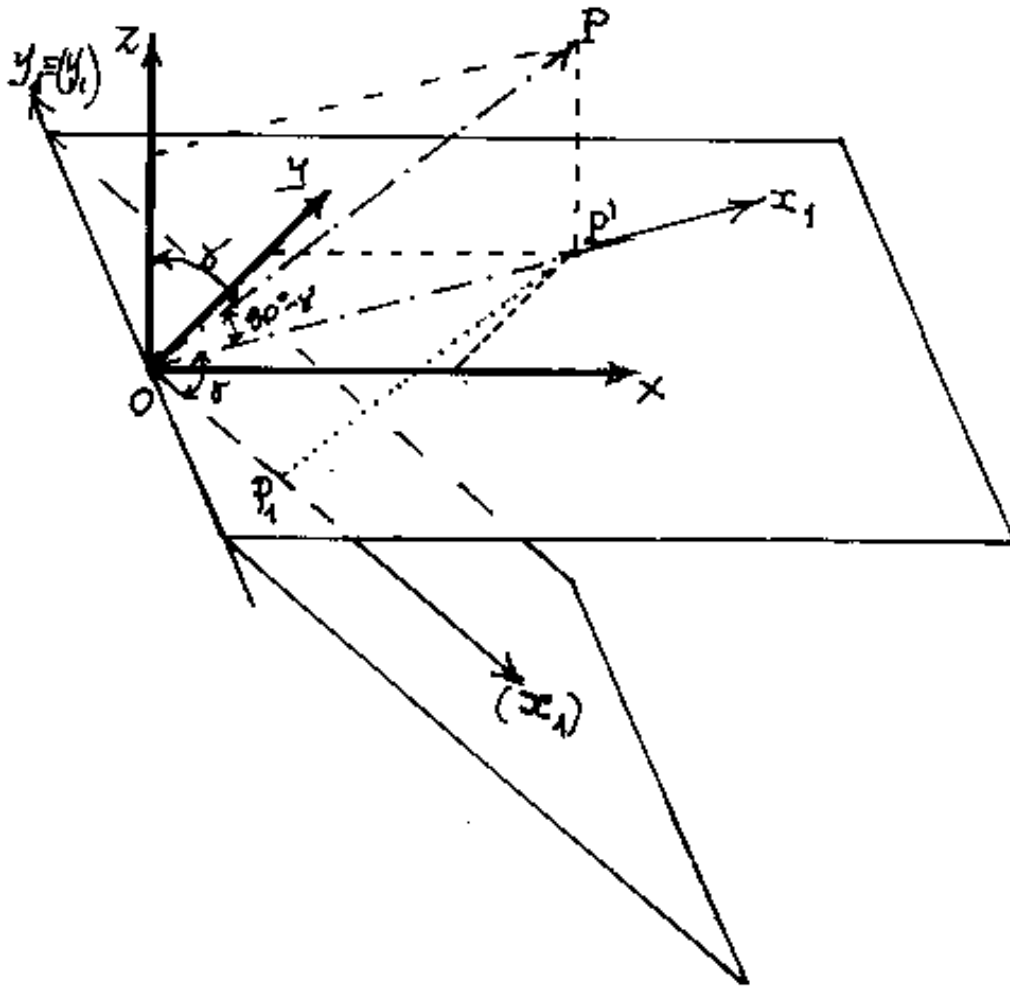
verificato

oppure: essendo: $a_{33} = (1 - \cos^2\gamma) = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)$

$$\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} = \sqrt{\left[(1-\cos^2\alpha) - (1-\cos^2\beta)\right]^2 + (2\cos\alpha\cos\beta)^2}$$

$$= \sqrt{(-\cos^2\alpha + \cos^2\beta)^2 + (2\cos\alpha\cos\beta)^2} =$$

$$= \sqrt{(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)^2} = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = a_{33}.$$

Sezione retta in generale

Sia $\overrightarrow{OP}$ una direzione riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxyz dai coseni direttori: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, tali che il piano per l'origine "O" degli assi e normale alla direzione $\overrightarrow{OP}$ abbia per equazione:

$$(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z = 0$$

$$(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z = 0$$

consideriamo il piano passante per z e per la retta $\vec{OP}$, esso intersecherà il piano xy secondo la retta ox_1 che assumeremo come nuova ascissa e la sua perpendicolare oy_1, che assumeremo come nuova ordinata, entrambe sul piano xy. Cioè le figure sul

piano xy possiamo riferirle agli assi ruotati $x_1 y_1$. (Le figure sul piano xy sono le sezioni del cilindro di direttrice $\overrightarrow{OP}$ ottenute ponendo $z=0$ nella sua equazione).

Consideriamo ora il piano normale ad $\overrightarrow{OP}$ (sul quale c'è la sezione retta del cilindro) e su questo piano consideriamo un nuovo sistema di assi: $O(y_1)(x_1)$, ove le ordinate $(y_1) = y_1$ si proiettano invariate, mentre le ascisse: (x_1) sono accorciate rispetto ad x_1 cioè: $(x_1) = x_1(\cos\gamma)$.

ciò consente di avere la sezione retta in funzione delle coordinate $(x_1)(y_1)$.

Esempio numerico:

sezione retta del cilindro:

$$160x^2 + 153y^2 + 25z^2 - 24xy - 72xz - 96yz - 1160x - 1434y + 768z + 5229 = 0$$

essendo lo stesso cilindro dell'esempio precedente, rappia

mo già che: $K=169$, $\cos\alpha = \frac{3}{13}$; $\cos\beta = \frac{4}{13}$; $\cos\gamma = \frac{12}{13}$; $\operatorname{sen}\gamma = \frac{5}{13}$

e che per $z=0$ si ha l'equazione:

$$160x^2 + 153y^2 - 24xy - 1160x - 1434y + 5229 = 0$$

che dobbiamo riferire agli assi ruotati

Ox_1y_1:

L'angolo di ruotazione degli assi sia

$\varphi = X\hat{O}X_1$, avremo:

Dalle formule per la rotazione degli assi (vedi II volume)

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\varphi - y_1 \operatorname{sen}\varphi \\ y = x_1 \operatorname{sen}\varphi + y_1 \cos\varphi \end{cases}$$

si ricava:

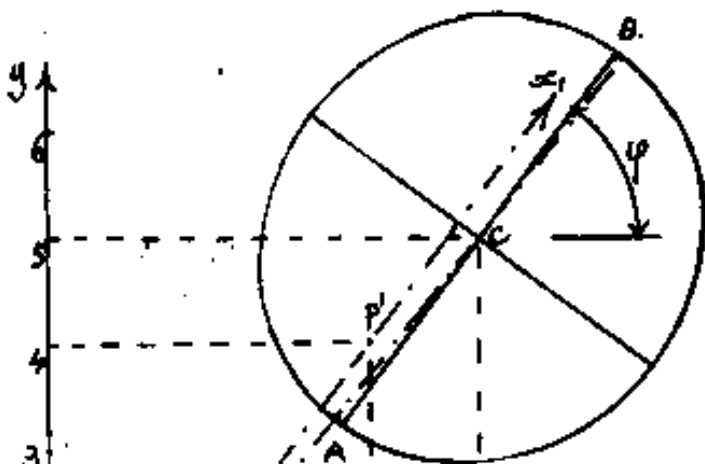
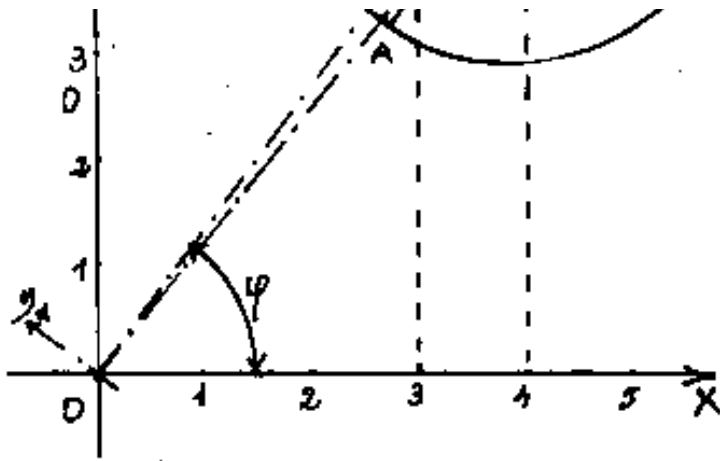
$$\begin{cases} x^2 = x_1^2 \cos^2\varphi + y_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi - 2 x_1 y_1 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \\ y^2 = x_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi + y_1^2 \cos^2\varphi + 2 x_1 y_1 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \end{cases}$$

ed anche:

$$xy = x_1^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi - y_1^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi - x_1 y_1 \operatorname{sen}^2\varphi + x_1 y_1 \cos^2\varphi$$

cioè:

$$xy = x_1^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi - y_1^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + x_1 y_1 (\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi)$$

Per fare le sostituzioni occorre calcolare: $(\operatorname{sen}\varphi)$ e $(\cos\varphi)$.

Come si vede dalla figura a fianco, non possiamo fare la sostituzione direttamente nella formula traslata perché C risulterebbe che non insiste sulle ascisse x_1. Se prendes=

sulle ascisse x_1. Se prendessimo per x_1 la $\overline{OC}$ su $\overline{OC}$ non figura il massimo semidiametro dell'ellisse.

Quindi per cilindri traslati occorre prima riportarli al centro e poi fare la

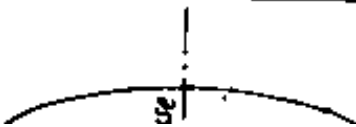
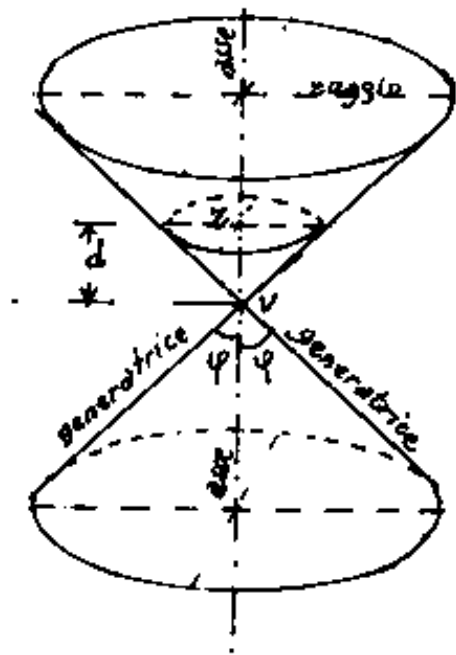
Il Cono

Date due rette che si incontrano in un punto "V", diremo superficie conica, o cono, la superficie generata da una delle due rette (retta generatrice), che ruoti intorno all'altra (retta asse del cono), mantenendo costante il punto comune "V", (vertice del cono).

Se le rette mantengono costante anche il loro angolo al vertice, (φ), si ha il cono circolare retto.

Se la retta che ruota traccia un ellisse su un piano perpendicolare all'asse, si ha un cono ellittico, cioè un cono circolare inclinato.

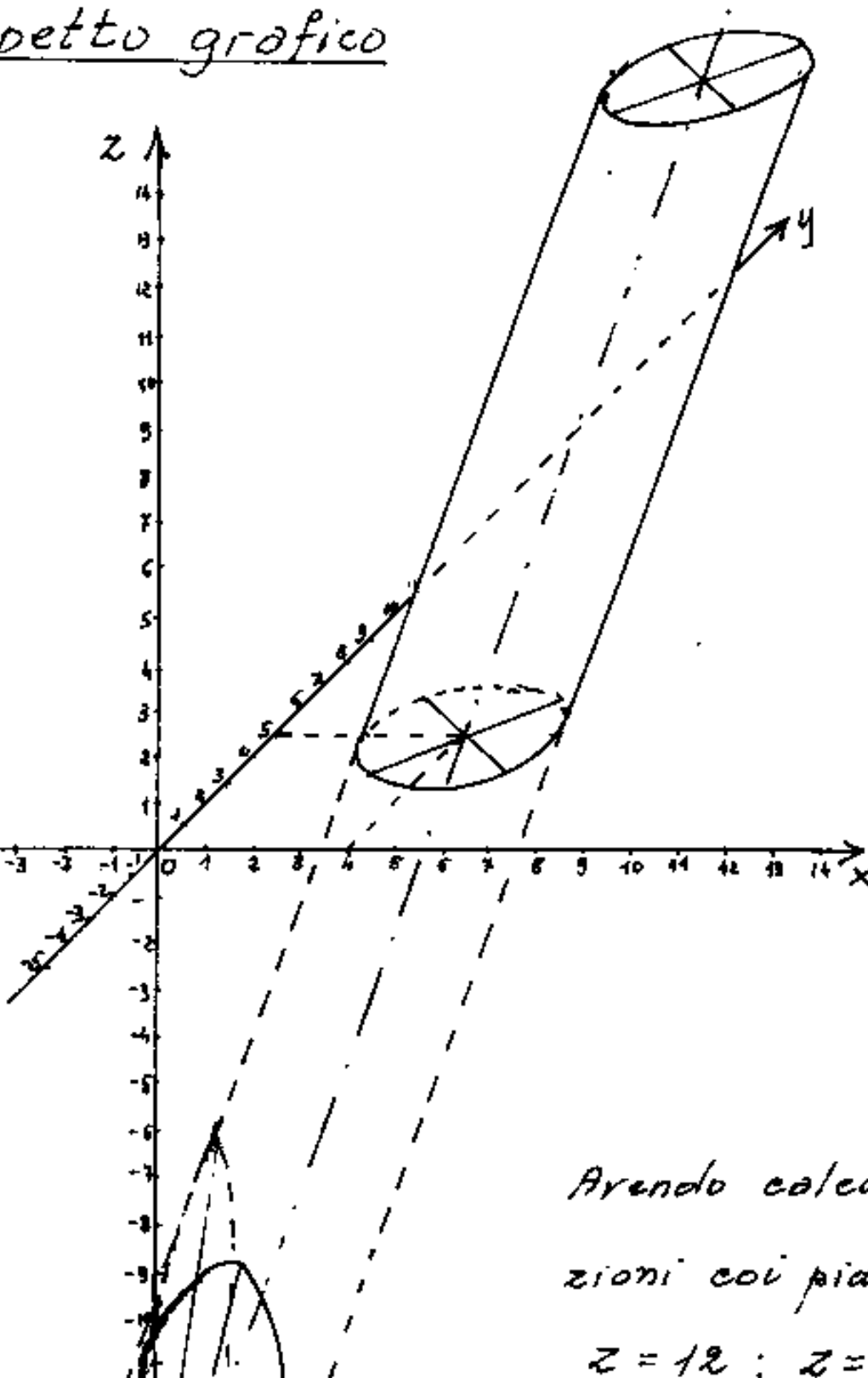
(Un cono ellittico ammette sempre una giacitura di piani paralleli che lo sezionino secondo circonferenze)

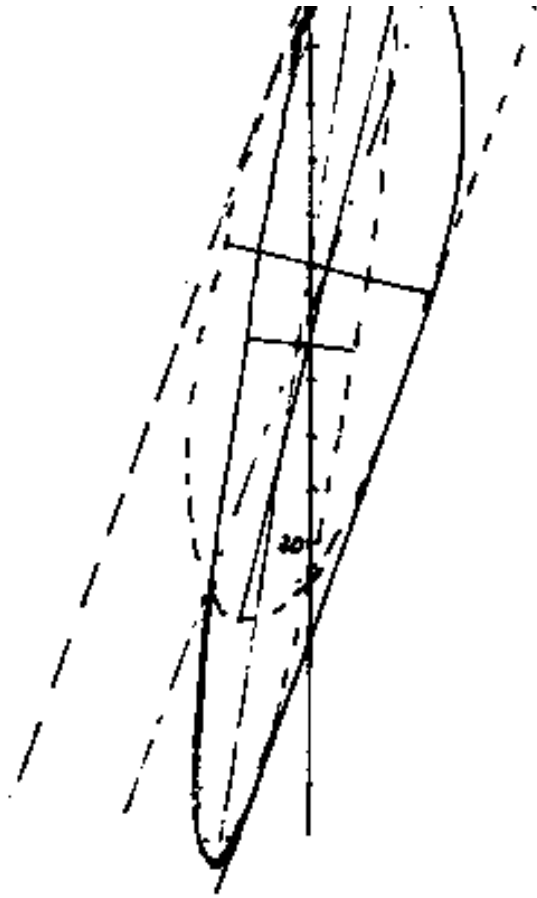
Consideriamo un cono circolare retto, e sezioniamolo con piani perpendicolari all'asse. Notiamo che il raggio "r" delle circonferenze sezioni, è proporzionale alla distanza "d"

nale alla distanza d del piano dal vertice "V" del cono.

$$r = d\,(\tan\varphi)$$

ove "2φ" è l'angolo di apertura del cono. Od anche:

$$r_1 : r_2 = d_1 : d_2$$

Prospetto grafico

Avendo calcolato le interse-
zioni coi piani:

$z = 12$; $z = 0$; $y = 0$; $x = 0$;

$z = 12$; $z = 0$; $y = 0$; $x = 0$;

si sono riportate nel disegno le ellissi relative, anche se il cilindro intersecando l'asse z ne rende non facile la visione.

dalla : $25z^2 + 768z + 5229 = 0$

$z_1 = -10,19$; $z_2 = -20,53$.

E' evidente che nel vertice il raggio è nullo.

Un cono con vertice nel centro assi, con $\varphi = 45°$, (per cui: $tang(\varphi) = 1$), e che abbia l'asse sull'asse Z; avrà per equazione: $\boxed{X^2 + y^2 - Z^2 = 0}$; se l'angolo di apertura "2φ" $\neq 45°$ avremo:

$$\boxed{X^2 + y^2 - (Z\,tg\varphi)^2 = 0}$$

Sono equazioni di circonferenze su piani paralleli ad xy, con raggio proporzionale a Z, e centro sull'asse Z.

Se il cono ha per asse l'asse y avremo: $\boxed{X^2 - (y\,tg\varphi)^2 + Z^2 = 0}$

(Si noti che le variabili sono tutte al quadrato, due, con segno positivo, hanno lo stesso coefficiente; la variabile, il cui asse è anche asse del cono, è con segno negativo e, salvo il caso di $45° = \varphi$, ha diverso coefficiente.

Se il vertice è spostato di "s" sull'asse Z = asse del cono, la formula diventa: $\boxed{X^2 + y^2 - (Z+s)^2 tg^2\varphi = 0}$ ove il vertice $V \equiv (0, 0, -s)$. Se facciamo una traslazione di assi in modo che $V \equiv (X_V, Y_V, Z_V)$ avremo: $\boxed{(X - X_V)^2 + (y - y_V)^2 - (z - Z_V)^2 tg^2\varphi = 0}$

e sviluppando i quadrati:

$$x^2 + y^2 - z^2 tg^2\varphi - 2(x_v)x - 2(y_v)y + 2(z_v tg^2\varphi)z + (x_v^2 + y_v^2 - z_v^2 tg^2\varphi) = 0$$

che può essere moltiplicata per una costante arbitraria K e presentarsi nella forma riducibile alla: (dividendo per K)

$$\boxed{x^2 + y^2 + az^2 + bx + cy + dz + e = 0}$$

ove $\boxed{a < 0}$ altrimenti sarebbe un cilindro.

Il confronto delle due equazioni permette di dire:

"Cono circolare retto con asse parallelo all'asse z, con apertura: $2\varphi = 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{-a})$;

$x_V = -b/2$; $y_V = -c/2$; $z_V = d/2(-a)$

dovrà verificarsi che: $e = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{-a}\right)$

Esempio numerico

Vogliamo costruire l'equazione di un cono avente il vertice: $V \equiv (3, 4, 6)$, con apertura: $2\varphi = 53°\ 07'\ 48''$, cioè: $\mathrm{tang}\,\varphi = \left(\frac{1}{2}\right)$; Sezione circolare ed asse parallelo a Z.

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (z-6)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} - 6x - 8y + 3z + 16 = 0 \quad (1) \qquad \text{se } (K = 8)$$

$$8x^2 + 8y^2 - 2z^2 - 48x - 64y + 24z + 128 = 0$$

Su questa equazione proponiamoci il problema inverso.

1) I coefficienti di: x^2, y^2, z^2 hanno segni diversi; non è un ci

1) I coefficienti di: x^2, y^2, z^2 hanno segni diversi; non è un cilindro, può essere un cono.

2) x^2 ed y^2 hanno lo stesso coefficiente $= 8$; perciò dividiamo l'intera equazione per 8, si trova la (1)

3) verifichiamo $e = +16 = \left(3^2 + 4^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2(4)\right) = \left(9 + 16 - \frac{9}{4}4\right) = 16$ verificato.

"è un cono con asse parallelo a z ove $x_V = +\frac{6}{2} = 3$; $y_V = +\frac{8}{2} = 4$; $z_V = \frac{3}{2}4 = 6$

4) Si noti che mancano i coefficienti di xy, xz, yz. —

Cono ellittico

- Se il cono anziché circolare è ellittico, ed ha l'asse coincidente con l'asse Z, i semiassi dell'ellisse saranno proporzionali a Z, e se il vertice è al centro assi avremo:

$$\frac{x^2}{(aZ)^2} + \frac{y^2}{(bZ)^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = Z^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2Z^2 = 0$$

- Se facciamo la solita traslazione:

$$b^2(x-x_v)^2 + a^2(y-y_v)^2 - a^2b^2(Z-Z_v)^2 = 0$$

e sviluppando i quadrati:

$$(1) \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2Z^2 - 2(b^2x_v)x - 2(a^2y_v)y + 2(a^2b^2z_v)z + (b^2x_v^2 + a^2y_v^2 - a^2b^2z_v^2) = 0$$

equazione che può presentarsi nella forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}Z + a_{44} = 0$$

- Si noti che:

$$\frac{a_{11}a_{22}}{-a_{33}} = K$$

perciò, dividendo per K, si deve ottenere la (1)

$-a_{33}$

e verificare che: $(-a_{11} \cdot a_{22}) = (a_{33})$; che: $\left(\frac{a_{14}^2}{a_{11}} + \frac{a_{24}^2}{a_{22}} - \frac{a_{34}^2}{a_{33}} \right) = a_{44}$

Puo' essere più vantaggioso dividere l'intera equazione per il coefficiente della variabile al quadrato che risulta col segno negativo. (preso di segno positivo) con ciò eliminiamo l'eventuale "K" e l'equazione (1) si presenta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 - 2\left(\frac{x_v}{a^2}\right)x - 2\left(\frac{y_v}{b^2}\right)y + 2(z_v)z + \left(\frac{x_v^2}{a^2} + \frac{y_v^2}{b^2} - z_v^2\right) = 0$$

Esempio numerico

sia data l'equazione:

$$18x^2+8y^2-72z^2-108x-64y+144z+218=0$$

(a_{11}, a_{22}, a_{33}, $2a_{14}$, $2a_{24}$, $2a_{34}$, a_{44})

1) Il polinomio ha i coefficienti a_{11}, a_{22}, a_{33} di segno discorde → non può essere un cilindro, può essere un cono.

2) mancano i coefficienti $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$, quindi è solo traslato

3) Il segno negativo su z^2 indica che l'asse è parallelo a Z. ma, $a_{11} \neq a_{22}$ perciò è ellittico.

4) Supponendo un cono ellittico solo traslato con asse parallelo a Z, dividiamo l'equazione per $|a_{33}|$ si ha:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2-2\left(\frac{3}{4}\right)x-2\left(\frac{4}{9}\right)y+2(1)z+\frac{109}{36}=0$$

verifichiamo: $\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot 4+\left(\frac{4}{9}\right)^2 9-(1)^2=109/36$ (è un cono ellittico)

perciò: $a=2$; $b=3$ $x_v=3$; $y_v=4$; $z_v=-1$

perciò: $a = 2$; $b = 3$ $x_v = 3$; $y_v = 4$; $z_v = -1$

$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} = (z+1)^2}$$

sviluppando ritorna l'equazione data con $K=2$.

In ogni cono ellittico esiste una giacitura di piani paralleli che possono sezionarlo secondo circonferenze.

Tuttavia il cono ellittico differisce dal cono circolare

perché nel cono circolare l'angolo formato dalle generatrici con l'asse è costante, cioè, l'angolo di apertura al vertice "2φ" è costante.

Nel cono ellittico l'angolo formato dalle generatrici con l'asse è variabile infatti: se $a \neq b$ varia da $\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{h}\right)$ ad $\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{h}\right)$, ove: "a" e "b" sono i semidiametri dell'ellisse ed "h" è l'altezza del cono.

In altre parole un cono ellittico ad asse inclinato, può sezionarsi con un piano di riferimento (per esempio con xy ad $z=0$,) secondo una circonferenza, cioè non può essere interpretato come un cono circolare ad asse inclinato, perché le sezioni rette non saranno delle circonferenze, ma soprattutto non sarà costante l'angolo al vertice fra l'asse e le generatrici.

Per ora abbiamo trattato solo coni con assi normali ai piani di riferimento, vediamo ora di ricavare le formule per coni ad assi inclinati, cioè aventi per coseni direttori: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. ——

Equazione generale del cono circolare

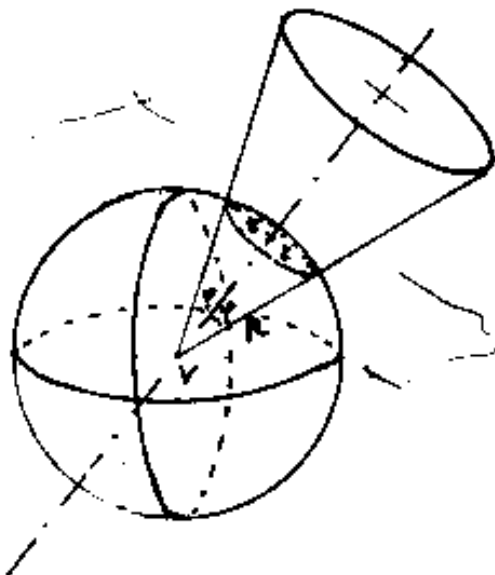
Consideriamo ora un cono che abbia per asse, una retta qualsiasi: $\frac{x-x_V}{l} = \frac{y-y_V}{m} = \frac{z-z_V}{n}$, che possiamo ridurre alla forma:

$$\frac{(x-x_V)}{\cos\alpha} = \frac{(y-y_V)}{\cos\beta} = \frac{(z-z_V)}{\cos\gamma}$$

ove:

$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$; $\cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$; $\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$;

Se consideriamo che il nostro cono abbia apertura: "2φ" e che il vertice "V" sia il centro di una sfera di raggio "R", avremo che l'equazione della sfera sarà:

$$(x-x_V)^2+(y-y_V)^2+(z-z_V)^2 = R^2$$

mentre il cerchio intersezione fra tale sfera ed il nostro cono avrà per raggio:

$$r = R\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

questo cerchio giacerà su un piano perpendicolare all'asse del cono, e sarà spostato rispetto a "V"

l'asse del cono, e sarà spostato rispetto a V

di: $R\cos\varphi$; cioè avrà per equazione:

$$\cos\alpha(x-x_V)+\cos\beta(y-y_V)+\cos\gamma(z-z_V)\pm R\cos\varphi=0$$

Ma il luogo geometrico delle intersezioni di questo piano e la sfera di raggio variabile R, è l'insieme dei cerchi sezioni rette del nostro cono, le cui circonferenze sono la superficie conica.

Quindi se eliminiamo R fra le due equazioni abbiamo l'equazione del cono:

$$(x-x_V)^2+(y-y_V)^2+(z-z_V)^2=\left[\cos\alpha(x-x_V)+\cos\beta(y-y_V)+\cos\gamma(z-z_V)\right]^2\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

Quindi: L'equazione di un qualsiasi cono circolare retto, comunque disposto rispetto agli assi, è data dall'equazione di una sfera di centro V che abbia per raggio l'equazione del piano per V, normale all'asse, diviso per il coseno del semiangolo di apertura del cono. Poiché nell'equazione della sfera, il raggio figura elevato a quadrato, anche l'equazione del piano e $\cos\varphi$ saranno a quadrato.

Si noti che l'equazione è generale, comprende l'equazione del cilindro circolare retto, basta porre: $\varphi=0$.

sviluppando:

$$\cos^2\varphi\left[(x-x_V)^2+(y-y_V)^2+(z-z_V)^2\right]=\left[\cos^2\alpha(x-x_V)^2+\cos^2\beta(y-y_V)^2+\cos^2\gamma(z-z_V)^2\right.$$

$$\left.+2\cos\alpha\cos\beta(x-x_V)(y-y_V)+2\cos\alpha\cos\gamma(x-x_V)(z-z_V)+2\cos\beta\cos\gamma(y-y_V)(z-z_V)\right]$$

$$+2\cos\alpha\cos\beta(x-x_V)(y-y_V)+2\cos\alpha\cos\gamma(x-x_V)(z-z_V)+2\cos\beta\cos\gamma(y-y_V)(z-z_V)\Big]$$

$$\Big[(\cos^2\varphi-\cos^2\alpha)(x-x_V)^2+(\cos^2\varphi-\cos^2\beta)(y-y_V)^2+(\cos^2\varphi-\cos^2\gamma)(z-z_V)^2\Big]=$$

$$=\Big[+2\cos\alpha\cos\beta\cdot xy-2\cos\alpha\cos\beta\, y_V x-2\cos\alpha\cos\beta\, x_V y+2\cos\alpha\cos\beta\, x_V y_V+$$

$$+2\cos\alpha\cos\gamma\, xz-2\cos\alpha\cos\gamma\, z_V x-2\cos\alpha\cos\gamma\, x_V z+2\cos\alpha\cos\gamma\, x_V z_V+$$

$$+2\cos\beta\cos\gamma\, yz-2\cos\beta\cos\gamma\, z_V y-2\cos\beta\cos\gamma\, y_V z+2\cos\beta\cos\gamma\, y_V z_V=$$

$$=2\cos\alpha\cos\beta\, xy+2\cos\alpha\cos\gamma\, xz+2\cos\beta\cos\gamma\, yz-2\cos\alpha(\cos\beta\, y_V+\cos\gamma\, z_V)x-2\cos\beta(\cos\alpha\, x_V+\cos\gamma\, z_V)y-2\cos\gamma(\cos\alpha\, x_V+\cos\beta\, y_V)+$$

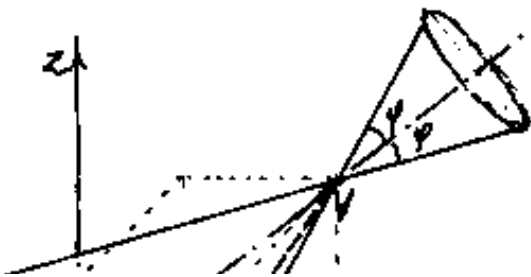
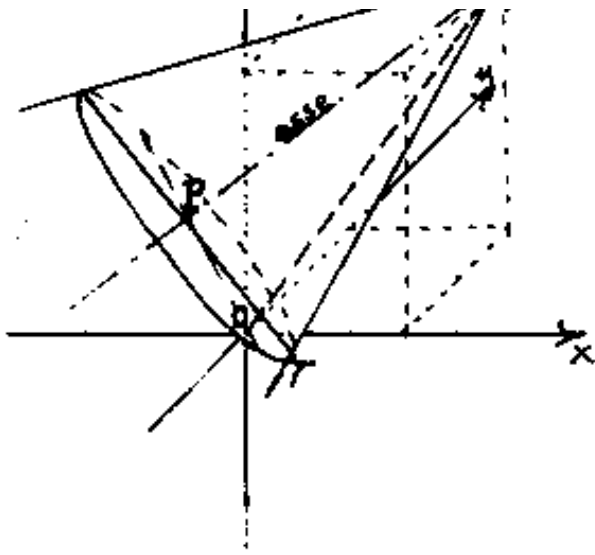
$$+2(\cos\alpha\, x_V\cdot\cos\beta\, y_V+\cos\alpha\, x_V\cos\gamma\, z_V+\cos\beta\, y_V\cos\gamma\, z_V)\Big]$$

Sviluppando i quadrati al primo membro dell'uguaglianza si ha:

$$\left[(\cos^2\varphi-\cos^2\alpha)(x^2-2x_v x+x_v^2)+(\cos^2\varphi-\cos^2\beta)(y^2+2y_v y+y_v^2)+\right.$$
$$\left.+(\cos^2\varphi-\cos^2\gamma)(z^2+2z_v z+z_v^2)\right]=$$

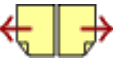
Se portiamo al primo membro anche i termini del secondo membro e li raggruppiamo in ordine di grado, in modo da rendere più compatta la formula si ha:

$$\left\{\begin{matrix}(\cos^2\varphi-\cos^2\alpha)x^2+\\+(\cos^2\varphi-\cos^2\beta)y^2+\\+(\cos^2\varphi-\cos^2\gamma)z^2\end{matrix}\right\}-2\left\{\begin{matrix}(\cos\alpha\cos\beta)xy+\\+(\cos\alpha\cos\gamma)xz+\\+(\cos\beta\cos\gamma)yz\end{matrix}\right\}+2\left\{\begin{matrix}[\cos\alpha(\cos\alpha x_v+\cos\beta y_v+\cos\gamma z_v)-\cos\varphi x_v]x+\\+[\cos\beta(\cos\alpha x_v+\cos\beta y_v+\cos\gamma z_v)-\cos\varphi y_v]y+\\+[\cos\gamma(\cos\alpha x_v+\cos\beta y_v+\cos\gamma z_v)-\cos\varphi z_v]z\end{matrix}\right\}-$$

$$-\left\{\begin{matrix}\cos^2\alpha\, x_v+\cos^2\beta\, y_v+\cos^2\gamma\, z_v+\\+2(\cos\alpha\cos\beta\, x_v y_v+\cos\alpha\cos\gamma\, x_v z_v+\cos\beta\cos\gamma\, y_v z_v-\\-\cos^2\varphi(x_v^2+y_v^2+z_v^2)\end{matrix}\right\}=0$$

Occorre evidenziare e distinguere l'asse $\overline{PV}$ del cono

guere l'asse PV del cono dalla retta $\overline{OV}$, dove P è l'intersezione dell'asse col piano π ad essa normale, e passante per l'origine "O" degli assi. Abbiamo:

$$\overline{OV}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PV}^2$$

$$(\cos\alpha)X_p + (\cos\beta)Y_p + (\cos\gamma)Z_p = 0$$

$$\overline{PO}^2 = X_p^2 + Y_p^2 + Z_p^2$$

La formula potrebbe essere resa più concisa se sostituiamo: $\left[\cos\alpha(\cos\alpha \cdot x_v + \cos\beta y_v + \cos\gamma z_v) - \cos^2\varphi X_v\right] = \left[\cos\alpha(\overline{PV}) - \cos^2\varphi X_v\right] =$

$= \left[(X_v - X_p) - \cos^2\varphi X_v\right] = \left[X_v \operatorname{sen}^2\varphi - X_p\right]$; analogamente le altre: $\left[X_v^2 + y_v^2 + Z_v^2\right] = \overline{OV}^2$

$$\left[\cos^2\alpha X_v^2 + \cos^2\beta y_v^2 + \cos^2\gamma Z_v^2 + 2(\cos\alpha\cos\beta x_v y_v + \cos\alpha\cos\gamma \cdot x_v z_v + \cos\beta\cos\gamma \cdot y_v z_v)\right] =$$

$$(\cos\alpha \cdot x_v + \cos\beta \cdot y_v + \cos\gamma \cdot z_v)^2 = \overline{PV}^2$$

essa diverrebbe:

$$\left[(\cos^2\varphi - \cos^2\alpha)X^2 + (\cos^2\varphi - \cos^2\beta)y^2 + (\cos^2\varphi - \cos^2\gamma)z^2 - 2\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha\cos\beta \cdot xy + \\ + \cos\alpha\cos\gamma\, xz + \\ + \cos\beta \cdot \cos\gamma\, yz\end{array}\right\} + 2\left\{\begin{array}{l}(X_v \operatorname{sen}^2\varphi - X_p)\,X + \\ + (y_v \operatorname{sen}^2\varphi - y_p)\,y + \\ + (z_v \operatorname{sen}^2\varphi - z_p)\,z\end{array}\right\} +\right.$$

$$\left. + \left(-\overline{PV}^2 + \overline{OV}^2\cos^2\varphi\right) = 0\right]$$

Dalla quale è possibile notare che se una generatrice del cono passa per O, cioè se coincide $\overline{OV}$ o $\overline{TV}$, il termine noto si annulla: $\left(\overline{OV}^2\cos^2\varphi - \overline{PV}^2\right) = 0$.

In generale una equazione di una superficie conica, (il cilindro è da considerare un cono con vertice all'infinito) sarà del tipo:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^3 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Se: $a_{44} = 0$ il cono passa per l'origine con una generatrice.

ed: $\overline{OV}\cos\varphi = \overline{PV}$

Se: $2a_{12} = 0$; $a_{13} = 0$; $a_{23} = 0$; $a_{11} = a_{22}$; $\frac{a_{33}}{a_{11}} = \frac{a_{33}}{a_{22}} < 0$, il cono ha l'asse parallelo all'asse Z.

---

facciamo una analisi del significato dei coefficienti:
(considerandoli già divisi per l'eventuale K arbitrario).

$$a_{11}/K = (\cos^2\varphi - \cos^2\alpha) = (\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\varphi)$$
$$a_{22}/K = (\cos^2\varphi - \cos^2\beta) = (\operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\varphi)$$
$$a_{33}/K = (\cos^2\varphi - \cos^2\gamma) = (\operatorname{sen}^2\gamma - \operatorname{sen}^2\varphi)$$

$$\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{K} = (3\cos^2\varphi - 1)$$

$$a_{12}/K = (-\cos\alpha\cos\beta)$$
$$a_{13}/K = (-\cos\alpha\cos\gamma)$$
$$a_{23}/K = (-\cos\beta\cos\gamma)$$

$$-K = \left(\frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} + \frac{a_{12}\,a_{23}}{a_{13}} + \frac{a_{13}\,a_{23}}{a_{12}}\right)$$

$$a_{14} = -(a_{11}x_V + a_{12}y_V + a_{13}z_V)$$
$$a_{24} = -(a_{12}x_V + a_{22}y_V + a_{23}z_V)$$
$$a_{34} = -(a_{13}x_V + a_{23}y_V + a_{33}z_V)$$
$$a_{44} = (a_{11}x_V^2 + a_{22}y_V^2 + a_{33}z_V^2 + 2a_{12}x_Vy_V + 2a_{13}x_Vz_V + 2a_{23}y_Vz_V)$$

Confrontando con i coefficienti trovati per l'equazione del cilindro si nota che sono identici se poniamo: $\varphi=0$, cioè: $\cos\varphi=1$. Abbiamo quindi una incognita in più, ed è l'apertura angolare "2φ" del cono. Si nota che $\cos^2\varphi$, figura solo nei primi tre coefficienti che, sommandoli:

... nei primi tre coefficienti che, sommandoli:

$(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = K\left(3\cos^2\varphi - 1\right)$; si elide: $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ e restano due incognite: "K" e "$\cos^2\varphi$". "K" è possibile calcolarla con la seconda terna di coefficienti; infatti

$$\frac{a_{12} \cdot a_{13}}{a_{23}} = \frac{+K(\cos\alpha\cos\beta) \cdot K(\cos\alpha\cos\gamma)}{-K(\cos\beta\cos\gamma)} = -K\cos^2\alpha$$

$$\frac{a_{12}\, a_{23}}{a_{13}} = -K\cos^2\beta\ ; \qquad \frac{a_{13}\, a_{23}}{a_{12}} = -K\cos^2\gamma$$

e sommando:

$$\left(\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}+\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}+\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}\right)=-K\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)=-K$$

questa espressione può scriversi:

$$K=-\frac{a_{12}^2a_{13}^2+a_{12}^2a_{23}^2+a_{13}^2a_{23}^2}{a_{12}\,a_{13}\,a_{23}}$$

dalla: $\cos^2\varphi=\frac{1}{3}\left(\frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}}{K}+1\right)$

$$\cos^2\varphi=\frac{1}{3}\left(1-\frac{(a_{12}a_{13}a_{23})(a_{11}+a_{22}+a_{33})}{a_{12}^2a_{13}^2+a_{12}^2a_{23}^2+a_{13}^2a_{23}^2}\right)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{a_{12}a_{13}}{-K\,a_{23}}=\frac{a_{12}a_{13}\,(a_{12}a_{13}a_{23})}{+a_{23}\,(a_{12}^2a_{13}^2+a_{12}^2a_{23}^2+a_{13}^2a_{23}^2)}=+\frac{1}{1+\left(\frac{a_{23}}{a_{13}}\right)^2+\left(\frac{a_{23}}{a_{12}}\right)^2}$$

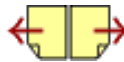
$$\cos^2\beta=\frac{a_{12}a_{23}}{-K\,a_{13}}=\frac{a_{12}a_{23}\,(a_{12}a_{13}a_{23})}{a_{13}\,(a_{12}^2a_{13}^2+a_{12}^2a_{23}^2+a_{13}^2a_{23}^2)}=+\frac{1}{1+\left(\frac{a_{13}}{a_{23}}\right)^2+\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}\right)^2}$$

$$\cos^2\beta=\frac{a_{13}a_{23}}{-K\,a_{12}}=\frac{a_{13}a_{23}\,(a_{12}a_{13}a_{23})}{a_{12}\,(a_{12}^2a_{13}^2+a_{12}^2a_{23}^2+a_{13}^2a_{23}^2)}=+\frac{1}{1+\left(\frac{a_{12}}{a_{23}}\right)^2+\left(\frac{a_{12}}{a_{13}}\right)^2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+a_{23}^2\left(\frac{1}{a_{13}^2}+\frac{1}{a_{12}^2}\right)}\;;\quad\cos^2\beta=\frac{1}{1+a_{13}^2\left(\frac{1}{a_{23}^2}+\frac{1}{a_{12}^2}\right)}\;;\quad\cos^2\gamma=\frac{1}{1+a_{12}^2\left(\frac{1}{a_{23}^2}+\frac{1}{a_{13}^2}\right)}$$

od anche:

$$\cos\alpha = \frac{a_{12}\, a_{13}}{\sqrt{a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2}} \; ; \; \cos\beta = \frac{a_{12}\, a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2}} \; ; \; \cos\gamma = \frac{a_{13}\, a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{23}^2}}$$

Si noti che la terza terna di coefficienti è funzione delle coordinate di "V" (vertice del cono) e dei coefficienti delle due terne precedenti.
Nell'equazione del cilindro, abbiamo visto, che il determinante dei coefficienti delle coordinate era nullo.

I polinomi di 2° grado in tre variabili

Sia:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

il polinomio completo, esso rappresenta la superficie di un solido che sezionato con un piano da una conica. Tali superfici sono dette: "<u>quadriche</u>"

Sappiamo che le coniche, come prima distinzione, possono essere: "degeneri" o "non degeneri" a seconda che il determinante dei coefficienti, particolarmente definito come: "<u>determinante delle coniche</u>" sia zero o diverso da zero. In particolare

A $= 0 \rightarrow A_{33}$:
- $> 0 \rightarrow$ (coppia di rette convergenti immaginarie coniugate)
- $= 0 \rightarrow$ (coppia di rette parallele) $(a_{..} \neq 0)$ A_{22}:
  - $< 0 \rightarrow$ (reali e distinte)
  - $= 0$ (coincidenti)
  - > 0 (immaginarie coniugate)
- $< 0 \rightarrow$ (coppia di rette reali e distinte)

A_{33} $> 0 \rightarrow$ (caso ellittico) $\rightarrow A a_{11}$ ed $A a_{22}$:
- > 0 (<u>ellisse immaginario</u>)
- < 0 (<u>ellisse reale</u>)

<0 (ellisse reale)

$\neq 0 \to A_{33}$ $\{ = 0 \to$ (caso parabolico) $\to$ (parabola)

$< 0 \to$ (caso iperbolico) $\to$ (iperbole) se $(a_{11} + a_{22} = 0) \to$ equilatera

Quindi nel caso di un cilindro, l'intersezione con un piano parallelo alle generatrici sarà: $A = 0$; $A_{33} = 0$; nel caso del cono, l'intersezione con un piano passante per il vertice sarà $A = 0$; $A_{33} < 0$; (se contiene generatrici).

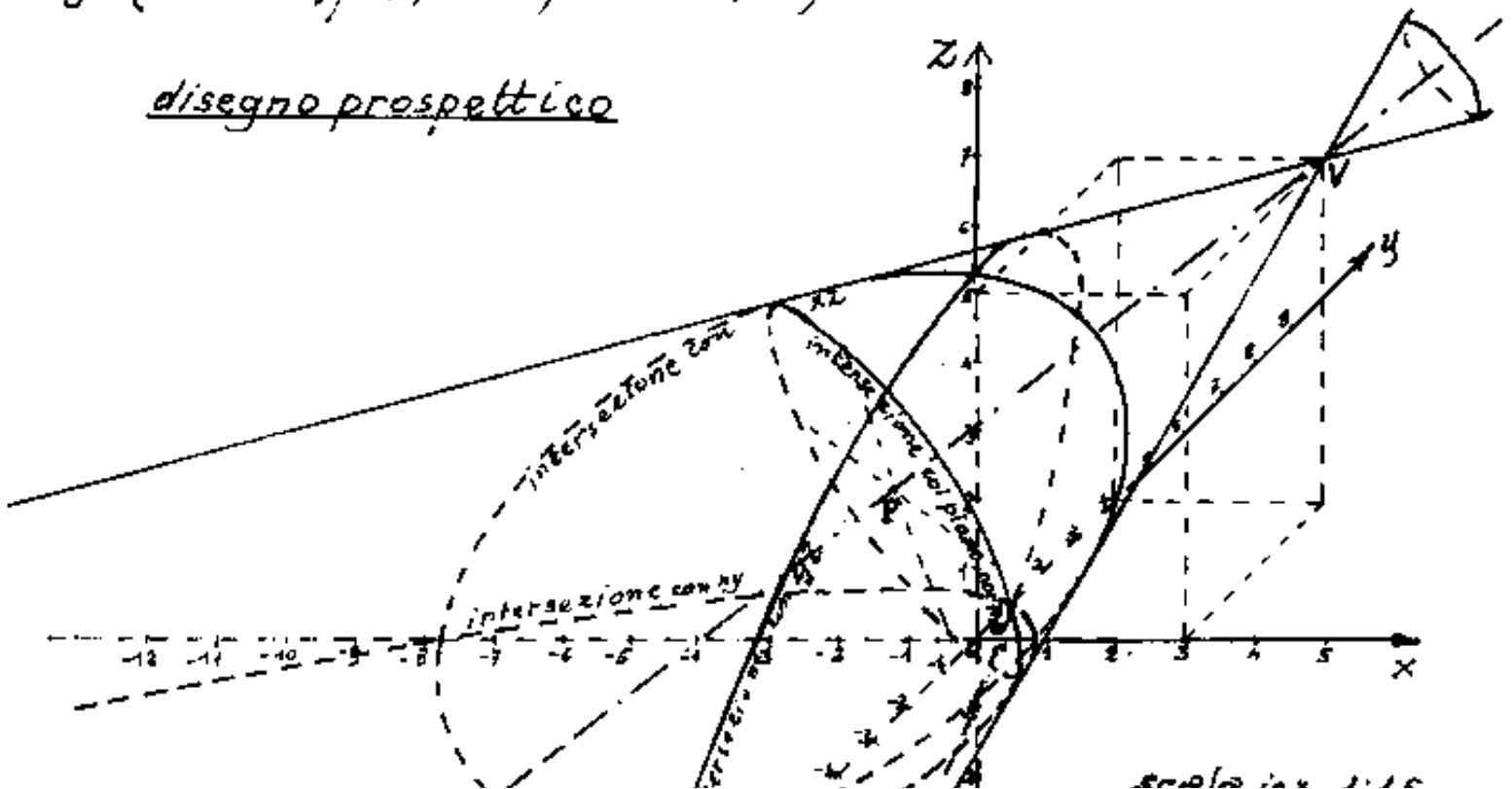
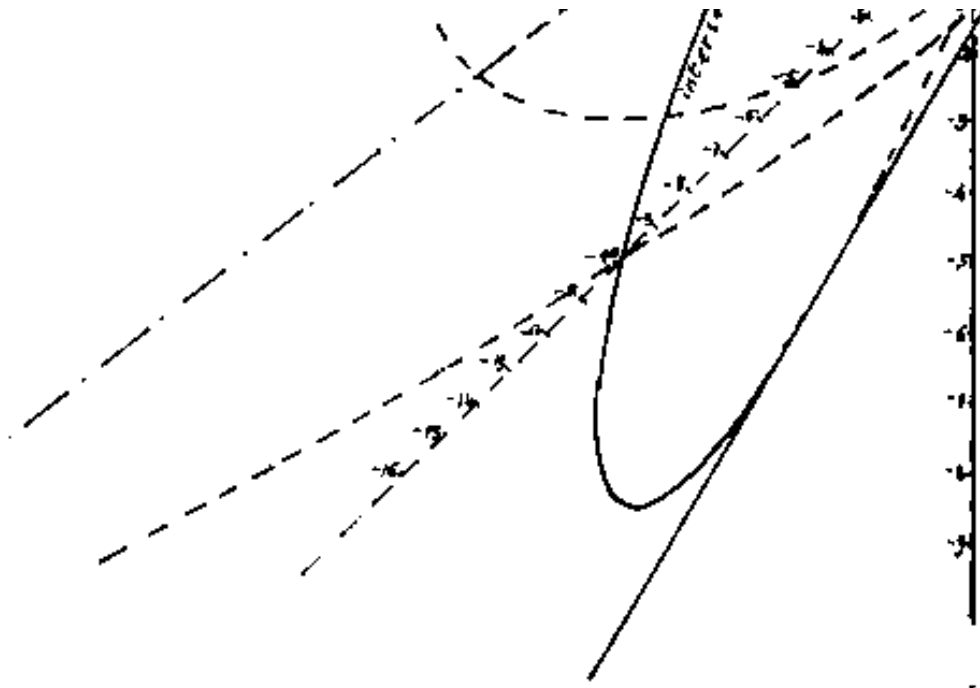
le stesse ordinate z_{p}, o le stesse ordinate y_p se il piano è parallelo a ZX ; nei tre casi avremo le coordinate degli estremi dei diametri:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &\equiv (-0,921895;\ -2,157777;\ 5,328143) \\ B_1 &\equiv (-0,921895;\ 1,006689;\ -0,3912875) \end{aligned}\right\} \text{(parallelo ad } yz\text{)}$$

$$\left.\begin{aligned} A_2 &\equiv (-2,459039;\ -0,575544171;\ 4,850636) \\ B_2 &\equiv (0,8639873;\ -0,5765544171;\ -0,2982493) \end{aligned}\right\} \text{(parallelo ad } xz\text{)}$$

$$\left.\begin{aligned} A_3 &\equiv (-3,403332;\ 1,555402;\ 2,468427661) \\ B_3 &\equiv (1,559451;\ -2,70249;\ 2,468427661) \end{aligned}\right\} \text{(parallelo ad } xy\text{)}$$

<u>disegno prospettico</u>

scala in x 1:1,5
" " y 1:1,5√2
" " z 1:1,5

Al fine di uniformarci al simbolismo usato per le coniche consideriamo il determinante che indicheremo con A (il determinante A delle coniche diverrà il minore: A_{44} ed il minore A_{33} diverrà A_{334}, ecc)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = A = \begin{cases} + a_{44} \cdot A_{44} = a_{44} \begin{cases} a_{33} A_{334} \\ - a_{32} A_{324} \\ a_{31} A_{314} \end{cases} \\ - a_{43} A_{43} = a_{43} \begin{cases} a_{34} A_{343} \\ - a_{32} A_{323} \\ a_{31} A_{313} \end{cases} \\ + a_{42} A_{42} = a_{42} \begin{cases} a_{34} A_{342} \\ - a_{33} A_{332} \\ a_{31} A_{312} \end{cases} \\ - a_{41} A_{41} = a_{41} \begin{cases} a_{34} A_{341} \\ - a_{33} A_{331} \\ + a_{32} A_{321} \end{cases} \end{cases}$$

Dovremo distinguere i solidi, le cui superfici sono continue anche nelle derivate (cioè non presen=

(cioè non presen=
tano spigoli rettilinei o curvilinei), in varie specie:

1) <u>solidi di rotazione</u>, cioè generati dalla rota=
zione di una linea intorno ad un asse, (istante
per istante la linea e l'asse sono complanari), si hanno
così: la sfera, il cilindro, il cono, i paraboloidi
di rotazione, gli ellissoidi di rotazione, gli iperboloidi
di rotazione; in genere tutti i solidi che sezionati

con piani normali all'asse di rotazione diano delle circonferenze come linee di intersezione.

Ciò premesso, questi solidi, oltre che un asse di simmetria possono avere un centro di simmetria (che sarà sull'asse ed indicheremo con C) oppure un vertice che indicheremo con V o un punto caratteristico dell'asse che indicheremo genericamente con P. Quindi l'equazione dell'asse sarà del tipo:

$$\frac{(x - x_P)}{\cos\alpha} = \frac{(y - y_P)}{\cos\beta} = \frac{z - z_P}{\cos\gamma}$$

ove a P, caso per caso possiamo sostituire "C" o "V".

I piani normali a tale asse avranno per equazione:

$$(\cos\alpha)x + \cos\beta y + \cos\gamma = \delta$$

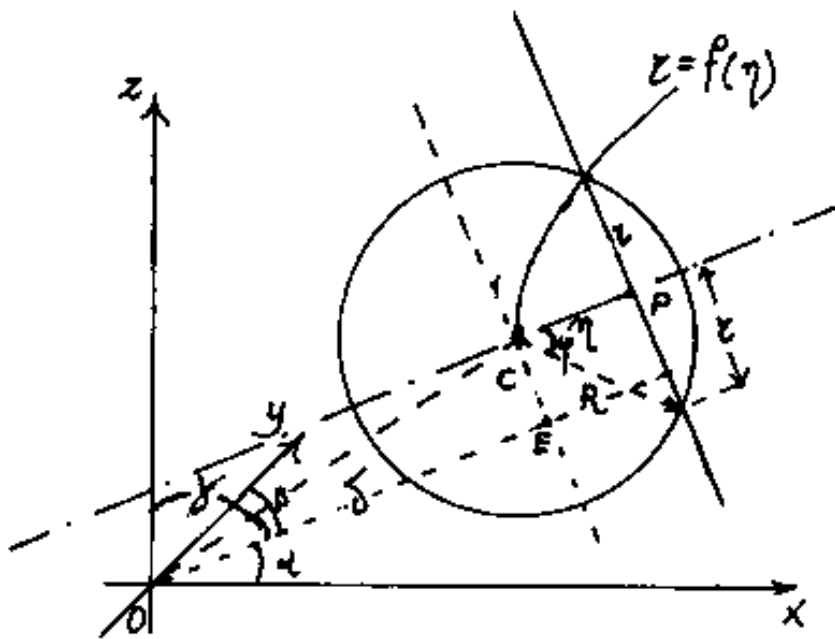
ove δ è la distanza dall'origine degli assi.

Poiché su tali piani debbono insistere delle circonferenze come intersezioni coi solidi di rotazione; consideriamo l'insieme delle sfere

di centro, "p", o "e", o "v", a raggio variabile R la loro equazione sará:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = R^2$$

Vogliamo ora definire l'intersezione di queste sfere con i relativi piani in modo che l'equazione

rappresenti la superficie del solido di rotazione.

Indichiamo con "η" la distanza del piano dal centro c della sfera, e con "τ" il raggio della circonferenza intercetta; avremo: ($\eta = \overline{CP}$)

$$R^2 = \eta^2 + \tau^2 ;$$

ma τ può esprimersi in funzione di "η", (funzione caratteristica della curva che ruota intorno all'asse): $\tau = f(\eta)$ cioè: $R^2 = \eta^2 + [f(\eta)]^2$

(ove "η" è l'ascissa ed "τ" l'ordinata del sistema di assi ruotati e traslati in C). Il piano per C normale all'asse η, sarà rappresentato:

$$\cos\alpha\,(X - X_c) + \cos\beta\,(y - y_c) + \cos\gamma\,(z - z_c) = 0$$

ove:

$$(\cos\alpha)x_c + \cos\beta(y_c) + \cos\gamma(z_c) = \overline{OE}$$

da non confondersi con $\overline{OC} = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2}$ perché

ma non confondersi con $\overline{OC} = \sqrt{x_c^2+y_c^2+z_c^2}$ perché

il segmento $\overline{OC}$, ha coseni direttori diversi da $\overline{OE}$

cioè il piano normale passante per P avrà per

equazione:

$$\cos\alpha(x-x_e)+\cos\beta(y-y_e)+\cos\gamma(z-z_c) = ?$$

passiamo dire:

$$\left[\cos\alpha(x-x_e)+\cos\beta(y-y_e)+\cos\gamma(z-z_e)\right]^2+\left[f\left(\cos\alpha(x-x_e)+\cos\beta(y-y_e)+\cos\gamma(z-z_e)\right)\right]^2 = R^2$$

Uguagliando le due espressioni di R^2 cioè quella della sfera e quella in funzione dell'equazione del piano si ha la formula generale dell'equazione dei solidi di rotazione generati da una linea $\boxed{\eta = f(\tau)}$ che ruota intorno ad un asse "η" di centro C e ordinate τ

$$\boxed{\frac{(x-x_c)}{\cos\alpha} = \frac{(y-y_c)}{\cos\beta} = \frac{(z-z_c)}{\cos\gamma}} = \text{(equaz. dell'asse)}$$

L'equazione generale dei solidi di rotazione sarà:

$$\boxed{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2 = \left[(x-x_c)\cos\alpha+(y-y_c)\cos\beta+(z-z_c)\cos\gamma\right]^2+\left[f\left((x-x_c)\cos\alpha+(y-y_c)\cos\beta+(z-z_c)\cos\gamma\right)\right]^2}$$

Nel caso della sfera: $(\tau^2 = R^2 - \eta^2)$ per cui: $R^2 = \eta^2 + R^2 - \eta^2$ rimane R = costante e non entra in gioco il piano.

Nel caso del cilindro: $\left(\tau^2 = (f(\eta))^2 = R^2 = \text{(equaz. sfera)} = [\eta^2] + R^2\right.$ e si ha l'equazione del piano elevata a quadrato $+R^2$.

Nel caso del cono: $\tau = R\,\text{sen}\,\varphi$; $\eta = R\cos\varphi$; $\dfrac{\eta^2}{\cos^2\varphi} = R^2$; perciò l'equazione del piano elevata al quadrato e

divisa per il quadrato del coseno dell'angolo di semiapertura è uguagliata all'equazione della sfera. Per $\varphi = 0$ $\cos\varphi = 1$ il cono si ridurrebbe all'asse di rotazione e bisogna aggiungere R^2 per ottenere il cilindro.

Questi casi sono già stati trattati, cerchiamo di generalizzare la formula a casi particolari.

Affinché il solido possa essere espresso dal polinomio di 2° grado in 3 variabili, la funzione $(\tau = f(\eta))$ deve essere una conica al centro.

Ricordiamo: $\tau^2 + \eta^2 = R^2$ (circonferenza) → (sfera)

$\frac{\tau^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$ (ellisse con asse focale su τ) $(a>b)$ → ellissoide di rotazione

$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\tau^2}{b^2} = 1$ (ellisse con asse focale su η) → ellissoide di rotazione

$\eta = \left(\frac{\tau^2}{4a}\right)$ (parabola con fuoco su η) → paraboloide di rotazione

$\frac{\eta^2}{4a} = \tau$ (parabola con fuoco su τ) → paraboloide coniugato di rotazione

$\frac{\eta^2}{a^2} - \frac{\tau^2}{b^2} = 1$ (iperbole con fuochi su η) → iperboloide di rotazione

$-\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\tau^2}{b^2} = 1$ (iperbole con fuochi su τ) → iperboloide coniugato di rotazione

I solidi di rotazione al centro

Consideriamo l'asse ...

Consideriamo l'asse di rotazione η coincidente con l'asse z, cioè il piano che interseca la sfera al centro: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = f(\eta) = f(z)$ sarà: $z = \eta$ e portando z sotto la funzione avremo che l'intersezione si presenta:

$$x^2 + y^2 = f(z)$$

la formula è al centro assi, ma, possiamo facilmente traslare in $C \equiv (x_c, y_c, z_c)$ ed avremo:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = f(z - z_c)$$

ove l'asse è sempre parallelo a z.

Iniziamo la trattazione con solidi al centro.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

abbiamo visto è un cono con asse coincidente con l'asse z ed apertura $2(45°) = 90°$

se il cono ha apertura 2φ avremo: $x^2 + y^2 = (z \, tg \, \varphi)^2$

Se poniamo:

$$x^2 + y^2 = z$$

per $x = 0$; o per $y = 0$ abbiamo la parabola: $z = x^2$ oppure $z = y^2$, (ove $4a = 1$); essendo "a" la distanza del fuoco dal vertice della parabola possiamo scrivere:

$$x^2 + y^2 = 4a \, z$$

e rappresenta un paraboloide di rotazione, con asse z, vertice al centro assi e modulo "4a".

Se l'asse di rotazione è l'asse x, avremo:

$$y^2+z^2=4ax$$

Per ora, la condizione per la quale il polinomio di 2° grado rappresenti un paraboloide di rotazione, intorno ad un asse cartesiano è che manchi il coefficiente del quadrato della coordinata asse.
Ciò vale anche se operiamo una traslazione:

per es. $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = 4a(z - z_c)$ è un paraboloide di rotazione con asse parallelo a Z e vertice in $C \equiv (x_c, y_c, z_c)$, la cui equazione si presenta:

$$a_{11} x_2 + a_{22} y_2 + 2a_{14} x + 2a_{24} y + 2a_{34} z + a_{44} = 0$$

ove:

$a_{11} = K$; $a_{22} = K$; $2a_{14} = -2Kx_c$; $2a_{24} = -2Ky_c$; $2a_{34} = -2K2aZ$;

$a_{44} = K(x_c^2 + y_c^2 + 4aZ_c)$.

Supponiamo ancora che l'asse Z, sia asse del solido di rotazione e consideriamo l'espressione $x^2 + y^2 = a^2 - \left(\frac{Za}{b}\right)^2$ si nota che per ogni valore di Z si ha una circonferenza reale finché: $a^2 - \left(\frac{Za}{b}\right)^2 \geq 0$; poi è immaginaria, perché la somma di due quadrati non può essere un numero negativo. Per $X = 0$ oppure per $y = 0$, si ha: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{(b)^2} = 1$; oppure: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{(b)^2} = 1$ che rappresentano l'ellisse di semiassi (a) ed (b) avente

un asse coincidente con l'asse di rotazione z, si ha cioè un <u>ellissoide di rotazione</u> che traslato diventa:

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=a^2-\frac{(z-z_c)^2a^2}{b^2}$$

avremo:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

$a_{11}=Kb^2$; $a_{22}=Kb^2$; $a_{33}=K$; $2a_{14}=-2Kb^2x_c$; $2a_{24}=-2Kb^2y_c$; $2a_{34}=2Kz_c$;

$$a_{44}=K(b^2x_c^2+b^2y_c^2+z_c^2-a^2b^2).$$

L'ellissoide propriamente detto, si distingue dall'ellissoide di rotazione perche' sezionato con piani $z=0$; $y=0$; $x=0$, presenta come intersezione un ellisse cioè non ha circonferenze e non è un solido di rotazione. La sua equazione è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

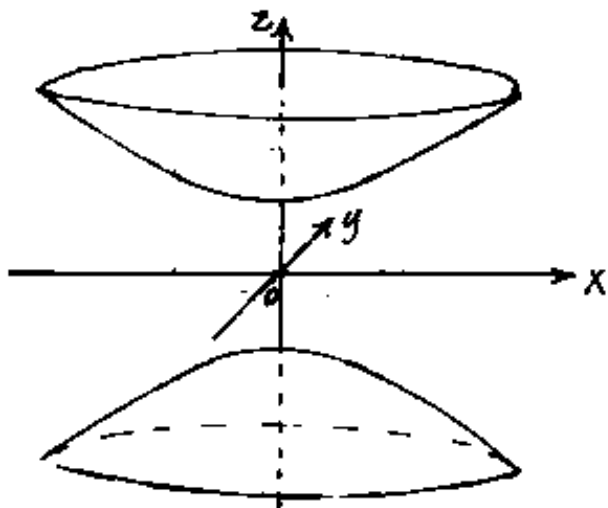
ad assi traslati:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

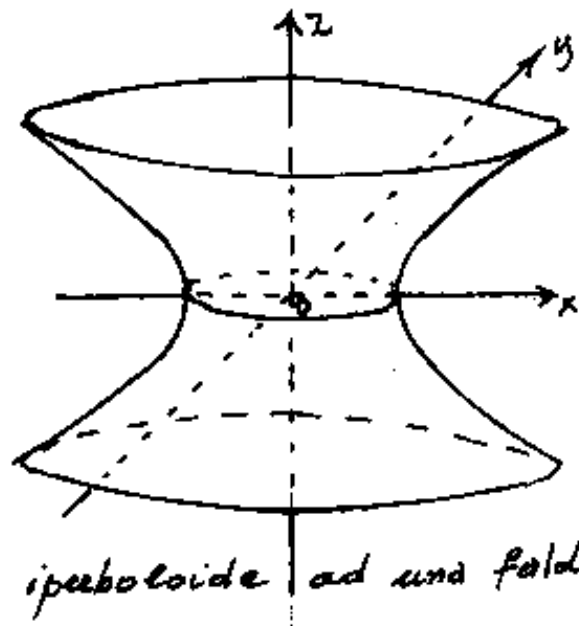
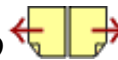
$a_{11}=Kb^2c^2$; $a_{22}=Ka^2c^2$; $a_{33}=Ka^2b^2$;

$a_{14}=-2Kb^2c^2x_c$; $a_{24}=-2Ka^2c^2y_c$; $a_{34}=-2Ka^2b^2z_c$

$a_{44}=K(x_c^2b^2c^2+y_c^2a^2c^2+z_c^2a^2b^2-a^2b^2c^2)$

Vediamo ora l'equazione dell'iperboloide di rotazione, assumendo ancora l'asse z come asse di rotazione, si hanno due solidi diversi per le due iperboli coniugate

z y x O

iperboloide a due falde

z y x O

iperboloide ad una falda

Ricordiamo che mentre nell'ellisse l'asse focale è il maggiore, nell'iperbole l'asse focale è quello positivo. (che indipendentemente dal valore assoluto è ancora relativamente il maggiore). Avremo quindi: per la seconda figura:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

L'asse focale è sul piano xy, ove il fuoco descrive una circonferenza

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1$$

L'asse focale è su Z che è anche asse di rotazione. (prima figura)

moltiplicando per a^2b^2 si ha:

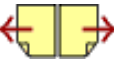
$$b^2x^2 + b^2y^2 - a^2z^2 \mp a^2b^2 = 0$$

ove il segno del termine noto indica quale dei due casi.

Ad assi spostati avremo:

$$b^2(x-x_c)^2 + b^2(y-y_c)^2 - a^2(z-z_c)^2 \mp a^2b^2 = 0$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Si noti che le formule esaminate trattano solidi di rotazione con assi al centro, o con assi traslati, mancano i casi di assi ruotati perciò mancano

mancano i casi di assi ruotati, perciò mancano i coefficienti: $2a_{12}$; $2a_{13}$; $2a_{23}$; caratteristici della ruotazione dell'asse, come i coefficienti $2a_{14}$, $2a_{24}$, $2a_{34}$ sono caratteristici della traslazione.

Per lo studio del problema inverso, sono di fondamentale importanza i coefficienti: a_{11} ; a_{22} ; a_{33}.

Se: $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ il solido è una sfera, reale o immaginaria (è immaginaria per es: $x^2+y^2+z^2=-R^2$)

Se due coefficienti, dei quadrati delle variabili, sono uguali fra loro; per es:

$a_{11} = a_{22}$ si ha un solido di rotazione intorno al terzo asse(Z). (Anche il cono è un solido di rotazione, ed il cilindro è un cono con vertice all'infinito). Anche in questo caso si può avere un solido immaginario $(x^2+y^2=-R^2)$.

con: $a_{11} = a_{22}$; $a_{33}=0$ si ha un paraboloide di rotazione con asse Z = asse di rotazione

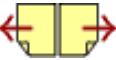
Ovviamente gli assi sono scambiabili fra loro, noi continueremo a considerare l'asse Z come asse di rotazione, ma se scambiamo Z con X o Z con Y avremo che l'asse di rotazione sarà x od y. (Per esempio un paraboloide di rotazione intorno all'asse X avrà: $a_{33}=a_{22}$; $a_{11}=0$)

$a_{11} = a_{22}$ entrambi >0 ; $a_{33}>$; $a_{44}<0$ e siano nulli tutti gli altri coefficienti, si ha un ellissoide di rotazione al centro intorno all'asse z

centro, intorno all'asse z.

Analogamente:

$a_{11} = a_{22}$ entrambi > 0 ; $a_{33} < 0$; a_{44} ≥ 0 → iperboloidi di rotazione al centro; $= 0$ → cono con vertice al centro

Tutti gli altri coefficienti sono nulli e l'asse di rotazione è l'asse z. ; a_{44} > 0 fuoco sull'asse z; < 0 fuoco sul piano xy (circonferenza).

Esempio numerico

Studiare il polinomio:

$$4{,}5x^2 + 4{,}5y^2 - 2z^2 - 36x - 45y + 4z + 164{,}5 = 0$$

Il polinomio può essere stato moltiplicato o diviso per un K arbitrario perciò dividiamo l'intera equazione per $(a_{11} = a_{22})$ Questa uguaglianza ci indica: "solido di rotazione intorno ad un asse parallelo a Z (non coincidente perché: a_{14}, a_{24}, a_{34} sono diversi da zero)

l'equazione diventa:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{4{,}5}z^2 - 2(4)x - 2(5)y + 2\left(\frac{2}{4{,}5}\right)z + \frac{164{,}5}{4{,}5} = 0$$

dividendo per a_{33} il coeff. $2a_{34} = 2(1)$ perciò: la traslazione di assi da "O" a "C" è $C \equiv (4; 5; 1)$.

Ora $a_{44} = a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + a_{33}z_c^2 \begin{cases} \pm a^2b^2K \text{ (se è un iperboloide)} \\ = 0 \text{ (se è un cono)} \end{cases}$

$-36 = -2Ka^2x_c \; ; \rightarrow -36 = -2Ka^2 \cdot 4 = -8a^2K \Rightarrow Ka^2 = \frac{9}{2} = a_{11}$

$-45 = -2Ka^2y_c \; ; \rightarrow -45 = -2Ka^2 \cdot 5 \Rightarrow Ka^2 = \frac{9}{2} = a_{22}$

$+4 = 2Kb^2z_c \; ; \rightarrow 4 = 2Kb^2 \cdot 1 \Rightarrow Kb^2 = 2$

$$a_{44} = \frac{164{,}5}{4{,}5} = 36{,}55\bar{5} = a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + a_{33}z_c^2 \pm a^2b^2K$$

$$= x_c^2 + y_c^2 + \frac{a^2}{b^2}z_c^2 \pm a^2$$

$$= 16 + 25 - \frac{2}{4{,}5} \pm a^2$$

$$a^2 = 36{,}55\bar{5} - 40{,}55\bar{5} = \boxed{-a^2 = -4}$$ perciò $K = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

l'equazione origine: $9x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 72x - 90y + 8z + 329 = 0$

$\boxed{b^2 = 9}$; $\boxed{a^2 = 4}$; $a^2b^2 = 329 - 9(16+25) + 4 = \boxed{-36 = a^2b^2}$ quindi

è un iperboloide di rotazione intorno a Z con fuoco su xy.

Ellissoide di Rotazione al centro assi

La formula generale dei solidi di rotazione è:

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2 = \eta^2+[f(\eta)]^2$$

ove: $\eta=(x-x_c)\cos\alpha+(y-y_c)\cos\beta+(z-z_c)\cos\gamma$

rappresenta la distanza del piano dal centro "c" misurata perpendicolarmente al piano, ma "η", misurata in tal senso, è sull'asse di rotazione

$f(\eta)$, rappresenta una funzione dovuta alla curva che ruota, cioè posto: $r=f(\eta)$ questa sarà l'equazione della curva al centro assi; nel nostro caso: (ellissoide di rotazione di semiassi: a e b con a>b) se vogliamo che ruoti intorno all'asse minore dovremo scrivere:

$\frac{r^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1$ cioè: $r^2=\left(a^2-\frac{a^2}{b^2}\eta^2\right)$.

Ma il raggio (variabile) R della sfera è dato

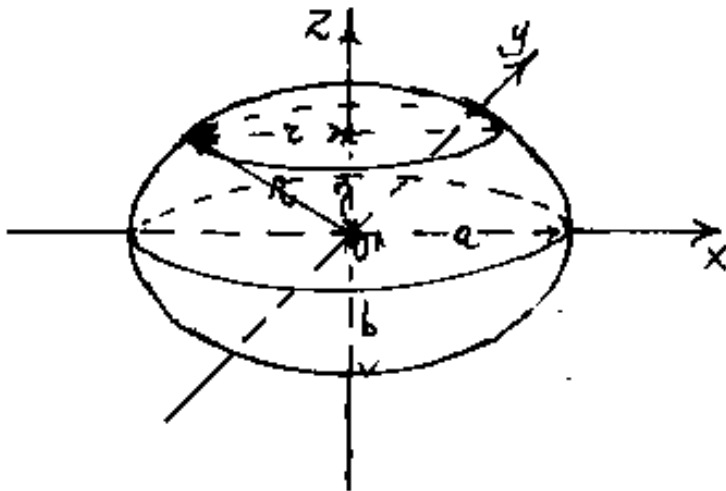
Ma il raggio (variabile) R della sfera è dato da: $\boxed{R^2 = \eta^2 + t^2}$ $\boxed{R^2 = \eta^2 + a^2 - \frac{a^2}{b^2}\eta^2} = \frac{(b^2-a^2)\eta^2 + a^2b^2}{b^2}$

Se l'ellissoide è al centro assi $x_e = 0$; $y_e = 0$; $z_e = 0$

Se per asse di rotazione poniamo l'asse "Z", si ha: $\cos\alpha = \cos(90°) = 0$; $\cos\beta = \cos(90°) = 0$; $\cos\gamma = \cos(0) = 1$

per cui $\eta = [0 + 0 + Z]$; ed $x^2 + y^2 + Z^2 = Z^2 + a^2 - \frac{a^2}{b^2}Z^2$

cioè:

$$b^2x^2 + b^2y^2 + a^2z^2 - a^2b^2 = 0$$

equazione dell'ellissoide di rotazione al centro assi. (asse di rotazione z, semidiametri: a = ruotante, b in asse)

Ellissoide di rotazione ad assi traslati

$$b^2(x-x_c)^2 + b^2(y-y_c)^2 + a^2(z-z_c)^2 - a^2b^2 = 0$$

sviluppando i quadrati:

$$\underset{a_{11}}{b^2x^2} + \underset{a_{22}}{b^2y^2} + \underset{a_{33}}{a^2z^2} - \underset{a_{14}}{2(b^2x_c)}x - \underset{a_{24}}{2(b^2y_c)}y - \underset{a_{34}}{2(a^2z_c)}z + \underset{a_{44}}{(b^2x_c^2 + b^2y_c^2 + a^2z_c^2 - a^2b^2)} = 0$$

mancano i coefficienti: $(2a_{12}, 2a_{13}, 2a_{23})$ della rotazione.

Il determinante sarà:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \Delta =$$

$$a_{44}\, a_{33}\, A_{434} = a_{44}\, a_{33}\,(a_{22}\, a_{11}) = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33})\, a_{44}$$

$$a_{34}\, a_{34}\, A_{433} = a_{34}^2\,(a_{22}\, a_{11}) = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33})\,\frac{a_{34}^2}{a_{33}}$$

$$a_{24}\, a_{33}\, A_{432} = a_{24}\, a_{33}\,(a_{11}\, a_{24}) = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33})\,\frac{a_{24}^2}{a_{22}}$$

$$a_{14}\, a_{33}\, A_{431} = a_{14}\, a_{33}\,(a_{14}\, a_{22}) = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33})\,\frac{a_{14}^2}{a_{22}}$$

sommando:

$$\boxed{\Delta = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33})\left(a_{44} + \frac{a_{14}^2}{a_{11}} + \frac{a_{24}^2}{a_{22}} + \frac{a_{34}^2}{a_{33}}\right)}$$

sostituendo i valori:

$$K^4\left[\left(b^2\cdot b^2\cdot a^2\right)\left(b^2x_c^2+b^2y_c^2+a^2z_c^2-a^2b^2-\frac{b^4x_c^2}{b^2}-\frac{b^4y_c^2}{b^2}-\frac{a^4z_c^2}{a^2}\right)\right]=\Delta$$

$$\boxed{\Delta=-K^4a^4b^6}$$

Ricordiamo i simboli dei minori del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=A_{44}=\begin{vmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix}=a^2b^4\left(K^3\right)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{34} \end{vmatrix}=A_{43}=\begin{vmatrix} b^2 & 0 & -b^2x_c \\ 0 & b^2 & -b^2y_c \\ 0 & 0 & -a^2z_c \end{vmatrix}=-a^2b^4z_c\left(K^3\right)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}=A_{42}=\begin{vmatrix} b^2 & 0 & -b^2x_c \\ 0 & 0 & -b^2y_c \\ 0 & a^2 & -a^2z_c \end{vmatrix}=a^2b^4y_c\left(K^3\right)$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = A_{41} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b^2 x_c \\ b^2 & 0 & -b^2 y_c \\ 0 & a^2 & -a^2 z_c \end{vmatrix} = -a^2 b^4 x_c \,(K^3)$$

Si noti l'analogia con le formule trovate per le coniche (Vol II)

$$\boxed{x_c = \frac{-A_{41}}{A_{44}}} \; ; \quad \boxed{y_c = \frac{A_{42}}{A_{44}}} \; ; \quad \boxed{z_c = \frac{A_{43}}{A_{44}}}$$

$$\boxed{K a^2 b^2 = \left(a_{44} - a_{11} x_c^2 - a_{22} y_c^2 - a_{33} z_c^2\right)} = \frac{a_{11} a_{33}}{K} = \frac{a_{22} a_{33}}{K}$$

$$\frac{a_{11} \cdot a_{33}}{\left(a_{44} - a_{11} x_c^2 - a_{22} y_c^2 - a_{33} z_c^2\right)} = \frac{(K b^2)(K a^2)}{K a^2 b^2} = K$$

$$\boxed{K = \frac{a_{11} a_{33}}{a_{44} - a_{11} x_c^2 - a_{22} y_c^2 - a_{33} z_c^2}}$$

$$\frac{\Delta}{(a_{11} a_{33})^2} = \frac{-K^4 a^4 b^6}{b^4 K^2 \cdot K^2 a^4} = -b^2 \quad ; \quad \boxed{b^2 = \frac{-\Delta}{(a_{11} \cdot a_{33})^2}}$$

$$\frac{\Delta}{a_{33} A_{44}} = \frac{-K^4 a^4 b^6}{K a^2 \; K^3 a^2 b^4} = -b^2 \quad ; \quad \boxed{b^2 = \frac{-\Delta}{a_{33} A_{44}}}$$

$$\frac{\Delta}{a_{11} A_{44}} = \frac{-K^4 a^4 b^6}{K b^2 K^3 a^2 b^4} = -a^2 \quad ; \quad \boxed{a^2 = \frac{-\Delta}{a_{11} A_{44}}}$$

$$\frac{a_{11} a_{33} A_{44}}{\Delta} = \frac{b^2 K \cdot a^2 K \cdot a^2 b^4 K^3}{-K^4 a^4 b^2} = -K \quad ; \quad \boxed{K = \frac{a_{11} a_{33} A_{44}}{-\Delta}}$$

queste formule sono valide per assi non ruotati

$$\Delta = + a_{44} A_{44} - a_{34} A_{43} + a_{24} A_{42} - a_{14} A_{41}$$

$$A_{44} = a_{33} A_{334} - a_{32} A_{324} + a_{31} A_{314} \;;$$

$$-A_{43} = + a_{34} A_{343} - a_{32} A_{323} + a_{31} A_{313} \;;$$

$$A_{42} = a_{34} A_{342} - a_{33} A_{332} + a_{31} A_{312} \;;$$

$$-A_{41} = a_{34} A_{341} - a_{33} A_{331} + a_{32} A_{321} \;;$$

Esempio Numerico

Studiare l'equazione:

$$4x^2+4y^2+9z^2-8x-32y+59=0$$

mancano i coefficienti $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$, quindi il solido non è ruotato, è invece traslato, perciò calcoliamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ -4 & -16 & 0 & 59 \end{vmatrix} = \Delta = \begin{cases} 59(+A_{44}) = 59(144) = 8496 \\ -0(-A_{43}) = 0(0) = 0 \\ (-16)(+A_{42}) = -16(-576) = -9216 \\ -4(-A_{41}) = -4(144) = -576 \end{cases}$$

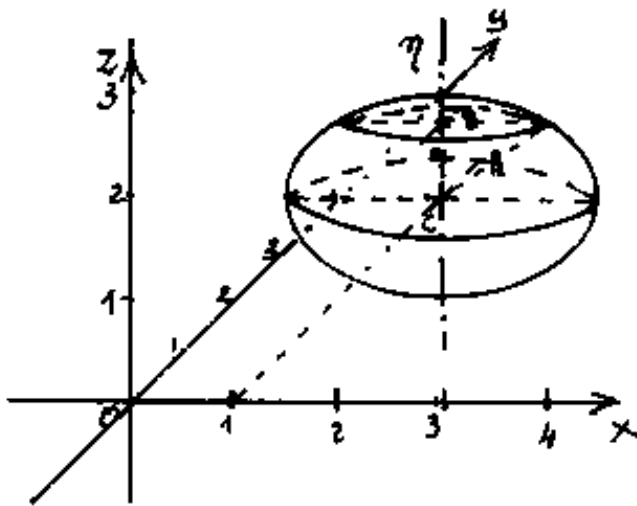
$$\Delta = -1296$$

$$z_c = \frac{A_{43}}{A_{44}} = \frac{0}{144} = 0 \; ; \; y_c = \frac{-A_{42}}{A_{44}} = \frac{576}{144} = +4 \; ; \; x_c = \frac{A_{41}}{A_{44}} = \frac{144}{144} = 1$$

$$C \equiv (1,4,0)$$

$$b^2 = \frac{-\Delta}{a_{33}A_{44}} = \frac{1296}{(9)(144)} = +1 \rightarrow b = 1$$

$$a^2 = \frac{-\Delta}{a_{11}A_{44}} = \frac{1296}{(4)(144)} = 2{,}25 \rightarrow a = 1{,}5$$

$$K = \frac{a_{11} a_{33} A_{44}}{-\Delta} = \frac{(4)(9)(144)}{1296} = 4 \rightarrow \boxed{K = 4}$$

Ponendo $z = 0$ otteniamo un cerchio; ponendo $x = 1$ otteniamo un ellisse eguale a quello che si ha ponendo $y = 4$, (estremi semidiametri). Si deduce che il solido è un <u>ellissoide di rotazione</u>.

Ellissoide di rotazione ad assi solo ruotati

In questo caso si tratta ancora di un solido al centro assi, peró con asse di rotazione qualsiasi, diverso dagli assi di riferimento, ma passante per l'origine "O".

Questa retta ha per equazione:

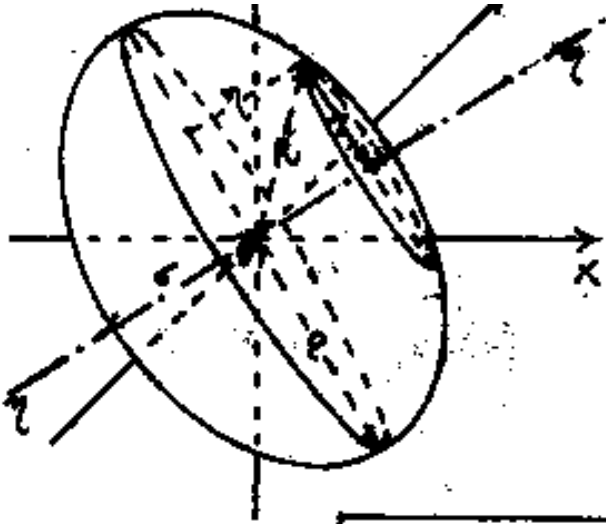
$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}$$

e su di essa, a partire da O, si riporta "η" per esprimere il raggio "r" delle circonferenze comuni ai piani:

$$(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z = \eta$$

ed alle sfere:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = (r^2 + \eta^2) = (\eta^2 + [f(\eta)]^2)$$

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 - \frac{\eta^2}{b^2} \quad ; \quad r^2 = \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}\eta^2\right)$$

$$R^2 = \eta^2 + \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}\eta^2\right)$$

$$b^2R^2 = a^2b^2 - (a^2 - b^2)\eta^2$$

$$b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 = a^2b^2 - f^2\eta^2$$

$$b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 = a^2b^2 - f^2\left[(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z\right]^2$$

(ove "f" = distanza focale: $f^2 = (a^2 - b^2)$).

Notiamo che i coefficienti, $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$; caratteristici della rotazione degli assi provengono dal quadrato dell'equazione del piano, poiché, (quando è possibile), è bene che questi coefficienti siano solo funzione di grandezze angolari, dividiamo l'equazione per "ρ^2" e sviluppiamo il quadrato dell'equazione del piano; avremo:

$$\underbrace{\left(\frac{b^2}{\rho^2}+\cos^2\alpha\right)}_{(a_{11})/K}x^2+\underbrace{\left(\frac{b^2}{\rho^2}+\cos^2\beta\right)}_{(a_{22})/K}y^2+\underbrace{\left(\frac{b^2}{\rho^2}+\cos^2\gamma\right)}_{(a_{33})/K}z^2+$$

$$+\underbrace{2(\cos\alpha\cos\beta)}_{2(a_{12})/K}xy+\underbrace{2(\cos\alpha\cos\gamma)}_{2(a_{13})/K}xz+\underbrace{2(\cos\beta\cos\gamma)}_{2(a_{23})/K}yz-\underbrace{\left(\frac{a^2b^2}{\rho^2}\right)}_{(a_{44})/K}=0$$

mancano i coefficienti di traslazione: $2(a_{14})$, $2(a_{24})$, $2(a_{34})$.

avremo:

$$\boxed{\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}+\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}+\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}=K}$$

infatti:

$$\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}=\frac{K^2(\cos\alpha\cos\beta)(\cos\alpha\cos\gamma)}{K(\cos\beta\cos\gamma)}=K\cdot\cos^2\alpha$$

$$\frac{\qquad}{a_{23}} = \frac{\qquad}{K(\cos\beta\cos\gamma)} = K\cdot\cos^2\alpha$$

$$\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = \frac{K^2(\cos\alpha\cos\beta)(\cos\beta\cos\gamma)}{K(\cos\alpha\cos\gamma)} = K\cos^2\beta$$

$$\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} = \frac{K^2(\cos\alpha\cos\gamma)(\cos\beta\cos\gamma)}{K(\cos\alpha\cos\beta)} = K\cos^2\gamma$$

sommando: $K(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = K$.

Ellissoide di rotazione ad assi ruotati e traslati

Trasliamo gli assi nella precedente formula dell'ellissoide ad assi solo ruotati, cioè sostituiamo ad x, y, z le espressioni $(x-x_c)$; $(y-y_c)$; $(z-z_c)$; avremo:

$$\left(\frac{b^2}{\rho^2}+\cos^2\alpha\right)x^2 + \left(\frac{b^2}{\rho^2}+\cos^2\beta\right)y^2 + \left(\frac{b^2}{\rho^2}+\cos^2\gamma\right)z^2 +$$

$$(a_{11}/K) \qquad (a_{22}/K) \qquad (a_{33}/K)$$

$$+\,2(\cos\alpha\cos\beta)\,xy + 2(\cos\alpha\cos\gamma)\,xz + 2(\cos\beta\cos\gamma)\,yz +$$

$$(2a_{12}/K) \qquad (2a_{13}/K) \qquad (2a_{23}/K)$$

$$-\,2\left(a_{11}x_c + a_{12}y_c + a_{13}z_c\right)x +$$

$$(2a_{14}/K)$$

$$-\,2\left(a_{22}y_c + a_{12}x_c + a_{23}z_c\right)y +$$

$$(2a_{24}/K)$$

$$-\,2\left(a_{33}z_c + a_{13}x_c + a_{23}y_c\right)z +$$

$$(2a_{34}/K)$$

$$\left[a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + a_{33}z_c^2 + 2a_{12}x_cy_c + 2a_{13}x_cz_c + 2a_{23}y_cz_c - \frac{a^2b^2}{\rho^2}\right]$$

(a_{44}/K)

Le prime due terne di coefficienti sono identiche a quelle dell'equazione ad assi solo ruotati, perciò dalla seconda terna è possibile calcolare: $K, \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.
La terza terna di coefficienti è identica a

I calcoli effettuati ci permettono di affermare:
(K=1) l'asse del solido è una retta passante per l'origine degli assi, la cui equazione è:

$$\frac{X}{0,6} = \frac{y}{0,7} = \frac{Z}{\sqrt{0,15}}$$

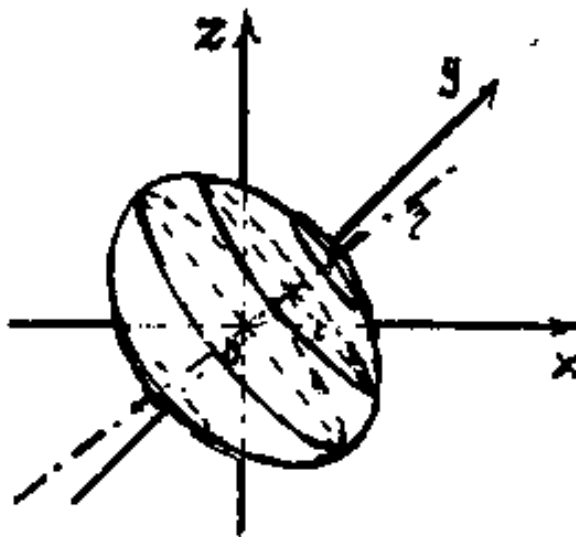
ed è retta di giacitura dei piani:

$$(0,6)X + (0,7)y + (\sqrt{0,15})Z = \eta$$

ove η è la distanza dall'origine di tali piani.
essendo nulle le coordinate di "C" (traslazione nulla) il centro "O" è anche centro del solido.

Poiché: $f^2 = (a^2 - b^2) = (2,25 - 1) = 1,25$

Poiché: $\frac{a_{11}}{K} = \left(\frac{b^2}{f^2} + \cos^2\alpha\right)$; ($b^2$ = quadrato del semiasse che giace sull'asse di rotazione η); $b^2 = \left(\frac{a_{11}}{K} - \cos^2\alpha\right)f^2 = \left(\frac{1,16}{1} - 0,36\right)(1,25)$

$b^2 = 1$ ed essendo $a > b$, l'asse focale è quello che ruota intorno ad η mantenendosi sui piani di giacitura.
Ora possiamo fare il disegno prospettico:

Per $z = 0$; assi $(1,5; 1,04)$; $\varphi = 139° 33' 55''$

per: $y = 0$; assi $(1,5 ; 1,112)$; $\varphi = 122° 50' 31''$

per $x = 0$; assi $(1,3 ; 1,118)$; $\varphi = 118° 57' 18''$

Si è cercato approssimativamente "a vista" di dare la sensazione della rotazione.

Scala approssimata: in $x = (1:1)$; in $z = (1:1)$: in $y = (1:\sqrt{2})$

Esempio numerico

Studiare l'equazione:

$$1,16x^2 + 1,29y^2 + 0,95z^2 + 0,84xy + 0,464758xz + 0,54221767yz - 1,8 = 0$$

mancano i coefficienti $2a_{14}, 2a_{24}, 2a_{34}$ perciò il solido non è traslato, è invece con asse ruotato.

$$K\cos^2\alpha = \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} = \frac{(0,42)(0,232379)}{(0,27110883)} = 0,36$$

$$K\cos^2\beta = \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = \frac{(0,42)(0,27110883)}{(0,232379)} = 0,49$$

$$K\cos^2\gamma = \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} = \frac{(0,232379)(0,27110883)}{0,42} = 0,15$$

$$\boxed{K = 1}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = 0,36}; \quad \boxed{\cos^2\beta = 0,49}; \quad \boxed{\cos^2\gamma = 0,15}$$

ponendo $z = 0$

$$A_{334} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = (1,16)(1,29) - 0,84 = +0,7908 > 0$$

ci dà l'equazione di un ellisse perciò riteniamo un ellissoide di rotazione.

$$-A_{234} = (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) = (1,16)(0,27110883) - (0,42)(0,232379) =$$

$$\boxed{+A_{234} = +0,216887063}$$

$$a^2 = \frac{(a_{44})(a_{23})}{A_{234}} = \frac{(+1,8)(0,27110883)}{+0,216887063} = 2,25 \quad \rightarrow \quad \boxed{a = 1,5}$$

$$b^2 = \frac{a_{44}\,a_{23}}{Ka_{23} + A_{234}} = \frac{(1,8)(0,27110883)}{(1)(0,27110883 + 0,216887063)} = 1,00 \quad \rightarrow \quad \boxed{b = 1}$$

$$\frac{(a_{44}/K)(a_{23}/K)}{A_{234}/K^2} = \frac{a_{44}\,a_{23}}{A_{234}} = \frac{(a^2b^2/\rho^2)(\cos\beta\cos\gamma)}{(b^2/\rho^2)(\cos\beta\cos\gamma)} = a^2$$

$$\boxed{a^2 = \frac{a_{44}\,a_{23}}{A_{234}}}$$

$$(a_{44}/K) = \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \qquad a^2(a_{44}/K) = (a^2 + a_{44}/K)\,b^2$$

$$b^2 = \frac{a^2(a_{44}/K)}{a^2 + a_{44}/K} = \frac{a_{44}\,a_{23}/A_{234}K}{\frac{a_{44}a_{23}}{A_{234}} + a_{44}/K} = \boxed{\frac{a_{44}\,a_{23}}{K a_{23} + A_{234}} = b^2}$$

$$a_{33}A_{334} = \frac{b^6}{\rho^6} + \frac{b^4}{\rho^4} + \frac{b^2}{\rho^2}\cos^2\gamma\,(1-\cos^2\gamma)$$

$$-a_{23}A_{234} = -\frac{b^2}{\rho^2}\cos^2\beta\cos^2\gamma$$

$$a_{13}A_{134} = -\frac{b^2}{\rho^2}\cos^2\alpha\cos^2\gamma$$

$$\boxed{A_{44} = \frac{b^6}{\rho^6} + \frac{b^4}{\rho^4}}\,K^3$$

$$\Delta = a_{44}A_{44} = \frac{a^2b^6}{\rho^6}\left(\frac{b^2}{\rho^2}+1\right) = \frac{a^2b^6}{\rho^6}\left(\frac{b^2+a^2-b^2}{\rho^2}\right) \qquad \boxed{\Delta = \frac{a^4b^6}{\rho^8}}\,K^4$$

Conviene dividere l'espressione per K anche prima di fare <u>il determinante</u> dei coefficienti

quella dell'equazione ad assi solo traslati perciò da esso è possibile calcolare; x_c, y_c, z_c; dopodiché si possono calcolare i semidiametri "a" e "b", riducendoci all'equazione dell'ellissoide ad assi solo ruotati.

Esempio numerico

Studiare l'equazione:

$$\left[(4{,}64)x^2 + (5{,}16)y^2 + (3{,}8)z^2 + (3{,}36)xy + (1{,}859032)xz + (2{,}16887068)yz + \right.$$

(a_{11}), (a_{22}), (a_{33}), $2(a_{12})$ = $2(1{,}68)$, $2(a_{13})$ = $2(0{,}929516)$, $2(a_{23})$ = $2(1{,}08443534)$

$$\left. -(22{,}72)x - (44{,}64)y - (10{,}53451472)z + 93{,}44 = 0 \right]$$

$(2a_{14})$ = $-2(11{,}36)$, $2(a_{24})$ = $-2(22{,}32)$, $2(a_{34})$ = $-2(5{,}26725736)$, (a_{44})

Polinomio completo di 2° grado in tre variabili,

Ponendo $z = 0$ si ha una conica:

$$\boxed{(4{,}64)x^2 + (5{,}16)y^2 + (3{,}36)xy - (22{,}72)x - (44{,}64)y + 93{,}44 = 0}$$

$\begin{vmatrix} 4{,}64 & 1{,}68 & -11{,}36 \end{vmatrix}$ $\quad (93{,}44(21{,}12) = 1973{,}4528$

$$\begin{vmatrix} 4,64 & 1,68 & -11,36 \\ 1,68 & 5,16 & -22,32 \\ -11,36 & -22,32 & +93,44 \end{vmatrix} = A \begin{cases} 93,44\,(21,12) = 1973,4528 \\ +22,32\,(-84,48) = -1885,5936 \\ -11,36\,(21,12) = -239,9232 \end{cases}$$

$$A = -152,064$$

$A \neq 0$ conica non degenere.

$A_{33} = (21,12) > 0$ ed $A \cdot a_{11} < 0$ $\quad A\,a_{22} < 0 \rightarrow$ ellisse reale.

$$-\frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{84,48}{21,12} = y_{\text{centro ellisse}} = 4 \quad ; \quad \frac{+A_{13}}{A_{33}} = x_{\text{centro ellisse}} = \frac{21,12}{21,12} = 1$$

$$K s_1^2 s_2^2 = \frac{-A}{A_{33}} = \frac{152,064}{21,12} = 7,2$$

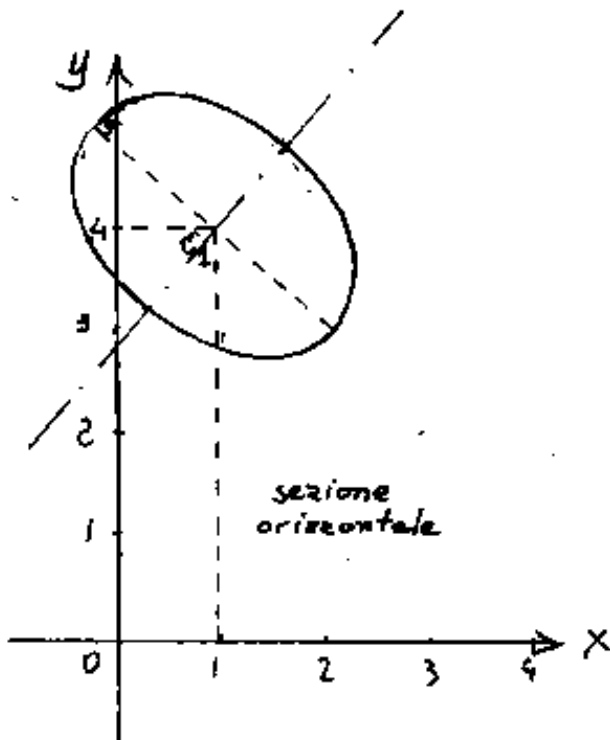
$$K s_1^2 K_2^2 = [(4,64) + (82,56) + (13,44) - (93,44)] = 7,20 \quad (\text{verifica})$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1^2 = \\ s_2^2 = \end{array}\right\rangle = \frac{2(K s_1^2 s_2^2)}{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 2a_{12}^2}} = \frac{2(7,2)}{9,80 \mp \sqrt{(-0,52)^2 + (3,36)^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1^2 = \\ s_2^2 = \end{array}\right\rangle = \frac{14,4}{9,80 \mp 3,4} = \left\langle\begin{array}{lll} 1,090909 & \rightarrow & b = 1,04446 \\ 2,25 & \rightarrow & a = 1,50 \end{array}\right.$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{3,36}{(-0,52)}\right) = 139° \, 23' \, 55''$$

asse: $(49° \, 23' \, 55'')$

sezione orizzontale

Quindi la figura a fianco è la intersezione del nostro solido col piano $Z = 0$

Qualora il nostro solido non tagliasse il piano $Z = 0$, perché più alto o più basso la nostra

equazione ci avrebbe portato a definire: "<u>immaginaria</u>"
ciò non vuol dire che il solido non esiste, si deve
annullare un altro piano: $x=0$ oppure $y=0$. Però consi-
deriamo un momento la figura; si nota che se trattasi
di ellissoidi, a meno che il terzo diametro non sia molto
grande, il <u>piano $y=0$ non taglia il solido</u>; quindi

Ellissoide

L'ellissoide (semplice), non è un solido di rotazione, infatti, mentre nell'ellissoide di rotazione si hanno solo due assi di ellisse di cui uno è asse di ruotazione, nell'ellissoide, propriamente detto, si hanno tre diametri ortogonali, i cui semidiametri a, b, c, spesso rispondono alla doppia disuguaglianza $a > b > c$, perciò "a" è asse focale e contiene due fuochi: $f_1^2 = (a^2 - b^2)$ ed $f_2^2 = (a^2 - c^2)$. È un solido importantissimo, avremo occasione di trattare l'ellissoide d'inerzia, l'ellissoide delle tensioni, l'ellissoide ottico di Fresnel, ed anche l'ellissoide terrestre come configurazione di equilibrio di un fluido rotante; e l'ellissoide di rotazione diventa un caso particolare di ellissoide con due semiassi uguali.

Ellissoide al centro assi

La formula:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ci mostra l'ellissoide come una superficie derivata dalla superficie sferica, ove gli assi x, y, z siano graduati in scale diverse.

Sappiamo che:

$$x_c = \frac{-A_{41}}{A_{44}} = \frac{73,728}{73,728} = 1$$

$$y_c = \frac{A_{42}}{A_{44}} = \frac{294,912}{73,728} = 4$$

$$z_c = \frac{A_{43}}{A_{44}} = \frac{0}{73,728} = 0$$

valori che avevamo già visto con la sezione del solido col piano $Z=0$.

Dal solido solo ruotato:

$$\frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} = K\cos^2\alpha = \frac{1,68 \cdot 0,929516}{1,08443534} = 1,44$$

$$\frac{a_{12}\,a_{23}}{a_{13}} = K\cos^2\beta = \frac{1,68 \cdot 1,08443534}{0,929516} = 1,96$$

$$\frac{a_{13}\,a_{23}}{a_{12}} = K\cos^2\gamma = \frac{0,929516 \cdot 1,08443534}{1,68} = 0,6$$

$$K = \overline{4,} =$$

$\cos^2\alpha = 1,44/4 = 0,36$; $\cos\alpha = 0,6$; $\alpha = 53°\ 07'\ 48''$

$\cos^2\beta = 1,96/4 = 0,49$; $\cos\beta = 0,7$; $\beta = 45°\ 34'\ 23''$

$$\cos^2\gamma = 0{,}6/4 = 0{,}15 \; ; \quad \cos\beta = 0{,}38729833 \; ; \; \gamma = 67° \; 12' \; 48''$$

$$K\frac{a^2b^2}{f^2} = \left(-A_{44} + a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + a_{33}z_c^2 + 2a_{12}x_cy_c + 2a_{13}x_cz_c + 2a_{23}y_cz_c\right)$$

$$= 4{,}64 + (5{,}16)\cdot 16 + (3{,}36)4 - 93{,}44 = 7{,}20 = 4(1{,}80) \; ; \quad \frac{a^2b^2}{f^2} = 1{,}80$$

$$\left(\frac{a_{11}}{K} - \cos^2\alpha\right) = \frac{b^2}{f^2} = \frac{4{,}64}{4} - 0{,}36 = 0{,}8 \; ; \quad \frac{b^2}{f^2} = 0$$

$$a^2 = \left(\frac{a^2b^2}{f^2}\right)\left(\frac{f^2}{b^2}\right) = \frac{1{,}80}{0{,}8} = 2{,}25 \qquad \boxed{a^2 = 2{,}25} \qquad \boxed{a = 1{,}50}$$

$$\frac{b^2}{a^2-b^2} = 0{,}8 \; ; \quad b^2 = 0{,}8a^2 - 0{,}8b^2 \rightarrow b^2(1{,}80) = 1{,}80 \qquad \boxed{b^2 = 1} \qquad \boxed{b = 1}$$

Lo stesso discorso, nel piano, vale fra ellisse e cerchio. Supponiamo infatti di graduare le ascisse in scala 1:20; e le ordinate in scala 1:30 e sia 1 nelle rispettive scale il raggio. Prepariamo la tabella delle coordinate del cerchio:

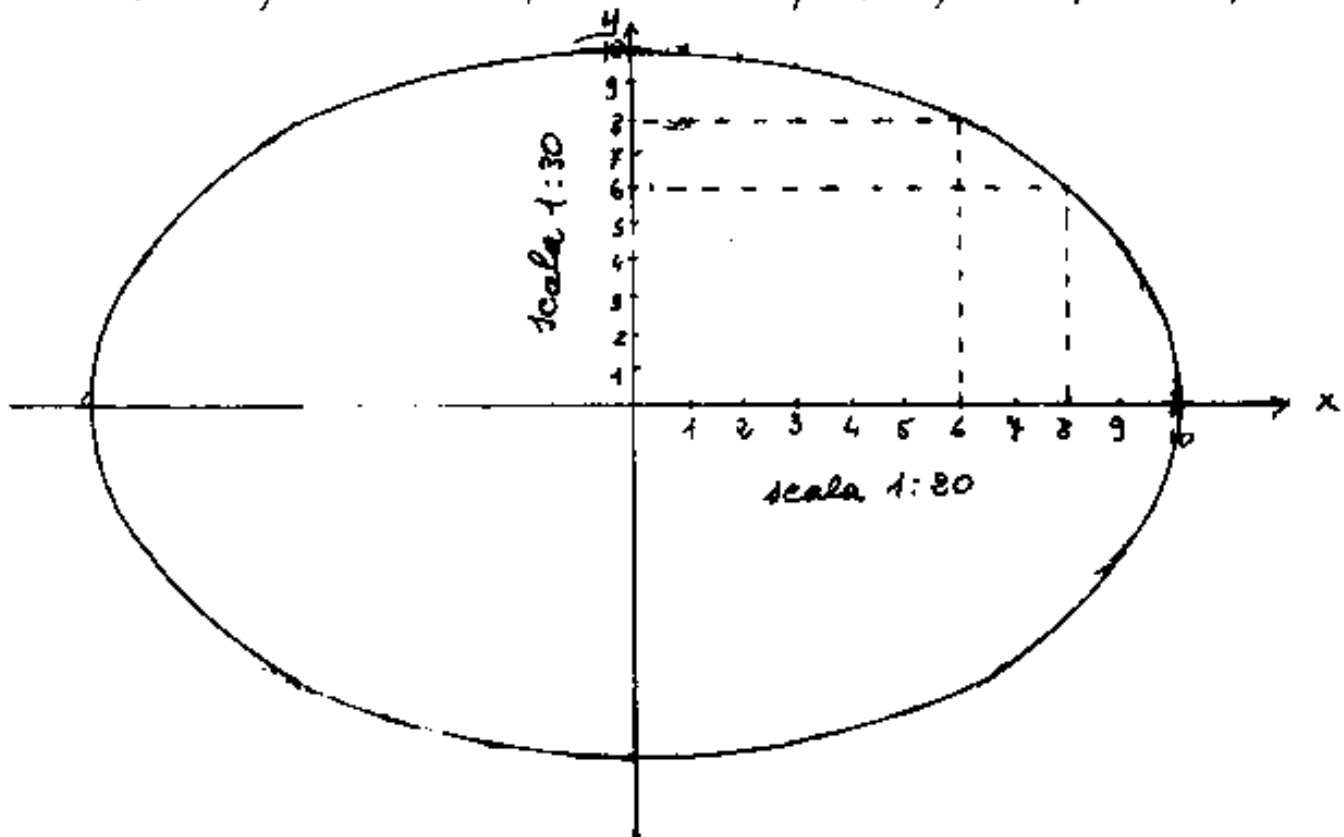
x = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10

y = 9,95 , 9,80 , 9,54 , 9,17 , 8,66 , 8 , 7,14 , 6 , 4,36 , 0

y

scala 1:30

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

x

scala 1:20

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ; \quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

per $R = 100$ cm : a (scala 1:20) $= 5$ cm ; b (scala 1:30) $= 3{,}33$ in cm. In opportuna scala possiamo scrivere: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

Si tenga presente che la proiezione "di scorcio" per un segmento è semplicemente lo stesso segmento in altra scala. (Nel senso generale di proiezioni centrali od ortogonali.)

Ellissoide ad assi traslati

Scriviamo l'equazione al centro nella forma:

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^2b^2c^2 = 0$$

ad assi traslati:

$$\Big[(b^2c^2)x^2 + (a^2c^2)y^2 + (a^2b^2)z^2 - 2(b^2c^2x_c)x - 2(a^2c^2y_c)y - 2(a^2b^2z_c)z +$$
$$\left(\tfrac{a_{11}}{K}\right) \quad \left(\tfrac{a_{22}}{K}\right) \quad \left(\tfrac{a_{33}}{K}\right) \quad \left(\tfrac{2a_{14}}{K}\right) \quad \left(\tfrac{2a_{24}}{K}\right) \quad \left(\tfrac{2a_{34}}{K}\right)$$

$$+ \left(a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + a_{33}z_c^2 - a^2b^2c^2\right) = 0\Big]$$
$$\left(\tfrac{a_{44}}{K}\right)$$

mancano i coefficienti $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$, non essendo ruotati gli assi.

$$A_{44} = \begin{vmatrix} b^2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2b^2 \end{vmatrix} = K^3(a^4b^4c^4)$$

$$A_{43} = \begin{vmatrix} b^2c^2 & 0 & -b^2c^2x_c \\ 0 & a^2c^2 & -a^2c^2y_c \\ 0 & 0 & -a^2b^2z_c \end{vmatrix} = K^3(a^4b^4c^4z_c) \Rightarrow \boxed{z_c = \frac{A_{43}}{A_{44}}} = \frac{K^3a^4b^4c^4z_c}{K^3a^4b^4c^4}$$

$$\begin{vmatrix} b^2c^2 & 0 & -b^2c^2x_c \\ \ldots \end{vmatrix}$$

$$A_{42} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -a^2c^2y_e \\ 0 & a^2b^2 & -a^2b^2z_e \end{vmatrix} = {}^{(--)}+K^3\left(a^4b^4c^4y_e\right) \rightarrow \boxed{y_e = \frac{+A_{42}}{A_{44}}}$$

$$A_{41} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b^2c^2x_e \\ a^2c^2 & 0 & -a^2c^2y_e \\ 0 & a^2b^2 & -a^2b^2z_e \end{vmatrix} = -K^3\left(a^4b^4c^4x_e\right) \rightarrow \boxed{x_e = \frac{-A_{41}}{A_{44}}}$$

avremo anche:

$$-K(a^2b^2c^2) = \boxed{a_{44} - \frac{a_{33}A_{43} + a_{21}A_{42} - a_{11}}{A_{44}}}$$

$$\boxed{a^2 = \frac{K(a^2b^2c^2)}{a_{11}}} \qquad \boxed{b^2 = \frac{K(a^2b^2c^2)}{a_{22}}} \qquad \boxed{c^2 = \frac{K(a^2b^2c^2)}{a_{33}}}$$

Esempio numerico: Studiare l'equazione:

$$\boxed{9x^2 + 16y^2 + 36z^2 - 54x - 128y - 360z + 1201 = 0}$$

$$-2(27) \qquad -2(64) \qquad -2(180)$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{vmatrix} = 5184$$

$$A_{43} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -27 \\ 0 & 16 & -64 \\ 0 & 0 & -180 \end{vmatrix} = +25920 \qquad z_c = \frac{25920}{5184} = 5$$

$$A_{42} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & -64 \end{vmatrix} = 20736 \qquad y_c = \frac{20736}{5184} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -27 \\ \dots \\ 0 & 36 & -180 \end{vmatrix} \quad \dots 5184$$

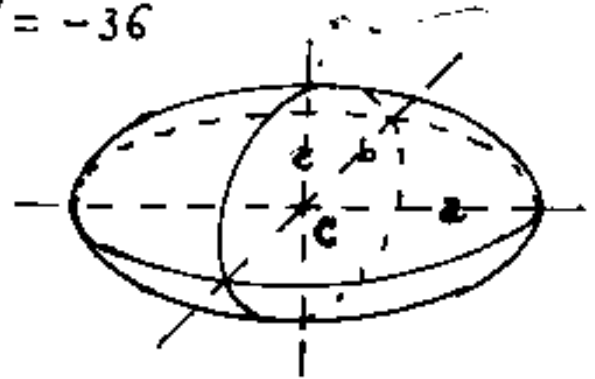
$$A_{41} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -27 \\ 16 & 0 & -64 \\ 0 & 36 & -180 \end{vmatrix} = -15552 \qquad X_C = \frac{+15552}{5184} = 3$$

$$\boxed{C = 3, 4, 5}$$

$$-K a^2 b^2 c^2 = 1201 - 9 \cdot 3^2 - 16 \cdot 4^2 - 36 \cdot 5^2 = -36$$

$$a^2 = \frac{36}{9} = 4 \qquad \boxed{a = 2}$$

$$b^2 = \frac{36}{16} = 2{,}25 \qquad \boxed{b = 1{,}5}$$

$$c^2 = \frac{36}{36} = 1 \qquad \boxed{c = 1}$$

La rotazione di solidi nello spazio

Un solido di rotazione, in quanto possiede un asse di rotazione, può essere definito in base ai coseni direttori dell'asse di rotazione. Ma, un corpo solido che non disponga di un asse privilegiato che ruota di un angolo φ intorno ad un asse di rotazione, non solo necessita dei coseni direttori di tale asse, ma, occorre sia noto anche l'angolo φ. Inversamente ciò vale per un sistema di tre assi "ruotati". Infatti detta x_1 la nuova posizione di x definita dai coseni direttori rispetto agli assi x, y, z; non resta affatto definita la posizione di y_1 e z_1 che possono ruotare intorno ad x_1.

In linea del tutto generale, ed analogamente a quanto abbiamo fatto per la rotazione di assi nel piano, ricerchiamo le coordinate x_1, y_1, z_1,

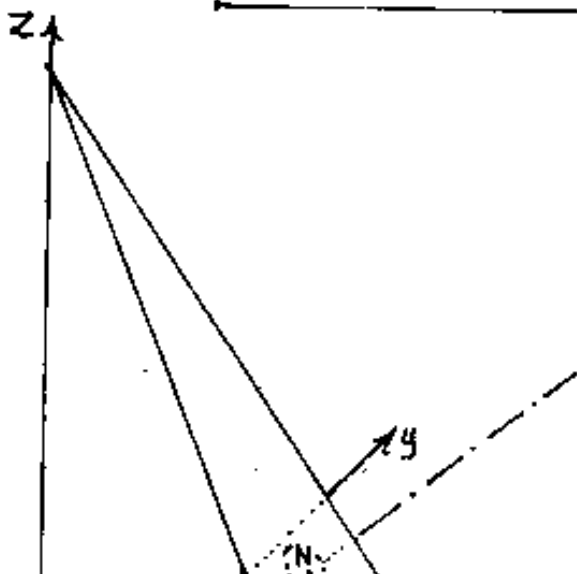
nel piano, troviamo le coordinate x_1, y_1, z_1,
di un punto ad assi ruotati in funzione delle coordinate originarie x, y, z; e viceversa.

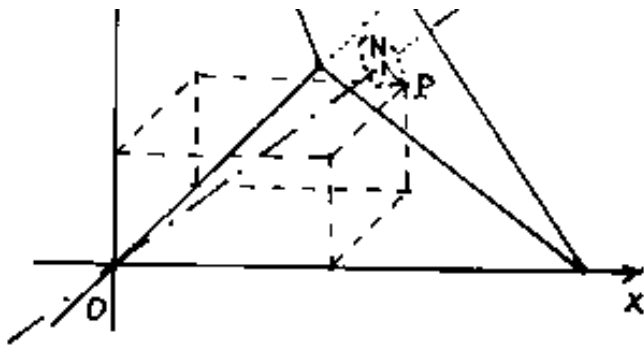
A tal fine consideriamo un asse di rotazione passante per l'origine degli assi; definita da:

$$\boxed{\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}}$$

Ciascun punto dello spazio tridimensionale mon terrà invariata la sua distanza dall'asse di rotazione, e poiché le coordinate di un punto, sono le distanze misurate sugli assi di riferimento, i punti sull'asse di rotazione, mantengono invariate le loro coordinate qualunque sia l'angolo φ di rotazione degli assi.

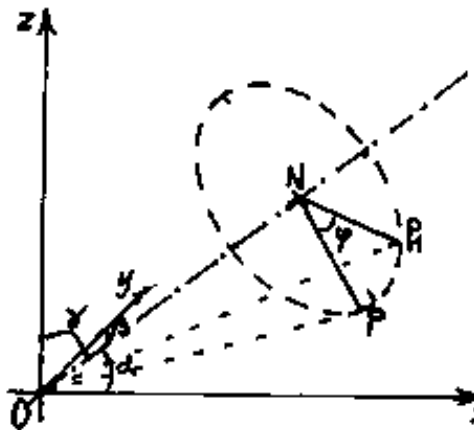
Sia P un punto dello spazio: $P \equiv (x_p, y_p, z_p)$, facciamo passare per P un piano normale all'asse di rotazione, avremo:

$$\cos\alpha\,(x - x_p) + \cos\beta\,(y - y_p) + \cos\gamma\,(z - z_p) = 0$$

La distanza del piano dall'origine "O", sarà il segmento $\overline{ON}$, sull'asse di rotazione (normale) ove:

$$ON = \cos\alpha\, x_p + \cos\beta\, y_p + \cos\gamma\, z_p$$

$$ON = \cos\alpha\, x_P + \cos\beta\, y_P + \cos\delta\, z_P$$

Nella rotazione il punto P descriverà una circonferenza di raggio $r = \overline{PN}$, che è l'intersezione della sfera di raggio: $\overline{OP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$ cioè: $x^2 + y^2 + z^2 = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2$ col piano di cui sopra.

Occorre fare attenzione al <u>verso di rotazione</u> di $\overline{NP}$ per andare in $\overline{NP_1}$ compiendo l'angolo φ, orario, od antiorario rispetto all'asse di rotazione orientato. (vedi vol. II).

In figura, se l'orientamento dell'asse è: $\overrightarrow{ON}$ il verso è antiorario. (come la terna x,y,z)

Note le coordinate di $P \equiv (x_P, y_P, z_P)$; $\overline{OP}^2 = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2$

$\cos(x\hat{O}P) = \dfrac{x_P}{\overline{OP}}$; $\cos(y\hat{O}P) = \dfrac{y_P}{\overline{OP}}$; $\cos(z\hat{O}P) = \dfrac{z_P}{\overline{OP}}$

Sono i coseni direttori di $\overrightarrow{OP}$.

$\overline{OP}^2 = \overline{OP_1}^2$; $\overline{NP}^2 = \overline{NP_1}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{ON}^2$

la retta:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{\cos\alpha} = \dfrac{y}{\cos\beta}\right) \\ \left(\dfrac{x}{\cos\alpha} = \dfrac{z}{\cos\gamma}\right) \end{cases} \text{(asse di rotazione)}$$

ed il piano:

$$\{(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z = \overline{ON}\} \text{ (piano di } \varphi)$$

$x_N = (\cos\alpha)\,\overline{ON}$; $y_N = (\cos\beta)\,\overline{ON}$; $z_N = (\cos\gamma)\,\overline{ON}$

$$\overline{PP_1} = 2\overline{NP}\,\mathrm{sen}(\varphi/2) = \sqrt{(X_P - X_{P_1})^2 + (Y_P - Y_{P_1})^2 + (Z_P - Z_{P_1})^2}$$

essendo: $2(1-\cos\varphi) = (2\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2})2$. avremo:

$$(X_P - X_{P_1})^2 + (Y_P - Y_{P_1})^2 + (Z_P - Z_{P_1})^2 = 2(1-\cos\varphi)\overline{NP}^2$$

ove sono incognite le tre coordinate di P_1.

$$X_{P_1}^2 + X_P^2 - 2X_P X_{P_1} + y_P^2 + y_{P_1}^2 - 2y_P y_{P_1} + Z_P^2 + Z_{P_1}^2 - 2Z_P Z_{P_1} = 2(1-\cos\varphi)\overline{NP}^2$$

essendo: $x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = x_{P_1}^2 + y_{P_1}^2 + z_{P_1}^2 = \overline{OP}^2 = \overline{OP_1}^2$

$$2\overline{OP}^2 - 2X_P X_{P_1} - 2y_P y_{P_1} - 2Z_P Z_{P_1} = 2(1-\cos\varphi)\overline{NP}^2$$

$$\overline{OP}^2 - \overline{NP}^2 + \cos\varphi\,\overline{NP}^2 = X_P X_{P_1} + y_P y_{P_1} + Z_P Z_{P_1}$$

I. equaz. $\boxed{(X_P)X_{P_1} + (y_P)y_{P_1} + (Z_P)Z_{P_1} = \overline{ON}^2 + \cos\varphi\,\overline{NP}^2}$

II equaz. $\boxed{(\cos\alpha)X_{P_1} + (\cos\beta)y_{P_1} + (\cos\gamma)Z_{P_1} = \overline{ON}}$

III equaz $\boxed{X_{P_1}^2 + y_{P_1}^2 + Z_{P_1}^2 = \overline{OP}^2}$

ricaviamo (Z_{P_1}) dalla II^a equaz.

$$Z_{P_1} = \frac{\overline{ON}}{\cos\gamma} - \frac{X_{P_1}\cos\alpha}{\cos\gamma} - \frac{y_{P_1}\cos\beta}{\cos\gamma}$$

$$Z_{P_1}^2 = \left(\overline{ON}^2 + X_{P_1}^2\cos^2\alpha + y_{P_1}^2\cos^2\beta - 2\overline{ON}X_{P_1}\cos\alpha - 2\overline{ON}y_{P_1}\cos\beta + X_{P_1}y_{P_1}\cos\alpha\cos\beta\right)\frac{1}{\cos^2\gamma}$$

sostituendo i valori nella I e III equaz.

$$\left(X_P - Z_P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)X_{P_1} + \left(y_P - Z_P\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)y_{P_1} = \overline{ON}^2 - \frac{Z_P\overline{ON}}{\cos\gamma} + \cos\varphi\,\overline{NP}^2$$

$$\boxed{(X_P - \overline{OP}\cos\alpha)X_{P_1} + (y_P - \overline{OP}\cos\beta)y_{P_1} = \overline{ON}^2 - (\overline{OP})(\overline{ON}) + \cos\varphi\,\overline{NP}^2}$$

$$\left[\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma}\right)X_{P_1}^2+\left(1+\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma}\right)y_{P_1}^2+\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos^2\gamma}\right)X_{P_1}y_{P_1}-\left(2\overline{ON}\cos\alpha\right)X_{P_1}-\left(2\overline{ON}\cos\beta\right)y_{P_1}=\overline{ON}^2-\overline{OP}\,\overline{ON}+\cos\varphi\,\overline{NP}^2\right]$$

Ricaviamo: $y_{P_1} = \dfrac{\overline{ON}^2-\overline{OP}\,\overline{ON}+\cos\varphi\,\overline{NP}^2-\left(X_P+\overline{OP}\cos\alpha\right)X_{P_1}}{\left(y_P-\overline{OP}\cos\beta\right)}$

che sostituito nella seconda equazione ci da una equazione di secondo grado in (X_{P_1}) piuttosto complicata, per cui preferiamo un esempio numerico.

Esempio numerico

Sia: $P \equiv (5;5;2,5)$; sia: $\cos\alpha = 0,5$; $\cos\beta = 0,292418237$; $\cos\gamma = 0,815163526$; trovare le coordinate di $P \rightarrow P_1$ dopo una ruotazione di $30° = \varphi$ intorno all'asse di cui sono dati i coseni direttori.

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 56,25 \rightarrow \overline{OP} = 7,50$$

$$\overline{ON} = 5\cos\alpha + 5\cos\beta + 2,5\cos\gamma = 2,5 + 1,462091185 + 2,037908815 = 6$$

$\overline{ON}^2 = 36$; $\overline{PN}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{ON}^2 = 56,25 - 36 = 20,25$ da cui

$\overline{PN} = 4,5$; $\cos\varphi = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866025404$.

$$\overline{ON}^2 + \cos\varphi\,\overline{NP}^2 = 36 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 20,25 = 53,53701443.$$

possiamo ora scrivere le tre equazioni

$$\begin{cases} 5X_{P_1} + 5Y_{P_1} + 2,5Z_{P_1} = 53,53701443 \\ 0,5X_{P_1} + 0,292418237Y_{P_1} + 0,815163526Z_{P_1} = 6 \\ X_{P_1}^2 + Y_{P_1}^2 + Z_{P_1}^2 = 56,25 \end{cases}$$

$$Z_{P_1} = 21,41480577 - 2X_{P_1} - 2Y_{P_1}$$

$$Z_{P_1}^2 = 458,5939062 + 4X_{P_1}^2 + 4Y_{P_1}^2 - 85,6592231X_{P_1} - 85,6592231Y_{P_1} + 8X_{P_1}Y_{P_1}$$

$$1,13032705X_{P_1} + 1,33790882Y_{P_1} = 11,45656858$$

$$5x_{P_1}^2 + 5y_{P_1}^2 + 8x_{P_1}y_{P_1} - 85,6592231x_{P_1} - 85,6592231y_{P_1} + 402,3439062 = 0$$

$$y_{P_1} = 8,563041374 - 0,8448246101\,x_{P_1}$$

$$y_{P_1}^2 = 73,32567757 + 0,713764934\,x_{P_1}^2 - 14,46890424\,x_{P_1}$$

$$3,568824671\,x_{P_1}^2 - 72,34452120\,x_{P_1} + 366,6283879 = 5y_{P_1}^2$$

$$5\, y_{P_1}^2 = 3,568824671\, X_{P_1}^2 - 72,34452120\, X_{P_1} + 366,6283879$$

$$8 X_{P_1} y_{P} = -6,7587688\, X_{P_1}^2 + 68,5043310\, X_{P_1} \quad =$$

$$-(85,6592231)\, y_{P_1} = \quad = \quad +72,3688607\, X_{P_1} - 733,5034715$$

dall'equaz. $\quad 5\, X_{P_1}^2 - 85,6592231\, X_{P_1} + 402,3439062$

Sommando: $\boxed{1,81005587\, X_{P_1}^2 - 17,13055260\, X_{P_1} + 35,4688226 = 0}$

si ha l'equazione di 2° grado in X_{P_1}, che può scriversi:

$$X_{P_1}^2 - 2(4,7320508)\, X_{P_1} + 19,5954297 = 0$$

$$X_{P_1} = 4,7320508 \pm 1,6723860 \begin{cases} X_{P_1} = 6,4044368 \\ X_{P_1} = 3,0596648 \end{cases}$$

$$y_{P_1} = \begin{cases} 3,1522779 \,; \\ 5,9780955 \,; \end{cases} \qquad z_{P_1} = \begin{cases} 2,3013763 \\ 3,3392852 \end{cases}$$

verifichiamo i due risultati:

$$6,4044368^2 + 3,1522779^2 + 2,3013763^2 = 56,25 = \overline{OP_1}^2 = \overline{OP}^2$$

$$3,0596648^2 + 5,9780955^2 + 3,3392852^2 = 56,25 = \overline{OP_1}^2 = \overline{OP}^2$$

$$(0,5)(6,4044368) + (0,2924182237)(3,1522779) + (0,8151635526)(2,3013763) = 6 = \overline{ON}$$

$$(0,5)(3,0596648) + (0,2924182237)(5,9780955) + (0,8151635526)(3,3392852) = 6 = \overline{ON}$$

$$(0,5)(3,0596648)+(0,292418237)(5,9780955)+(0,815163526)(3,3392852)= 6 = ON$$

$$(6,4044368-5)^2+(3,1522779-5)^2+(2,3013763-2,5)^2=\overline{PP_1}^2$$

$$\overline{PP_1}^2=5,425971 \qquad \overline{PP_1}=2,329371387$$

$$(3,0596648-5)^2+(5,9780955-5)^2+(3,3392852-2,5)^2=5,425971$$

poiché $x_N=6\times 0,5=3$; $y_N=(0,292418237)6=1,754509422$; $z_N\simeq 4,890981156$

$$(3-6,4044368)^2+(1,754509422-3,1522779)^2+(4,890981156-2,3013763)^2=20,25=\overline{PN}^2$$

$$(3-3,0596648)^2+(1,754509422-5,9780955)^2+(4,890981156-3,3392852)^2=20,25=\overline{P_1N}^2$$

La ruotazione di assi nello spazio

Nel piano, abbiamo già trattato la rotazione di assi, ed eravamo pervenuti alle formule:

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha \\ y_1 = y\cos\alpha - x\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$$

o viceverso:

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\,\text{sen}\,\alpha \\ y = x_1\,\text{sen}\,\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}$$

Ove: x, y sono le cordinate del punto rispetto agli assi: x, y ed x_1, y_1, sono le coordinate dello stesso punto rispetto agli assi x_1 ed y_1 ruotati di α rispetto ad $x; y$, (nel verso di rotazione della $x(+)$ che va a sovrapporsi alla $y(+)$).

Nei due sistemi di assi era comune e fissa l'origine "O". Però, volendo ruotare una figura riferita al sistema x, y; abbiamo avvertito che non potevamo applicare semplicemente la ruotazione

di assi, perchè si sarebbe spostato il centro del=
la figura. Quindi se volevamo immutate le coordi=
nate del centro figura, in modo che la figura ruo=
tasse intorno al proprio centro. dovevamo prima
ruotarla nella posizione al centro assi e poi
traslarla. (e non inversamente) (Vedi vol. II).

Possiamo infine dare una rotazione γ intorno all'asse x, ed avremo:

$$\Big[x^2\left(\frac{\cos^2\beta\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{c^2}\right)+(z\operatorname{sen}\gamma+y\cos\gamma)^2\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)+$$

$$+(z\cos\gamma-y\operatorname{sen}\gamma)^2\left(\frac{\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2}\right)+$$

$$+2x(z\operatorname{sen}\gamma+y\cos\gamma)\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta(b^2-a^2)}{a^2b^2}\right)+$$

$$+2x(z\cos\gamma-y\operatorname{sen}\gamma)\left(\frac{\operatorname{sen}\beta\cos\beta\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2}-\frac{\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{c^2}\right)+$$

$$+2(z\operatorname{sen}\gamma+y\cos\gamma)(z\cos\gamma-y\operatorname{sen}\gamma)\left(\frac{\operatorname{sen}\beta\ \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\ (b^2-a^2)}{a^2b^2}\right)=1\Big]$$

che possiamo sviluppare ed ordinare:

$$\Big[x^2\left(\frac{\cos^2\beta\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\gamma}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha\cos^2\gamma}{b^2}+\right.$$

$$+\frac{\operatorname{sen}^2\gamma\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\gamma\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\gamma\cos^2\beta}{c^2}-$$

$$\left.-\frac{2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\ (b^2-a^2)}{a^2b^2}\right)+z^2\left(\frac{\operatorname{sen}^2\gamma\operatorname{sen}^2\alpha}{a^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\gamma\cos^2\alpha}{b^2}+\right.$$

$$+\frac{\cos^2\gamma\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma\cos^2\beta}{c^2}+\frac{2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha(b^2-a^2)}{a^2b^2}+$$

$$+2xy\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(b^2-a^2)}{b^2a^2}-\frac{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta\cos\beta\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2}+\frac{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{c^2}\right)+$$

$$+2xy\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,(b^2-a^2)}{b^2a^2}-\frac{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta\cos\beta\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2}+\frac{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{c^2}\right)+$$

$$+2xz\left(\frac{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta\,(b^2-a^2)}{a^2b^2}+\frac{\cos\gamma\operatorname{sen}\beta\cos\beta\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos\gamma\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2}-\frac{\cos\gamma\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{c^2}\right)+$$

$$+2yz\left(\frac{\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma\operatorname{sen}^2\alpha}{a^2}+\frac{\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma\cos^2\alpha}{b^2}-\frac{\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\alpha}{a^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2}-\frac{\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma\cos^2\beta}{c^2}+\frac{(\cos^2\gamma-\operatorname{sen}^2\gamma)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\,(b^2-a^2)}{a^2b^2}\right)=1\Bigg]$$

Trattiamo il problema in generale.

Nello spazio il problema è più complesso.
Occorre prima di tutto distinguere la rotazione degli assi intorno ad una retta passante per l'origine, (ferma restando l'origine) il che implica che un insieme di punti cambi le proprie coordinate in modo tale da risultare traslati sull'arco, che ha per centro l'origine degli assi, e l'ampiezza proporzionale all'angolo di rotazione ed alla distanza dall'asse. Occorre distinguere il caso in cui, fermi restando gli assi, si ruota un solido, (un insieme di punti), intorno ad un asse passante o no per il solido stesso. (I punti sull'asse di rotazione mantengono le loro coordinate).

La ruotazione degli assi di riferimento, in linea di principio può ridursi a rotazioni piane, facendo prima ruotare gli assi x, y, intorno all'asse z, dell'angolo α_1, cioè fino a raggiungere la posizione $x_1 y_1$; poi

fino a raggiungere la posizione $x_1 y_1$; poi far ruotare gli assi x_1 e z_1 (z_1 è rimasta coincidente con z) intorno all'asse y_1 con angolo α_2 fino a raggiungere la posizione $x_2 z_2$ (al solito y_1 coincide con y_2); infine si ruotano gli assi y_2, z_2 intorno ad x_2 fino ad $y_3 z_3$ (x_3 coincide con x_2)

Questo procedimento, che stiamo per svolgere, deve essere completato; infatti, ogni rotazione intorno ad un punto, ammette un solo asse di rotazione ed un solo angolo che ne misura l'ampiezza. Quindi una volta trovate le coordinate finali x_3, y_3, z_3, in funzione di x, y, z dovremo trovare l'equazione della retta per "O" intorno alla quale avviene la rotazione, e l'ampiezza φ della rotazione stessa.

Il concetto di angolo come variazione di direzione, porta a scindere l'angolo su un piano nello spazio, in due angoli, ciò avviene con gli strumenti topografici come il teodolite, ove una variazione di direzione, è misurata da un angolo orizzontale detto "azimutale" (variazione di azimut) e da un angolo verticale (zenitale). Ma se abbiamo una variazione dell'angolo zenitale allora occor

una variazione dell'angolo zenitale, allora occorre conoscere anche l'angolo riferito all'orizzonte, e gli angoli diventano tre.
Per definire una retta per l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali, bastano due coseni direttori, il terzo è conseguenziale, essendo "uno" la somma dei quadrati.

Iniziamo il calcolo della rotazione degli assi

α_1 (intorno a Z)
$$\begin{cases} x_1 = (\cos\alpha_1)X + (\operatorname{sen}\alpha_1)y \\ y_1 = (\cos\alpha_1)y - (\operatorname{sen}\alpha_1)X \\ z_1 = Z \end{cases}$$

(successivamente) α_2 (intorno ad y_1)
$$\begin{cases} Z_2 = (\cos\alpha_2)Z_1 + (\operatorname{sen}\alpha_2)X_1 \\ y_2 = y_1 = (\cos\alpha_1)y - (\operatorname{sen}\alpha_1)X \\ X_2 = (\cos\alpha_2)X_1 - (\operatorname{sen}\alpha_2)Z_1 \end{cases}$$

(successivamente) α_3 (intorno a X_2)
$$\begin{cases} X_3 = X_2 = (\cos\alpha_2)X_1 - (\operatorname{sen}\alpha_2)Z_1 \\ y_3 = (\cos\alpha_3)y_2 + (\operatorname{sen}\alpha_3)Z_2 \\ Z_3 = (\cos\alpha_3)Z_2 - (\operatorname{sen}\alpha_3)y_2 \end{cases}$$

Facciamo ora le sostituzioni in modo da esprimere i valori delle coordinate ruotate, in funzione delle coordinate iniziali.

$$\Big\{ Z_2 = (\cos\alpha_2)(z) + (\operatorname{sen}\alpha_2)\big((\cos\alpha_1)x + (\operatorname{sen}\alpha_1)y\big)$$

$$\begin{cases} y_2 = (\cos\alpha_1)\, y - (\operatorname{sen}\alpha_1)\, x \\ x_2 = (\cos\alpha_2)\big((\cos\alpha_1)\, x + (\operatorname{sen}\alpha_1)\, y\big) - (\operatorname{sen}\alpha_2)\, z \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_2 = (\cos\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_2)\, x + (\operatorname{sen}\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_2)\, y + (\cos\alpha_2)\, z \\ y_2 = -(\operatorname{sen}\alpha_1)\, x + (\cos\alpha_1)\, y \\ x_2 = (\cos\alpha_1)(\cos\alpha_2)\, x + (\operatorname{sen}\alpha_1)(\cos\alpha_2)\, y - (\operatorname{sen}\alpha_2)\, z \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_3 = -(\operatorname{sen}\alpha_2) Z + \cos\alpha_2 \left((\cos\alpha_1) X + (\operatorname{sen}\alpha_1) Y \right) \\ Y_3 = (\cos\alpha_3)\left[-(\operatorname{sen}\alpha_1) X + (\cos\alpha_1) Y \right] + (\operatorname{sen}\alpha_3)\left[(\cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2) X + (\operatorname{sen}\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_2) Y + (\cos\alpha_2) Z \right] \\ Z_3 = (\cos\alpha_3)\left[(\cos\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_2) X + (\operatorname{sen}\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_2) Y + \cos\alpha_2 Z \right] - (\operatorname{sen}\alpha_3)\left[-(\operatorname{sen}\alpha_1) X + (\cos\alpha_1) Y \right] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} X_3 = (\cos\alpha_1)(\cos\alpha_2) X + (\operatorname{sen}\alpha_1)(\cos\alpha_2) Y - (\operatorname{sen}\alpha_2) Z \\ Y_3 = \left[(\cos\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_2)(\operatorname{sen}\alpha_3) - (\operatorname{sen}\alpha_1)(\cos\alpha_3) \right] X + \left[(\operatorname{sen}\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_2)(\operatorname{sen}\alpha_3) + (\cos\alpha_1)(\cos\alpha_3) \right] Y + \left[+(\cos\alpha_2)(\operatorname{sen}\alpha_3) \right] Z \\ Z_3 = \left[(\cos\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_2)(\cos\alpha_3) + (\operatorname{sen}\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_3) \right] X + \left[(\operatorname{sen}\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_2)(\cos\alpha_3) - (\cos\alpha_1)(\operatorname{sen}\alpha_3) \right] Y + \left[+(\cos\alpha_2)(\cos\alpha_3) \right] Z \end{cases}}$$

Si nota che la X_3 è indipendente da α_3, ciò dipende dal procedimento sequenziale delle rotazioni. Poiché:

$$(X^2+Y^2+Z^2) = (X_1^2+Y_1^2+Z_1^2) = (X_2^2+Y_2^2+Z_2^2) = (X_3^2+Y_3^2+Z_3^2) = \overline{OP} = \overline{OP_3}$$

avremo:

$$\cos\underset{\overline{OP}}{\alpha} = \frac{X}{\overline{OP}} \; ; \quad \cos\underset{\overline{OP}}{\beta} = \frac{Y}{\overline{OP}} \; ; \quad \cos\underset{\overline{OP}}{\gamma} = \frac{Z}{\overline{OP}}$$

$$\cos\underset{\overline{OP_3}}{\alpha} = \frac{X_3}{\overline{OP}} \; ; \quad \cos\underset{\overline{OP_3}}{\beta} = \frac{Y_3}{\overline{OP}} \; ; \quad \cos\underset{\overline{OP_3}}{\gamma} = \frac{Z_3}{\overline{OP}}$$

cioè: "Nella rotazione, le coordinate iniziali e finali stanno fra loro come i rispettivi coseni direttori della retta che uni

sce l'origine fissa degli assi al punto!"

Possiamo dire:

1) I punti si muovono mantenendo costante la distanza dall'asse di rotazione. 2) Tali distanze descrivono l'angolo φ su piani normali all'asse. 3) Ad ogni valore di φ corrisponde un piano del fascio passante per l'asse. Un piano iniziale ed un elemento

che individua il piano ruotato di coordinate $x_3, y_3 z_3$.

4) L'intersezione di questi due piani, col piano perpendicolare all'asse individua le due rette normali all'asse su cui insistono le distanze dei punti.

5) Quindi ogni azione di rotazione, avviene su un piano normale all'asse e può essere rappresentata da un segmento parallelo all'asse, la cui ampiezza sia proporzionale all'ampiezza dell'angolo, con verso tale da determinare il verso di rotazione. Tale segmento è un vettore: "vettore momento" che rappresenta qualcosa di più di un generatore di angoli finiti, infatti rappresenta la coppia forze agenti sul piano, cioè una azione continua di rotazione che può pensarsi come un'angolo percorso nell'unità di tempo (velocità angolare), ma è ancora qualcosa di diverso. Infatti l'azione

del ruotare implica l'estrinsecarsi di un lavoro, cioè una trasmutazione di energia. Una coppia di forze può torcere un'asta di un angolo finito accumulando nell'asta tanta energia elastica da provocare una coppia uguale e contraria, tale da ristabilire l'equilibrio; ma può anche provocare una accelerazione angolare, che generi il moto di

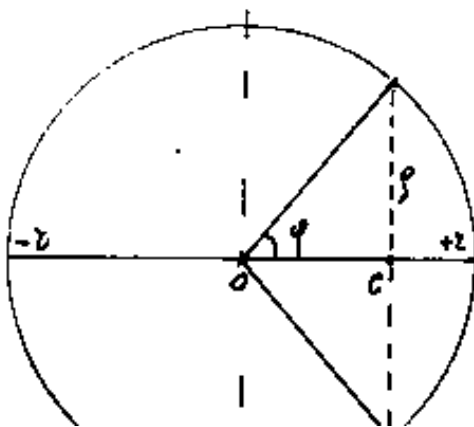
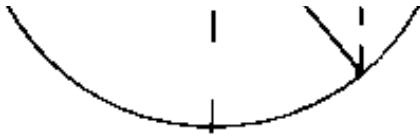
un corpo e trasformi in energia cinetica l'azione della coppia. Ma, nel calcolo vettoriale incontre= remo un altro speciale vettore, detto: "rotore" che percorrendo il bordo di un'area chiusa, com= pie un lavoro detto circuitazione, determinato dal= l'integrale, esteso al circuito, che ha per fattore finito il valore dell'intensità del rotore in quel punto, e per fattore differenziale, il differenziale della lunghezza del circuito. Questo integrale detto comunemente l'integrale della circuitazione equivale al flusso di un'altro vettore attra= verso l'area circuitata. Anche il flusso è rap= presentato da un integrale, esteso a tutta l'area, e che ha per fattore finito il valore del vettore in quel punto, e per fattore differenziale, il differen= ziale dell'area. Il legame fra il vettore che genera il flusso ed il conseguente rotore, è fondamentale, basti ricordare le equazioni dell'elet=

fondamentale, basti ricordare le equazioni dell'elet=
tromagnetismo.

Abbiamo qui anticipato alcune relazioni di fisica classica, per evidenziare l'importanza di mettere a fuoco le ruotazioni nello spazio geometrico.

Ma, cos'é una ruotazione? Quali sono gli elementi che definiscono una ruotazione? Noi uomini siamo troppo abituati a commisurare lo spazio in lungo, in largo, in alto, (quelli che divennero gli assi cartesiani) al qua-le aggiungere la quarta dimensione tempo (Einstain) Il problema di correlare misure lineari e misure angolari fece sorgere la trigonometria, (che in fondo è solo la costitu-zione di tabelle di conti fatti), la misura lineare è una relatività; gli angoli invece dispongono di una loro uni-tà: "il ciclo". Mentre è facile immaginare, in un cer-chio, un raggio che parta da una posizione iniziale e ruoti descrivendo tutta l'area del cerchio, molto meno facile è pensarlo nell'angolo solido, Se infatti, in una sfera, consideriamo un raggio in una certa po-sizione iniziale, ed il punto terminale sulla superficie sferica si trasmuti in un'area differenziale, che al-largandosi diventa una calotta sferica, mentre il

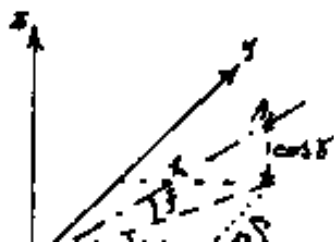
largandosi diventa una calotta sferica, mentre il raggio si trasmuta in superficie conica avente la base comune con la calotta, al limite di un quarto di ciclo spaziale, la superficie conica è divenuta un cerchio massimo; la calotta una semisfera, inizia a diminuire la calotta e dopo mezzo ciclo si ha il raggio opposto a quello di partenza.

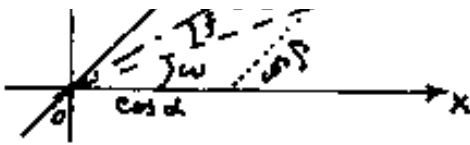
Anche in questo caso si ha una "direzione" che è la direzione del raggio iniziale, si ha una "oscillazione" scomponibile in quattro tempi, cioè un ciclo che implica una frequenza. È notevole considerare il centro e la circonferenza della base comune fra calotta e cono; infatti, mentre il punto: "centro si sposta linearmente da "$\pm r$" a "$\mp r$", ove "r" è il raggio, la circonferenza parte da zero, raggiunge un massimo, torna a zero (in $-r$), da dove riparte in verso opposto, riproduce un massimo in verso opposto (minimo) e torna a zero nel punto di partenza iniziale.
Se consideriamo un piano qualsiasi che contenga il raggio iniziale, esso taglierà la sfera secondo un cerchio massimo; possiamo con ciò vedere che l'angolo

piano φ, (di semiapertura del cono) determina l'istante dell'oscilla=zione in quanto φ varia da zero ad un giro, (2π), ed ave=

mo che il raggio ρ della circonferenza = $\rho = r \operatorname{sen} \varphi$, mentre la posizione del centro C cioè $\overline{OC} = r \cos \varphi$.

Si hanno due vibrazioni, una longitudinale (direzione) una trasversale nei piani di giacitura; entrambi della

stessa frequenza, entrambi con lo stesso parametro "φ".

Quindi l'angolo piano, come variazione di direzione, giacente in qualunque posizione dello spazio, può sempre correlarsi coi angoli piani riferiti ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e viceversa.

Consideriamo infatti una certa direzione, definita rispetto agli assi dai coseni direttori: cos(α), cos(β), cos(γ); puntiamo in quella direzione un teodolite in stazione al centro assi, avente per direzione azimutale l'asse x e sia "ω" l'angolo orizzontale (azimut) e sia "ξ" l'angolo di elevazione. (Angoli letti sul cerchio orizzontale azzerato sull'azimut, e sul cerchio verticale azzerato sul piano orizzontale, altezza strumentale zero affinché i vertici di questi angoli coincidano col centro assi.)

Sia: $\overline{OA} = 1$, avremo che le coordinate di A coincidono coi cose-

ni direttori di A, Avremo quindi

$$\tan(\omega) = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \quad ; \quad \tan(\xi) = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}} = \frac{\sqrt{1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}}{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}} :$$

$$\tan(\xi) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta} - 1} \quad ; \quad \cos(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\xi)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta} - 1}}$$

$$\cos(\xi) = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta} \quad ; \quad \cos(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}}$$

$$\cos\omega = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}}$$

$$\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta} = \cos(\xi) = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\omega)} \quad \text{da cui:}$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \cos(\omega)\cdot\cos(\xi)}$$

$$\cos\beta = \tan(\omega)\cdot\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen}(\omega)}{\cos(\omega)}\cdot\cos(\omega)\cos(\xi)$$

$$\boxed{\cos\beta = \operatorname{sen}(\omega)\cos(\xi)}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)} = \sqrt{1-\cos^2(\xi)} = \operatorname{sen}(\xi)$$

$$\boxed{\cos(\gamma) = \operatorname{sen}(\xi)}$$

Dagli elementi di rilievo topografico, (nelle condizioni sopra esposte), cioè noti ω_A, ξ_A; e ω_B, ξ_B; di due direzioni $\overline{OA}$ ed $\overline{OB}$ è possibile calcolare i coseni direttori rispettivi e quindi dalla formula:

$$\boxed{\cos\widehat{rr_1} = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1}$$

già trattata, è possibile calcolare l'angolo delle due direzioni $\overline{OA}$ ed $\overline{OB}$ cioè: $A\widehat{O}B = \varphi$

$$\cos\varphi = (\cos(\omega)_A\cdot\cos\xi_A)(\cos\omega_B\cos\xi_B) + (\operatorname{sen}\omega_A\cos\xi_A)(\operatorname{sen}\omega_B\cos\xi_B) + \operatorname{sen}\xi_A\operatorname{sen}\xi_B$$

$$\boxed{\cos\varphi = \cos(\omega_A-\omega_B)\cos\xi_A\cdot\cos\xi_B + \operatorname{sen}\xi_A\operatorname{sen}\xi_B}$$

L'asse di rotazione della direzione $\overrightarrow{OA}$, che ruota per sovrapporsi alla direzione $\overrightarrow{OB}$, è, ovviamente, una retta per l'origine normale al piano AOB, definita da:

asse:
$$\begin{cases} (\cos\alpha_A)x + (\cos\beta_A)y + (\cos\gamma_A)z = 0 \\ (\cos\alpha_B)x + (\cos\beta_B)y + (\cos\gamma_B)z = 0 \end{cases}$$

Detta "r" la retta asse, volendo i suoi coseni diret=tori (vedi pag 33) avremo:

$$\cos(\widehat{xr}) = \begin{vmatrix} \cos\beta_A & \cos\gamma_A \\ \cos\beta_B & \cos\gamma_B \end{vmatrix} K \qquad \cos(\widehat{yr}) = \begin{vmatrix} \cos\gamma_A & \cos\alpha_A \\ \cos\gamma_B & \cos\alpha_B \end{vmatrix} K; \qquad \cos(\widehat{zr}) = \begin{vmatrix} \cos\alpha_A & \cos\beta_A \\ \cos\alpha_B & \cos\beta_B \end{vmatrix} \cdot K$$

ove:

$$K = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} \cos\beta_A & \cos\gamma_A \\ \cos\beta_B & \cos\gamma_B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\gamma_A & \cos\alpha_A \\ \cos\gamma_B & \cos\alpha_B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\alpha_A & \cos\beta_A \\ \cos\alpha_B & \cos\beta_B \end{vmatrix}^2}}$$

Il piano normale alla retta asse, e passante per l'origine degli assi avrà per equazione:

$$\cos(\widehat{xr})X + \cos(\widehat{yr})Y + \cos(\widehat{zr})Z = 0 \qquad \text{(piano AOB)}$$

e conterrà le due rette $\vec{OA}$ ed $\vec{OB}$

Come avevamo previsto la definizione di φ richiede tre angoli: la variazione azimutale $\omega = (\omega_A - \omega_B)$; ed i due angoli ξ_A, e ξ_B riferiti alla direzione oriz=zontale, (o zenitali $(90-\xi_A)$; $(90-\xi_B)$)

Quindi per permettere ogni possibile posizione ad un sistema di tre assi cartesiani ortogonali (ferma restando l'origine) occorrono le tre rotazioni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, infatti se facessimo solo le rotazioni intorno a "z" ed a "y" l'asse y rimarrebbe nel piano xy.

Le tre equazioni che esplicitano x_3, y_3, z_3 in funzione di x, y, z, e di: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ci consentono

di calcolare le coordinate di $P_1 \equiv (x_3, y_3, z_3)$.

Esempio numerico

Le cordinate iniziali siano: $P \equiv (x, y, z) \equiv (5 ; 5 ; 2{,}5)$

sia $\alpha_1 = \alpha_2 = 20°$; $\alpha_3 = 10°$

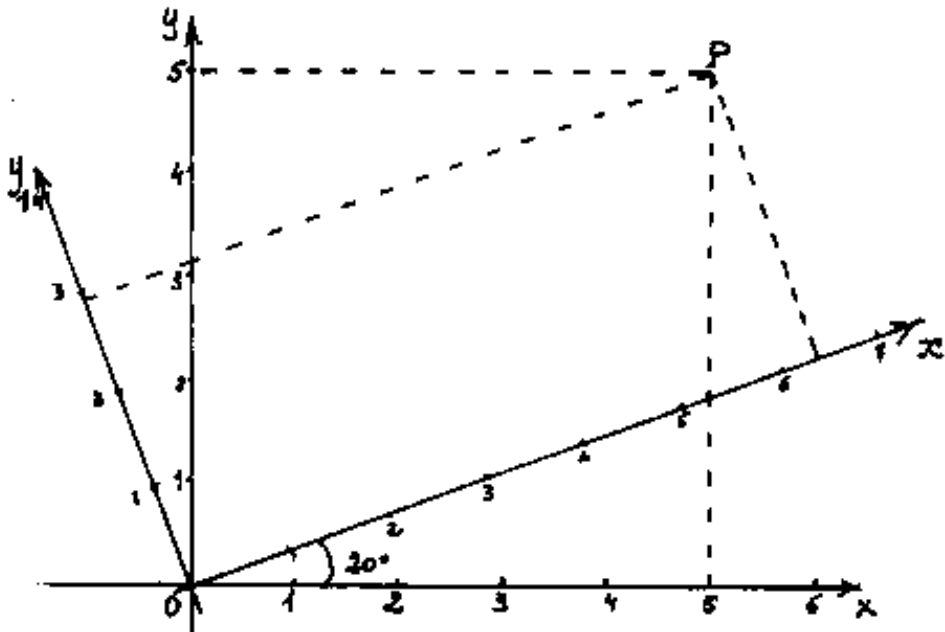
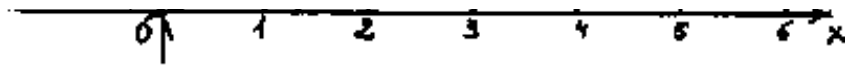
$\operatorname{sen}\alpha_1 = \operatorname{sen}\alpha_2 = 0{,}342020143$; $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 0{,}939692621$

$\operatorname{sen}\alpha_3 = 0{,}173648178$; $\cos\alpha_3 = 0{,}984807753$

Sappiamo $\overline{OP}^2 = 56{,}25$; $\overline{OP} = 7{,}50$

Calcoliamo le coordinate della rotazione intorno a Z

$$\begin{cases} \underline{x_1} = (\cos\alpha_1)x + (\operatorname{sen}\alpha_1)y = (0{,}939692621)\cdot 5 + (0{,}342020143)5 = \underline{6{,}408563821} \\ \underline{y_1} = (\cos\alpha_1)y - (\operatorname{sen}\alpha_1)x = (0{,}939692621)\cdot 5 - (0{,}342020143)5 = \underline{2{,}988362388} \\ \underline{z_1} = z = \underline{2{,}5} \end{cases}$$

0 1 2 3 4 5 6 x

Calcoliamo le coordinate della successiva rotazione intorno ad y_1 di α_2

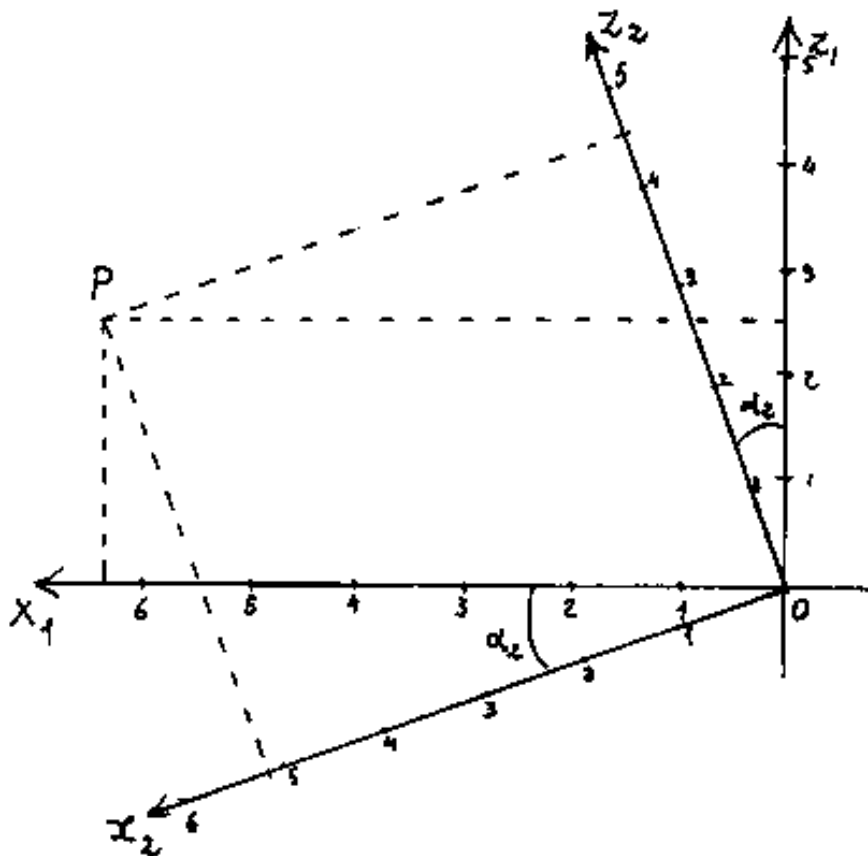
A questo proposito, poiché trattasi di una terna antioraria, sia nella formula, sia nel disegno, gli assi x_1 e z_1 visti dalla punta di y_1, nel verso antiorario z_1 va su x_1.

avremo quindi:

$$z_2 = (\cos\alpha_2) z_1 + (\operatorname{sen}\alpha_2) x_1 = (0,939692621)\,2.5 + (0,342020143)(6,408563821) =$$

$$y_2 = y_1 =$$

$$x_2 = (\cos\alpha_2) x_1 - (\operatorname{sen}\alpha_2) z_1 = (0,939692621)(6,408563821) - (0,342020143)\,2.5 =$$

$$\begin{cases} z_2 = 4,541089469 \\ y_2 = 2,988342387 \\ x_2 = 5,167029773 \end{cases}$$

(disegno visto dalla punta di y_1 per visualizzare il verso antiorario!)

Calcoliamo ora le coordinate finali dovute alla sue

Calcoliamo ora le coordinate finali dovute alla successiva rotazione intorno ad x_2 di α_3.

$$\underline{x_3} = x_2 = \left((\cos\alpha_2) X_1 - (\operatorname{sen}\alpha_2) Z_1 \right) = \qquad = \underline{5,167029774}$$

$$\underline{y_3} = (\cos\alpha_3) y_2 + (\operatorname{sen}\alpha_3) Z_2 = (0,984807753)(2,988362387) + (0,173648178)(4,541089) =$$

$$\underline{Z_3} = (\cos\alpha_3) Z_2 - (\operatorname{sen}\alpha_3) y_2 = (0,984807753)(4,541089469) - (0,173648178)(2,988362) =$$

Alcune considerazioni sul procedimento nel calcolo della rotazione assi.

Noi abbiamo sviluppato il calcolo con due diverse modalità; La prima considera note le coordinate iniziali del punto P, noti i coseni direttori dell'asse di rotazione, passante per l'origine degli assi, e nota l'ampiezza φ dell'angolo di rotazione. Sono incognite le coordinate del punto a rotazione avvenuta.

Se ruotano gli assi, il punto resta P, con coordinate diverse, se ruota P e gli assi stanno fermi P va in P_1 con diverse coordinate. Affinché le coordinate coincidano; se gli assi ruotano antiorario, P deve ruotare orario, cioè di verso opposto.

Questa impostazione ci ha portati alle tre equazioni:

$$\left(xx_1 + yy_1 + zz_1 = (\overline{ON}^2 + \cos\varphi\, \overline{NP}^2) = H^2 \right.$$

$$\begin{cases} \ldots \\ (\cos\alpha)x_1 + (\cos\beta)y_1 + (\cos\gamma)z_1 = \overline{ON} = (\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

essendo: $\overline{NP}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{ON}^2$ (valori che possiamo calcolare con le coordinate di partenza (note))

Si noti la perfetta simmetria fra le coordinate iniziali e finali e quindi la loro scambiabilitá.

esplicitiamo y_B

$$y_B = 14,276510484 - 2,040823565\, x_B$$

prepariamo la sostituzione:

$$-(87,00105878)\, y_B = \qquad +177,55381098\, x_B - 1242,07152783$$

$$8 x_B y = -16,32658852\, x_B^2 + 114,21208387 5\, x_B \quad -$$

$$5 y_B^2 = +20,82480412\, x_B^2 - 291,358390295\, x_B + 1019,09375805$$

$$5 \quad x_B^2 - 87,00105878\, x_B + 416,82401441$$

$$9,49821560\, x_B^2 - 86,5935542\, x_B + 193,8462446 = 0$$

cioè

$$x_B^2 - 2(4,558411697)\, x_B + 20,4087012 = 0$$

$$x_B = 4,558411697 \pm 0,60861798 \quad \begin{cases} x_B = 5,16702977 \\ x_B = 3,9497935 \end{cases}$$

per moto antiorario vale $x_B = 5,16702977$

$$y_B = 14,27651048 - 2,040823565 = y_B = 3,731514359$$

$$z_B = 21,75026470 - 2x_B - 2y_B \qquad = z_B = 3,953176432$$

Che riscontrano i valori già calcolati.

Le ultime cifre non ... degli arrotondamenti

(le ultime cifre, non sempre, a causa degli arrotondamenti, sono precise)

Questo esempio numerico comprova i metodi di calcolo.

---

per snellezza abbiamo preferito dare l'esempio numerico per la risoluzione delle tre equazioni, cerchiamo ora la risoluzione analitica: (esplicitiamo z_1)

$$\boxed{z_1 = \frac{1}{z}\left(H^2 - xx_1 - yy_1\right)} \quad ; \quad (\cos\gamma)z_1 = \frac{\cos\gamma}{z}\left(H^2 - xx_1 - yy_1\right)$$

$$z_1^2 = \frac{1}{z^2}\left(H^4 + x^2x_1^2 + y^2y_1^2 - 2H^2xx_1 - 2H^2yy_1 + 2(xy)x_1y_1\right)$$

Sostituendo nelle altre due equazioni

$$\left(z\cos\alpha - x\cos\gamma\right)x_1 + \left(z\cos\beta - y\cos\gamma\right)y_1 = \left[-\cos\gamma H^2 + z(\overline{ON})\right]$$

$$\left(z^2+x^2\right)x_1^2 + \left(z^2+y^2\right)y_1^2 + 2(xy)x_1y_1 - 2(H^2x)x_1 - 2(H^2y)y_1 = \left[z^2(\overline{OP}^2) - H^4\right]$$

$$y_1 = \left(\frac{x\cos\gamma - z\cos\alpha}{z\cos\beta - y\cos\gamma}\right)x_1 + \left(\frac{z(\overline{ON}) - \cos\gamma H^2}{z\cos\beta - y\cos\gamma}\right)$$

$$K = \left(\frac{x\cos\gamma - z\cos\alpha}{z\cos\beta - y\cos\gamma}\right) \quad ; \quad L = \left(\frac{z(\overline{ON}) - \cos\gamma H^2}{z\cos\beta - y\cos\gamma}\right)$$

$$y_1 = Kx_1 + L \qquad\qquad y_1^2 = K^2x_1^2 + L^2 + 2LKx_1$$

$$(z^2+x^2)x_1^2 = (z^2+x^2)x_1^2$$

$$(z^2+y^2)y_1^2 = K^2(z^2+y^2)x_1^2 + 2LK(z^2+y^2)x_1 + L^2(z^2+y^2)$$

$$2(xy)x_1y_1 = (2Kxy)x_1^2 + 2L(xy)x_1$$

$$-2(H^2x)x_1 = -2(H^2x)x_1$$

$$-2(H^2y)y_1 = -2(KH^2y)x_1 - 2H^2yL$$

$$(+H^4 - z^2\overline{OP}^2)$$

$$\boxed{(z^2+K^2z^2+x^2+(Ky)^2+2xKy)x_1^2+2\left[KLz^2+KLy^2+Lxy-H^2x-H^2Ky\right]x_1+\left[L^2z^2+L^2y^2-2H^2Ly+H^4-z^2\overline{OP}^2\right]=0}$$

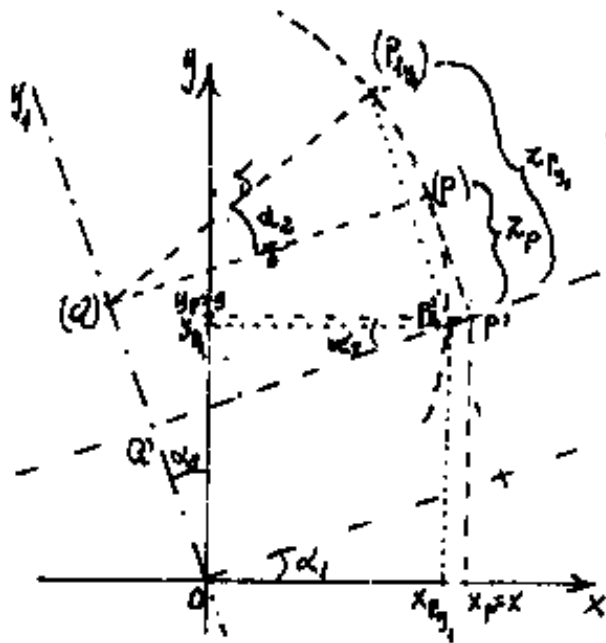
La sequenza delle rotazioni

Noi abbiamo considerato di far ruotare gli assi prima intorno a z poi intorno ad y_1. (Cio' equivale a tener fissi gli assi e far ruotare il punto, con verso opposto, prima intorno a z, poi intorno ad y_1). Ora vogliamo invertire la sequenza delle rotazioni, cioè vogliamo prima ruotare intorno ad y_1, poi intorno a z. A tal fine consideriamo la proiezione di P su xy cioè: P'; ed $y_1 ;\equiv (y = \text{ctg}\,\alpha_1\, x)$; (la rotazione intorno ad y_1 è ampia α_2), Consideriamo per P un piano perpendicolare ad y_1, esso sará parallelo a z ed avrà la traccia $Q'P'$ su xy. Ribaltando tale piano su xy, vediamo (P) = (P ribaltato) che descrive una circonferenza di raggio: $\overline{(P)(Q)} = \delta$ = distanza di P da y_1. Su tale circonferenza prendiamo l'arco sotteso ad α_2 ed avremo (ribaltata) la posizione di arrivo di P_{1y}

Dall'esame del disegno si ha:

$$\overline{P'Q'} = \delta = \boxed{x\cos\alpha_1 + y\,\mathrm{sen}\,\alpha_1} = (Q)(P_{1y})$$

$$\overline{P'_{y_1}P'} = (\delta - \delta\cos\alpha_2) = \delta(1-\cos\alpha_2)$$

$$(x - x_{P_{y_1}}) = (\overline{P'_{y_1}P'})\cos\alpha_1$$

$$(y - y_{P_1}) = (P'_{y_1}P')\,\mathrm{sen}\,\alpha_1$$

Facendo le sostituzioni possiamo esprimere le

passante per l'origine; cioè: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$; e l'ampiez=za della rotazione risultante: φ, che non figurano nelle suddette equazioni, Si è indicato con A il punto iniziale, con B il punto di arrivo di A, e con C il punto di arrivo di B, con ciò abbiamo tre punti per i quali passa il piano su cui si muove il punto iniziale. La normale al piano per l'origine degli assi è l'asse risultante di rotazione che incontra in N il piano ed $A\hat{N}B = \varphi$. = ampiezza risultante di rotazione. $= B\hat{N}C$.

Notiamo che, indipendentemente dalle coordinate iniziali e finali dei punti dello spazio, quando sia=no note le ampiezze di rotazione $\alpha_1\ (z)$; $\alpha_2\ (y_1)$; $\alpha_3\ (x_2)$ dovrebbe esser possibile calcolare: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ dell'asse risultante di rotazione nonché l'ampiezza φ risultante della rotazione.

A tal fine procediamo, passo-passo, nel ricercare l'asse risultante di rotazione e l'ampiezza risultante

risultante di rotazione e l'ampiezza risultante.

Alla prima rotazione intorno z si ha: l'asse è z

$\cos\alpha = \cos 90° = 0$; $\cos\beta = \cos 90° = 0$; $\cos\gamma = \cos(0) = 1$;

$\varphi_1 = \alpha_1$.

Alla seconda rotazione intorno ad y_1, la questione diventa delicata; occorre precisare che l'asse risultante deve essere riferita agli assi iniziali x,y,z,

coordinate del punto di arrivo P_{y_1} in funzione delle coordinate di partenza, e della ampiezza angolare α_2, nonché dell'angolo α_1, che definisce l'asse di rotazione y_1. Cioè i coseni direttori di y_1 sono:

$$\cos\alpha = \cos(90+\alpha_1) = -\operatorname{sen}\alpha_1 \quad ; \quad \cos\beta = \cos\alpha_1 \quad ; \quad \cos\gamma = \cos(90°) = 0$$

$$\begin{cases} x_{P_{y_1}} = x - \delta(1-\cos\alpha_2)\cos\alpha_1 \\ y_{P_{y_1}} = y - \delta(1-\cos\alpha_2)\operatorname{sen}\alpha_1 \\ z_{P_{y_1}} = z + \delta(\operatorname{sen}\alpha_2) \end{cases} \quad ; \quad \delta = (x\cos\alpha_1 + y\operatorname{sen}\alpha_1)$$

$$\begin{cases} x_{P_{y_1}} = x - (x\cos^2\alpha_1 + y\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1)(1-\cos\alpha_2) \\ y_{P_{y_1}} = y - (x\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1 + y\operatorname{sen}^2\alpha_1)(1-\cos\alpha_2) \\ z_{P_{y_1}} = z + (x\cos\alpha_1 + y\operatorname{sen}\alpha_1)\operatorname{sen}\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{P_{y_1}} = x - x\cos^2\alpha_1 - y\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1 + x\cos^2\alpha_1\cos\alpha_2 + y\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2 \\ y_{P_{y_1}} = y - x\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1 - y\operatorname{sen}^2\alpha_1 + x\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + y\operatorname{sen}^2\alpha_1\cos\alpha_2 \end{cases}$$

$$Z_{P_1} = Z + X \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 + y \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2$$

$$\begin{cases} X_{P_{y_1}} = X\left(\operatorname{sen}^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 \cos\alpha_2\right) + y\left(\operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_1\right) \\ y_{P_{y_1}} = X\left(\operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_1\right) + y\left(\cos^2\alpha_1 + \operatorname{sen}^2\alpha_1 \cos\alpha_2\right) \\ Z_{P_{y_1}} = X\left(\cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2\right) + y\left(\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2\right) + Z \end{cases}$$

Le quadriche

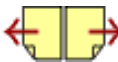
Dicesi "quadrica" una superficie algebrica del 2° ordine, espressa cioè da una equazione:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

Poiche' tale equazione puo' essere moltiplicata o divisa per un K arbitrario, solo 9 dei dieci coefficienti sono indipendenti e pertanto occorrono 9 punti per definire la quadrica. Inversamente per 9 punti arbitrari passa una sola quadrica.

Abbiamo già accennato al problema delle quadriche, nel capitolo: "I polinomi di 2° grado in tre variabili", ed abbiamo già trattato la sfera, il cilindro, ed il cono, nonche' i solidi di rotazione come il paraboloide rotondo, l'iperboloide ad una falda e a due falde, l'ellissoide di rotazione. Abbiamo anche trattato l'ellissoide, (non di rotazione). Abbiamo anche trattato il problema della rotazione degli assi nello spazio.

L'equazione sopra scritta prevede non solo i solidi di cui si è fatto cenno, sia al centro, sia traslati, o ruotati, o solidi di rotazione, ma anche solidi non di rotazione, ed anche quadriche degeneri.

Per trattare compiutamente le quadriche, premettiamo alcuni elementi di geometria proiettiva.

Per questi tre punti è possibile far passare il piano:

$$lx + my + nz = -\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\,\delta .$$

con: l, m, n, proporzionali ai coseni direttori dell'asse di rotazione $\overline{ON}$.

L'equazione del piano è (vedi capitoli prec.)

$$\begin{vmatrix} -1 & y & z \\ -1 & y_{P_2} & z_{P_2} \\ -1 & y_{Q_2} & z_{Q_2} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x & -1 & z \\ x_{P_2} & -1 & z_{P_2} \\ x_{Q_2} & -1 & z_{Q_2} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x & y & -1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & -1 \\ x_{Q_2} & y_{Q_2} & -1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_{P_2} & y_{P_2} & z_{P_2} \\ x_{Q_2} & y_{Q_2} & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

La sostituzione e lo sviluppo algebrico porterebbe ad espressioni piuttosto complesse, ed è preferibile risolvere numericamente; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, e φ come abbiamo già fatto nell'esempio numerico, anche se, in linea di principio è possibile esprimere i coseni direttori dell'asse di rotazione e l'ampiezza φ

in funzione delle rotazioni sugli assi α_1'; α_2'; α_3';
conoscendone il verso e la sequenza.

Abbiamo ora le coordinate di tre punti: P, P_{2zy}, Q_{2yz}, equidistanti dal centro assi.

x, y, z.

$$\begin{cases} x_{P_{2zy}} = x\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + y\,\mathrm{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2 - z\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 \\ y_{P_{2zy}} = -x\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 + y\cos\alpha_1 \\ z_{P_{2zy}} = x\cos\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + y\,\mathrm{sen}\,\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + z\cos\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{Q_{2yz}} = x\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - y\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 + z\cos\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 \\ y_{Q_{2yz}} = x\,\mathrm{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2 + y\cos\alpha_1 + z\,\mathrm{sen}\,\alpha_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 \\ z_{Q_{2yz}} = -x\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 + z\cos\alpha_2 \end{cases}$$

è possibile dimostrare che: $\overline{P_{2zy}P} = \overline{PQ_{2yz}}$

Il fatto che $\overline{PO} = \overline{P_{2zy}O} = \overline{Q_{2yz}O}$, vuol dire che i tre punti stanno sulla circonferenza di base di un cono retto che ha per vertice O e per altezza $\overline{ON}$ normale al piano dei tre punti.

Poiché è normale al piano, possiamo applicare

Pitagora, perciò $\overline{PO}^2 - \overline{ON}^2 = \overline{P_{zxy}O}^2 - \overline{ON}^2 = \overline{Q_{zyz}O}^2 - \overline{ON}^2$

cioè i tre punti sono equidistanti da N cioè:

$\overline{P_{zzy}N} = \overline{PN} = \overline{Q_{zyz}N}$, ed essendo uguali i due

triangoli isosceli, anche: $P_{zxy}\widehat{N}P = P\widehat{N}Q_{zyz} = \varphi$

<u>Ciò dimostra che due rotazioni su due assi, possono dare $+\varphi$ e $-\varphi$ se eseguite di verso opposto e inversa sequenza.</u>

$$\begin{cases} X_{Q_2yz} = X\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - y\,\text{sen}\,\alpha_1 + z\cos\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2 \\ y_{Q_2yz} = X\,\text{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2 + y\cos\alpha_1 + z\,\text{sen}\,\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2 \\ z_{Q_2yz} = -X\,\text{sen}\,\alpha_2 + z\cos\alpha_2 \end{cases}$$

eleviama quadrato e sommiamo

$$X^2_{Q_2yz} = X^2\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 + y^2\text{sen}^2\alpha_1 + z^2\cos^2\alpha_1\,\text{sen}^2\alpha_2 - 2Xy\,\text{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + 2Xz\cos^2\alpha_1\cos\alpha_2\,\text{sen}\,\alpha_2 - 2yz\cos\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2\,\text{sen}\,\alpha_1$$

$$y^2_{Q_2yz} = X^2\text{sen}^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 + y^2\cos^2\alpha_1 + z^2\text{sen}^2\alpha_1\,\text{sen}^2\alpha_2 + 2Xy\,\text{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + 2Xz\,\text{sen}^2\alpha_1\cos\alpha_2\,\text{sen}\,\alpha_2 + 2yz\cos\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2$$

$$z^2_{Q_2yz} = X^2\text{sen}^2\alpha_2 + z^2\cos^2\alpha_2 - 2Xz\,\text{sen}\,\alpha_2\cos\alpha_2$$

sommando:

$$X^2\left[(\cos^2\alpha_1 + \text{sen}^2\alpha_1)\cos^2\alpha_2 + \text{sen}^2\alpha_2\right] = X^2$$

$$2Xz\left[(\cos^2\alpha_1 + \text{sen}^2\alpha_1) - 1\right]\text{sen}\,\alpha_2\cos\alpha_2 = 0$$

$$y^2\left(\text{sen}^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1\right) = y^2$$

$$z^2\left[(\cos^2\alpha_1 + \text{sen}^2\alpha_1)\text{sen}^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2\right] = z^2$$

Torna il valore $\overline{OP}^2$

Da ciò possiamo dedurre che:

Invertendo la sequenza delle rotazioni rispetto a due assi, equivale a ruotare di verso opposto, con diverso risultato.

(Al fine di ottenere il punto complanare e simmetrico, non solo dobbiamo ruotare di verso opposto, ma anche invertire l'ordine della sequenza delle rotazioni.

abbiamo quindi:

$$\begin{cases} X_{Q_2zy} = X(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2) - Y(\text{sen}\,\alpha_1 \cos\alpha_2) + Z\,\text{sen}\,\alpha_2 \\ Y_{Q_2zy} = X(\cos\alpha_1) - Y(\text{sen}\,\alpha_1) \\ Z_{Q_2zy} = X(-\cos\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2) + Y(\text{sen}\,\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2) + Z\cos\alpha_2 \end{cases}$$

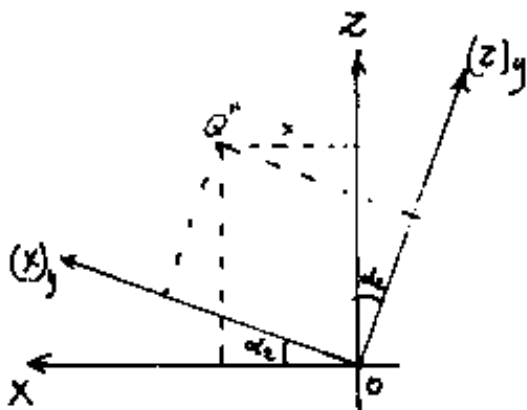
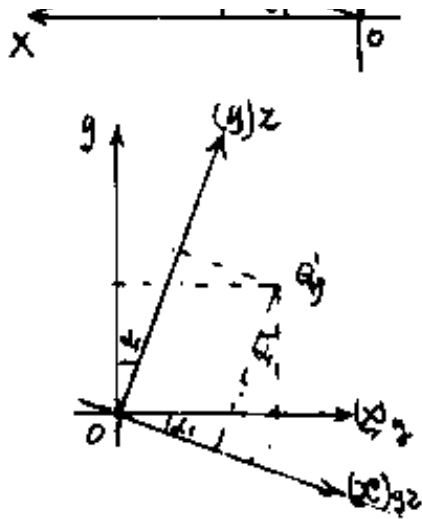
notiamo però che mentre:

$$X^2_{P_2zy} + Y^2_{P_2zy} + Z^2_{P_2zy} = X^2 + Y^2 + Z^2 = \overline{OP}$$

per queste coordinate:

$$X^2_{Q_2zy} + Y^2_{Q_2zy} + Z^2_{Q_2zy} = (X\cos\alpha_1 - Y\,\text{sen}\,\alpha_1)^2 + Z^2$$

cioè il punto Q per rotazioni di verso opposto prese nella stessa sequenza, non è equidistante da O come P e P_{2zy}, cioè ruota su un'altro piano.

Invertiamo la sequenza, mantenendo il verso orario.

$$\begin{cases} X_{Q_{1y}} = X\cos\alpha_2 + Z\,\text{sen}\,\alpha_2 \\ Y_{Q_{1y}} = Y \\ Z_{Q_{1y}} = Z\cos\alpha_2 - X\,\text{sen}\,\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{Q_2yz} = X_{Q_1y}\cos\alpha_1 - y\,\text{sen}\,\alpha_1 \\ y_{Q_2yz} = X_{Q_1y}\,\text{sen}\,\alpha_1 + y\cos\alpha_1 \\ Z_{Q_2yz} = -X\,\text{sen}\,\alpha_2 + Z\cos\alpha_2 \end{cases}$$

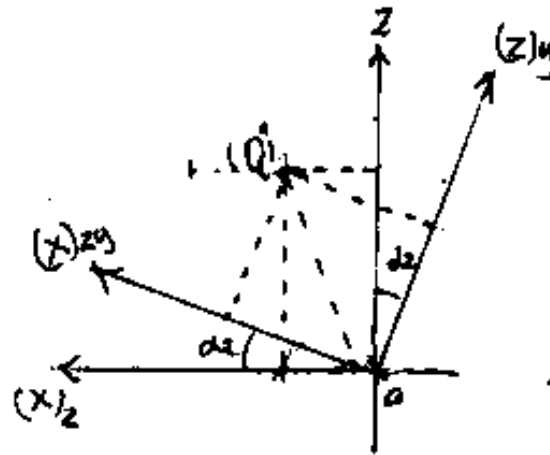
sostituendo abbiamo:

Le due rotazioni i cui risultati corrispondono

$$x_2 = x_{P_2zy} \; ; \; y_2 = y_{P_2zy} \; ; \; z_2 = z_{P_2zy}$$

sono solo apparentemente diverse perché in una si è evidenziata la rotazione degli assi, nell'altra la rotazione del punto.

La rotazione intorno ad y quando non è un asse ruotato, cioè far precedere la rotazione intorno ad y_1 è come aver ruotato rispetto ad una retta qualsiasi anche se tale retta coincide con la posizione assunta da y_1 quando precede la rotazione intorno z.

Facciamo ora la rotazione di verso opposto con la stessa sequenza e le stesse ampiezze. Cioè se per rotazione antioraria su z e su y, nell'ordine, P va in $P_2zy \equiv P_2$, per rotazione oraria P vada in Q_2zy

y $(y)_1$ P

$$zQ_{z} = z$$

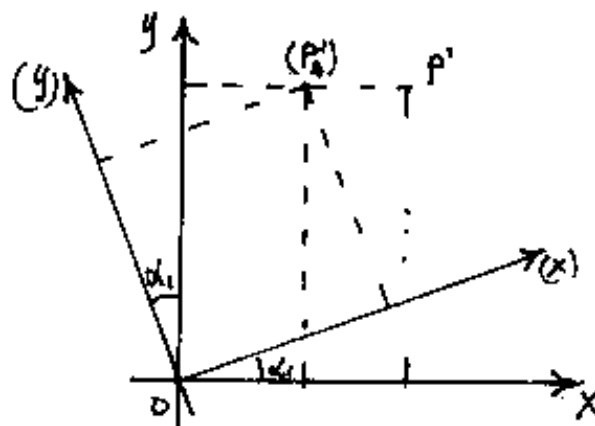
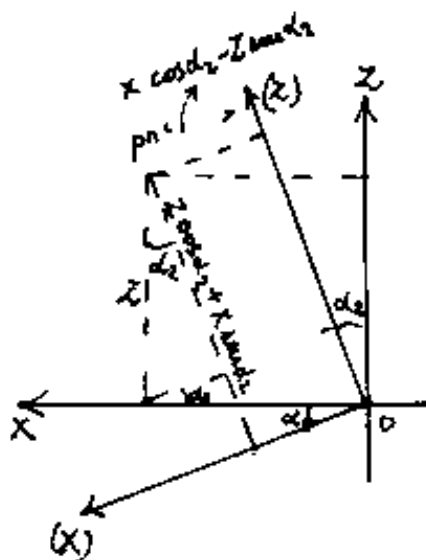
$$xQ_{\cdot} = x\cos\alpha_{\cdot} - y\,\mathrm{sen}\,\alpha_{\cdot}$$

$$X_{Q_{1z}} = x\cos\alpha_1 - y\,\mathrm{sen}\,\alpha_1$$

$$Y_{Q_{1z}} = x\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 + y\cos\alpha_1$$

$$X_{Q_{2zy}} = X_{Q_{1z}}\cos\alpha_2 + Z_{Q_{2}}\,\mathrm{sen}\,\alpha_2$$

$$Y_{Q_{2zy}} = (x\cos\alpha_1 - y\,\mathrm{sen}\,\alpha_1)$$

$$Z_{Q_{2zy}} = Z_{Q_{2}}\cos\alpha_2 - X_{Q_{1z}}\,\mathrm{sen}\,\alpha_2$$

$$\begin{cases} X_{P_2yz} = X(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2) + y(\operatorname{sen}\alpha_1) - Z(\cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2) \\ Y_{P_2yz} = y(\cos\alpha_1) - X(\cos\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_1) + Z(\operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_1) \\ Z_{P_2yz} = X \operatorname{sen}\alpha_2 + Z\cos\alpha_2 \end{cases}$$

Confrontando questi risultati coi precedenti, si nota che, quando l'asse di rotazione coincide con un asse cartesiano, ed è l'ultima rotazione, la coordinata di quell'asse non è influenzata dall'ampiezza della rotazione:

Così: X_3 era indipendente da α_3

$y_{P_{zxy}}$ era indipendente da α_2

$z_{P_{2yz}}$ è indipendente da α_1

Ció conferma che il risultato di più rotazioni dipende dalla sequenza con cui sono effettuate le rotazioni stesse.

$$\begin{cases} X_{P_2 zy} = \left(X\cos\alpha_1 + y\,\text{sen}\,\alpha_1\right)\cos\alpha_2 - z\,\text{sen}\,\alpha_2 \\ y_{P_2 zy} = y_{P_{12}} = y\cos\alpha_1 - x\,\text{sen}\,\alpha_1 \\ z_{P_2 zy} = \left(X\cos\alpha_1 + y\,\text{sen}\,\alpha_1\right)\text{sen}\,\alpha_2 + z\cos\alpha_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X_{P_2 zy} &= X\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + y\,\text{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2 - Z\,\text{sen}\,\alpha_2 \\ y_{P_2 zy} &= y\cos\alpha_1 - x\,\text{sen}\,\alpha_1 \\ z_{P_2 zy} &= X\cos\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2 + y\,\text{sen}\,\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2 + z\cos\alpha_2 \end{aligned}}$$

Che corrispondono esattamente alle x_2, y_2, z_2.

Invertiamo ora l'ordine di rotazione, cioè ruotiamo prima rispetto ad y (non y_1) e poi rispetto a z avremo: (α_1 rispetto a z; α_2 rispetto ad y)

(α_1 rispetto a z ; α_2 rispetto ad y)

$$\begin{cases} X_{P_1 y} = X \cdot \cos\alpha_2 - Z \operatorname{sen}\alpha_2 \\ y_{P_1 y} = y \\ Z_{P_1 y} = Z \cos\alpha_2 + X \operatorname{sen}\alpha_2 \end{cases}$$

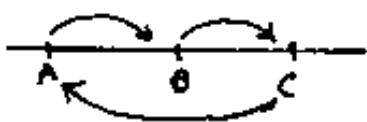
Per maggiore chiarezza facciamo anche i grafici delle rotazioni

Coordinate proiettive di un punto nello spazio

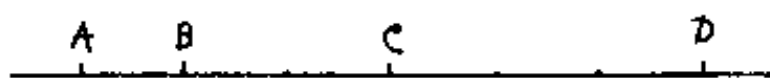
Estendiamo lo spazio a punti impropri, ad elementi complessi.

Fissiamo nello spazio un tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ ad un punto E esterno alle facce del tetraedro; ad ogni generico punto "P" dello spazio possono attribuirsi quattro numeri: (x_1, x_2, x_3, x_4) finiti; inversamente quattro numeri definiscono un punto. Questi quattro numeri sono detti: Coordinate proiettive omogenee.

Premesso che una retta puó essere percorsa in due versi opposti, il fluire in un verso o nell'altro é un carattere proiettivo. La retta orientata ha un verso positivo e l'opposto negativo, il che implica che il segmento $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$. (é tornato in A) mentre: $\overline{BA} + \overline{AB} = 0$ (é tornato in B).. Se sulla retta orientata prendiamo tre punti; A, B, C, qualunque sia la loro sequenza: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$

A B C ; B C A ;

possiamo anche scrivere: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ e tutte le altre correlazioni ricordando che, portare un segmento nell'altro membro dell'uguaglianza, significa cambiare segno, cioè scrivere invertite le lettere che delimitano il segmento stesso. Fra quattro punti abbiamo la relazione di Eulero:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$$

E' abbastanza istruttivo prendere quattro punti su una ret-ta, misurare la lunghezza dei segmenti, col loro segno, e verificare la relazione di Eulero.

A B C D

$$(AB)(CD) + (AC)(DB) + (AD)(BC) = 0$$
$$(1)(3) + (3)(-5) + (6)(2) = 3 - 15 + 12 = 0 .$$

Abbiamo già visto la "coordinata ascissa" presa sulla retta orientata, sulla quale sia fissata una origine "O", come prima base per le coordinate cartesiane, o come asse reale dei numeri complessi.

Consideriamo ora un segmento $\overline{AB}$ su una retta, ed un punto "P" mobile su di essa; la posizione di "P" può esse-re univocamente determinata dal rapporto: $\boxed{\lambda = \overline{AP}/\overline{BP}}$ detto rapporto semplice di tre punti allineati.

A B P

se consideriamo che A e B si sus-seguono da sinistra a destra, essendo: $\lim_{P \to A} (AP/BP) = 0$; $\lim_{P \to B} \left(\frac{AP}{BP}\right) = \pm\infty$,

[illegible] $\lim_{P \to A}$ [illegible] $\lim_{P \to B}$ [illegible]$=-\infty$,

e per P nel punto improprio della retta: $\lim_{AP \to \pm\infty} (AP/BP) = 1$; avremo che per P a sinistra di A il rapporto varia per frazioni minori di 1 crescendo da zero ad 1, mentre per P a destra di B, il rapporto varia decrescendo da $+\infty$ a $+1$ (valori maggiori di uno), internamente ad AB, per valori negativi da 0 a $-\infty$. La retta assume l'aspetto di un anello di raggio infinito, sulla

quale possono riportarsi tutti i valori dei numeri relativi. (essendo il raggio infinito, la curvatura è zero, cioè l'anello è rettilineo). Si noti che: "-1" è nel punto di mezzo di AB. Riaffiora qui la questione dello zero, dell'uno, e dell'infinito, che abbiamo già trattata nel problema dell'ordine degli infiniti e degli infinitesimi.

Nel graduare la retta "asse reale", fissata una origine O, ed una unità grafica "costante"; si nota che le due semirette a destra ed a sinistra di "O" sono uguali, cioè ad ogni numero positivo corrisponde un numero negativo (segmenti equidistanti da "O"), che i numeri fra zero ed uno sono tutti compresi nella unità grafica; che l'unità grafica aggiunta al segmento che rappresenta un intero, forma il segmento dell'intero successivo. Però se diciamo che ad ogni numero maggiore di uno, corrisponde il suo reciproco,

che è un numero minore di uno, affermiamo che la quantità di numeri maggiori di uno è uguale alla quantità di numeri minori di uno, sono entrambi infiniti e quindi debbono occupare lo stesso spazio. Ciò è quanto avviene sulla nostra retta ove a sinistra di A sono i numeri minori di 1 ed a destra di B i numeri maggiori di 1, mentre

i numeri negativi sono tutti nel segmento arbitrario, (ed in ciò convenzionale) $\overline{AB}$.

Sia sull'asse reale, sia su questa retta, vi è la corrispondenza biunivoca: Punto $\rightleftarrows$ numero, per cui anche in questo caso si può parlare di coordinata del punto. Se sull'asse reale prendiamo le coordinate ascisse x_A, x_B ed x per indicare l'ascissa di P avremo:

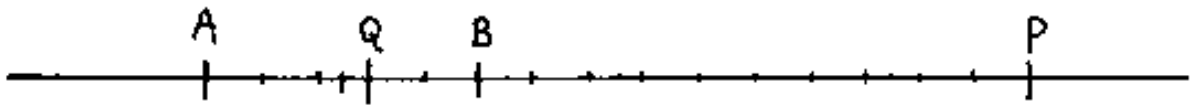
$$\boxed{\frac{(x-x_A)}{(x-x_B)}=\lambda} \quad \text{ed anche: } \boxed{x=\frac{(x_A-\lambda x_B)}{(1-\lambda)}}$$

che sono le formule per il passaggio da un sistema di coordinate all'altro e viceversa.

Facciamo ora un altro passo in avanti, e consideriamo oltre A, B, P, un quarto punto che indichiamo con Q, mentre P si considera esterno al segmento AB (cioè a P corrisponde un λ_P positivo), il punto Q si considera interno al segmento AB (cioè a Q corrisponde un λ_Q negativo)

segmento AB (cioè a Q corrisponde un λ_Q negativo)
Volendo far corrispondere ad ogni numero positivo, un numero negativo e viceversa, cioè volendo far corrispondere agli infiniti punti delle due semirette a sinistra di A ed a destra di B (indefinitamente grandi) gli infiniti punti del <u>segmento finito</u> $\overline{AB}$, basta porre: $|\lambda_P| = |\lambda_Q|$; cioè uguagliare in valore

assoluto, i rapporti semplici dei tre punti allineati (ABP) ed (ABQ). Quando ciò si verifica, cioè quando $|\lambda_P| = |\lambda_Q|$, noi diciamo che i quattro punti ABPQ formano un "gruppo armonico". Notando che i segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$, non sono separati, ma si intersecano fra loro, si suole anche dire che la coppia di punti (PQ) separa armonicamente la coppia (AB), od anche che le distanze di uno dei punti dai restanti tre, forma una "progressione armonica"

A Q B P

i rapporti semplici:

$$\frac{BP}{AP} = \frac{QB}{AQ} \Rightarrow \frac{AP-AB}{AP} = \frac{AB-AQ}{AQ}$$

cioè: $\left(1 - \frac{AB}{AP}\right) = \left(\frac{AB}{AQ} - 1\right)$ ed anche: $2 = AB\left(\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}\right)$

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$$

Abbiamo così ricavato una classica relazione dei gruppi armonici.

Quando due coppie di punti si separano armonicamente gli elementi di una coppia si dicono "coniugati armonici" rispetto a quelli dell'altra.

Nel nostro caso Q è <u>coniugato armonico</u> di P <u>rispetto alla coppia</u> $\overline{AB}$. Attenzione peró, dati quattro punti come i nostri: ABPQ, non possiamo fare gruppi armonici utilizzando le coppie $\overline{AQ}$ e $\overline{BP}$ perché non si intersecano, come non possiamo fare le coppie $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$ perché una interna all'altra non si intersecano; quindi le uniche coppie che si intersecano sono $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$, ma non basta, per essere un gruppo armonico si deve verificare che

$$\frac{AP}{BP} = \frac{-AQ}{BQ} = \frac{AQ}{QB}.$$

Il punto improprio della retta è coniugato armonico del punto medio di AB.

Birapporti

Dati quattro punti propri o impropri di una retta, e siano <u>nell'ordine ABCD</u> diresi: <u>birapporto</u>, o <u>doppio rapporto</u>, o

...: "birapporto", o "doppio rapporto", o "rapporto armonico", il "rapporto dei rapporti" semplici di tre punti allineati e cioè:

$$(ABCD) = (ABC)/(ABD) \Rightarrow \frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{\lambda_c}{\lambda_D}$$

Osserviamo che in questa notazione abbiamo preso C al posto di P, e D al posto di Q, perchè i nuovi quattro punti possono avere: $\frac{\lambda_c}{\lambda_D} \neq -1$.

Il birapporto non cambia se scambiando fra loro due elementi qualsiasi si scambiano anche gli altri due:

$$(ABCD) = (DCBA) = (BADC) = (CDAB) = K$$

$$(ABDC) = (CDBA) = (BACD) = (DCAB) = \frac{1}{K}$$

$$(ACDB) = (BDCA) = (CABD) = (DBAC) = \frac{1}{1-K}$$

$$(ACBD) = (DBCA) = (CADB) = (BDAC) = 1-K$$

$$(ADCB) = (BCDA) = (DABC) = (CBAD) = \frac{K}{K-1}$$

$$(ADBC) = (CBDA) = (DACB) = (BCAD) = \frac{K-1}{K}$$

cioè delle 24 permutazioni (4!) possibili, solo 6 valori, del birapporto che rappresentano, sono diversi fra loro; mentre vi sono quattro possibili birapporti che hanno lo stesso valore.

Se K è un valore comune a quattro birapporti i sei valori diversi sono:

$$K \; ; \quad 1-K \; ; \quad \frac{1}{K} \; ; \quad \frac{1}{1-K} \; ; \quad \frac{K}{K-1} \; ; \quad \frac{K-1}{K}$$

Le differenziazioni consistono nel reciproco e nel complementare all'unità; infatti $\left(\frac{K-1}{K}\right) = \left(1 - \frac{1}{K}\right)$ e

$\frac{K}{K-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{K}\right)}$ che è il reciproco del precedente.

Se facessimo: $[1-(1-K)]$, tornerebbe "K", ed anche: $\frac{1}{1/K} = K$;

ed $\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{(1-K)}}\right) = K$ si hanno, comprendendo K, quattro valori uguali. Fanno eccezione le seguenti quaterne:

- quaterna con punto doppio ove si hanno solo tre valori 0, 1, ∞ (si ricordi $\lim_{P \to A}$; $\lim_{P \to B}$; $\lim_{P \to \infty}$)
- quaterna armonica, il cui birapporto vale: (−1) (si ricordi $\lambda_P = -\lambda_Q$)

- quaterna equianarmonica, ove i valori distinti del birapporto sono le due radici cubiche complesse dell'unità negativa, cioè: $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$; $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$; (non comprende −1). La quaterna equianarmonica si ha quando il birapporto è formato da numeri complessi.

Finalmente possiamo definire le <u>Coordinate proiettive sulla retta</u>

Fissati sulla retta tre punti distinti A_1, A_2, E, ogni punto P determina un birapporto $(A_1 A_2 E P) = K$ che varia al variare della posizione di P; il valore di questo birapporto è detta <u>coordinata proiettiva</u> di P sulla retta

P sulla retta.

I punti A_1, A_2, E sono fissi, A_1 e A_2, detti <u>punti fondamentali</u> con E costituiscono il <u>sistema di riferimento</u>, le loro coordinate sono: ∞, 0; mentre E ha per coordinata 1 ed è detto <u>punto unità</u>.

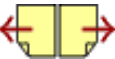
Nel rapporto semplice di tre punti allineati: (ABP), quando P cade nel punto medio di AB, abbiamo visto che il rapporto: $(ABP) = -1$, tale valore è anche detto coordinata baricentrica di P, (essendo il baricentro di $\overline{AB}$ il suo punto medio)

Analogamente le coordinate proiettive si riducono a coordinate baricentriche quando E cade nel punto medio del segmento finito $\overline{A_1A_2}$.

Se invece uno dei due punti, su es. A_1 è il punto improprio della retta, ed il segmento finito $\overline{A_2E} = 1$, le coordinate proiettive, diventano coordinate ascisse col verso positivo: $\overline{A_2E} = +1$ con $A_2 = 0$ punto origine. (si ricordi che il punto improprio di una retta è agli estremi a destra e a sinistra rispetto all'origine sulla stessa retta) cioè le semirette $\overline{A_2A_1}$ sono due, una a destra ed una a sinistra di A_2, cioè il segmento A_2A_1 potrebbe scriversi $A_1A_2A_1$ è indefinito.

il segmento $A_2 A_1$ potrebbe scriversi $A_1 A_2 A_1$ è indefinito.

Se: x_1, x_2, x_3, x_4 sono le coordinate proiettive di 4 punti su una retta, il loro birapporto equivale al birapporto dei 4 punti, qualunque sia il sistema di riferimento

$$(x_1, x_2 x_3 x_4) = \frac{(x_3 - x_1)/(x_3 - x_2)}{(x_4 - x_1)/(x_4 - x_2)}$$

Dati due sistemi di coordinate proiettive x ed x' per uno stesso punto P si ha la relazione:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (\text{con } (\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0)$$

relazione che può scriversi:

$$\gamma x x' - \alpha x + \delta x' - \beta = 0$$

od anche:

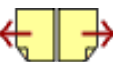
$$a x x' + b x + c x' + d = 0$$

Proiettività fra rette

Riprendiamo da B.Segre: (Enciclopedia, op.cit. cap XXXIV pag 158)

"Dicesi Collineazione (A.F. Möbius), o proiettività (J.V Poncelet; J.Steiner) od anche omografia (M. Charles) una corrispondenza biunivoca fra i punti di due rette distinte o sovrapposte, che sempre associ a 4 punti dell'una 4 punti dell'altra collo stesso birapporto."

Dalla correlazione di cui sopra fra x' ed x, si rileva che bastano le coordinate di tre punti

nei due sistemi per calcolare tre coefficienti indipendenti per es. α/β ; γ/β ; δ/β . od anche: $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$.
Nel caso delle due rette i tre punti dell'una sono gli *omologhi dell'altra*, e le correlazioni sopra scritte sono la *corrispondenza proiettiva* fra le due punteggiate (rette).

Quando le due rette punteggiate proiettive sono sovrapposte, gli elementi omologhi, se coincidenti si dicono: elemento doppio, o elemento unito.

Se l'elemento di una retta ha per omologo un elemento di cui è omologo, i due elementi si dicono: in doppio modo corrispondenti. (sono l'omologo dell'omologo)

La formula che relaziona x con x', nel caso di rette sovrapposte, diventa l'equazione di 2° grado:

$$\boxed{a x^2 + (b+c) x + d = 0}$$

Se fra le due rette punteggiate proiettive vi sono tre o più elementi uniti, vuol dire che tutti gli elementi sono uniti, in tal caso la proiettività si dice: "identità".

Se invece tutti gli elementi si corrispondono in doppio modo, si dice che la proiettività ha carattere involutorio, è una involuzione. (Quando non sia ancora una identità)

Condizione necessaria e sufficiente perchè una proiettività sia una involuzione è che nelle relazioni

proiettività sia una involuzione è che nelle relazioni sovra esposte si abbia: ($b = c$).

Cioè le relazioni diventano:

(per rette non sovrapposte): $axx' + b(x+x') + d = 0$

(per rette sovrapposte) $ax^2 + 2bx + d = 0$

Geometricamente, affinché una proiettività fra rette punteggiate sovrapposte sia una involuzione, occorre e basta che abbia due elementi omologhi distinti che si corrispondono in doppio modo.

Inversamente dando due coppie di elementi omologhi che si corrispondono in doppio modo, si individua una sola involuzione.

Nelle rette sovrapposte, gli elementi uniti possono essere meno di tre, (cioè si esclude l'identità), essi possono essere: 2 (due) → la proiettività si dice iperbolica

" : 1 (uno) → " " parabolica

" : 0 (zero) → " " ellittica

In una proiettività iperbolica, due elementi omologhi formano coi due elementi uniti, un birapporto costante che dicesi: caratteristica della proiettività.

Nel caso di involuzione individuata da due coppie di elementi omologhi che si corrispondono in doppio modo,

la proiettività potrà essere ellittica o iperbolica, non potrà essere parabolica.

In una involuzione iperbolica, le varie coppie di elementi omologhi, separano armonicamente la coppia degli elementi uniti, ossia il birapporto, caratteristica della proiettività è costante ed è (−1).

Coordinate omogenee

Abbiasi una retta punteggiata proiettiva il cui sistema di coordinate sia (X), esprimiamo il valore x mediante il rapporto di due numeri finiti x_1 ed x_2 cioè: $X = x_1/x_2$. Un siffatto giochino, viene proposto perchè mentre lo zero viene considerato un numero, il valore indefinito di ∞ non viene considerato numero, quindi per far assumere alla x anche il valore infinito basta che x_2 sia zero! Abbiamo già espresso altrove il nostro pensiero se lo zero e l'infinito, siano da considerarsi numeri.

I due numeri x_1 ed x_2 vengono dette:

"Le coordinate proiettive omogenee di P"

Volendo esprimere in coordinate omogenee la trasformazione: $x' = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ fra due sistemi di coordinate proiettive avremo

$$\begin{cases} x_1' = K(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ x_2' = K(\gamma x_1 + \delta x_2) \end{cases}$$

ove K è un fattore arbitrario. e $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$

Il discorso sulle coordinate omogenee, esposto in questi termini, è poco conviniente anche se effettuato da famosi autori. Noi preferiamo riguardare le coordinate omogenee

da un altro punto di vista.

Consideriamo un qualsiasi polinomio di grado n in m variabili, e cerchiamo che ogni elemento del polinomio sia <u>dimensionalmente omogeneo.</u>

Poiché nel polinomio figura anche un numero, (talvolta detto termine noto), affinché questo numero sia dimensionalmente omogeneo con gli altri addendi, lo facciamo rappresentare da una x_{m+1}.

Per esempio l'equazione di una retta:

$$a_1 x_1 + a_2 X_2 + a_3 = 0$$

se x_1 ed x_2 sono lunghezze deve esserlo anche a_3

perciò $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ sarà l'equaz. omogenea.

<u>Per una conica:</u>

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 + 2a_{23} x_2 + a_{33} = 0$$

ove, se le x sono lunghezze, i primi due termini sono lunghezze al quadrato; resa omogenea diventa:

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 = 0$$

sono ancora gli stessi sei termini resi omogenei.

(in forma sintetica:) $$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{j=3\\i=3}} a_{ij} x_i x_j$$

Per una quadrica, in forma sintetica: $$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{j=4\\i=4}} a_{ij} x_i x_j$$

In generale un polinomio di 2° grado in m variabili, in forma omogenea è esprimibile con:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{j=m+1 \\ i=m+1}} a_{ij} X_i X_j$$

Un polinomio di grado "n" in "m" variabili:

(in forma omogenea sintetica)

$$\sum_{\substack{i_1=1 \\ i_2=1 \\ \cdots \\ i_m=1}}^{\substack{i_m=m+1 \\ i_2=m+1 \\ i_1=m+1}} (a_{i_1 i_2 \ldots i_m})(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m})$$

I punti impropri e le rette improprie

Cerchiamo di familiarizzarci meglio con la retta che abbiamo considerata chiusa come un anello di cui un punto è improprio.

Se consideriamo la retta impropria:

$$(a+ib)x+(c+id)y+(m+in)=0$$

i cui coefficienti sono numeri complessi, possiamo scrivere:

$$(ax+cy+m)+i(bx+dy+n)=0$$

ma i coefficienti di un numero complesso sono reali perciò il sistema: $\begin{cases} ax+cy+m=0 \\ bx+dy+n=0 \end{cases}$ darà le coordinate del punto reale della retta impropria.

Quindi per ogni punto reale passa un fascio di rette improprie alle quali possiamo attribuire caratteristiche impossibili in campo reale.

Un esempio classico è quello di due rette passanti per l'origine, che siano contemporaneamente parallele e perpendicolari.

L'equazione di due rette per l'origine è:

$$y = mx \quad ; \quad y = m_1 x$$

Condizione di parallelismo: $m = m_1$

condizione di perpendicolarità: $m = \frac{-1}{m_1}$

cioè: $m m_1 = -1$; ed anche:

$$m^2 = -1 \qquad m = \pm i$$

perciò le rette:

$$y + ix = 0 \quad \text{ed} \quad y - ix = 0$$

risolvono il problema, e ciò si verifica per tutti i punti dello spazio, basta considerare le loro parallele:

loro parallele.

$$y = ix + K \qquad y = -ix + K$$

Sono due rette <u>immaginarie coniugate</u> e nel fascio passante per "P" (punto arbitrario dello spazio) sono dette <u>rette isotrope</u>, passanti per P.

Due rette che siano, ad un tempo, parallele, e perpendicolari fra loro, non deve poi meravi=

gliarci troppo, trattandosi di rette improprie, che hanno <u>solo un punto reale</u>; <u>in quel punto si sovrappongono</u>, ma anche i punti restanti, che sono all'infinito, ove le distanze non hanno senso, possono pensarsi sia distanziati sia sovrapposti.

Abbiamo assimilato le rette ad anelli di raggio infinitamente grande; se <u>le rette sono reali</u>, esse si richiudono sul "<u>punto improprio</u>"; se le rette <u>sono improprie</u>, si richiudono su un <u>punto reale</u>.

Per farsi un modello mentale, consideriamo le due rette isotrope, come due meridiani che <u>al polo si incontrano perpendicolarmente</u>, non solo a <u>livello equatoriale hanno segmenti paralleli</u>, ma, in dipendenza della latitudine, i segmenti dei due meridiani possono fare un angolo qualsiasi fra 0 e 90°. Però questo esempio non è le-

cito, perché attribuiremmo che all'infinito ha senso il parallelismo e la perpendicolarità, che invece ha senso in quell'unico punto reale privo di dimensioni, ove non è distinguibile se le rette vi provengono da direzioni diverse.

Per esempio: se $m = \tan(\alpha)$ ed $m_1 = \tan(2\alpha) = \frac{2m}{1-m^2}$

per: $m = \frac{2m}{1-m^2}$, cioè: $1-m^2 = 2$; da cui: $m = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

e tornano le stesse rette isotrope.

Omologia

Si può considerare l'omologia una omografia che si verifica su piani sovrapposti. Le due parole derivano dal greco ove "homós" significa: "uguale, "lógos" significa "discoscorso", "graphein" significa "scrittura". Omotetia da "nomos" = "uguale" e "thetós" = posizione, o collocazione; Collineazione dal latino "cum" = "insieme" nel senso di accompagnamento (non nel senso molteplicità di elementi, da cui la teoria degli insiemi) e "linea", cioè "collineazione" equivale a collegamento proiettivo fra linee (rette).

Abbiamo speso qualche parola sul significato di questi termini, perché usati tal volta in modo improprio, rimandando alla applicazione pratica il loro vero contenuto di informazione.

Si dice omologia o corrispondenza omologica fra due piani sovrapposti quando i punti di un

piano ed i punti dell'altro sono in una <u>cor=rispondenza biunivoca</u> tale che se un punto descri ve una retta, anche l'altro descrive una retta, esiste un'<u>asse dell'omologia</u> tutta costituita di <u>punti uniti</u>, ed un <u>centro dell'omologia</u> punto comune <u>delle rette unite</u>.

Dati due punti corrispondenti A ed A', noto il centro S dell'omologia ed il punto "C" comune alla retta AA' ed all'asse dell'omologia, il birapporto (AA'SC) non varia al variare della coppia AA'.

Inversamente il birapporto consente di determinare A' per ogni A, essendo AA'S allineati ed è detto: invariante assoluto o caratteristica dell'omologia.

Se questo birapporto è: (−1), l'omologia si dice: armonica o involutoria.

Se il centro S è improprio, mentre l'asse è una retta reale, l'omologia è detta: "affine", si ha cioè affinità omologica, e si verificano tre casi: 1) la direzione di S_∞ è quella dell'asse, e l'omologia affine è detta: speciale.

2) la direzione di S_∞ è normale all'asse, e l'omologia affine è detta normale.

3) la direzione di S_∞ è obliqua all'asse e l'omolo

3) La direzione di S_m è obliqua all'asse e l'omotetia affine è detta obliqua.

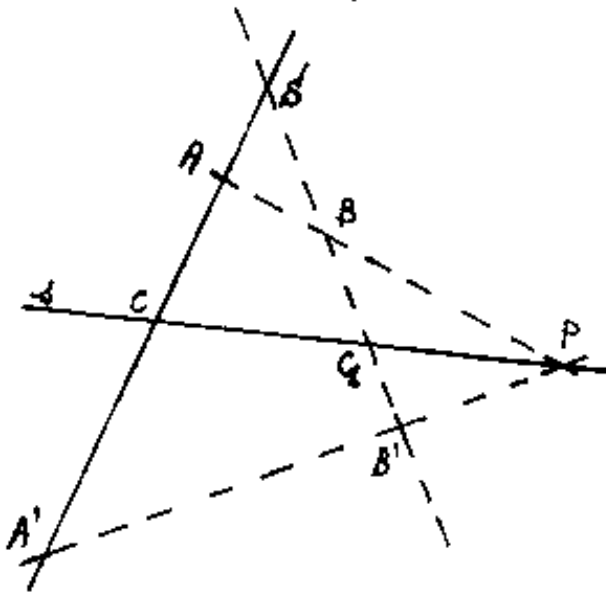
- Se l'asse è improprio mentre il centro è proprio si ha l'omotetia.

- Se il centro e l'asse sono impropri si ha una congruenza, od equipollenza, (uguaglianza).

Facciamo qualche esempio.

ESEMPI

Di una omologia sono dati: l'asse "s", il centro "S", ed una coppia di elementi corrispondenti A ed A', (necessariamente allineati con "S" per essere corrispondenti)

Dato un punto B trovare il corrispondente B' in quella omologia.

Uniamo S, A, A' per verificare che siano allineati e si determina il punto "C".

Unito A con B, si trova su "s" il punto P.

Uniti P con A' e B con "S", per intersezione si determina il punto B' e C_1 su s.

$$(A'ASC) = \frac{\overline{A'S}/\overline{AS}}{\overline{A'C}/\overline{AC}} = \frac{5/1}{2,5/(-1,5)} = (-3) =$$ caratteristica

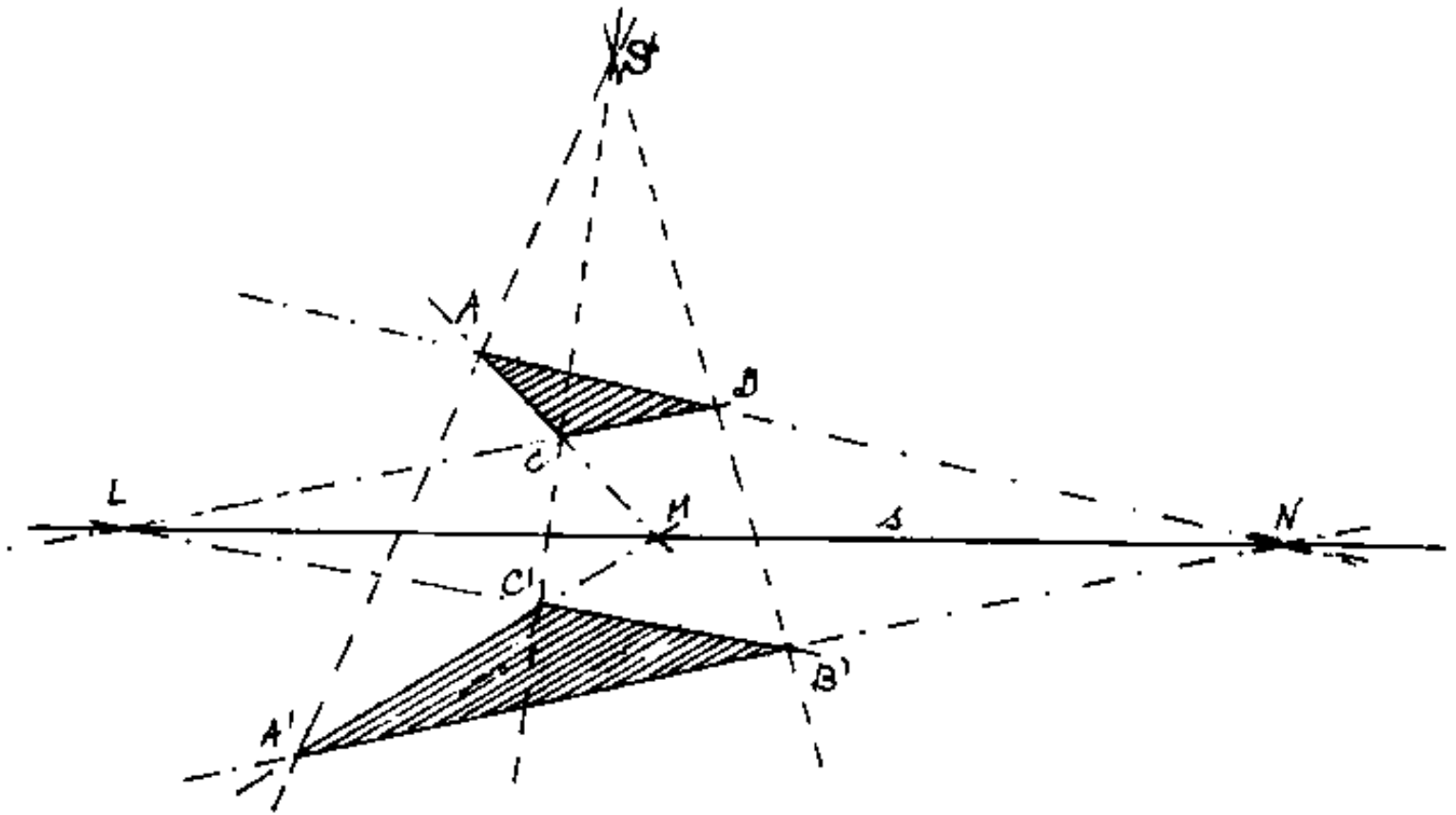
verifichiamo che la caratteristica dell'omologia, ossia l'invariante assoluto è rimasto lo stesso per la coppia

$$B, B' : (B'BSC_1) = \frac{\overline{B'S}/\overline{BS}}{\overline{B'C}/\overline{BC}} = \frac{3,5/1,5}{1,14/(-0,88)} = -3$$

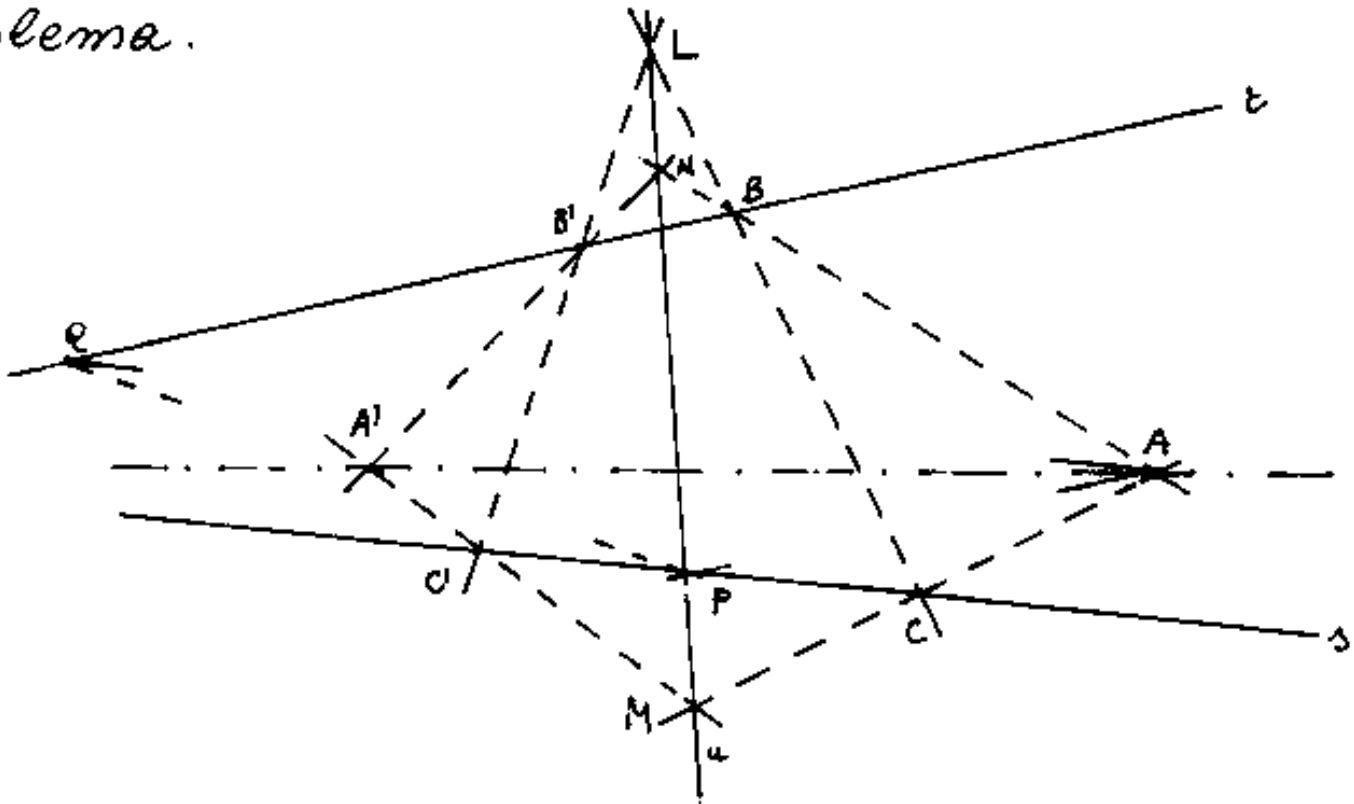
$$D_1D : (DDC_1) = \frac{\quad}{\overline{B'C_1} / \overline{BC_1}} = \frac{\quad}{1{,}14 / (-0{,}88)} = -3$$

Questa costruzione ci avverte che date due coppie di punti corrispondenti, è facile, graficamente, trovare il centro S ed il punto P, ma resta indefinito l'asse che deve passare per "P", con infinite, possibili, inclinazioni diverse.

I triangoli omologici

Date tre coppie di punti corrispondenti di una stessa omologia, cioè AA', BB', CC' allineate con "S", è possibile trovare l'asse "s" dell'omologia

unendo i punti omologhi: AB ed A'B' che si incontrano in N; AC ed A'C' che si incontrano in M; BC ed B'C' che si incontrano in L. L, M, N debbono risultare allineati e definiscono s (Teorema di Desargues)

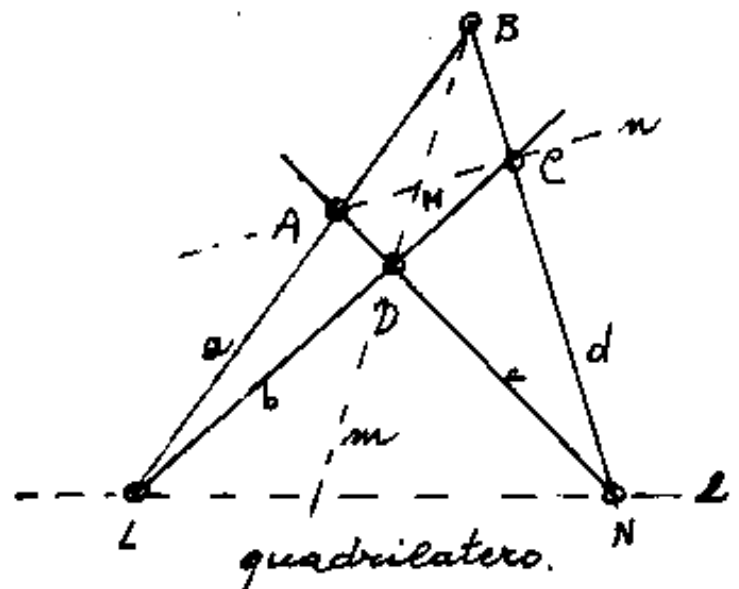
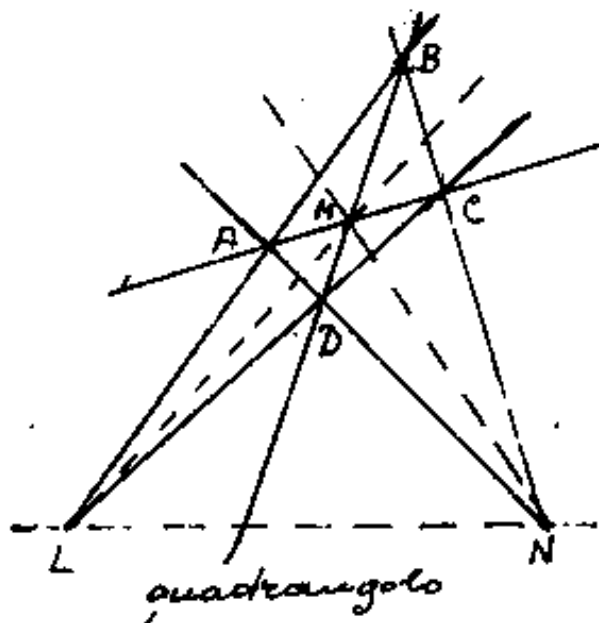
allineati e definiscono s. (Teorema di Desargues)
I due triangoli ABC ed A'B'C', sono detti:
<u>triangoli omologici</u>. (Non sono simili in genere!
Si possono utilizzare i triangoli omologici per
congiungere un punto A col punto comune a
due rette, che rimane fuori del foglio del di=
segno. Sono quindi date le rette r ed s, ed

ed il punto A fuori di esse; se prendiamo due coppie arbitrarie di punti corrispondenti, per esempio B e B' su r ed C e C' su s, potremo trovare il punto comune L ai lati $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, poiché sono infinite le omologie che possono correlare due coppie arbitrarie, per L possiamo tracciare una retta qualsiasi, sulla quale i lati AC ed AB individueranno i punti M ed N che uniti con C' ed B', daranno per intersezione il punto A'. La retta AA' risolve il problema.

Questo problema è risolto in modo molto più

Questo problema è risolto in modo molto più snello. se da A tracciamo le parallele ad r e s che incontreranno s ed r nei punti P e Q, il punto medio di $\overline{PQ}$ unito con A dà la retta richiesta.

Quadrangoli e quadrilateri completi

Dati quattro punti A, B, C, D dei quali nessuna terna sia allineata, dicesi quadrangolo completo l'insieme delle sei rette che a due a due li congiungono. Dicesi invece quadrilatero completo la figura piana che dualmente è costituita da quattro rette

quadrangolo

quadrilatero.

a, b, c, d, di cui nessuna terna passi per lo stesso punto, e dai 6 vertici comuni alle rette prese due a due.

Le tre rette: l, m, n, congiungenti i vertici opposti del quadrilatero completo (dette diagonali)

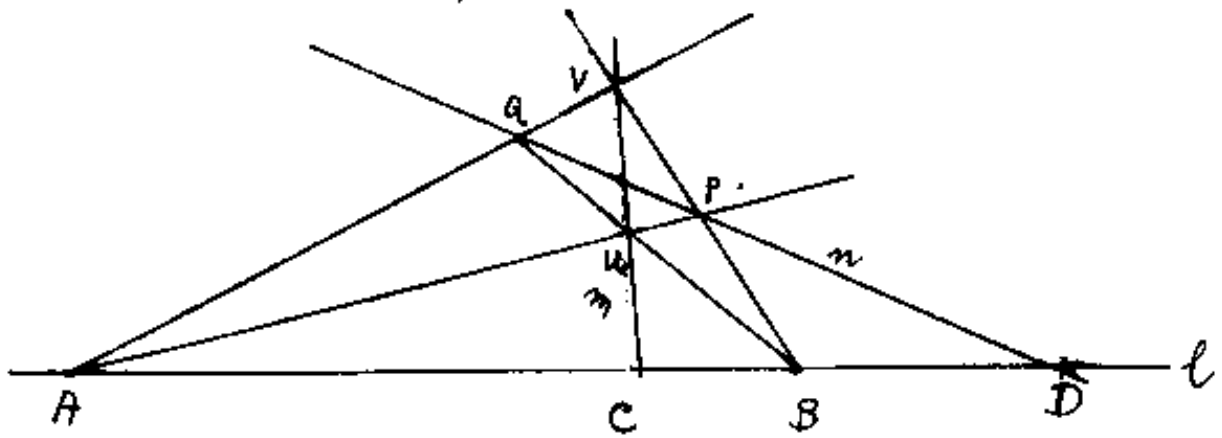
costituiscono il trilatero diagonale.

Due lati si dicono opposti se non passano per lo stesso vertice intendendo per vertici i punti A, B, C, D, perciò sono lati opposti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$; $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$; punto comune a due lati opposti è detto punto diagonale sono punti diagonali L, M, N e sono solo tre.

Sulla retta che unisce due punti diagonali, vi sono altri due punti determinati dalla intersezione dei lati uscenti dal terzo punto diagonale. Sono due coppie che si separano armonicamente. Dualmente, nel quadrilatero completo, due rette diagonali intersecano la terza retta diagonale separando armonicamente la coppia di vertici opposti.

Queste proprietà consentono la costruzione di un gruppo armonico.

Se (ABCD) è un gruppo armonico (ricordiamo che si ha un gruppo armonico quando sono uguali, in valore assoluto, essendo di segno opposto, i rapporti semplici (ABC) ed (ABD) od anche il birapporto (ABCD)=-1, cioè (ABCD) è detta anche quaterna armonica) e poniamo ABCD su una retta diagonale per esempio la "l", possiamo costruire infiniti quadrilateri completi su di essa. Inversamente dati ABC

è possibile trovare D, sapendo che AB e CD sono le coppie.

La costruzione del quarto armonico D, dati 3 punti: ABC, presenta vari elementi arbitrari, che portano a quadrilateri diversi, ma il punto D rimane invariato per ogni terna (ABC) sapendo che AB sono vertici mentre le rette per C e D sono diagonali. Il rapporto semplice di tre punti allineati (ABC) = AB/BC è negativo se C è intermedio ad $\overline{AB}$, perciò ad ogni C interno alla coppia AB, corrisponde uno, ed un solo quarto armonico D, esterno alla coppia. (Viceversa se C è esterno, D è interno).

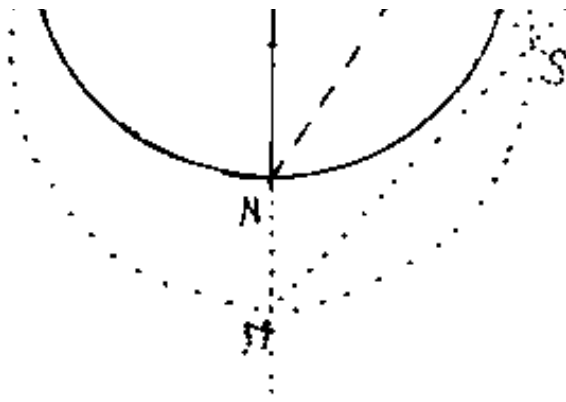
Se C è più vicino a B che ad A, D è esterno dalla parte di B, Via, via, che C si avvicina a B anche D si avvicina a B fino a diventare coincidenti in B. Se "C" allontanandosi da B, va verso il punto medio di AB; D si allontana da B, andando verso il punto improprio che raggiunge quando C è nel punto medio. Se C continua il suo

avvicinamento ad A superando il punto medio, il punto D salta bruscamente dal punto ∞ dalla parte di B al punto ∞ dalla parte di A e comincia ad avvicinarsi ad A. (Noi sappiamo che il punto ∞ dalla parte di B è lo stesso punto improprio del punto ∞ dalla parte di A.) Il moto di C ed il moto di D, hanno versi opposti.

La costruzione grafica è banale, preso un punto qualsiasi

fuori della retta (ABC) ed assunto come vertice "V" comune ad A e B, si congiunge V con C. Preso su VC un secondo vertice "U" comune ad A e B, si congiunge "U" con A e B determinando i vertici P e Q. La retta $\overline{PQ}$ incontra in D la retta (ABC).

Vi sono molte altre costruzioni del quarto armonico. Per esempio, sull'asse di A, B si scelga il centro di un cerchio passante per A e per B, siano M ed N gli estremi del diametro sull'asse, se da uno dei due estremi si traccia una corda passante per C per esempio $\overline{N}S$, unito M con S e prolungato si trova il punto D.

In figura abbiamo fatto a puntini un cerchio di diverso centro sull'asse, per dimostrare che torna sempre lo stesso quarto armonico D.

quarto armonico D.

Si noti anche, come scambiando A con B e D con C, si ottiene lo stesso birapporto, che, trattandosi di <u>gruppo armonico</u> in questo caso il **birapporto** vale: (-1).

Esercizio

Dati tre punti allineati: A, B, C, costruire il quarto punto D, in modo che il birapporto $(ABCD)$ abbia un assegnato valore h. $(ABCD) = h$

Sappiamo che:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC/BC}{AD/BD} = \left(\frac{AC}{BC}\right)\left(\frac{BD}{AD}\right) = h$$

Ci avvaliamo del teorema:

<u>Il birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie, è un invariante proiettivo.</u>

Cioè non cambia se ai quattro elementi se ne sostituiscono altri quattro appartenenti ad una stessa forma di prima specie ed ottenuti mediante un numero finito di proiezioni e sezioni.

Si chiamano <u>forme di prima specie</u>: <u>Le punteggiate</u>

(cioè le rette riguardate come l'insieme dei punti di cui sono composte), il fascio di rette, (cioè l'insieme piano delle rette aventi un punto in comune,) Il fascio di piani, cioè l'insieme dei piani aventi una retta (asse) in comune.

Per il nostro problema notiamo che il rapporto $AC/BC = (ABC)$ è dato, mentre noi dobbiamo trovare un punto D tale che $(ABCD) = h$.

Se noi, da un punto S proiettiamo i quattro punti A, B, C, D, su un'altra retta, (se le due coppie si considerano: AB fissa e CD mobile,) passante per B avremo quattro punti corrispondenti su questa nuova retta: A', B', C', D' (ove: $B' \equiv B$) il cui birapporto è invariante cioè: $(ABCD) = (A'B'C'D') = h$.

Non sono invece invarianti i rapporti semplici: per esempio, se sulla nuova retta facciamo il rapporto: $(A'B'C') = 1$ avremo: $\overline{B'D'}/\overline{A'D'} = h$, cioè $B'D' = A'D' \cdot h$.

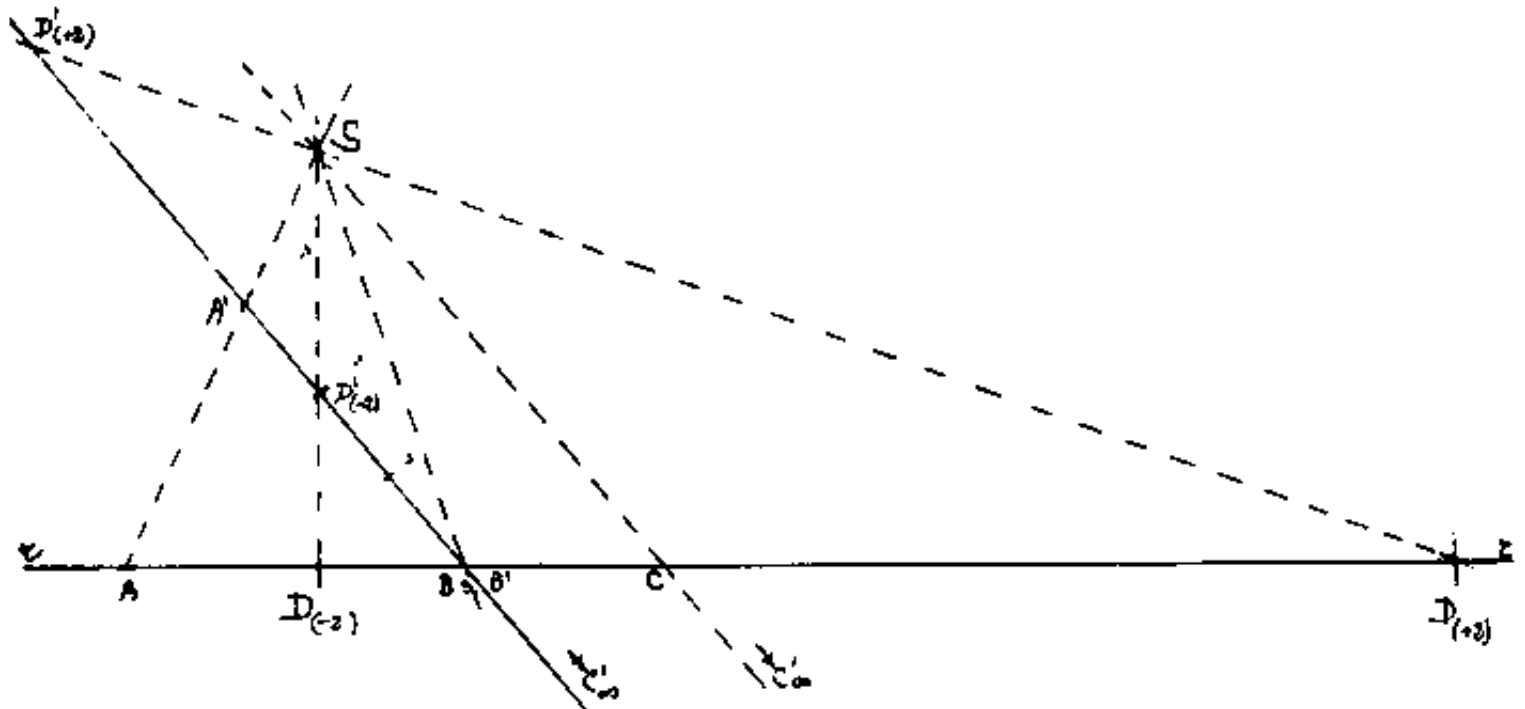
Per avere $A'B'C' = 1$, basta: $A'C'/B'C' = 1$ siccome abbiamo preso $B \equiv B'$ occorrerà che A' o C' vada all'∞ cioè sia il punto improprio della nuova retta. Poniamo: $C' = C_\infty$, cioè la nuova retta passante per $B \equiv B'$, dovrà essere parallela al raggio proiettante: $\overline{SC}$, ed incontrerà in A' il raggio proiettante $\overline{SA}$.

Sul segmento $\overline{A'B'}$ scegliamo un punto D' tale che $B'D' = h\,A'B'$ avremo: $(A'B'C'D') = h$, il raggio $\overline{SD'}$ sarà il raggio proiettante $\overline{SD}$ che inizialmente abbiamo supposto di tracciare, ma non era stato possibile tracciare, essendo D l'incognita da trovare.

Non è questo, l'unico modo di risolvere il problema, può essere verificato usando altri metodi.

Noi vogliamo verificare numericamente il problema, perciò faremo un disegno in scala.

Gli elementi noti siano: $\overline{AB} = 3,2$; $\overline{AC} = 5,1$; $h = \pm 2$

Il punto S sia casuale.

Disegnati sulla retta "r" i tre punti noti, da un punto "S" (arbitrario) li proiettiamo tracciando le rette $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, (raggi proiettanti). Quindi assunto $B' \equiv B$ e $C' = C'_\infty$, in (modo che il rapporto: $A'B'/A'C'$ sia uno), per B tracciamo

la parallela ad $\overline{SC}$ passante per $B \equiv B'$ che incontrerà in A' il raggio $\overline{SA}$. Sappiamo che: $(ABCD) = (A'B'C'D') = \frac{A'C'/B'C'}{A'D'/B'D'}$;

ma: $A'C'/B'C' = 1$ perciò: $(ABCD) = B'D'/A'D' = h$

$$\boxed{(\overline{B'D'}) = h(A'D')}$$

per $h = -2$, $\overline{B'D'} = \frac{2}{3}\overline{A'B'}$ e $D'_{(-2)}$ è intermedio ad $\overline{AB'}$

per $h = +2$ basta prendere $A'D'_{(+2)} = A'B'$ e $D'_{(+2)}$ è esterno ad AB.

Con questo metodo, abbiamo ridotto il valore di un birapporto al valore del rapporto semplice dei tre punti allineati: $(B'A'D')$. (B' precede A' perché: $\frac{B'D'}{A'D'} = h$).

Se calcoliamo numericamente si ha: $\overline{AD}_{(-2)} = 1,833710627$

$\overline{AD}_{(+2)} = 12,55384615$., che verificano la costruzione grafica.

Consideriamo ora i quattro <u>punti fissi</u>: $(ABCD) = +2$ e verifichiamo che scambiando entrambe le coppie il birapporto non cambia:

$$(ABCD) = \frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{5,1/1,9}{12,55/9,35} = +2$$

$$(BADC) = \frac{BD/AD}{BC/AC} = \frac{9,35/12,55}{1,9/5,1} = +2$$

$$(CDAB) = \frac{CA/DA}{CB/DB} = \frac{-5,1/-12,55}{-1,9/-9,35} = +2$$

$$(DCBA) = \frac{DB/CB}{DA/CA} = \frac{-9,35/-1,9}{-12,55/-5,1} = +2$$

Consideriamo: $(+2 = K)$ e calcoliamo i sei birapporti diversi. (in ciascuno dei quali, scambiando le due coppie di lettere, il valore non cambia, come sopra.)

$$(ABCD) = +2 = K$$

$$(ABDC) = \frac{AD/BD}{AC/BC} = \frac{12,55/9,35}{5,1/1,9} = \frac{1}{2} = \frac{1}{K}$$

$$(ABDC) = \frac{[illegible]}{AC/BC} = \frac{[illegible]}{5,1/1,9} = \frac{1}{2} = \frac{1}{K}$$

$$(ACDB) = \frac{AD/CD}{AB/CB} = \frac{12,55/(12,55-5,1)}{3,2/(-1,9)} = \frac{12,55/7,45}{3,2/(-1,9)} = -1 = \left(\frac{1}{1-K}\right)$$

$$(ACBD) = \frac{AB/CB}{AD/CD} = \frac{3,2/(-1,9)}{12,55/7,45} = -1 = (1-K)$$

$$(ADCB) = \frac{AC/DC}{AB/DB} = \frac{5,1/(-7,45)}{3,2/(-9,35)} = 2 = \frac{K}{K-1}$$

$$(ADBC) = \frac{AB/DB}{AC/DC} = \frac{3,2/-9,35}{5,1/-7,45} = \frac{1}{2} = \frac{K-1}{K}$$

Si noti che quando $K=2$ si hanno tre coppie di valori: K; $\frac{1}{K}$; $(1-K)$.

Proiettività fra le forme di prima specie

Nomenclatura e fondamenti della geometria proiettiva

Sono elementi primari e fondamentali della geometria proiettiva: i punti, le rette, i piani, (propri od impropri.)

Dagli elementi fondamentali discendono le figure dette forme fondamentali

Le forme fondamentali si distinguono in tre specie diverse.

1) Forme fondamentali di prima specie

sono: a) La punteggiata e la retta che fra gli infiniti suoi punti comprende il punto improprio, se è impropria comprende un punto proprio. Essa può essere generata dalla traettoria di un punto che si

muove di moto rettilineo equiverso, e che ritorna sul suo percorso dopo aver oltrepassato il punto proprio o il punto improprio.

Per collegare la punteggiata ad una proiettività consideriamo una retta reale ed un punto fuori di essa che indicheremo con S; per S facciamo passare una seconda retta (raggio proiettivo)

Riguardiamo la retta per "S", come due semirette, cioè due raggi proiettivi, uscenti da "S", di cui uno incontra la retta reale in un punto (proprio o improprio), mentre l'altro in un punto (improprio).

Se i due raggi uscenti da "S" (di verso opposto, e quindi allineati) ruotano nel piano definito da "S" e dalla retta reale, mentre uno di essi incontrerà tutti i punti della retta reale (punteggiata) compreso il suo punto improprio, l'altro raggio (opposto), assocerà la sua direzione ad un punto improprio, fino a coincidere, nel punto improprio della retta reale, con la direzione opposta dell'altro raggio; se la ruotazione continua per lo stesso verso, i due raggi si scambiano fra loro e sarà il secondo a segnare la punteggiata mentre il primo associerà la sua direzione ad un punto improprio. Ma la retta reale ed i

raggi ruotanti intorno ad S <u>sono complanari</u> e la retta reale ha un solo punto improprio, coincidente con la sua direzione, ogni altro punto reale della punteggiata è associato ad una direzione complanare con un centro proiettivo, "S". (Data l'importanza del concetto: "<u>Direzione</u>", ciò è notevole).

Altre forme di prima specie sono:

b) Il fascio di rette (complanari)

c) Il fascio di piani (aventi un asse comune)

---

2) Forme fondamentali di seconda specie

a) Piano punteggiato

b) Piano rigato (luogo del fascio di rette con punto proprio o improprio)

c) La stella di rette

d) La stella di piani

Considerando la stella di rette come raggi proiettanti uscenti da S, che per un verso, incontrino il piano punteggiato e per il verso opposto associno una direzione, potremmo ripetere quanto già detto per le forme di prima specie completando l'insieme delle direzioni.

specie, completando l'insieme delle direzioni.

---

3) Forme fondamentali di terza specie

a) Lo spazio punteggiato

b) Lo spazio di piani.

Data una figura appartenente ad una forma di prima o seconda specie, si ha una proiettività (o trasformazione proiettiva) quando si operi un numero finito di proiezioni e sezioni (omografie o collineazioni per le forme di prima specie, reciprocità o correlazioni per le forme di seconda specie). Hanno carattere proiettivo quelle proprietà che sono invarianti.

Le proprietà grafiche hanno carattere proiettivo. inversamente ogni proprietà proiettiva può essere espressa in forma grafica.

In geometria proiettiva vale il principio di dualità di Staudt.

Alcuni autori per simboleggiare una relazione di proiettività fra due forme u ed u' scrivono

$$u \,\overline{\wedge}\, u'$$

Se di punti: $(A, B, C, \dots) \,\overline{\wedge}\, (A', B', C', \dots)$

Noi non riteniamo pratico il simbolo $\overline{\wedge}$ perché già

usato con $\vec{V} \wedge \vec{U}$ che si legge: "V" vettor "U" e rappre= senta il prodotto vettoriale di $\vec{V}$ su $\vec{U}$. La sopralineatura al simbolo di prodotto vettoriale, può avere altri significati che esulano dalla proiettività.

<u>Una ed una sola proiettività è determinata da due terne di elementi corrispondenti arbitrari. di prima specie</u>

L'origine della geometria proiettiva è da ricercarsi nella "prospettiva", e sono ancora i maestri toscani: "Pier della Francesca, Filippo Brunelleschi, Leonardo da Vinci, i fondatori di questa disciplina. Nel 1636, G Desargues, ne pubblicò i metodi, seguito da Pascal (1640); e G Monge (1746-1818) dette il nome alle proiezioni orto=gonali. J.V. Poncelet, nel suo: "Traité des propriétés projective des figures" – Paris 1822. – getta le fondamenta della geome=tria moderna. La sua opera è continuata da Möbius, da J. Steiner, da M Chasles, da K.G.Ch.v Staudt.

La _prospettività_ è un caso particolare della _proiettività_: due forme di prima specie dello stesso nome si dicono prospettive quando per passare da un elemento al suo corrispondente occorrono due operazioni di proiezione e di sezione.

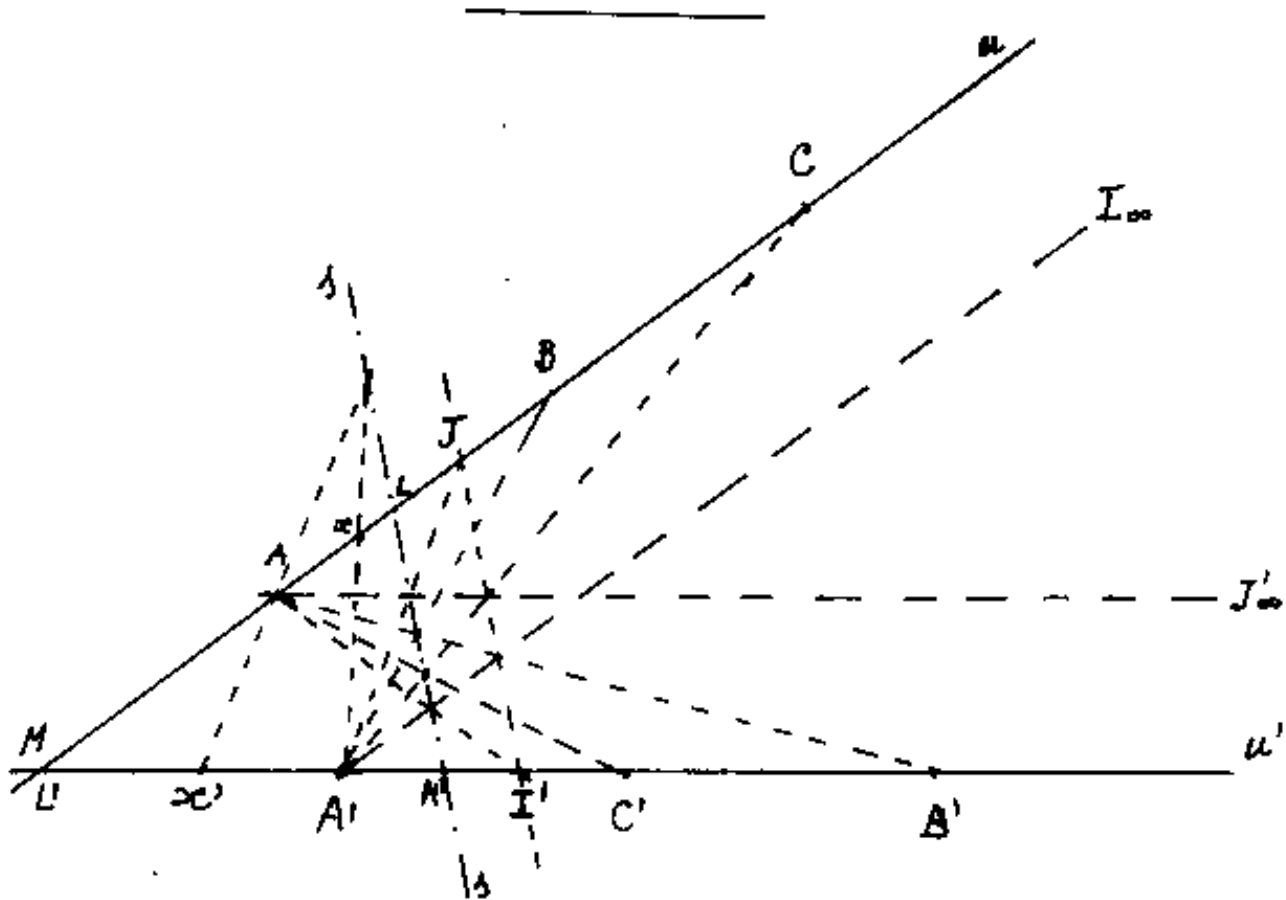
Se due punteggiate complanari sono prospettive,

le rette che uniscono i punti corrispondenti passano tutte per uno stesso punto detto Centro di prospettiva.

Se due fasci complanari di rette (raggi) sono proiettivi, i raggi corrispondenti si incontrano su una retta detta asse di prospettiva.

Diconsi punti limite di due punteggiate proiettive i punti propri che hanno per corrispondenti gli impropri.

ESERCIZI

Date due punteggiate distinte u ed u' costruire la proiettività determinata dalla corrispondenza dei punti A, B, C, di "u" con A', B', C', di "u'". Determinare i punti limite.

Assunti A ed A' come centri di proiezione (s ≡ s')
da A si proiettano B' e C', da A' si proiettano B e C
il punto comune ai raggi AB' ed A'B, ed il punto

[illegible]

comune ai raggi AC' e $A'C$, determinano l'asse "s" detto <u>asse di collineazione</u>

Se da A si traccia una parallela ad u' il punto sull'asse di collineazione unito con A' determina su "u" <u>il punto limite J</u> analogamente da A' la parallela ad "u" determina <u>il punto limite I'</u> su u'.

come si vede, una volta noto l'asse di collineazio=ne "s", e preso un punto x arbitrario, si può ricavare il corrispondente x' e viceversa.

I punti M ed L', che si sovrappongono nel punto comune alla u ed u', trovano i corrispondenti M' ed L sull'asse "s".

Si noti che la retta JI' è parallela alla s

Si noti che "s" è invariante se come centri di proiezione si prende C e C', oppure B e B'.

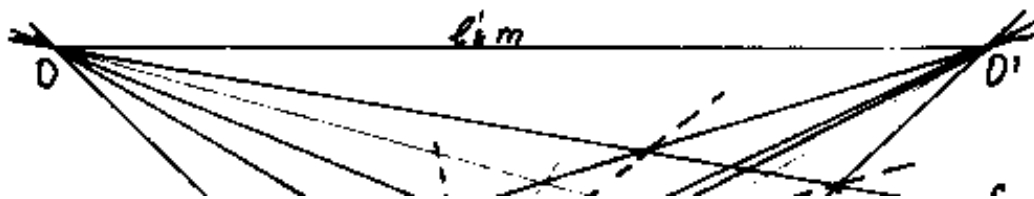
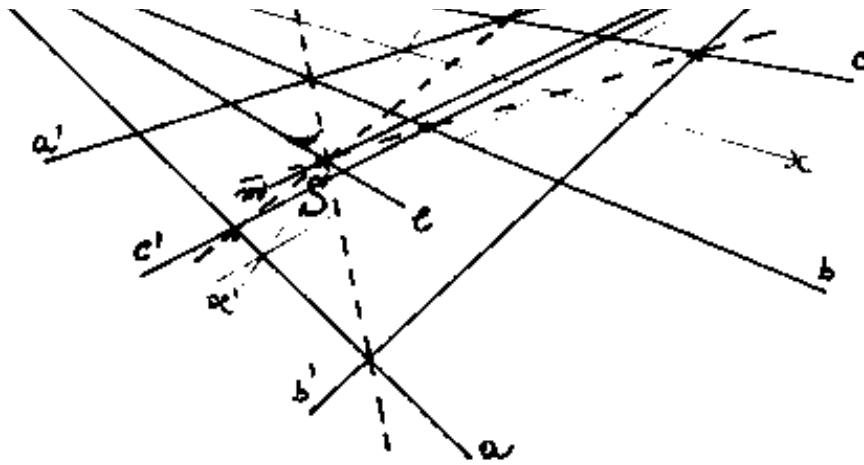
Consideriamo due fasci di raggi uscenti da "O" e da "O'" e siano noti tre raggi corrispondenti: a, a'; b, b'; c, c'; determinare la proiettività

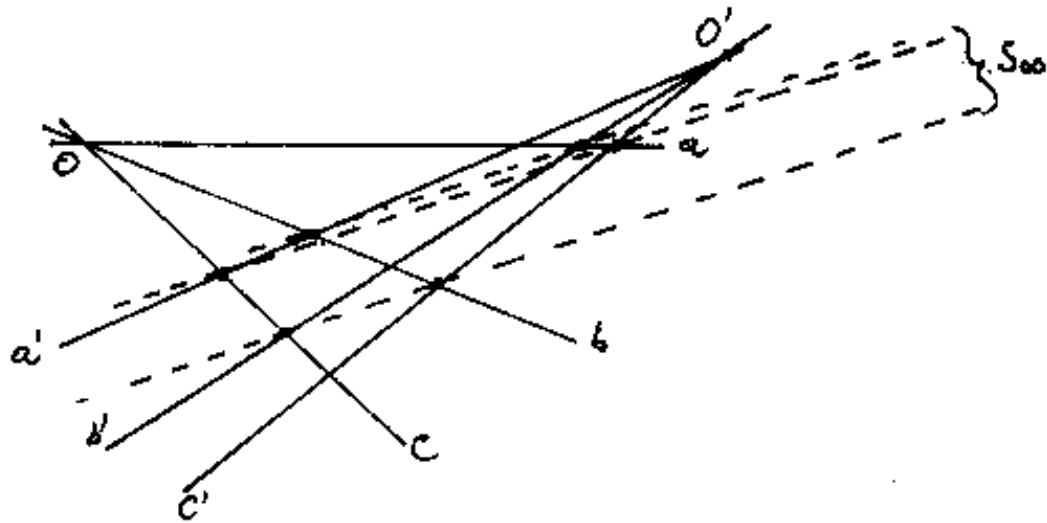
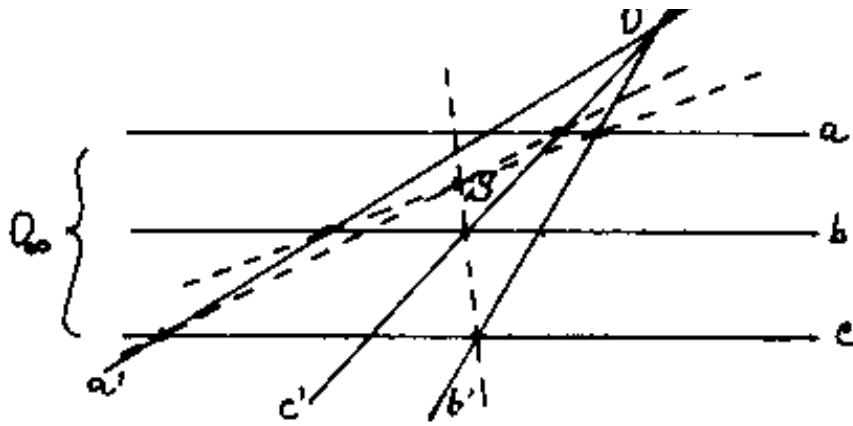
E' l'analogo della precedente costruzione: unendo i punti comuni ad ab' ed a'b; ac' ed a'c; bc' e b'c; si trova il centro

l≡m

O

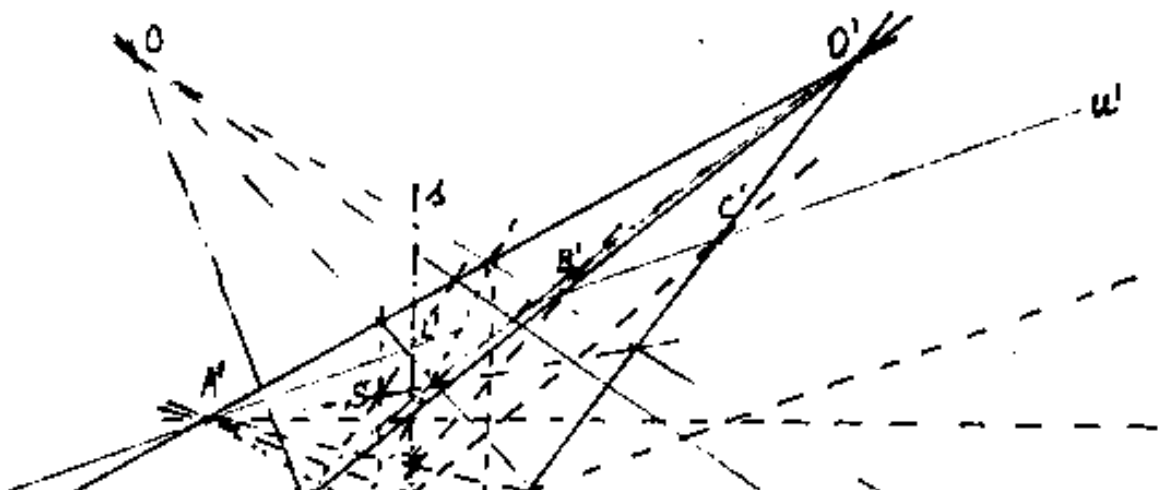
O'

a' c' b' a b c l m S x x'

S della proiettività, o centro di collineazione. (l ed m' hanno i corrispondenti sovrapposti nell'unico raggio $\overline{OO'} \equiv l' \equiv m$)

Costruire una proiettività che abbia il centro S_∞ all'infinito. Sono dati O, O', aa'; b; cc'; basta trovare il raggio b'. A tal fine i raggi a e c' ed i raggi a' e c determinano due punti che danno la direzione di S_∞ dal punto comune a "b" e "c'" si traccia la parallela verso S_∞ che su "c" determina il punto per cui passa $b'c$, avremmo potuto fare la costruzione con b e a'; verifichiamo il parallelismo verso S_∞.

Se il centro O_∞ è all'infinito ed O' è in campo finito, costruire la proiettività.

La costruzione è analoga alle precedenti e non richiede ulteriori chiarimenti.

Ancora la stesso costruzione se O_m ed O'_m sono all'infinito. Le rette "l" ed m' sono dette <u>rette limite</u> in quanto corrispondenti alle rette improprie: l'_∞, ed m_∞.

Data la punteggiata "u" ed il fascio complanare O' trovare la proiettività

Si traccia una retta u' arbitraria che determinerá sul fascio i punti A', B', C', perció essendo noti A, B, C, della punteggiata, la costruzione è ricondotta al primo esercizio. Oppure si sceglie un punto O arbitrario da

cui si proiettano i punti A, B, C, costruendo co=
sì il fascio: a, b, c, che col fascio per O': a', b', c',
determinano il centro di collineazione S.
È importante verificare che preso un punto arbitra=
rio X sulla punteggiata ad esso corrisponde il raggio
x' da O', e viceversa, e che sono invarianti, qua=
lunque sia la retta arbitraria u' oppure qualunque
sia il centro arbitrario O. Si può verificare anche
che dato X per trovare x' o viceversa, sia che ci si
avvalga dell'asse di collineazione "s", sia che ci si av=
valga del centro di collineazione "S", il risultato non
cambia.

I Punti impropri

La geometria proiettiva estende lo spazio ai cosid=
detti "punti impropri"; abbiamo già associato il
concetto "direzione" ai punti impropri; ma rite=
niamo che l'argomento meriti qualche osservazione
in più. Dalla definizione eleatica del punto: "Ciò che

in più. Dalla definizione eleatica del punto: "Ciò che non ha parti", alla accettazione della: "non esistenza materiale" dei punti in campo finito, si suppone che, anche per lo spazio cosiddetto reale o proprio, per il punto, possano esservi proprietà nuove tutte da scoprire.

Il punto proprio si affaccia a tutte le direzioni possibili; inversamente, i punti propri, possono considerarsi le "intersezioni" di tutte le possibili "direzioni" costituite dai fasci di rette parallele, o meglio dai punti impropri che le rappresentano.

Il punto proprio, come centro di proiezione, può essere riguardato sia come "sorgente irradiante", sia come "fuoco delle irradiazioni".

In genere, degli infiniti raggi che hanno un punto comune, se ne "caratterizza" solo una parte; per es.: La "punteggiata" caratterizza due raggi opposti, comuni a tutti i punti che la costituiscono. (Spazio monodimensionale). Il "piano punteggiato" caratterizza l'insieme dei raggi opposti complanari, comuni a tutte le punteggiate complanari. (Spazio bidimensionale).

Lo spazio geometrico punteggiato caratterizza l'insieme dei raggi comuni a tutte le punteggiate possibili,

cioè l'insieme dei "fasci direzionali" determinati dai punti impropri. (spazio tridimensionale)
Se alle tre dimensioni geometriche aggiungiamo "un succedersi" cioè un tempo, con ciò abbiamo:
Lo spazio cinematico punteggiato che, istante per istante, è lo spazio geometrico, ma caratterizza un fluire

che, nel tempo, equivale ad un prima ed un dopo l'istan=
te, ma graficamente, "il fluire" è un punto dopo
l'altro, e ciò implica "un verso". Questo fluire su un
grafico, noi lo facciamo leggendo una lettera dopo
l'altra, poi l'esperienza ci permetterà di leggere
una intera parola dopo l'altra. Notare come, nel leg=
gere, parole nuove, piuttosto lunghe, che entrano intere
nel campo visivo, ma sono per noi inusitate, tendiamo
a spezzarle in due o tre parti, anche se le pronuncia=
mo correttamente.

La punteggiata nasce dal moto rettilineo di un
punto che ha lasciato memoria del suo cammino,
cioè ad ogni punto di ogni retta si può associare un
tempo con origine arbitraria e modalità di moto che,
partendo dal moto uniforme a velocità costante, può diven=
tare comunque vario; quindi il "tempo" di ciascun punto
ed il suo legame direzionale coi punti adiacenti, sono
sufficienti a qualificare qualunque moto. (Anche curvilineo).

sufficienti a qualificare qualunque moto. (Anche curvilineo).

Il fluire "continuo" del tempo dà il vero concetto di continuità. Come per i punti impropri che uniscono gli estremi indefiniti di una retta; così il tempo infinito del passato ed il tempo infinito del futuro si uniscono nel tempo improprio.

Mentre un punto, in campo finito, si affaccia a tutte le infinite direzioni spaziali, e scelta una di esse, si può raggiungere il punto improprio, che la definisce, sia muovendosi nel verso positivo, sia movendosi in verso opposto (negativo); cioè se la retta per il punto P, si orienta con un verso (arbitrario), e consideriamo zero il punto P, origine di due semirette, notiamo che, per il fluire da P, le due semirette hanno segno opposto; all'estremo infinito di esse vi è lo stesso punto improprio. Quindi il salto di segno si può avere sia sullo zero (origine), sia all'infinito.

Il tempo, considerando l'istante, ha solo una direzione che si scinde in due da quell'istante, cioè il passato, ed il futuro, che si riuniscono nell'istante improprio. Però, per il tempo, il verso del fluire non è arbitrario, ma unico, e va dal passato al futuro. A ciò si abbina il concetto di sequenza, forse il più importante in analisi, connesso con l'implica=

zione, vista come: "con-sequenza" → "con=sequenza". Il "prima" è l'accettazione di una pre=messa; il dopo è la deduzione logica.

La premessa può essere ipotetica: "se... → allora..."

Nel linguaggio dei computer: "if.... → then"....
Occorre distinguere quel: "se" (od "if") che può essere una constatazione di un risultato, ma può anche essere una condizione ipotetica della possibilità, o dell'impossibilità. Il Russel pose la seguente tabella: "p⊃q" si legge: "se p allora q"; p e q possono essere veri (1) o falsi (0) ed anche l'implicazione può essere vera o falsa:

antecedente	conseguente	implicazione
p	q	$p \supset q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Rimandiamo al capitolo: "la logica" questo argomento e torniamo al nostro punto.
Se pensiamo ad un "taglio", in qualsiasi corpo, per

Se pensiamo ad un taglio, in qualsiasi corpo, pensiamo ad un "piano", (privo di spessore), che ha operato il taglio. Ma il piano ha una precisa "giacitura" orientata, cioè le due facce del piano (privo di spessore) hanno "segno opposto". (+,-)

Una "punteggiata", può considerarsi una retta nella quale si sia operata una sequenza di tagli,

due tagli successivi, (affiancati) delimitano un punto, (privo anch'esso di spessore), cioè infiniti tagli ed infini= ti punti formano una successione di segni alterni +-, priva di lunghezza. Se avesse una lunghezza potremmo rappresentarla: -|+ -|+ -|+ -|+ -|+ -|+ -|+ -|+ -|+
Anche i punti appaiono "polarizzati" dal (- +).
Abbiamo detto che il fluire implica un tempo, il più picco= lo intervallo di tempo (il differenziale dt) permette di definire il più piccolo intervallo di spazio (il diffe= renziale ds) ove ds/dt è la velocità istantanea che caratterizza il fenomeno. (Nel ds vi sono infiniti + -)
Abbiamo insistito anche troppo su questi aspetti che possono portare la matematica e la geometria all'origine dell'energia → materia, ma la materia e l'energia sono "qualificate"; per la materia ciò porterà alla cristallografia, per l'energia alla ricerca di una forma energetica fuori della mate

ricerca di una forma energetica fuori della mate=
ria; una pre-energia, che potrebbe identificarsi in
un soffio creativo. ______

Osservazioni sulle quadriche

L'equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{24}z + a_{44} = 0$$

può essere riguardata sotto molti aspetti. Volendo, per esempio, la rappresentazione della superficie mediante isoipse, basta considerare parametro la "z" variabile per valori discontinui con intervallo costante; questo modo porterebbe alla espressione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2[a_{13}z + a_{14}]x + 2[a_{23}z + a_{24}]y + [a_{33}z^2 + 2a_{34}z + a_{44}] = 0$$

che rappresenta "la conica" intersezione fra la superficie ed il piano a quota z parallelo ad xy.

Nel secondo volume abbiamo trattato i coefficienti delle equazioni delle coniche, ed abbiamo rilevato diverse particolarità, per esempio affinché una conica sia al centro devono essere nulli i coefficienti della x e della y e diverso da

vono essere nulli i coefficienti della x e della y e diverso da
zero il termine noto, salvo il caso della parabola ove deve
essere nullo il termine noto, uno solo dei due coefficienti, per
esempio quello in y ed in tal caso sarà nullo il coeff. di x^2,
o viceversa. Nell'equazione delle quadriche, se consideriamo
che l'eventuale intersezione parabolica abbia per asse il pa=
rametro scelto (z), avremo che, condizione necessaria, ma

non sufficiente è che: $[a_{13}z + a_{14}] = 0$; $[a_{23}z + a_{24}] = 0$; affinché la condizione sia sufficiente e la conica rimanga al centro indipendente da z è che siano nulli: $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$.

Poiché gli assi, per la relatività dell'osservatore, sono scambiabili, potremo assumere come parametro la x, oppure la y anziché la z.

Altra condizione è che se il coefficiente di xy è nullo, $(2a_{12} = 0)$ la conica non è ad assi ruotati, ed è un coefficiente indipendente dal parametro (z).

Consideriamo ora il determinante delle coniche parametriche in z:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & [a_{13}z + a_{14}] \\ a_{12} & a_{22} & [a_{23}z + a_{24}] \\ [a_{13}z + a_{14}] & [a_{23}z + a_{24}] & [a_{33}z^2 + 2a_{34}z + a_{44}] \end{vmatrix} = \Delta_c^*$$

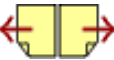
(si astraggono le f(z)); sviluppando per l'ultima riga:

$$\boxed{\Delta_c^* = a_{31}^* A_{31} - a_{32}^* A_{32} + a_{33}^* A_{33}}$$ ove:

$a_{31}^* = [a_{31}z + a_{41}]$; $a_{32}^* = [a_{32}z + a_{24}]$; $a_{33}^* = [a_{33}z^2 + 2a_{34}z + a_{44}]$

[illegible]

$$A_{31}^{*} = \begin{vmatrix} a_{12} & [a_{13}z + a_{14}] \\ a_{22} & [a_{23}z + a_{24}] \end{vmatrix}; \quad A_{32}^{*} = \begin{vmatrix} a_{11} & [a_{13}z + a_{14}] \\ a_{12} & [a_{23}z + a_{24}] \end{vmatrix}; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Si noti che A_{33} è indipendente da z ed è identico formalmente a quello trovato per le coniche, ove A_{33} decidera se la conica era un'ellisse, una parabola, od un'iperbole a seconda che $A_{33} \gtreqless 0$.

Sulla base di questi determinanti consideriamo le quadriche già studiate:

1) Sfera al centro: $x^2+y^2+z^2=R^2$

$a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$: $a_{12}=0$; $a_{13}=0$; $a_{23}=0$; $a_{14}=0$; $a_{24}=0$; $a_{34}=0$;

$a_{44}=-R^2$; $a^*_{31}=0$; $a^*_{32}=0$; $a^*_{33}=[z^2-R^2]$

$A_{31}=0$; $A_{32}=0$; $A_{33}=1>0$ = ellisse

$A_{33}\cdot a_{33}=\Delta=(z^2-R^2)$; per $z>R$; $\Delta>0$ (ellisse immaginario)

2) Sfera con centro in $C\equiv(x_c, y_c, z_c)$

$$x^2+y^2-2x_cx-2y_cy+(x_c^2+y_c^2+z_c^2+z^2-2z_cz-R^2)=0$$

$a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$ (se $=K$ si divide l'eq. per K)

$a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$; $a_{14}=x_c$; $a_{24}=y_c$; $a_{34}=z_c$; $a_{44}=-R^2$

$a^*_{31}=-x_c$; $a^*_{32}=-y_c$; $a^*_{33}=(x_c^2+y_c^2+z_c^2-2z_cz+z^2-R^2)$

$A_{31}=x_c$; $A_{32}=y_c$ (indipendenti da z) ; $A_{33}=1$

$$-x_c^2-y_c^2+(x_c^2+y_c^2+z_c^2-2z_cz+z^2-R^2)=\Delta=[(z-z_c)^2-R^2]$$

ove, per $|z-z_c|>R$ si ha $\Delta>0$ (ellisse immaginario)

Si noti che x_c ed y_c sono indipendenti da z per cui scrivendo: $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2-(z-z_c)^2$ si ha la

cui scrivendo: $(x-x_c)+(y-y_c) = R-(z-z_c)$ si ha la famiglia delle circonferenze che cessa quando $|(z-z_c)| > R$; ed il cerchio massimo si ha per $z=z_c$.
Quindi sul piano xy vediamo proiettate una serie di circonferenze concentriche, una per ogni valore di z nei limiti del campo reale.

Poiché sezionando un cilindro od un cono, (qualunque sia la loro sezione retta) con piani paralleli, otteniamo sempre la stes= sa curva di intersezione ad assi solo traslati; se i piani sono di giacitura "z", (cioè paralleli al piano xy), la z potrà figurare solo nei coefficienti che indicano traslazione di assi se trattasi di un cilindro; figurerà anche nei parametri della conica $f(x,y)=0$ se trattasi di un cono, non influenzerà la natura della conica cioè il minore $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ sarà indi= pendente da z. Se i piani di sezione sono pa= ralleli all'asse del cilindro la sezione reale di due rette, (al limite sovrapposte) ha un campo limi= tato oltre il quale si hanno curve immaginarie. Nel cono invece il piano che ne seziona il vertice può avere inclinazione tale da sezio=

vertice può avere inclinazione tale da sezionare il solo vertice, oppure due generatrici del cono.

Questa osservazione ci consente di esprimersi per identificare i coni ed i cilindri, per es.

$$160x^2 + 153y^2 + 25z^2 - 24xy - 72xz - 96yz - 676 = 0$$

può essere scritta:

$$160x^2+153y^2-2(12)xy-2(36z)x-2(48\cdot z)y-676=0$$

questa conica parametrica in z è un ellisse perché

$$A_{33}^{*}=\begin{vmatrix}160 & -12\\ -12 & 153\end{vmatrix}=24336>0$$ è ruotato perché $a_{12}\neq 0$

ma, a_{12} è indipendente da z per cui la rotazione rimane la stessa: $\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}\right)$.

La z influenza solo i coefficienti $2a_{13}^{*}$, $2a_{23}^{*}$, cioè la traslazione degli assi, per $z=0$ si ha un ellisse al centro, ad assi ruotati; la cui equazione è del tipo:

$$(a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)x^2+(a^2\cos^2\varphi+b^2\operatorname{sen}^2\varphi)y^2+(b^2-a^2)\operatorname{sen}(2\varphi)xy=a^2b^2$$

Dal II Vol. abbiamo:

$$(a_{11}+a_{22})=K(a^2+b^2)=160+153=313$$

$$(a_{11}-a_{22})=K(-a^2+b^2)\cos 2\alpha=7$$

$$K(-a^2+b^2)=-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}=-\sqrt{49+576}=-25$$

$$\begin{matrix}b^2\\a^2\end{matrix}=\frac{-2a_{33}^{*}}{(a_{11}+a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}=\frac{1352}{313\pm 25}=\begin{matrix}4\\ \frac{676}{144}\end{matrix}$$

$$\frac{}{144}$$

$b = 2$; $a = \frac{13}{6}$; assi principali dell'ellisse indipendenti da Z.

Sappiamo che le coordinate del centro dell'ellisse sono:

$$x_C = \frac{A_{31}}{A_{33}} \quad ; \quad y_C = \frac{-A_{32}}{A_{33}}$$

$$\frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{(-12)(-48z) - (-36z)153}{24336} = \frac{(6084)z}{24336} = \frac{z}{4}$$

$$\frac{A_{32}}{A_{33}} = \frac{a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{(-12)(-36z) - (-48z)160}{24336} = \frac{(8112)z}{24336} = \frac{z}{3}$$

$$x_c = \frac{z}{4} \; ; \qquad y_c = \frac{z}{3}$$

per $z = 12$, $x_c = 3$; $y_c = 4$; $\sqrt{x_c^2 + y_c^2} = 5$; $\rho = 13$

$\cos\alpha = \frac{3}{13}$; $\cos\beta = \frac{4}{13}$; $\cos\gamma = \frac{12}{13}$ saranno i coseni direttori della retta passante per $C = f(z)$ e poiché, al variare di z, restano invariati gli assi dell'ellisse e l'angolo di rotazione con gli assi cartesiani, ciò vuol dire che il solido è un cilindro che interseca il piano xy secondo un ellisse di assi: $a = 2 + \frac{1}{6}$; $b = 2$, ruotati di $\varphi = 53°07'48''$ ed avente l'asse passante per il centro assi:

$$\frac{x}{3/13} = \frac{y}{4/13} = \frac{z}{12/13} \qquad \text{cioè:} \quad \boxed{\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}}$$

Poiché la proiezione dell'asse del cilindro giace sul

diametro $a = 2 + \frac{1}{6}$ dell'ellisse, cioè $\operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 53° 07' 48'' = \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{24}{7}\right) + 90\right)$; e poiché: $\cos\gamma = \frac{12}{13}$ avremo per la sezione retta: $b_1 = b = 2$; $a_1 = a\frac{12}{13} = \left(2 + \frac{1}{6}\right)\frac{12}{13} = 2 = b$; cioè la sezione retta del cilindro è un cerchio di raggio $r = 2$.

---

3) Cono generico

L'equazione:

$$(0,44)X^2+(0,31)y^2-2(0,42)Xy+2(1,521895-(0,232379)z)X+2(1,37554417 1-(0,2711088 34)z)y+$$
$$\left[+(0,65)z^2-2(1,468427661)z-2,72572336\right]=0$$

scritta nella forma di una conica parametrica in z,

$$A_{33}=\begin{vmatrix}0,44 & -0,42\\ -0,42 & 0,31\end{vmatrix}=+0,1364-0,1764=-0,04<0 \quad \left(\begin{matrix}\text{caso}\\ \text{iperbolico}\end{matrix}\right)$$

$a_{12}\neq 0$; ad assi ruotati (rotazione indipendente da z)

$a_{13}\neq 0$; $a_{23}\neq 0$ ad assi traslati (funzione di z)

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-0,42 & (1,521895-(0,232379)z)\\ +0,31 & (1,37554171-(0,27110883 4)z)\end{vmatrix}=-1,049516+(0,1859052)z$$

$$A_{32}=\begin{vmatrix}0,44 & (1,521895-(0,232379)z)\\ -0,42 & (1,37554171-(0,27110883 4)z)\end{vmatrix}=+1,24443535-(0,21688707)z$$

$$\begin{cases} x_c=\dfrac{A_{31}}{A_{33}}=(26,23790-4,647580z)\\[2ex] y_c=\dfrac{-A_{32}}{A_{33}}=(31,1108838-5,4221766 8z)\end{cases}$$

equaz. centro assi (lineare in z)

eliminando z e semplificando si ha:

$$\boxed{y_c = \frac{7}{6} x_c + \frac{1}{2}}$$

equaz. del piano che contiene la retta luogo dei punti c

$$\boxed{6 y_c = 7 x_c + 3}$$

Il determinante:

$$\Delta = a_{31} A_{31} - a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33} = 0$$

calcolato in funzione di Z ci darà i valori di Z per i quali la conica è degenere, che, nel caso iperbolico degenera in due rette reali e distinte.

$$a_{31} \cdot A_{31} = (1{,}521895 - 0{,}232379\,Z)(-1{,}0495160 + 0{,}1859032\,Z)$$

$$-a_{32} A_{32} = (1{,}37554171 - 0{,}27108834\,Z)(-1{,}244435335 + 0{,}21688707 \cdot Z)$$

$$a_{33} A_{33} = (-2{,}72572336 - 2{,}936855322\,Z + 0{,}65\,Z^2)(-0{,}04)$$

$$a_{31} A_{31} = -0{,}0432\,Z^2 + 0{,}526810630\,Z - 1{,}597253157$$

$$-a_{32} A_{32} = -0{,}0588\,Z^2 + 0{,}635715158\,Z - 1{,}711775776$$

$$a_{33} A_{33} = -0{,}026\,Z^2 + 0{,}117474212\,Z + 0{,}109028933$$

$$\boxed{\Delta = -0{,}128\,Z^2 + 1{,}28\,Z - 3{,}2}$$

$$\Delta = 0 = Z^2 - 2(5)Z + 25 = 0$$

$$\boxed{Z = 5}$$

da cui $\boxed{z = 5}$

per $z = 5$; $x_c = 3$; $y_c = 4$

Quindi la nostra quadrica è un cono col vertice $V \equiv (3, 4, 5)$

La classifica delle quadriche

L'equazione:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

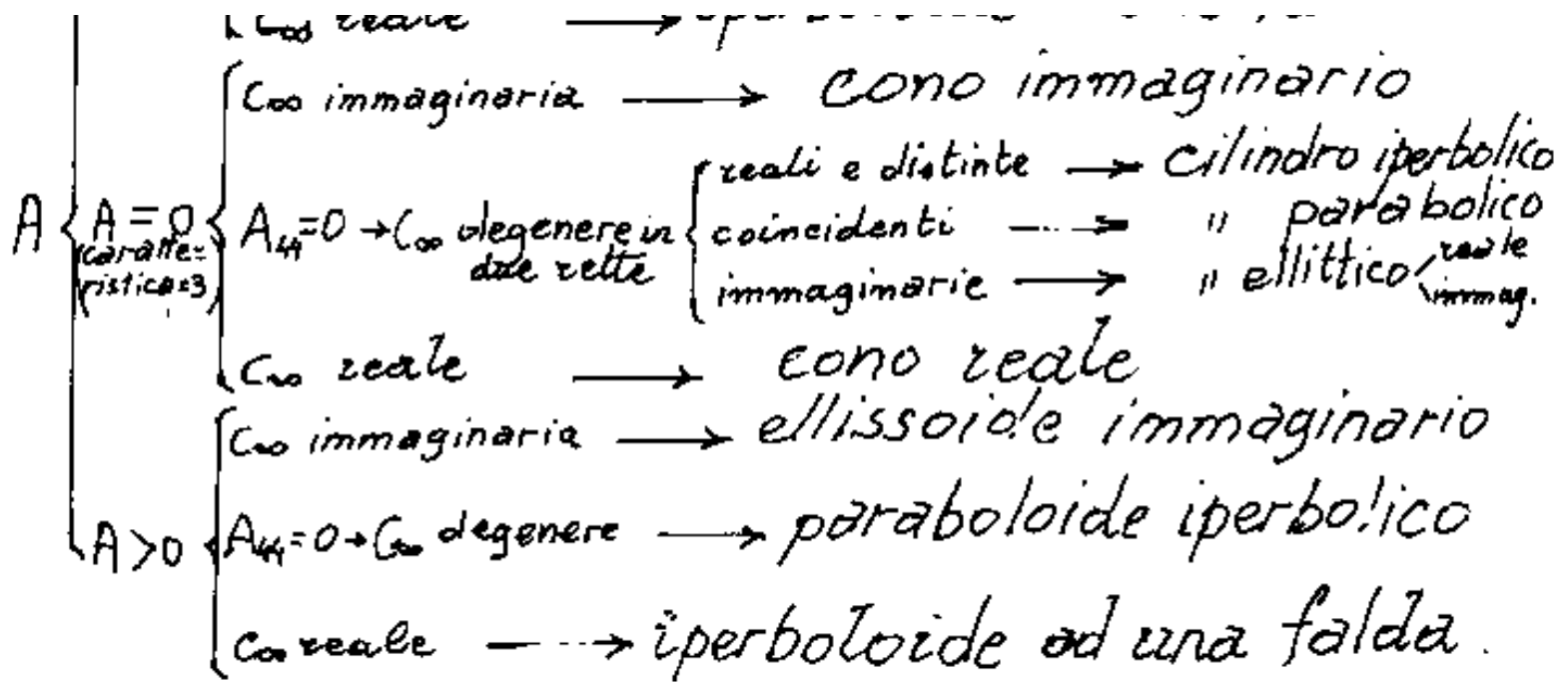
polinomio completo di secondo grado nelle variabili x, y, z è l'equazione generale delle quadriche; dai coefficienti, ponendo $a_{ij}=a_{ji}$ è possibile costruire il determinante A delle quadriche:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = A$$

Il complemento algebrico dell'elemento a_{44} è il minore A_{44} discriminante delle coniche C_∞.

$A<0$:
- C_∞ immaginaria → ellissoide reale
- $A_{44}=0$ → C_∞ degenere → paraboloide ellittico
- C_∞ reale → iperboloide a due falde

C_∞ reale → ...

A
- A = 0 (caratteristica = 3)
  - C_∞ immaginaria → cono immaginario
  - $A_{44} = 0$ → C_∞ degenere in due rette
    - reali e distinte → cilindro iperbolico
    - coincidenti → " parabolico
    - immaginarie → " ellittico (reale / immag.)
  - C_∞ reale → cono reale
- A > 0
  - C_∞ immaginaria → ellissoide immaginario
  - $A_{44} = 0$ → C_∞ degenere → paraboloide iperbolico
  - C_∞ reale → iperboloide ad una falda.

Affinché si arrivi al limite, in y dobbiamo avere un'unica radice (doppia), funzione di z; cioè deve essere nullo il discriminante dell'equazione:

$$(4,437239261 - 0,874544626z)^2 - [2,096774194z^2 - 2(4,736863423)z - 8,772656] = 0$$

si ha:

$$-1,331945891\,z^2 + 2(0,856299674)z + 28,48174826 = 0$$

ed anche:

$$z^2 - 2(0,642893738)z - 21,38356254 = 0$$

$$z = +0,642893738 \pm \sqrt{0,413312359 + 21,38356254} =$$

$$z = 0,642893738 \pm 4,668712339 = z = \begin{cases} 5,311606077 \\ -4,025818601 \end{cases}$$

quindi:

$$y = (-4,437239261 + 0,874544626\,z) \pm 0 \quad \left(\text{radici doppie}\right)$$

$$\text{per } z = \begin{cases} 5,311606077 \longrightarrow y = +0,207997289\,; \quad x = 0 \\ -4,025818601 \longrightarrow y = -7,957997284\,; \quad x = 0 \end{cases}$$

Quindi il centro dell'ellisse su xz è dato da

$$C \equiv (x_c = 0; y_c = -3,875; z_c = 0,642893738)$$

La distanza: $\overline{CV} = \sqrt{(x_V - x_C)^2 + (y_V - y_C)^2 + (z_V - z_C)^2}$

$$\overline{CV} = \sqrt{(3-0)^2 + (4+3,875)^2 + (5-0,642893738)^2} \simeq \sqrt{90}$$

$$\overline{CV} = 9,486832979$$

La classifica delle quadriche può anche schematizzarsi come segue.

Detta: $$I = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

" $$J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$A_{44} \neq 0$

- $J > 0$, $I \cdot A_{44} > 0$
  - $A > 0 \rightarrow$ ellissoide immaginario
  - $A = 0 \rightarrow$ cono elissoidico
  - $A < 0 \rightarrow$ ellissoide reale
- altri casi
  - $A > 0 \rightarrow$ iperboloide ad una falda
  - $A = 0 \rightarrow$ cono iperboloidico
  - $A < 0 \rightarrow$ iperboloide a due falde

$\Delta = 0$

- $A > 0 \rightarrow$ paraboloide iperbolico
- $A = 0$
  - $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$
    - $J > 0 \rightarrow$ coppia di piani complessi coniugati
    - $J = 0 \rightarrow$ coppia di piani paralleli
    - $J < 0 \rightarrow$ coppia di piani reali non paralleli

$A_{44} = 0$

- $A = 0$
  - $J < 0 \rightarrow$ coppia di piani reali non paralleli
  - altrimenti
    - $J > 0 \rightarrow$ Cilindro ellittico
    - $J = 0 \rightarrow$ Cilindro parabolico
    - $J < 0 \rightarrow$ Cilindro iperbolico
- $A < 0 \longrightarrow$ paraboloide ellittico

L'equazione, in coordinate omogenee, di una quadrica: $f(x,y,z,t)$ si scrive:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}t^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{14}xt+2a_{23}yz+2a_{24}yt+2a_{34}zt=0$$

Il determinante A della quadrica è detto: "Discriminante" della quadrica. Se $A=0$ la quadrica è degenere. La caratteristica "r" di $A=0$, distingue tre casi:

1) $r=3$ → coni o cilindri

2) $r=2$ → coppia di piani distinti (reali o no)

3) $r=1$ → coppia di piani (doppi) (lo stesso piano doppio)

Una retta può essere secante, tangente, esterna, o può appartenere alla quadrica.

Se la retta è secante i punti comuni con la quadrica sono due punti reali.

Una quadrica si dice rigata se contiene infinite rette. Sono così rigati gli iperboloidi ad una falda; non sono rigati gli iper-

... di una falda, <u>non sono rigati</u> gli iper-
boloidi a due falde.

Se due punti P e P', <u>separano armonicamente</u>, i punti di intersezione di una quadrica con una retta, i punti P e P' si dicono <u>coniugati</u> rispetto alla quadrica. Dicesi <u>piano polare</u> il luogo dei punti coniugati di un punto $P \equiv (x_0, y_0, z_0, t_0)$.

Tutti i punti appartenenti ad una quadrica sono dello stesso tipo. Essi si distinguono in:
Punto iperbolico, punto parabolico, punto ellittico.
A seconda che le due rette comuni alla quadrica ed al piano tangente in quel punto sono:
reali e distinte, coincidenti, immaginarie coniugate.
Le quadriche a punti parabolici sono solo coni o cilindri ($A=0$).
Le quadriche a punti iperbolici sono gli iperboloidi ad una falda ed i paraboloidi iperbolici ($A>0$)
Le quadriche a punti ellittici sono ellissoidi, iperboloidi a due falde, e paraboloidi ellittici ($A<0$)
La conica C_∞ è da considerarsi l'interse= zione del piano improprio ($t=0$) con la quadrica.
Cioè C_∞ è data dalle equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^3 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

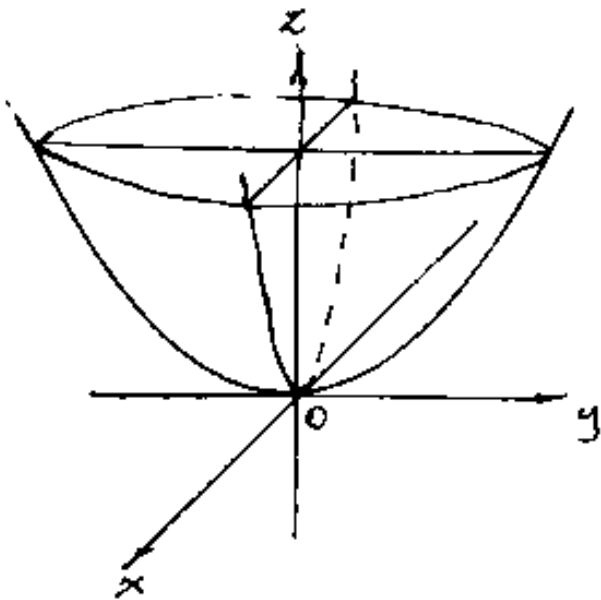
$\{ t = 0$

(vedi equazione in coordinate omogenee).

Sviluppiamo ora le equazioni del paraboloide ellittico, e del paraboloide iperbolico, ed aggiungiamo l'equazione del toro (che non è una quadrica, pur essendo una superficie di rotazione.)

Paraboloide ellittico

Se consideriamo un ellisse di semiassi a, b, che mantenendo costante il rapporto: a^2/b^2, varino con z in modo parabolico: $2za^2 = p$; $2zb^2 = q$ avremo l'equazione del paraboloide ellittico:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

se poniamo $z = 0$ si ha:

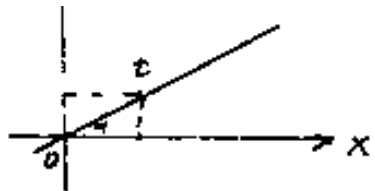
$$q x^2 = p y^2$$

cioè: $\pm y = \pm\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)x$ coppia di rette

Per $x = 0$: $z = \frac{y^2}{2q}$ ove q è la doppia distanza focale della parabola; (analogo per $y = 0$)

Se consideriamo un piano qualsiasi passante per z per es. $y = mx$; $y^2 = m^2x^2$; sostituendo si ha:

$$z = \left(\frac{q + pm^2}{2pq}\right)x^2$$ che è ancora una parabola.

Se indichiamo con t la distanza da 0

misurata lungo la retta ove $m = tg\alpha$
avremo $x^2 = t^2 sen^2\alpha$; $y^2 = t^2 cos^2\alpha$; e sostituendo:

$$\left(\frac{sen^2\alpha}{p} + \frac{cos^2\alpha}{q}\right) t^2 = 2z \, . \quad \text{ove: } \frac{pq}{q\,sen^2\alpha + p\,cos^2\alpha}$$

è la doppia distanza focale della parabola sul piano: $y = mx$.
L'equazione può scriversi:

$$\boxed{qx^2 + py^2 - 2pqz = 0}$$

si nota che:

$a_{11} = q$; $a_{22} = p$; $2a_{34} = -2pq$; tutti gli altri coefficienti sono nulli. Avremo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{34} & 0 \end{vmatrix} \qquad A = -a_{11} \cdot a_{22}\, a_{34}^2 = -a_{34} A_{34} \quad ; \quad A_{44} = 0$$

$$A < 0 \; ; \; A_{44} = 0$$

Paraboloide ellittico ad assi traslati

$$q(x - x_c)^2 + p(y - y_c)^2 + -2pq(z - z_c) = 0$$

$$\boxed{\underset{a_{11}}{q}x^2 + \underset{a_{22}}{p}y^2 + \underset{a_{33}}{0} \underset{2a_{14}}{-2(qx_c)}x \underset{2a_{24}}{-2(py_c)}y \underset{2a_{34}}{-2(pq)}z + \underset{a_{44}}{(qx_c^2 + py_c^2 + 2pqz_c)} = 0}$$

Notiamo che la parabola ($y = mx^2$) ha una sola variabile al quadrato, quindi l'asse della parabola sarà nel verso della variabile che manca al quadrato. (Nella formula di cui sopra: $a_{33} = 0$, perciò l'asse è secondo z)

di cui sopra: $a_{33}=0$, perciò, una è seconda a)
sono pure nulli i coefficienti: $2a_{12} = 2a_{13} = 2a_{23} = 0$, perciò
non si hanno inclinazioni.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad A = -a_{11}a_{22}a_{34}^2 = -a_{34}A_{34} \;; \quad A_{44} = 0$$

$$K = \frac{-a_{11}a_{22}}{a_{34}} \;;$$

per cui:

$$x_c = \frac{a_{14}}{qK} \qquad \boxed{x_c = \frac{a_{14}}{a_{11}}} ; \qquad \boxed{y_c = \frac{a_{24}}{a_{22}}}$$

Se $p = q$, si ha il paraboloide circolare solido di rotazione generato da una parabola che ruota intorno al proprio asse.

Paraboloide ellittico con assi dell'ellisse ruotati rispetto agli assi cartesiani.

L'equazione dell'ellisse al centro con assi ruotati è (vedi II vol)

$$\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2} + \frac{\cos^2\alpha}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)(\operatorname{sen} 2\alpha)xy = 1.$$

che può scriversi:

$$\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} + \left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\operatorname{sen}(2\alpha)\right]xy = 1$$

Perciò l'equazione del paraboloide ellittico avente per asse l'asse z sarà:

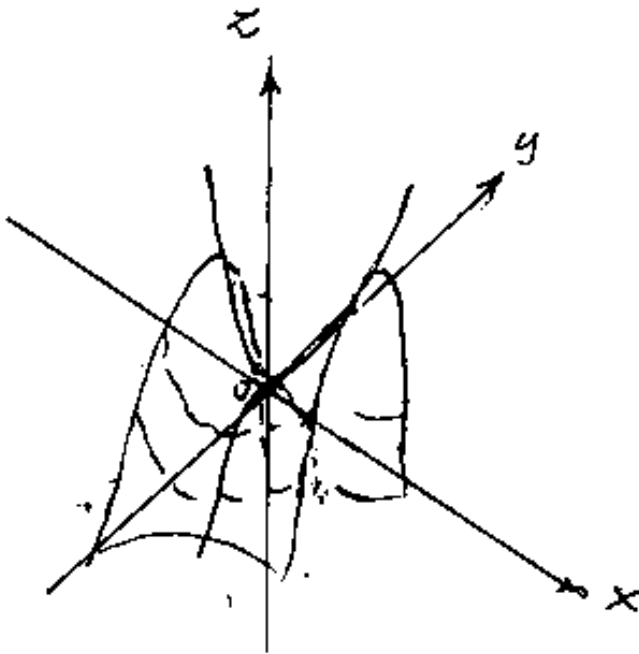
$$\frac{x^2}{} + \frac{y^2}{} \; [\ldots]$$

$$\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} + \left[\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right) \operatorname{sen}(2\alpha)\right] xy = 2Z$$

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy - 2a_{34} Z = 0$$

Paraboloide iperbolico

Consideriamo una iperbole di semiassi a, b, nel piano xy, che mantengono, sui piani paralleli ad xy e definiti dalla quota z, il rapporto a/b; supponiamo che l'asse focale dell'iperbole, sia in x avremo:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

Per ogni valore di z si ha l'iperbole: $\frac{x^2}{2pz} - \frac{y^2}{2qz} = 1$ ove: $\sqrt{2pz} = a$; $\sqrt{2qz} = b$; e l'iperbole giace sul piano z. parallelo ad xy.

Per ogni valore di y si ha la parabola volta verso l'alto: $z = \frac{x^2}{2p} - \left(\frac{y^2}{2q}\right)$ col vertice in $z = \left(-y^2/2q\right)$.

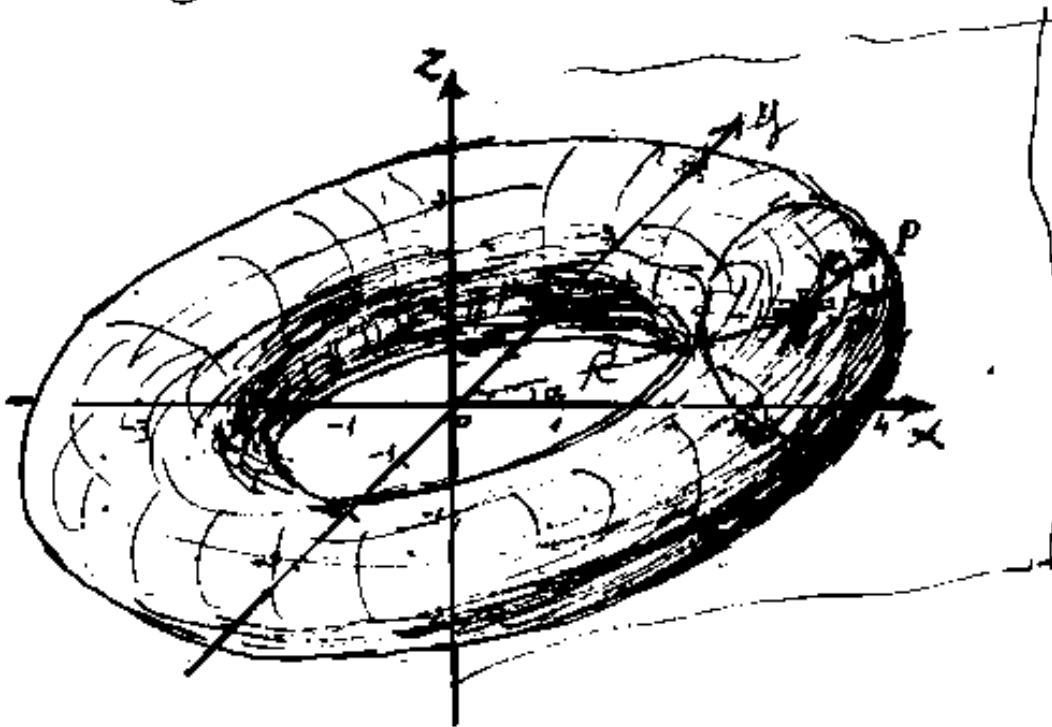
Per ogni valore di x si ha la parabola volta

Per ogni valore di x si ha la parabola volta verso il basso: $z = -\frac{y^2}{2q} + \left(\frac{x^2}{2p}\right)$ col vertice in $z = (x^2/2p)$.

Si ottiene così quella che si chiama una <u>superficie a sella</u> ove in o abbiamo un massimo per la parabola $z = -\frac{y^2}{2q}$ ed un minimo per la parabola $z = \frac{x^2}{2p}$. (vedi calcolo dei massimi e minimi per le superficie $z = f(x,y)$)

Equazione della superficie torica

Il toro è un solido di rotazione, è generato da un cerchio di raggio r il cui piano è comune all'asse di rotazione distante R dal centro del cerchio.

Per semplicità, assumiamo l'asse Z come asse comune ai piani ruotanti su cui giace il cerchio generatore. L'insieme di tali piani può essere espresso dalla formula (parametrica in α):

$$y = (\operatorname{tg}\alpha)\, x$$

D'altra parte l'equazione del cerchio di raggio r, avente il centro C

$x = R\cos\alpha$; $y = R\,\text{sen}\,\alpha$; $z = 0$; ...

$X_c = R\cos\alpha$; $Y_c = R\,\text{sen}\,\alpha$; $Z_c = 0$; può ricavarsi dall'equazione della sfera:

$$\boxed{(X - R\cos\alpha)^2 + (Y - R\,\text{sen}\,\alpha)^2 + Z^2 = r^2}$$

Poiché: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

sostituendo:

$$\left(X - \frac{RX}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)^2 + \left(Y - \frac{RY}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right) + Z^2 = r^2$$

e sviluppando:

$$x^2 + R^2x^2\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2Rx^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^2 + \frac{R^2y^2}{x^2 y^2} - \frac{2Ry^2}{\sqrt{x^2 y^2}} + z^2 = r^2$$

$$x^2+y^2 + R^2\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} - 2R\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + z^2 = r^2$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2 - 2R\sqrt{x^2+y^2} + (R^2-r^2) = 0}$$

che è l'equazione della superficie torica

per $y=0$ si ha:

$$\boxed{(x \pm R)^2 + z^2 = r^2}$$

(equazione delle due circonferenze di sezione)

per $z=0$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + R^2 - 2R\sqrt{x^2+y} = r^2$$

$$\left(R \mp \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = r^2$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = (R \mp r)$$

$$\boxed{(x^2+y^2) = (R \mp r)^2}$$

(equazione delle due circonferenze della corona circolare)

L'equazione del toro può anche scriversi:

L'equazione del toro può anche scriversi:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2=r^2$$

che si poteva giustificare geometricamente senza passaggi algebrici

Esplicitando z si ha:

$$\boxed{z = \pm\sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2}}$$

che può scriversi:

$$z = \pm\sqrt{\left[(r) - \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)\right]\left[(r) + \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)\right]}$$

Si nota che il radicale è minore di zero se:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right) > r \qquad \text{cioè: } \sqrt{x^2+y^2} > (r+R)$$

od anche se:

$$\left[(r) + \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)\right] < 0 \qquad \text{cioè } \sqrt{x^2+y^2} < (R-r)$$

quindi i raggi delle circonferenze sul piano medio del toro debbono:

$$\boxed{(R-r) < \sqrt{x^2+y^2} < (R+r)}$$

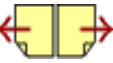
affinché il radicale dia radici reali.

Poiché sappiamo (per il teorema di Pappo e Guldino), che l'area A della superficie del toro è: $A = (2r\pi)(2R\pi) =$ $\boxed{A = 4\pi^2 \ldots}$

toro è $A = (2r\pi)(2R\pi) =$ $\boxed{A = 4\pi^2 r R}$

e che il volume V del toro è dato da:

$V = (r^2\pi)(2R\pi) =$ $\boxed{V = 2\pi^2 r^2 R}$ e quindi:

$\boxed{V = A \cdot r/2}$ ci dà la risoluzione dell'integrale doppio di campo: $\iint Z\, dx \cdot dy$.

Le Intersezioni (Le curve nello spazio)

Dato l'equazione di una superficie qualsiasi, $f(x,y,z)=0$, possiamo trovare subito le linee di intersezione coi piani di riferimento ponendo: $z=0$, per xy; $y=0$ per xz; $x=0$ per yz.; e possiamo trovare come tali linee si deformano o si mantengono sui piani paralleli, ponendo l'equazione in forma parametrica, cioè ponendo: $z=K$, oppure: $y=K$, oppure: $x=K$

Spesso lo studio di tali superfici è delimitato da un dominio sul piano xy. Se il dominio è quadrato o rettangolare con lati paralleli ad x ed y, cioè tali lati sono le tracce su xy di piani paralleli a zx e zy, abbiamo visto sopra come trovarne le linee di intersezione che si presenteranno nella forma: $z=f(x)$; $z=f(y)$ e per le quali è possibile calcolare i max ed i min con i metodi della geometria piana.

max ed i min con i metodi della geometria piana.

Se il dominio è delimitato da piani generici paralleli a Z, le cui equazioni saranno del tipo $y=f(x)$, cioè: $y=mx+q$, basterà sostituire tali espressioni nella equazione della superficie; $f(x,y,z)$ che diverrà $f(x,z)=0$ oppure $f(y,z)=0$ a seconda che si sostituisca in y od in x.

Se il dominio è delimitato dalla intersezione di cilindri paralleli a Z (circolari, ellittici, parabolici ecc)

sul piano xy, tali intersezioni saranno espresse da equazioni del tipo: $f(x,y)=0$, ove se è possibile esplicitare la x o la y potremo sostituirle nella equazione della superficie, che però risulterebbero delle espressioni: $f(z,x)$ oppure $f(z,y)$ di curve non piane. Tuttavia potremo ugualmente calcolare i max ed i min che saranno valori sul bordo del dominio e possono essere max o min assoluti (non relativi), nel senso del valore più alto o più basso della z nel campo di quel dominio.

Quando si tratti di bordi cilindrici (interse= zione del cilindro delimitante il campo con la superfi= cie data), per vedere in piano la curva possiamo sviluppare in piano la superficie cilindrica, come già abbiamo fatto con la sezione piana del cilindro (vedi vol II) ove l'ellisse diventa una sinusoide. Oppure possiamo esprimere la $f(x,y)$ del dominio in forma parametrica (per esempio un cerchio al centro di rag=

parametrica (per esempio un cerchio al centro di raggio R di equazione: $x^2+y^2=R^2$ può scriversi: $x=R\cos\varphi$; ed $y=R\,\text{sen}\,\varphi$, che sostituite in z avremo $z=f(\varphi)$). Con questo metodo è facile, per esempio, rappresentare l'elica cilindrica: $x=R\cos\varphi$; $y=R\,\text{sen}\,\varphi$; $z=\frac{p\varphi}{2\pi}$ (p = passo). Ove il triangolo rettangolo di cateti $2R\pi$ e p avvolto sul cilindro è l'elica.

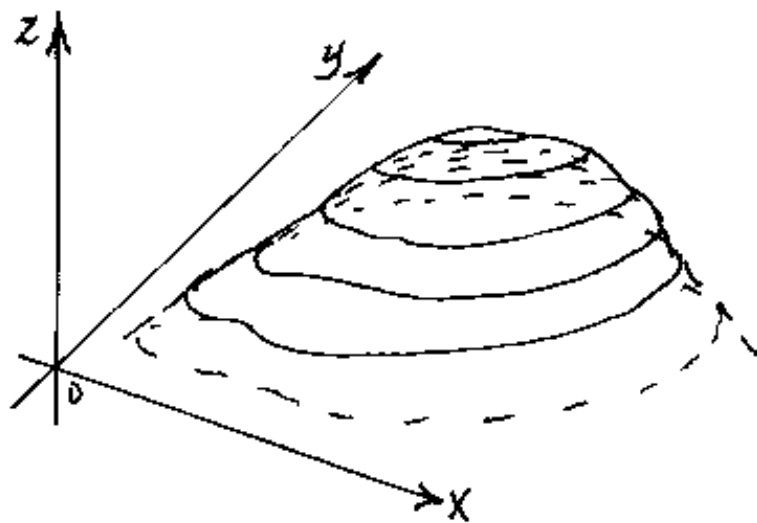
Analogamente le intersezioni fra superfici, ove spesso le linee non possono essere sviluppate in piano; siano $f(x,y,z)$ e $\varphi(x,y,z)$ le due superfici di cui interessa la linea intersezione. Se riusciamo ad eliminare una variabile fra le due equazioni cioè la x o la y o la z otteniamo espressioni in due variabili: $f(y,z)=0$; $f(x,z)=0$; $f(x,y)=0$, che rappresentano la proiezione della curva rispettivamente sui piani yz, xz, xy. e che ci permettono di capire (disegnare) la linea spaziale.

Studiamo quindi sistematicamente le funzioni in due variabili.

Le funzioni in due variabili

Sia $z = f(x,y)$ una funzione nelle due variabili indipendenti x, y. Ciò vuol dire che se alla x ed alla y, assegnamo valori numerici, per ogni coppia di valori (x_P, y_P) resta determinato, nel piano xy, un punto $P \equiv (x_P, y_P)$. Se sostituiamo le coordinate di P nella espressione: $z = f(x,y)$ avremo un nuovo valore numerico: $z_P = f(x_P, y_P)$, coordinata di P in z, quindi i tre valori numerici (x_P, y_P, z_P) determinano univocamente la posizione di P, nello spazio tridimensionale riferito alla terna cartesiana $(0, x, y, z)$.

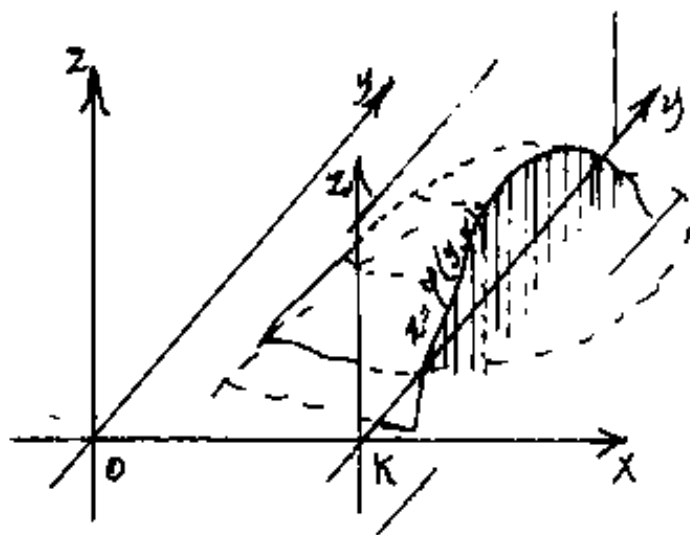
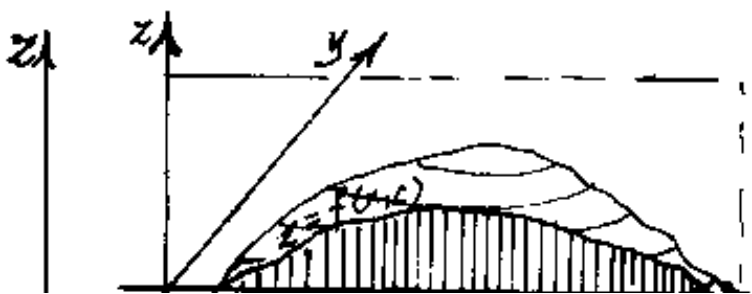
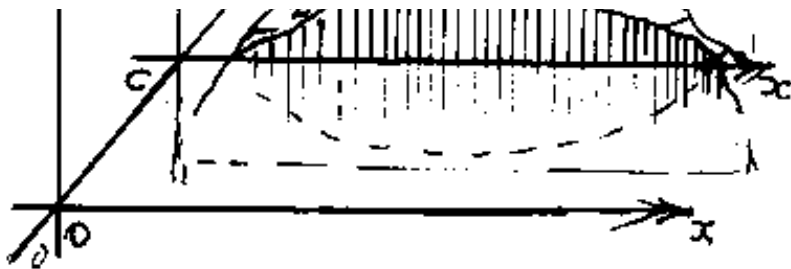
Si noti che x, y, z, non sono, in genere indipendenti fra loro, infatti la $z = f(x,y)$ rappresenta una superficie, (ondulata, curva, o piana) ove la z, punto per punto, rappresenta "la distanza" di tale superficie dal piano xy.

Consideriamo quindi la superficie $z = f(x,y)$

[illegible] la superficie $z=f(x,y)$ come una specie di collinetta che interseca il piano xy, e le sue "isoipse" sono le intersezioni con i piani paralleli ad xy.

L'espressione $z=f(x,y)$ può anche scriversi nella forma implicita: $f(x,y,z)=0$, in questo caso non possiamo più dire quali delle tre variabili sia dipendente dalle altre due. Certo che assegnati valori numerici a due variabili, resta determinato il valore numerico della terza. Cioè l'espressione $f(x,y,z)=0$ può scriversi: (indicizzando la funzione) $z=f_z(x,y)$; $y=f_y(x,z)$; $x=f_x(y,z)$; ove f_z, f_y, f_x sono diverse pur essendo esplicitazione di una stessa funzione.

Consideriamo ora un nuovo aspetto della $f(x,y,z)=0$. Se in questa funzione attribuiamo un valore numerico ad una sola variabile, otteniamo una funzione che lega le altre due variabili. Per esempio se attribuiamo alla z il valore zero, abbiamo una $f(x,y)=0$ ove esplicitando la x o la y si ottiene: $y=\varphi(x)$, che rappresenta la curva intersezione fra la super=

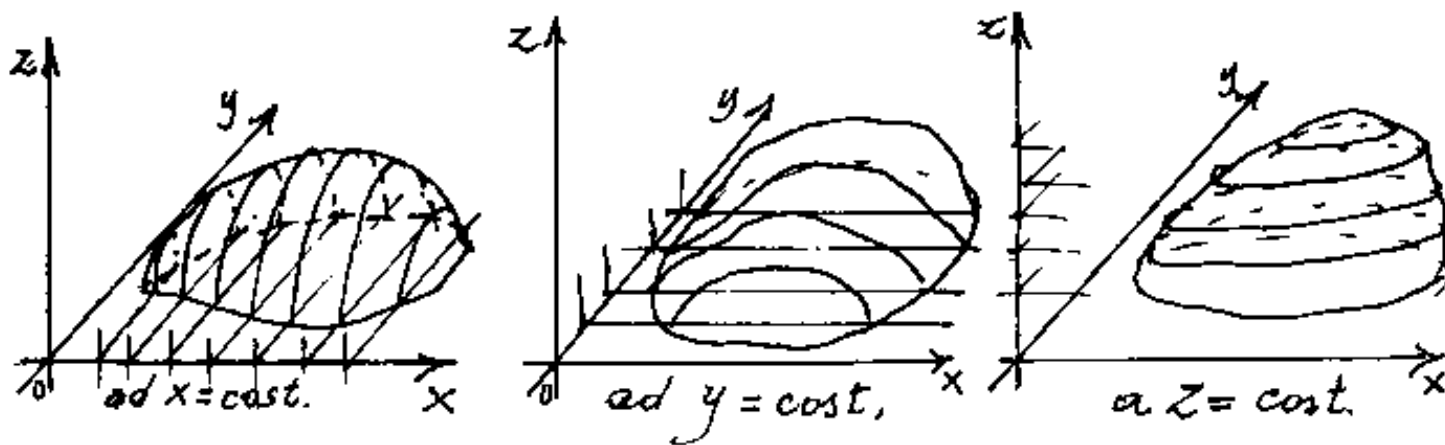
ficie : $z = f(x,y)$ ed il piano $z = 0$, che è il piano xy. Se alla z attribuiamo il valore n (parametro) avremo che $f(x,y) = n$ ove esplicitando x od y si ha: $y = \psi(x,n)$ che rappresenta la curva interse=zione della $f(x,y,z)$ col piano $z = n$ (distante n dal piano x,y). Abbiamo così l'equazione parametrica in n delle isoipse della collinetta.

Se invece nella nostra $f(x,y,z)=0$ attribuiamo valori numerici alla x, il che equivale a dire: $x = K =$ cost. cioè la: $x=K$ rappresenta un piano parallelo al piano yz e distante K da esso. Questo piano taglierà la superficie $f(x,y,z)=0$, esplicitata in $f(x,y)=z$ secondo una curva che è $z=\varphi(y,K)$ giacente sul piano K, per la quale è possibile calcolare le derivate: $\frac{dz}{dy}$ essendo K una costante.

Analogo discorso se attribuiamo valori numerici alla y, questa volta il piano $y=c=$ cost., parallelo al piano xz, taglierà la superficie secondo una curva $z=f(x,c)$. che è possibile derivare in $\frac{dz}{dx}$, essendo c

da riguardare come costante numerica (parametro).

Torniamo quindi alla nostra $z = f(x,y)$ ove non è necessario attribuire alla x, oppure alla y specifici valori numerici, basta ri=

guardare la x oppure la y, come fossero delle costanti parametriche, ed allora, ad $X =$ costante, si può vedere la nostra collinetta tagliata a fettine con piani paralleli a zy, ed ogni taglio è una curva da riguardare come una $z = f(y)$ ove la x deve essere considerata una costante.

Analogo discorso ad $y =$ cost. ove le "fettine" sono parallele ad xz.

ad $x =$ cost. ad $y =$ cost, a $z =$ cost.

Da questo modo di riguardare una $f(x,y)$ (che abbiamo posto $z = f(x,y)$) discendono molti concetti particolari: noi esamineremo le derivate parziali ed i differenziali totali, il dominio di una

funzione, i massimi e minimi assoluti e relativi, gli integrali doppi di campo ed il calcolo dei volumi.

Quanto abbiamo esposto è fondamentale per comprendere i concetti che andiamo ad esaminare.

I differenziali totali (le derivate parziali).

Abbiamo già visto il differenziale come variazione infinitesima di una variabile.

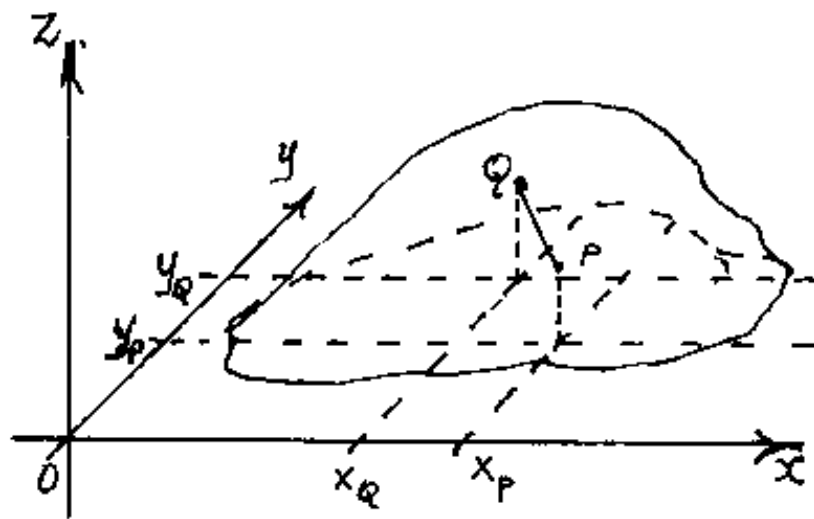
Dicesi differenziale totale di una funzione in più variabili, la variazione infinitesima $df(x,y,z,t...)$ al variare infinitesimo delle variabili indipendenti.

Nel nostro caso: $z=f(x,y)$ cerchiamo $df(x,y) = dz$ al variare dx (della x) e dy (della y) ove dx e dy sono le variazioni infinitesime di x e di y.

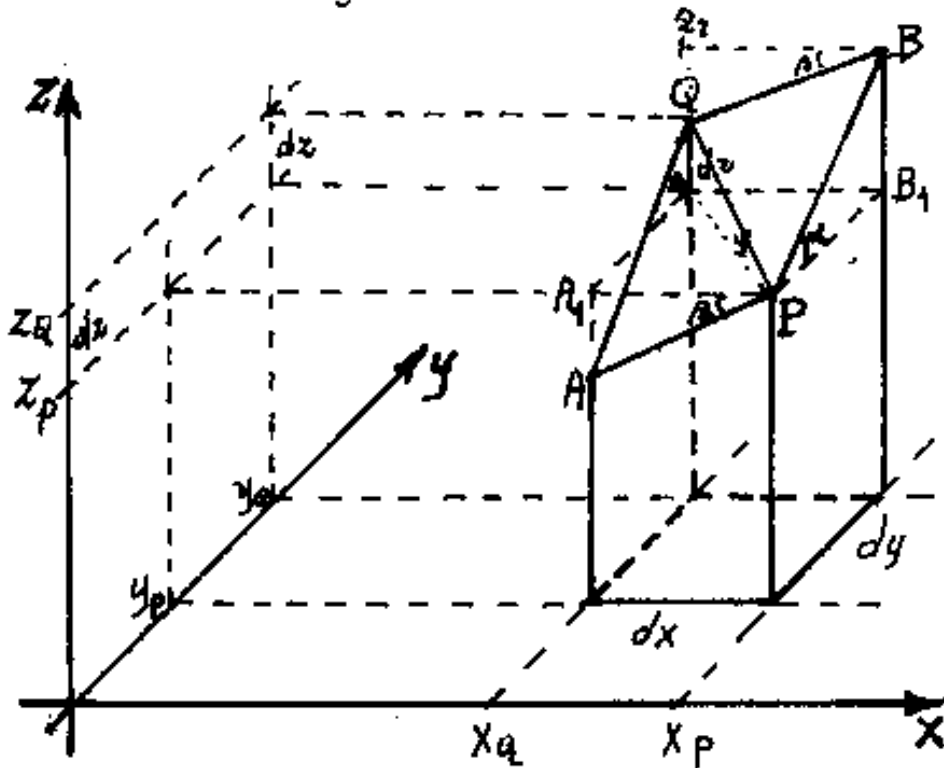
Considerato quindi un punto P della funzione z, definito da $z_P=f(x_P,y_P)$ possiamo considerare l'intorno di P come: $f(x_P \pm dx), y_P \pm dy))$.

Esaminiamo il solido prismoide con base quadrilatera di lati dx e dy e con spigoli paralleli a Z.

La base superiore, (in genere non parallela alla base inferiore) è porzione infinitesima della superficie $z=f(x,y)$. (Che può considerarsi piana perchè infinitesima).

$z = f(x,y)$. (Che può considerarsi piana perchè infinitesima).

Nel disegno, si noti che, per passare da P a Q, l'incremento in x è negativo, ed in y è positivo; ciò

per evidenziare che l'intorno di P è <u>in tutte le direzioni</u> come già indicato ponendo il doppio segno nella $f(x_p+(\pm dx), y_p+(\pm dy))$, cosa non ortodossa, ma per fermare l'attenzione come sarà gestito il segno nei differenziale, e comprendere il concetto <u>di derivata direzionale.</u>

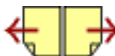
Supponiamo che la distanza $\overline{PQ}$ sia infinitesima e cerchiamo di disegnare piuttosto ingrandito il nostro prismoide di base infinitesima: dx, dy. Noi cerchiamo il valore della variazione infinitesima "dZ" per passare da P a Q.

cioè:

$dZ = Z_Q - Z_P$

$dX = X_Q - X_P$

$dy = y_Q - y_P$

Tagliamo a

Tagliamo a $Z = cost = z_p$ la nostra collinetta, per cui il prismetto sarà sezionato secondo $A_1 P B_1 Q_1$, (punti tutti alla stessa quota z_p). Ove: $\overline{A_1P} = -\overline{B_1Q_1} = dx$; $\overline{PB_1} = -\overline{QA_1} = dy$., essendo la figura di sezione parallela alla base sul piano xy.

Per andare da P a Q, possiamo considerare tre diversi percorsi: PAQ; PBQ; PQ.

Se consideriamo di tagliare la superficie con piani ad $x = cost$, per $x = x_P$, troviamo il triangolo infinitesimo: PB_1B, ove $\overline{PB_1} = dy$ e $\overline{PB}$ è l'intersezione del piano con la superficie $z = f(x,y)$ cioè $\overline{PB}$ è il segmento infinitesimo della curva $z = f_{x=x_P}(y)$ giacente sul piano: $x = x_P$.

<u>La pendenza</u> in P di tale curva sarà la derivata rispetto ad y della $z = f_{x=x_P}(y)$ ove x_P è una costante. Cioè avremo: $\frac{d f_{x=x_P}(y)}{dx} = \tan\alpha$.

Ma x_P potrebbe non essere definito, tuttavia possiamo riguardare <u>la x come fosse una costante</u>, in tal caso, <u>la derivata non è più un rapporto di differenziali</u>, si chiama: <u>derivata parziale</u> <u>della $f(x,y)$ rispetto ad y</u>, si indica con una ∂ (d curva) anziché (d dritta) e si scrive:

ma con una ∂ (d curva) anziché (d dritta) e si scrive:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(z)_{\Delta x = cost.}}{\partial y}$$ ed è ovviamente ancora la pendenza del tratto $\overline{PB}$ cioè: $\tan\alpha$.

(tale pendenza sarà positiva o negativa e gestirà il segno di cui si è già parlato).

Il segmento $\overline{B_1B} = Z_B - Z_P$ sarà: $\overline{BB_1} = tg\alpha \cdot (PB_1) = tg\alpha \cdot dy$

$$\boxed{\overline{BB_1} = \frac{\partial z}{\partial y} dy}$$

Discorso del tutto analogo se sezioniamo ad $y = \text{cost}$.
per $y = y_p = \text{cost}$, avremo il triangolo infinitesimo APA_1 ove: $tg\,\beta = \frac{\partial z}{\partial x}$ e dove $z_A - z_{A_1} = \boxed{\overline{AA_1} = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx}$.

Abbiamo, di proposito, fatto in modo, nel disegno che dx fosse: $|(x_p - x_Q)|$ invece di $(x_Q - x_p)$, cioè in modo che A risultasse a quota inferiore, cioè per arrivare al punto Q (stessa x di A) occorresse un dx (negativo) mentre il dy è positivo. Ciò non varia niente come è possibile constatare: (vedi figura)

Se passiamo da PBQ avremo: $dz = \overline{Q_1Q} = \overline{B_1B} + (-\overline{Q_1Q})$

$$dz = Q_1Q = \overline{B_1B} + (-AA_1)$$

Se passiamo da PAQ avremo $dz = Q_1Q = (-\overline{AA_1}) + (\overline{B_1B})$

e la formula diventa:

$$\overline{Q_1Q} = \boxed{dZ = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy}$$

Questa espressione è detta:

Questa espressione è della:

differenziale totale di $Z = f(x,y)$

Se avessimo fatto il percorso diretto $\overline{PQ}$ avremmo

$\overline{PQ_1} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ove dividendo: $\frac{dZ}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = tg\,\varphi$ che

è la pendenza del segmento $\overline{PQ}$ cioè la derivata in direzione $\overline{PQ}$ della $f(x,y)$.

Derivate direzionali

Definiamo derivata direzionale:

$$\lim_{Q \to P} \left(\frac{f(Q) - f(P)}{\overline{QP}} \right)$$

Sia $\overrightarrow{PQ}$ su una retta "n" di coseni direttori:

$$\cos(\hat{nx}) \; ; \; \cos(\hat{ny}) \; ; \; \cos(\hat{nz})$$

e sia $ds = \overrightarrow{PQ}$ = lunghezza infinitesimo dell'archetto $\widehat{PQ}$

essendo $\widehat{PQ}$ infinitesimo avremo che:

$$\lim_{Q \to P} \frac{f(Q) - f(P)}{\overline{QP}} = \frac{d f(P)}{ds} = \text{derivata direzionale.}$$

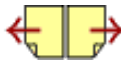
ma: $ds \cdot \cos(\hat{nx}) = dx$; $ds \cdot \cos(\hat{ny}) = dy$; $ds \cos(\hat{nz}) = dz$

perciò:

$$\left(\frac{\partial f(P)}{\partial n} \right)_{(P_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(P_0)} \cos(\hat{nx}) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(P_0)} \cos(\hat{ny}) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(P_0)} \cos(\hat{nz})$$

è la derivata direzionale della:

$$f(P) = f(x, y, z)$$

$$f(P) = T(x, y, z)$$

Nel trattare i differenziali totali abbiamo introdotto il concetto di derivata parziale. Naturalmente la espressione: "differenziale totale" si può estendere a funzioni di più variabili: $F = f(x, y, z, t \ldots)$

avremo:

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Le derivate parziali di ordine superiore

(Il criterio di Schwarz)

Se riguardiamo $\frac{\partial z}{\partial x}$; oppure $\frac{\partial z}{\partial y}$, come funzioni, possiamo derivare di nuovo ad $y = \text{cost.}$, oppure ad $x = \text{cost.}$, avremo così quattro tipi di derivate seconde:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$ (derivata seconda di z rispetto ad x due volte)

[illegible] (derivata seconda mista di z)

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$$ (derivata seconda mista di Z rispetto ad x e rispetto ad y.)

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$$ (derivata seconda mista di Z rispetto ad y e rispetto ad x.)

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$ (derivata seconda di Z rispetto ad y due volte)

Il criterio di Schwarz.

- Se siamo partiti da una funzione $z = f(x,y)$ è facile verificare che si ha l'uguaglianza:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Questa uguaglianza ordinariamente chiamata CRITERIO di SCHWARZ ci consente un notevole procedimento inverso, infatti ci consente di definire se il nostro differenziale totale è un differenziale esatto.

Cerchiamo di capire cosa vuol dire "differenziale esatto".

- Se abbiamo una espressione del tipo:

$$P_{(x,y)}\, dx + Q_{(x,y)}\, dy$$

ove: $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ sono polinomi in x ed y.
(espressioni ove figurano dx, dy, oppure y', y'' sono

dette differenziali)

Ci domandiamo se esiste una funzione $Z = f(x,y)$ tale che: $dZ = P_{(x,y)} dx + Q_{(x,y)} dy$ ove evidentemente integrando:

$$\int dZ = Z$$

potremo risalire alla funzione quando sia noto il suo differenziale totale.

A tal fine riguardiamo $P_{(x,y)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P_{(x,y)} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q_{(x,y)}$$

per vederlo meglio scriviamo:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$P_{(x,y)} dx + Q_{(x,y)} dy$$

Per il criterio di Schwarz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

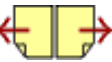
applicandolo alla nostra espressione avremo:

$$\frac{\partial P_{(x,y)}}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial Q_{(x,y)}}{\partial x}$$

cioè il polinomio moltiplicato per dx lo deriviamo rispetto ad y; e quello moltiplicato per dy lo deriviamo rispetto ad x.

Se si verifica l'uguaglianza:

$$\boxed{\frac{\partial P_{(x,y)}}{\partial y} = \frac{\partial Q_{(x,y)}}{\partial x}}$$

allora esiste una funzione z detta: Funzione potenziale tale che il suo differenziale totale è l'espressione differenziale in esame, e quindi, poiché $\int_a^b dz = (b-a)$ si suol dire che: il suo integrale dipende solo dai limiti di integrazione, cioé che: $P_{(x,y)}dx + Q_{(x,y)}dy$ è un differenziale esatto; ammette funzione potenziale.

Se invece:

$$\frac{\partial P_{(x,y)}}{\partial y} \neq \frac{\partial Q_{(x,y)}}{\partial x}$$

Non esiste una definita funzione $Z = f_{(x,y)}$ tale che il suo differenziale totale corrisponda alla espressione in esamo e quindi:

$\boxed{P_{(x,y)}dx + Q_{(x,y)}dy}$ non è un differenziale esatto; il suo integrale non dipende solo dai limiti di integrazióne, (punto di arrivo e punto di partenza) ma dipende dal cammino percorso di integrazione.

Facciamo alcuni esempi.

In assenza di attriti, il lavoro per sollevare un certo peso ad una certa altezza, in campo gravitazionale, non dipende dal cammino percorso; si puo sollevare direttamente il peso, o si può portarlo in alto tramite un lungo piano inclinato, il lavoro è sempre lo stesso ed è la forza per il suo spostamento cioè (forza peso) x (altezza).

(Il campo gravitazionale ammette potenziale, che equivale a dire che le forze sono conservative e che il campo è solenoidale.

Se invece consideriamo una trasformazione termodinamica ove per passare dal punto A a pressione p_1 e volume V_1 al punto B a pressione p_2 e volume V_2, l'integrazione dipende dal cammino percorso (il differenziale calore non è un differenziale esatto)

Piano tangente ad una superficie

retta normale ad una superficie

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ un punto appartenente alla superficie: $z = f(x,y)$.

La normale alla superficie in P_0 è una retta di giacitura del piano tangente in P_0 ed avrà per equazione:

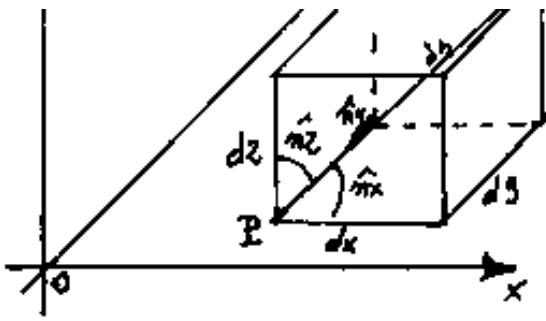
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

mentre l'equazione del piano tangente in P_0 sarà:

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

dobbiamo determinare: l, m, n, che sono proporzionali ai coseni direttori.

Abbiamo visto che se P e Q sono due punti vicinissimi sulla stessa superficie: $z = f(x,y)$, i coseni diret-

tori della retta in direzione $\overline{PQ}$ sono, se $\overline{PQ} = ds$:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \widehat{nx} \; ; \; \frac{dy}{ds} = \cos \widehat{ny} \; ;$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos \widehat{nz} \, .$$

Ma ds è infinitesimo per cui la retta di P_0Q è tangente alla superficie $z = f(x,y)$ ed avrà per equazione:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}}$$

La doppia uguaglianza esprime che gli incrementi: $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$ sulla retta sono proporzionali rispettivamente a: dx, dy, dz.

ma: $$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

quindi anche:

$$(z-z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$$

ma questa è l'equazione di un piano:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) - (z-z_0) = 0}$$

ed è soddisfatta da tutte le rette tangenti in P_0, cioè è l'equazione del piano tangente in P_0 (luogo di tutte le rette tangenti in P_0).

Confrontata con l'equazione:

$$l(x-x_0) + m(y-y_0) + n(z-z_0) = 0$$

abbiamo: $$l = \frac{\partial f}{\partial x} \; ; \quad m = \frac{\partial f}{\partial y} \; ; \quad n = 1$$

Per cui i coseni direttori della retta norma=

Per cui i coseni direttori della retta norma-

le "n", in P_0, alla superficie $z = f(x,y)$, saranno:

$$\cos(\hat{nx}) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad ; \quad \cos(\hat{ny}) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

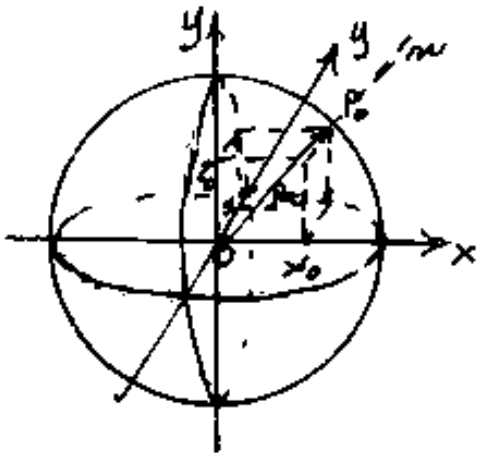
$$\cos(\hat{nz}) = \frac{+1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

Quindi l'equazione della retta normale in P_0 alla superficie: $z = f(x, y)$ sarà:

$$\frac{(x - x_0)}{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}} = \frac{(y - y_0)}{\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}} = (z - z_0)$$

Facciamo un esempio:

sia: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ l'equazione di una sfera al centro assi, e sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto sulla superficie sferica.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + R^2 - x^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{z}$$

perciò:

perciò:

$$\cos(\hat{nx}) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{x_0}{R}$$

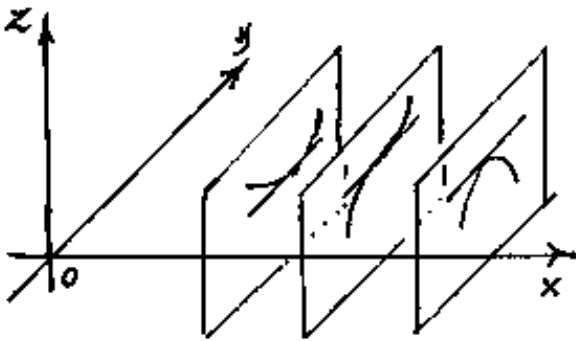
$$\cos(\hat{ny}) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{y_0}{R}$$

$$\cos(\hat{nz}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{z_0}{R}$$

(vedi figura)

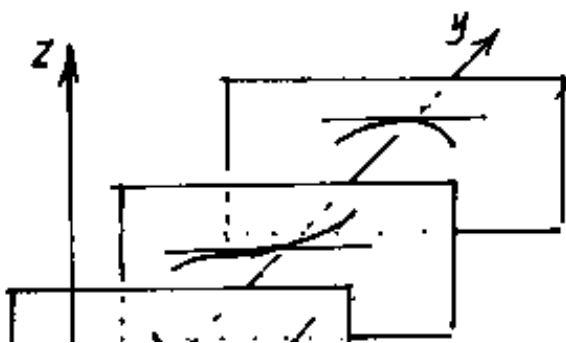
Massimi e Minimi relativi - L'Hessiano

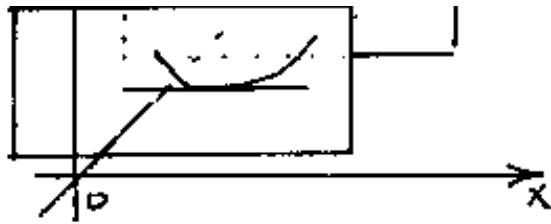
Abbiamo visto che la: $\frac{\partial f}{\partial y}$ è la pendenza della linea tracciata dalla superficie: $z=f(x,y)$ sui piani: $x=$ costante.

Che la $\frac{\partial f}{\partial x}$ è la pendenza della linea tracciata dalla stessa superficie sui piani $y=$ cost.

considieriamo:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(vedi figura).

Si ha in tre casi diversi: minimo, flesso orizzontale, o massimo della linea intersezione della superficie coi piani $x=$ cost.

Analogamente per le intersezioni sui piani ad $y=$ cost. quando:

$$\partial f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

perciò:

Condizione necessaria, ma non sufficiente affinché una superficie presenti un massimo od un minimo relativo è che siano nulle entrambe le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Però affinché si abbia un massimo od un minimo della $z = f(x,y)$, entrambe le linee di intersezione coi piani ad $x = cost$ ed $y = cost$ debbono concordare sul massimo o sul minimo; infatti se per una delle linee è un massimo, e per l'altra un minimo si ha una superficie "a sella",

cioè se per le intersezioni con piani ortogonali ad un variabile si ha una famiglia di curve con curvatura verso l'alto, le intersezioni con piani ortogonali all'altra variabile dà una famiglia di curve con curvatura verso il basso, in questo caso nel punto V della figura non possiamo dire che vi è un max od un min.

Nel piano per distinguere i max, i min, ed i flessi, utilizzavamo il segno della derivata seconda.

cioè $d^2f < 0$ indicava rispettivamente max flesso

cioè $\frac{d^2f}{dx^2} \lessgtr 0$ indicava rispettivamente: max, flesso, min. Estendiamo queste osservazioni al nostro caso. Intanto $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial f^2}{\partial y^2}$ nel punto P_0 debbono avere lo stesso segno ed essere diverse da zero affinché possa esservi un max od un min.

Una osservazione più acuta si ha con la derivata mista la: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ si può scrivere: $\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}$,

esso indica la variazione della pendenza $\frac{\partial f}{\partial x}$ sui piani y=cost. Poiché $\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial z}$ il loro prodotto può solo essere maggiore o al più uguale a zero.

È detto <u>Hessiano</u> il determinante delle derivate seconde, ove le miste sono la diagonale secondaria:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

>0 → si hanno max o min

$=0$ → non si può dire niente

<0 → non si hanno max o min

$$H > 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \begin{cases} >0 & (\text{minimo}) \\ <0 & (\text{massimo}) \end{cases}$$

Il procedimento di ricerca dei massimi e minimi relativi su una superficie $z = f(x,y)$ consiste inizialmente nel porre: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si hanno così due equazioni in x ed y, ove, se esistono punti $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ che le soddisfano, in questi

punti possono esservi max o min, ma è necessario calcolare l'Hessiano per accertarne l'esistenza. Conviene sempre una analisi della $z = f(x,y)$ che tal volta può evitarci il calcolo dell'Hes-siano spesso piuttosto lungo.

Per esempio: $z = ax^2 + by^2 + c$, sappiamo che è un paraboloide ellittico (vedi quadriche), con asse coincidente con z, vertice in c, volto verso l'alto per cui in c abbiamo un minimo. I semiassi dell'ellisse sono: $\left|\sqrt{\frac{z-c}{a}}\right|$; $\left|\sqrt{\frac{z-c}{b}}\right|$; e l'equazione degli ellissi, parametrica in z è:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{z-c}{a}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{z-c}{b}}\right)^2} = 1$$

(Ricordiamo che $(\sqrt{n})^2 = n$; $\sqrt{(n)^2} = \pm n$)

Facciamo ora le derivate:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax = 0 \rightarrow x_0 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2by = 0 \rightarrow y_0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a \ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b \ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \ ;$$

L'Hessiano sarà:

l'Hessiano sarà:

$$H = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{vmatrix} = 4ab > 0 \quad (\text{con } a>0;\ b>0)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a > 0 \rightarrow \text{minimo in } P_0 \equiv (0, 0, c)$$

Consideriamo l'equazione:

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$$

sappiamo che è una quadrica e troveremmo: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1$

cioè un iperboloide a due falde, ove per $x = y =$ zero, si ha: $z = \pm b$. Con z = asse di rotazione.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} = 0 \text{ per } x = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b}{a} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} = 0 \text{ per } y = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{b}{a}\left(\frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}}{(x^2 + y^2 + a^2)}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{b}{a}\left(\frac{(y^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}\right)}$$

per $x = 0$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \gtrless 0$ a seconda del segno della radice del denominatore. può essere sia max, sia min.

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{b}{a}\left(\frac{(x^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}\right)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{0 - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}}{(x^2 + y^2 + a^2)} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\ldots} \quad (xy)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{-(xy)}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{(y^2+a^2)(x^2+a^2) - x^2y^2}{(x^2+y^2+a^2)^3} = (\text{Hessiano})$$

$$H = \frac{x^2y^2 + a^2x^2 + a^2y^2 + a^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2+a^2)^3} = \frac{a^2}{(x^2+y^2+a^2)^2} > 0. \left(\begin{array}{c}\text{ammette} \\ \text{max} \\ \text{e min}\end{array}\right)$$

Massimi e Minimi relativi e assoluti

Prima di tutto occorre decidere se la zona della superficie che abbiamo in esame, è limitata o indefinita. Si dice: "Dominio" la proiezione sul piano xy della zona di superficie in esame. - Si dice codominio l'insieme dei valori della z in tale zona. Il dominio quindi può essere delimitato da funzioni $y=f(x)$ che formino; con le loro intersezioni, un perimetro atto a delimitare un'area, le $y=f(x)$, possono essere rette, o gli stessi assi x, y, od archi di cerchi, o curve piane qualsiasi.

Ma la delimitazione della zona, può dipendere dalla stessa $z=f(x,y)$, (per esempio una sfera, un ellissoide, od un cilindro con asse parallelo a z). Nel caso della sfera possiamo scegliere, come dominio, solo figure interne alla proiezione del suo cerchio massimo, per avere valori reali del codominio, però in questo

per avere valori reali del codominio; però in questo caso occorre scindere il codominio in due parti, cioè: $+|\sqrt{\ }|$ e $-|\sqrt{\ }|$ cioè occorre scindere l'equazione della sfera, esplicitata in z, in due <u>funzioni monodrome</u>. (Il termine "<u>funzione</u>" è sempre per relazioni monodrome.

Nell'esempio precedente (iperboloide a due falde)

$$z_1 = +\frac{b}{a}\left|\sqrt{x^2+y^2+a^2}\right| \; ; \; z_2 = -\frac{b}{a}\left|\sqrt{x^2+y^2+a^2}\right| .$$

E' detto massimo e minimo assoluto, nel dominio precisato, rispettivamente il più alto ed il più basso valore assunti dalla z sia internamente che sul bordo del dominio; sono esclusi i valori esterni al dominio.

Sono detti massimi e minimi relativi, nel dominio precisato, (e possono essere molteplici, mentre gli assoluti sono unici) i punti nei quali è possibile pensare un piano tangente parallelo ad xy, (orizzontale) tale che il valore della z nel punto, sia il più alto o il più basso dei valori della z nei punti dell'intorno, ed i punti dell'intorno si conservino tali che la z e le sue derivate siano continue in tale intorno, cioè il punto non sia una cuspide. (Il vertice di un cono non può essere un max o min relativo)

In una $y=f(x)$, si dice estremante il valore della x che rende max. o min. la y. Si dice estremale il valore della x che

max. o min. la y. Si dice estremale il valore della x che riveste condizioni necessarie ma non sufficienti affinché la y sia max o min. Per esempio i valori della x e della y per cui $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ sono estremali, diventano estremanti se $H > 0$.

In un domino esitono sempre un max e un min assoluti, mentre possono non esserci, o essere unici o molteplici i relativi.

Consideriamo la funzione:

$$f(x,y) = Z = \operatorname{sen} x + \cos(x+y) + \operatorname{sen} y$$

Si nota che l'espressione è simmetrica, cioè x ed y sono scambiabili fra loro per qualunque valore di Z.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \operatorname{sen}(x+y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \operatorname{sen}(x+y) = 0 \end{cases}$$

(sottraendo)

$$\cos x - \cos y = 0 \rightarrow \boxed{\cos x = \cos y}$$

ciò vuol dire:

$$\boxed{x = y}$$ (o meglio) $(x \pm 2K\pi = y \pm 2K\pi)$

ma: $\cos \alpha = -\cos \alpha$ perciò: $\boxed{y = \pm x}$

Si hanno cioè due condizioni: $\boxed{y = x}$ ed $\boxed{y = -x}$

Sostituiamo nella prima equazione: $y = x$

Sostituiamo nella prima equazione: $y = x$,

avremo:

$$\cos(x) - \operatorname{sen}(x+x) = 0$$

$$\cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}}$$

da cui:

$x = \pi/6 \quad ; \quad y = \pi/6 + 2k\pi$.

$x = 5/6\,\pi \quad ; \quad y = 5/6\,\pi + 2k\pi$.

Le due coppie di valori soddisfano entrambe le equazioni, infatti $\cos\frac{\pi}{6} = \text{sen}\left(2\frac{\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(2\cdot\frac{5\pi}{6}\right)$, non è invece lecita la coppia $\frac{\pi}{6}$ con $\frac{5}{6}\pi$ e neppure $x = \frac{\pi}{6}$; $y = -\frac{\pi}{6}$ perché si avvolgono della seconda condizione.

Sostituiamo nella I equazione : $y = -x$,

avremo: $\cos x = \text{sen}(0) = 0$ $\boxed{\cos x = 0}$

da cui: $x = \frac{\pi}{2}$; $y = -\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

$$x = \frac{3}{2}\pi \quad ; \quad y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

in questo caso valgono anche le coppie

$$x = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{3}{2}\pi \quad ; \quad y = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

infatti:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \text{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos\frac{3}{2}\pi = \text{sen}\left(2\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$

Si hanno così sei coppie di valori che annullano le derivate parziali prime

nullano le derivate parziali prime.

Eseguiamo ora, ordinatamente, le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -sen(x) - cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -sen(y) - cos(x+y)$$

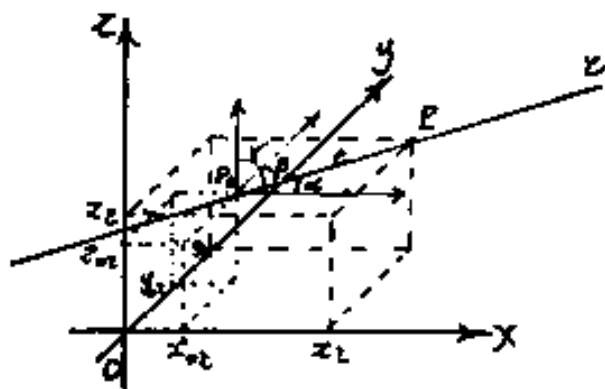
Altri esempi di massimi e minimi

I problemi di massimo e di minimo, di funzioni in più variabili, possono presentarsi in molti casi.

Sappiamo, per esempio, che fra due rette sghembe esiste un segmento di minima distanza. (Cfr. cap. prec)

Supponiamo che le equazioni di due rette: r, s; siano espresse in forma parametrica:

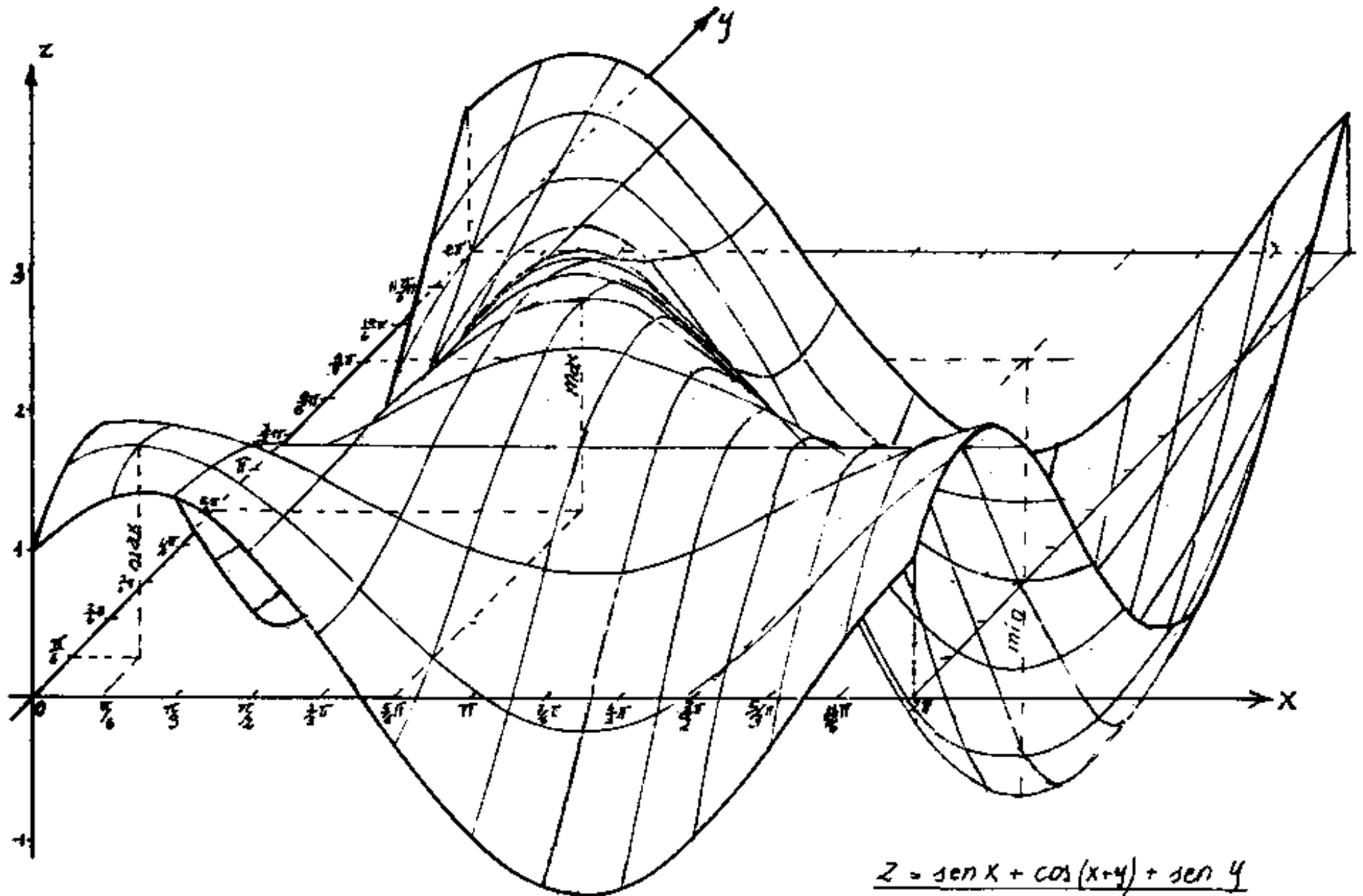
$$\text{retta } r \begin{cases} x_r = x_{0r} + a_1 t \\ y_r = y_{0r} + a_2 t \\ z_r = z_{0r} + a_3 t \end{cases}$$

$$\text{retta } s \begin{cases} x_s = x_{0s} + b_1 u \\ y_s = y_{0s} + b_2 u \\ z_s = z_{0s} + b_3 u \end{cases}$$

Sia P il punto corrente su r e $P_0 \equiv (x_{0r}, y_{0r}, z_{0r})$ un punto noto di r; sia $t = \overline{P_0P}$, avremo che a_1, a_2, a_3 sono i coseni direttori della retta r.

sono i coseni direttori della retta r.

Analogamente sia Q il punto corrente su s e $Q_0 \equiv (x_{0s}, y_{0s}, z_{0s})$ un punto noto di s; sia $u = \overline{Q_0 Q}$, avremo che b_1, b_2, b_3 sono i coseni direttori della retta s. Nelle variabili t ed u, dovremo minimizzare la distanza: $\delta = \overline{PQ} = \min.$

cioè:

$$\delta^2 = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2$$

$$z = \text{sen}\,x + \cos(x+y) + \text{sen}\,y$$

(nel dominio: $0 \le x \le 2\pi$; $0 \le y \le 2\pi$.)

Dalle equazioni parametriche, sottraendo membro a membro si ha:

$$\begin{cases} (x_t - x_s) = (x_{0t} - x_{0s}) + a_1 t - b_1 u \\ (y_t - y_s) = (y_{0t} - y_{0s}) + a_2 t - b_2 u \\ (z_t - z_s) = (z_{0t} - z_{0s}) + a_3 t - b_3 u \end{cases}$$

Deriviamo δ^2 rispetto a t e rispetto ad u, si ha:

$$\frac{\partial(\delta^2)}{\partial t} = 2\left[(x_t - x_s)\frac{\partial(x_t - x_s)}{\partial t} + (y_t - y_s)\frac{\partial(y_t - y_s)}{\partial t} + (z_t - z_s)\frac{\partial(z_t - z_s)}{\partial t}\right]$$

$$\frac{\partial(\delta^2)}{\partial u} = 2\left[(x_t - x_s)\frac{\partial(x_t - x_s)}{\partial u} + (y_t - y_s)\frac{\partial(y_t - y_s)}{\partial u} + (z_t - z_s)\frac{\partial(z_t - z_s)}{\partial u}\right]$$

sostituendo le derivate: $\frac{\partial(\dots)}{\partial t}$ e $\frac{\partial(\dots)}{\partial u}$ si ha:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(\delta^2)}{\partial t} = (x_t - x_s)a_1 + (y_t - y_s)a_2 + (z_t - z_s)a_3 = 0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial(\delta^2)}{\partial u} = (x_t - x_s)b_1 + (y_t - y_s)b_2 + (z_t - z_s)b_3 = 0$$

L'aver uguagliato a zero le derivate rispetto a t e rispetto ad u della δ^2, è condizione necessaria, non sufficiente affinché $\delta = \overline{QP}$ presenti un minimo od un massimo.

Sostituiamo in tali espressioni i valori

I massimi ed i minimi assoluti in un dominio

Abbiamo già definito cosa si intende per dominio di una $f(x,y)$; occorre però fissare meglio le idee.

Consideriamo il dominio delimitato dal piano zy, è chiaro che tale piano può essere definito dalla: $x=0$ e la sua proiezione sul piano xy coincide con la sua traccia (che è l'asse y, nel piano xy). L'asse y, (nel piano) è appunto rappresentato da $x=0$,

Se l'altro piano che delimita il dominio, è il piano zx, avremo, analogamente, la sua definizione: $y=0$

Infine se il terzo piano che delimita il dominio è definito da: $y=-x+1$, avremo che la retta: $y=-x+1$ del piano xy rappresenta la intersezione di tale piano con il piano xy (la sua traccia su xy), e su tale retta (traccia), si proiettano tutti i punti del piano.

Questi tre piani: $x=0$; $y=0$; $y=-x+1$, è bene

Questi tre piani: $x = 0$; $y = 0$; $y = -x + 1$, è bene osservarli meglio:

nella loro formula non figura mai la Z, ciò; vuol dire che qualsiasi valore attribuito a Z, non muta la loro formula, cioè per ogni $Z = N$, (con N un numero qualsiasi positivo o negativo, compreso lo zero), la formula resta immutata.

La retta "n" passante per $\overline{PQ} = \delta$, contiene quindi il segmento di minima distanza.

Possiamo scrivere:

$$(x_2 - x_1) = \delta \cos(\hat{nx}) \quad \text{da cui} \quad (x_2 - x_1)\cos(\hat{xn}) = \delta \cos^2(\hat{xn})$$

$$(y_2 - y_1) = \delta \cos(\hat{ny}) \quad \text{"} \quad (y_2 - y_1)\cos(\hat{yn}) = \delta \cos^2(\hat{yn})$$

$$(z_2 - z_1) = \delta \cos(\hat{nz}) \quad \text{"} \quad (z_2 - z_1)\cos(\hat{zn}) = \delta \cos^2(\hat{zn})$$

$\cos^2(\hat{xn}) + \cos^2(\hat{yn}) + \cos^2(\hat{zn}) = 1$ per cui sommando:

$$\boxed{\delta = (x_2 - x_1)\cos(\hat{xn}) + (y_2 - y_1)\cos(\hat{yn}) + (z_2 - z_1)\cos(\hat{zn})}$$

sostituendo i valori dei coseni direttori di "n" e moltiplicando per sen θ si ha:

$$\delta \operatorname{sen}\theta = (x_2 - x_1)\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (y_2 - y_1)\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + (z_2 - z_1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

espressione che può scriversi:

$$\delta \operatorname{sen}\theta = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

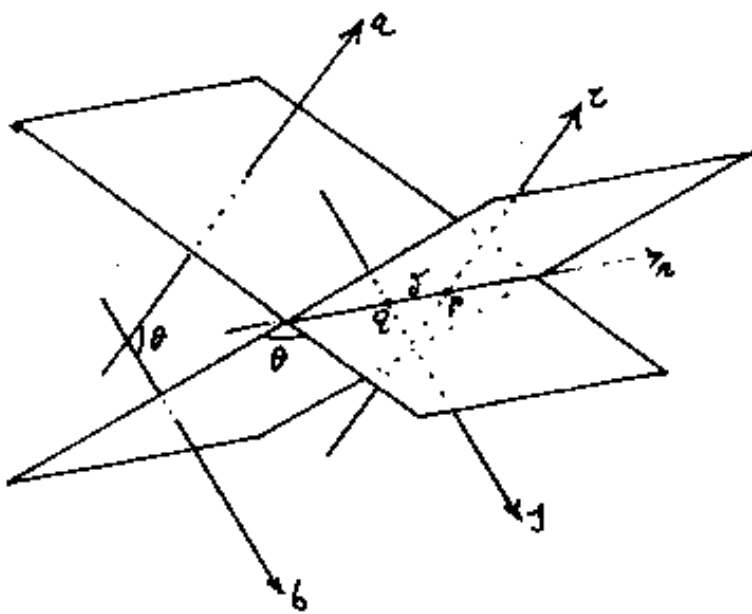
Se togliamo alla prima riga la seconda moltiplicata per t ed aggiungiamo la terza moltiplicata per u il valore

t ed aggiungiamo la terza moltiplicata per u il valore

del determinante non cambia; perciò:

$$\delta \operatorname{sen}\theta = \begin{vmatrix} (x_{02}-x_{01}) & (y_{02}-y_{01}) & (z_{02}-z_{01}) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} (x_{02}-x_{01}) & (y_{02}-y_{01}) & (z_{02}-z_{01}) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Bigg/ \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

- Sia n la retta comune ai due piani passanti per $\overline{PQ} = \gamma$; l'angolo θ dei due piani è anche l'angolo delle direzioni a e b cioè delle direzioni di r e di s.

Essendo: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1 = K_1$

e $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = 1 = K_2$

cioè avremo:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

I coseni direttori della retta n comune ai due piani, sono facilmente ricavabili dal determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_1 = \cos(\widehat{xn}) & \gamma_2 = \cos(\widehat{yn}) & \gamma_3 = \cos(\widehat{zn}) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\cos(\widehat{xn}) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} ; \quad \cos(\widehat{yn}) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} ;$$

$$\cos(\widehat{zn}) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} .$$

abbiamo quindi:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\widehat{xn}) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} ; \quad \operatorname{sen}(\theta)\cos(\widehat{ny}) = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} ; \quad \operatorname{sen}\theta\cos(\widehat{zn}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Verifichiamo con l'Hessiano che i valori di t ed u ottenuti uguagliando a zero le derivate parziali prime ammettono max o min.
Eseguiamo quindi le derivate seconde:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial t^2} = 1 \;;\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial u^2} = 1 \;;\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial u \partial t} = -\cos\theta$$

per cui l'Hessiano:

$$\begin{vmatrix} +2 & -2\cos\theta \\ -2\cos\theta & +2 \end{vmatrix} = H = 4(1-\cos^2\theta) = 4\sin^2\theta > 0$$

Cioè l'espressione in t ed u ammette un <u>minimo</u> ed è un <u>minimo assoluto</u> poiché: $\lim_{t\to\infty,\, u\to\infty} (\delta^2) = \infty$ cioè ogni segmento $\overline{PQ}$ con P su r e Q su s è maggiore di quello che verifica: $\frac{\partial(\delta^2)}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial(\delta^2)}{\partial u} = 0$.

Se consideriamo che <u>a_1, a_2, a_3</u> oltreché <u>coseni</u>

Se consideriamo che a_1, a_2, a_3 coseni dei
direttori della retta r sono coseni direttori della
giacitura di piani normali ad r compreso il
piano passante per $\overline{PQ} = \delta$ (essendo $\overline{PQ} \perp r$)
e analogamente b_1, b_2, b_3 sono anche coseni
direttori della giacitura di piani normali ad s
compreso il piano passante per $\overline{PQ} = \delta$ (essendo $\overline{PQ} \perp s$).
Cioè il segmento δ è perpendicolare ad entrambe le
rette r ed s

Ma, $z=N$, rappresenta un piano parallelo ad xy e distante da esso la quantità N; questo piano taglierà i tre piani che delimitano questo dominio, con figure identiche a quella delle tracce sul piano xy. (che poi, xy può definirsi $z=0$, cioè uno degli infiniti piani $z=N$)

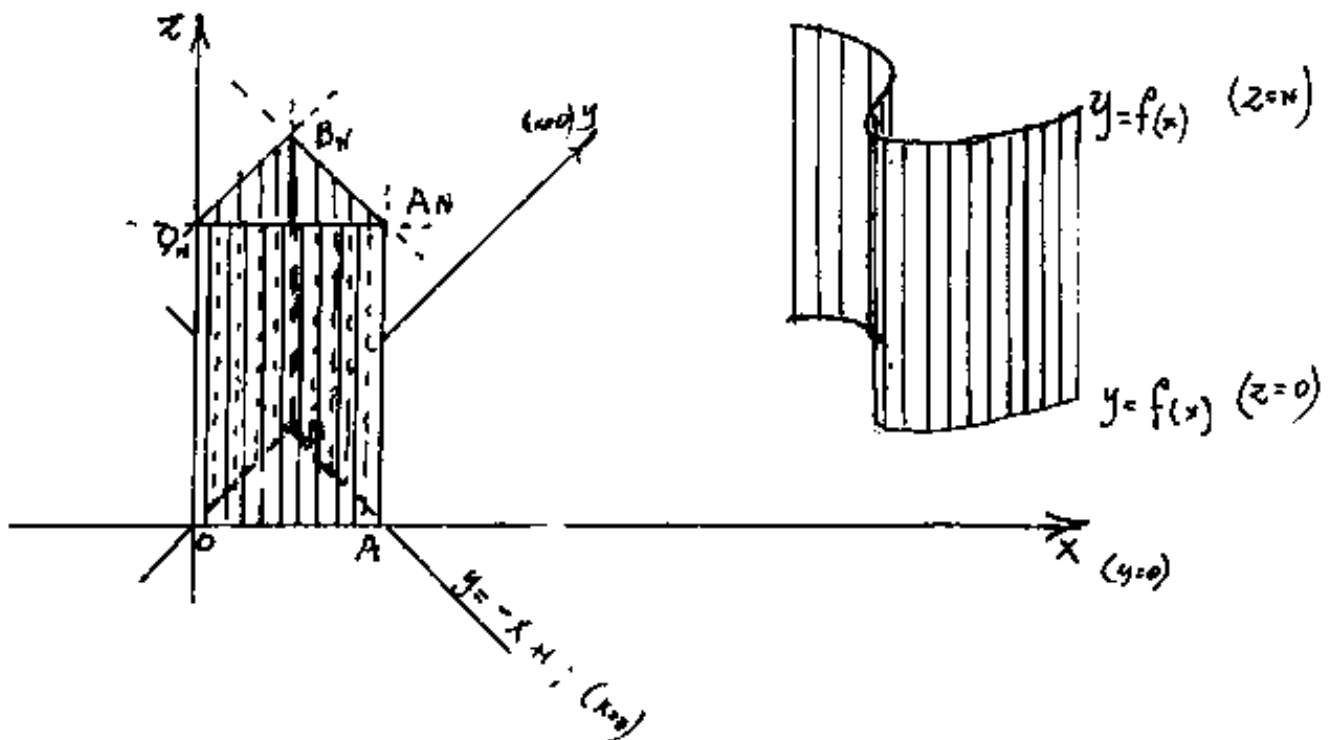
C'è ancora una osservazione:

espressioni del tipo: $x=0$, $y=0$; $x=n$, $y=m$; $y=mx+q$, $y=f(x)$; mentre in geometria piana rappresentano rette o curve piane, giacenti su xy; le stesse espressioni, nello spazio tridimensionale, in quanto non figura la z, rappresentano superfici parallele alla z stessa !!!!, cioè, superfici cilindriche.

Quest'ultima osservazione, mentre ci fa vedere la geometria piana come un caso particolare della geometria tridimensionale in cui si sia posto

$z=0$; ci fà vedere anche tali superfici (cilindriche) come costituite da tante ordinate z, che escono, (verso l'alto, o verso il basso) dalle linee definite sul piano xy (cioè tracce, $y=f(x)$ rettilinee o curvilinee).

Vediamo come i tre piani $x=0$, $y=0$, $y=-x+1$,

delimitano un prismetto di altezza indefinita, ma avente come base su xy, il triangolo rettangolo isoscele AOB, ove: $\overline{OA}$ è il segmento di $y=0$, $\overline{OB}$ il segmento di $x=0$, mentre l'ipotenusa $\overline{AB}$ è il seg=

mento di $y=(-x+1)$; $(x=0)$

Questo involucro prismatico, delimita su $z=f(x,y)$ (dominio in x,y), la parte della $z=f(x,y)$ che è oggetto del nostro studio.

La superficie z chiuderà il prismetto con

La superficie \< chiuderà il prismetto con una superficie piana o curva, a semplice o doppia curvatura. Sulle superfici delimitanti il dominio (i piani del prismetto nel nostro caso) la $z = f(x,y)$ si intersecherà dando luogo a linee che sono il bordo del campo della $f(x,y)$ stessa.

Se il dominio sul piano xy è un cerchio,

la retta parallela a Z, che ne percorre la circon-ferenza, è la generatrice del cilindro circolare ret-to: $(x^2+y^2=R^2)$; analogamente altre $y=f(x)$, da-ranno luogo a cilindri o prismi o misti.

Consideriamo una $z=f(x,y)=\text{sen}\,x+\cos y$., ed il dominio sia $x=0$; $y=0$; $y=-x+1$; (cioè il nostro prismetto). Il piano $y=-x+1$ incontra il piano xz secondo la retta: $x=1$; $y=0$, ed incontra il piano yz secondo la retta: $y=1$; $x=0$; queste rette e l'asse z sono gli spigoli del nostro prismetto a base triangola-re. La $z=\text{sen}\,x+\cos y$, interseca il piano yz; $(x=0)$ secondo la linea $z=\cos(y)$; interseca il piano xz; $y=0$, secondo la linea: $z=\text{sen}\,x+1$.

per: $x=0$; $y=0$ $\rightarrow$ $z=1$ (punto 0)

$x=1$; $y=0$ $\rightarrow$ $z=\text{sen}(1)+1=1{,}84147$ (punto A)

$x=0$; $y=1$ $\rightarrow$ $z=\cos(1)=0{,}54030$ (punto B)

Ma qual'è la linea di intersezione fra la superficie: $z = sen(x) + cos(y)$ ed il piano: $y = (-x + 1)$?

Se sostituiamo y in z si ha:

$$z = sen(x) + cos(1 - x) = sen x + cos(1) cos(x) + sen(1) sen(x)$$

$$z = (1,84147) sen(x) + (0,54030) cos(x)$$

questa equazione è la proiezione su un piano parallelo a ZX della linea intersezione giacente sul piano $y = -x + 1$.

quindi i suoi max e min in direzione Z non mutano nella proiezione. Per ottenere la stessa configurazione basta prendere le ascisse moltiplicate per $\sqrt{2}$.

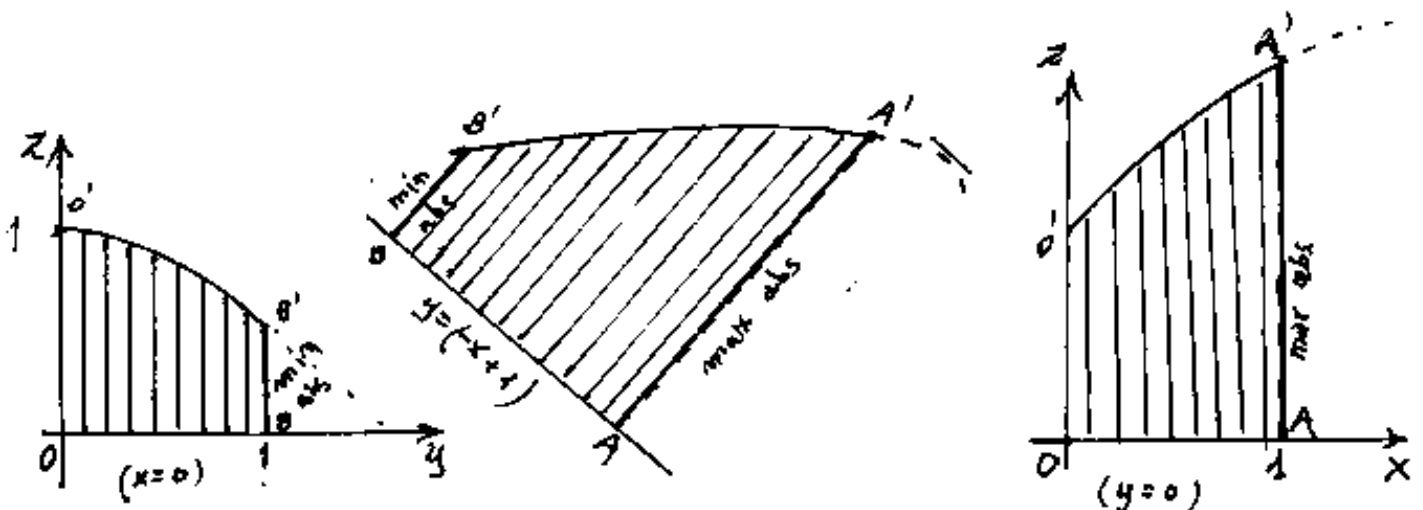
$$\frac{dz}{d\underline{X}} = \left(1 + \operatorname{sen}(1)\right)\cos(\underline{X}) - \cos(1)\operatorname{sen}(\underline{X}) = 0$$

$$\operatorname{tang}(\underline{X}) = \frac{1 + \operatorname{sen}(1)}{\cos(1)} = \frac{1,84147}{0,54030} = 3,40822$$

$$\underline{X} = \operatorname{arctg}(3,40822) = 1,28540 \text{ rad.} > 1$$

I max e min di tale funzione sono fuori del nostro dominio: $(0 \leq \underline{X} \leq 1)$.

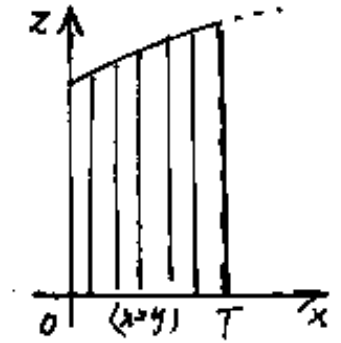
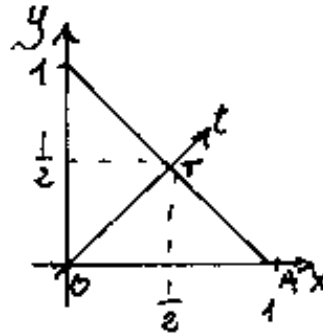
Il punto $\underline{X} = 1,28540$ corrisponde $y = -0,28540$ ed ha un max in $Z = 1,24109$ (massimo relativo sul prolungamento della linea su $\overline{BA}$). I massimi ed i minimi relati-

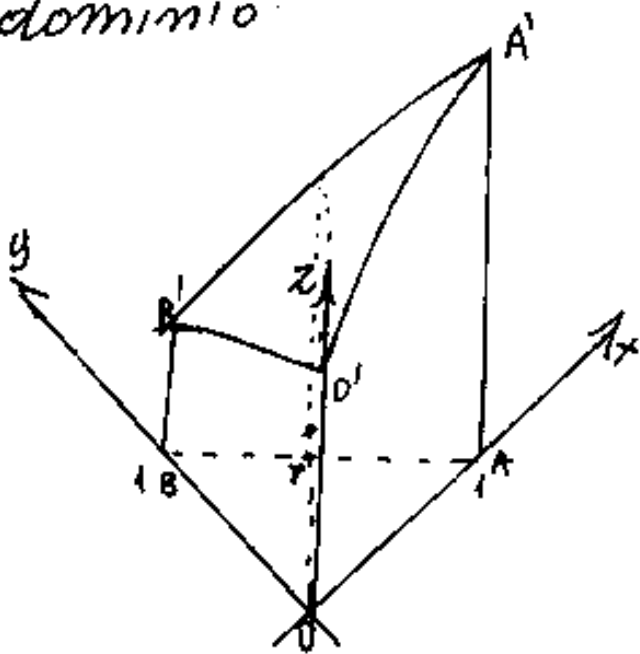
vi della superficie z si verificano fuori del dominio:

max = 2 per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $y = 0 + 2k\pi$;

min = -2 per $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$; $y = \pi + 2k\pi$;

Se tagliamo con un piano $\overline{OT}$; ($y = x = t/\sqrt{2}$) abbiamo le sezioni:

y, 1, 1/2, t, T, O, 1/2, 1, A, x

z, O, (x=y), T, x

Questo studio ci ha permesso di trovare che, nel dominio della funzione, non vi sono max o min relativi, che "<u>sul bordo del dominio</u>" si ha il <u>max assoluto</u> nel punto: $x=1$; $y=0$; $z=1{,}84147$; sempre sul bordo del dominio, si ha il <u>min assoluto</u>, nel punto: $x=0$; $y=1$; $z=0{,}54030$.

Se pensiamo di unire, ritagliandole, le tre figure sui piani $x=0$; $y=0$; $y=-x+1$; combaceranno i tre spigoli del prismetto e cioè l'asse z, ed i segmenti: $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$; avremo così il bordo della superficie nel dominio.

Se ne riporta, a fianco, una visione assonometrica, dalla quale è possibile rendersi conto dell'andamento della superficie nel dominio considerato; cioè che internamente al dominio non vi sono né max né min. Del rest...

dominio non vi sono né max, né min. Del resto

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (-\operatorname{sen} y) \; ; \; \frac{\partial z}{\partial x} = (\cos x) \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-\cos y) \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-\operatorname{sen} x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 \; ; \qquad H = \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{vmatrix} = +\operatorname{sen} x \cos y = H$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \rightarrow y = 0 \; ; \; \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ si ha } 1 \cdot 1 = H > 0 ; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0 \; (max)$$

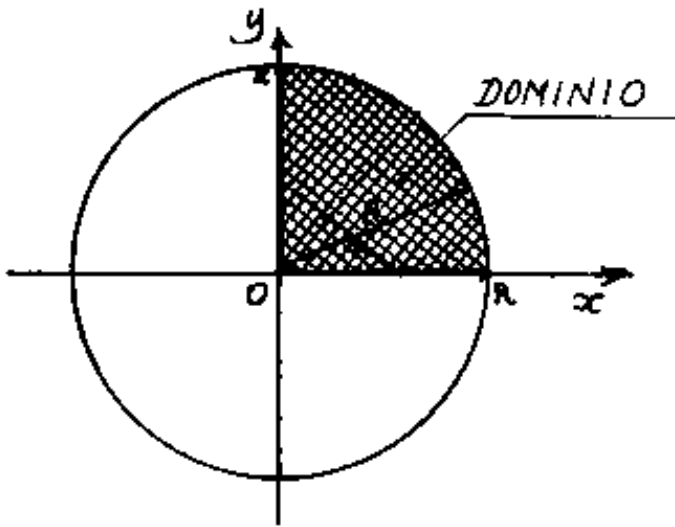
$$\searrow y = \pi \qquad \searrow x = \frac{3}{2}\pi \text{ si ha } (-1)(-1) = H > 0 ; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0 \; (min).$$

Il calcolo dei volumi e gli integrali doppi di campo

Consideriamo un dominio definito da:

$$x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \; ; \; x^2 + y^2 \leq R^2$$

Nel piano xy, la $x \geq 0$ ci dice che dobbiamo considerare come appartenenti al dominio i soli punti che hanno ascissa positiva o nulla, cioé una funzione: $z = f(x,y)$ resta limitata a sinistra dal piano: yz $(x = 0)$.

Analogamente $y \geq 0$, limita col piano zx la funzione $z = f(x,y)$ in basso, cioè: $x \geq 0$ ed $y \geq 0$ limitano la funzione al I quadrante. La $x^2 + y^2 \leq R^2$, limita la funzione ai punti interni al cerchio di raggio R, cioè il nostro dominio è il primo quadrante di tale cerchio (vedi figura)

raccordo (vedi figura)

Consideriamo ora una $f(x,y)$ (che porremo: $z = f(x,y)$) essa rappresenta una superficie che può estendersi indefinitamente di cui però, a noi, interessa la sola porzione che si proietta sul dominio.

E' bene avvertire subito che possono verificarsi vari casi:

1) Il dominio è tutto coperto dalla superficie $z=f(x,y)$ che si estende oltre il dominio

2) La proiezione su xy della intera superficie $z=f(x,y)$ è identica al dominio

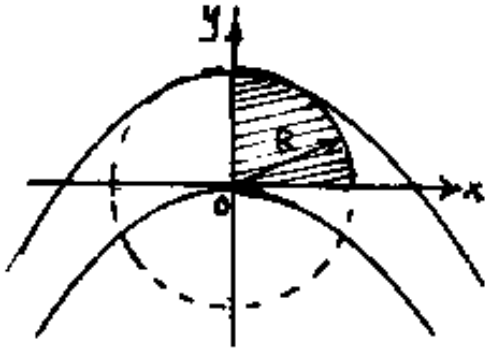
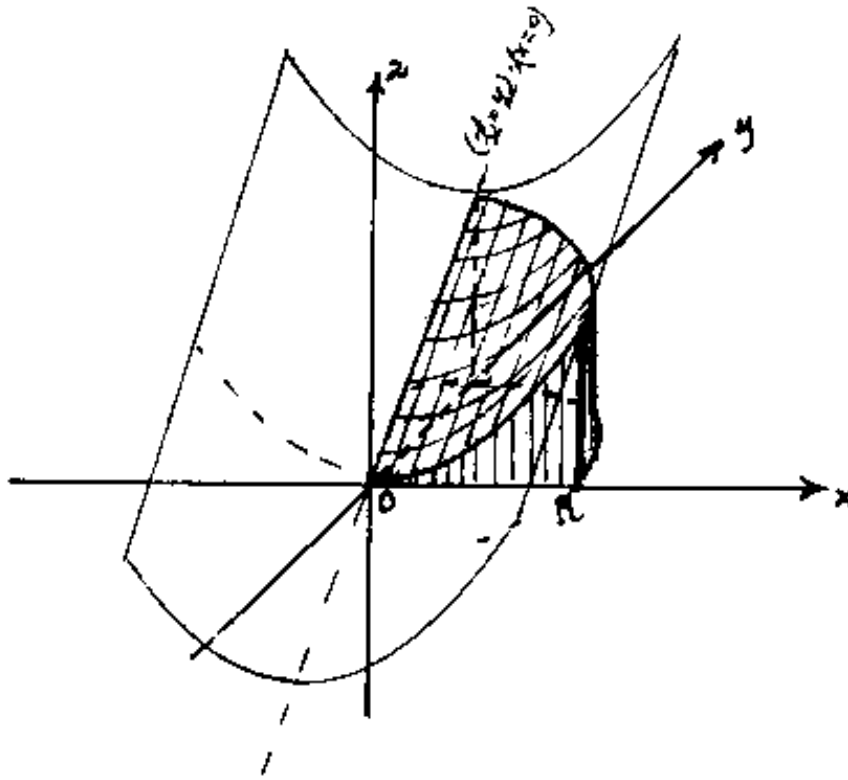
3) La proiezione su xy della intera superficie $z=f(x,y)$ e tutta interna al dominio e quest'ultimo é maggiore. (In questo caso è evidente che il dominio della $z=f(x,y)$ è la sua proiezione, ed i punti esterni ad essa, anche se appartenenti ad un prefissato dominio non possono considerarsi dominio di punti REALI della z.)

4) Infine la $f(x,y)$ pur estendendosi, con la sua proiezione oltre il dominio, copre quest'ultimo solo in parte. In questo caso occorre definire una $f(x,y)=0$, che, intersecando le linee del prefissato dominio, delimiti la parte di esso appartenente a punti reali di z.

Supponiamo che la ...

Supponiamo che la nostra : $z = f(x, y)$ sia:

$$z = x^2 + y$$

(Copre tutto il dominio?), Vediamo per $z = 0$, si ha: $y = -x^2$, cioè una parabola verso il basso. Per $z = R$, in dipendenza del valore di R può coprire tutto il dominio, o

solo parte di esso; tuttavia al crescere di z la superficie finisce per coprire tutto il dominio.

Per: $x=0$ si ha: $(z=y)$ cioè una retta a 45° sul piano yz.

Per: $x=K$ $\rightarrow (z=y+K^2)$ cioè ancora una retta parallela

Cioè la nostra è una superficie rigata, cioè può essere generata da una retta inclinata di 45° rispetto all'orizzontale diretta secondo y, che si sposta man

.asse orizzontale diretta secondo y, che si sposta mantenendosi parallela a se stessa e descrivendo una parabola con le intersezioni sui piani paralleli a ZX.
Infatti per $y=0 \rightarrow z=x^2$ e per $y=k \rightarrow z=x^2+k$.
La superficie può anche considerarsi generata da una parabola verticale che si sposta parallelamente a se stessa mantenendo il vertice sulla retta $x=0; z=y$.

Le superfici generate da una retta che trasla lungo una curva mantenendosi parallela a se stessa, sono dette : "superfici ad una curvatura" e possono facilmente realizzarsi piegando un foglio di carta.
Sono invece dette: "superfici a doppia curvatura" le superfici generate da linee curve che traslano lungo una curva, o ruotano intorno ad un asse.
Per esempio la sfera, il paraboloide di rotazione, l'ellissoide, ecc. Queste non possono realizzarsi semplicemente piegando un pezzo di carta, perché dovremmo piegare la carta secondo due direzioni ortogonali. La distinzione di superfici ad una o a doppia curvatura, presenta notevole interesse in scienza delle costruzioni, infatti dopo aver : "inflesso" un foglio di carta (generando una superficie ad una curvatura), non è più possibile

inflatterlo secondo assi ortogonali, poiché, come vedremo, nelle sezioni ortogonali, (dopo la prima inflessione) è variato il momento d'inerzia.
Le falde di una cupola a padiglione sono superfici ad una curvatura (Come la Cupola del Duomo di Firenze); le cupole di rotazione sono superfici a doppia curvatura (una è la curva generatrice, l'altra la circonferenza)

Tornando alla nostra superficie (ad una curvatura) $z = x^2 + y$ se sezioniamo ad $x = \text{cost}$ otteniamo rette di intersezione; se sezioniamo ad $y = \text{cost}$ otteniamo parabole volte verso l'alto; se sezioniamo a $z = \text{cost}$ otteniamo parabole orizzontali volte in verso opposto alla y.

(La nostra superficie è un cilindro parabolico simmetrico al piano $X = 0$ ed inclinato di $\frac{\pi}{4} = 45°$ sul piano: $z = 0$)

Vogliamo ora calcolare il volume del solido delimitato dai piani: $z = 0$; $x = 0$; $y = 0$ (triedro positivo); dal cilindro: $x^2 + y^2 = R^2$; e dalla superficie: $z = x^2 + y$.

(Cioè il volume fra il piano xy e la superficie delimitato dal dominio)

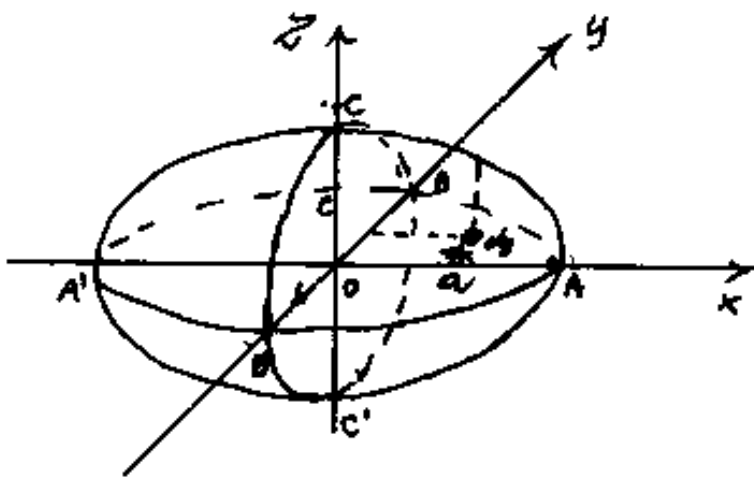
Il metodo è generale e può essere applicato a qualsiasi: $z = f(x,y)$ con qualsiasi dominio delimitato da: $y = \varphi(x)$ qualsiasi.

<u>Nel calcolo dei volumi</u> l'impostazione generale implica che, per ogni punto appartenente al

nerale implica che, per ogni punto appartenente al volume, si possa considerare un cubetto infinitesimo di spigoli dx, dy, dz, il cui volume infinitesimo: $\underline{dV = dx \cdot dy \cdot dz}$ e V può determinarsi come somma degli infiniti cubetti infinitesimi

$$V = \iiint dx \cdot dy \cdot dz$$

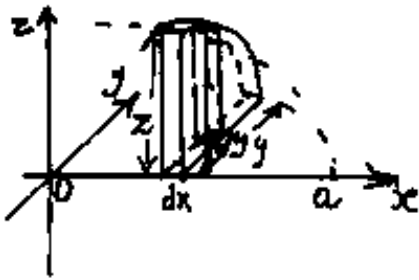
Occorre un integrale triplo perché vi sono tre differenziali.

Naturalmente per calcolare "V" occorre che "V" sia <u>univocamente definito</u> (come già specificato nel nostro caso). Il minimo di definizione di V è una unica superficie chiusa per esempio la sfera: $x^2+y^2+z^2=R^2$; o l'ellissoide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, in questo caso il giuoco di tagliare a fettine, ci fa vedere la $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, cioè sezionando a $z=cost$ si hanno ellissi, ma, data la simmetria, anche a $y=cost$ o $x=cost$ si hanno ellissi.

Consideriamo il dominio delimitato da $x=0$; $y=0$; $z=0$ e $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, Il volume di questo solido è $\frac{1}{8}$ del volume dell'ellissoide; supponendo di "materializzare una ordinata Z in un prismetto di base dx, dy ed altezza

z
dx dy

dy ed altezza $z = f(x,y)$, avremo che il volume elementare del prismetto sarà: $dv = z \cdot dx\, dy$.

<u>Si hanno tre variabili</u> occorre sceglierne una <u>assolutamente indipendente</u>, (noi scegliamo la x) scelta la x essa può variare (nel dominio) da "0" ad "a"; ma attribuito

un qualsiasi valore alla x, la y non è più arbi= traria, ma è legata ai limiti del dominio su xy, perciò essendo per $z=0$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avremo che la $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, per ogni valore di x compreso fra 0 ed a, perciò noi consi= deriamo di aver tagliato il solido con piani ad x=cost e "fettine" di spessore dx, il cui volume sarà l'area della "fettina" molti= plicata per dx.

Ma l'area della fettina sarà data dalla somma delle ordinate z per dy con y variabile da "0" a: "$\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$".

Con ciò abbiamo scelto una <u>sequenza</u> nel= l'ordine di indipendenza delle variabili x, y, z

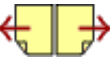
x = indipendente ; $y=f(x)$; $z=f(x,y)$.

E' bene avvertire che la sequenza è arbitraria e normalmente si sceglie quella che riteniamo

e normalmente si sceglie quella che riteniamo semplifichi (caso per caso) i calcoli.

Avremo quindi:

$$V = 8 \int_{0}^{a} \left[\int_{y=0}^{y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \right) dy \right] dx$$

è questo un <u>integrale doppio di campo</u>.

Per risolvere questo tipo di integrali, occorre considerare inizialmente come una costante, la variabile da noi scelta come indipendente ed integrare nell'altra variabile nei limiti in funzione della variabile indipendente (per noi la x) quindi eseguire la seconda integrazione.

$$V = 8C \int_0^a \left[\int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{a^2y^2}{(a^2-x^2)b^2}\right)}\, dy \right] dx$$

$$V = 8C \int_0^a \left(b\,\frac{(a^2-x^2)}{a^2} \int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1-\left(\frac{ay}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\, d\left(\frac{ay}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right)\right) dx$$

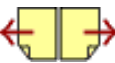
ricordare l'integrale: $\int \left(\sqrt{1-f^2}\right) df$

$$\int_{\ell_1}^{\ell_2} \sqrt{1-f^2}\, df = \frac{1}{2}\left[f\sqrt{1-f^2} + \arcsin f\right]_{\ell_1}^{\ell_2}$$ perciò:

$$V = 8C \int_0^a \left(b\,\frac{a^2-x^2}{2a^2}\right) \left[\frac{ay}{b\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{ay}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2} + \arcsin\left(\frac{ay}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right)\right]_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$V = 8c\int_0^a \left(b\,\frac{(a^2-x^2)}{2a^2}\right)\left(1\sqrt{1-1^2}+\arcsin(1)-0\right)dx$$

$$V = 8c\int_0^a b\,\frac{(a^2-x^2)}{2a^2}\cdot\frac{\pi}{2}\,dx$$

$$V = \frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\left[a^3-\frac{a^3}{3}\right]$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi\, a b c}$$ volume dell'ellissoide

Se $a = b = c = R$ si ha il volume della sfera.

Seguendo il procedimento ora spiegato possiamo calcolare:

$$V = \int_0^R \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} (x^2 + y)\, dy \right) dx$$

$$V = \int_0^R \left[x^2 \cdot y + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \int_0^R \left(x^2\sqrt{R^2-x^2} + \frac{R^2-x^2}{2} \right) dx$$

$$V = \left[-\frac{x}{4}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{R^2}{8}\left(x\sqrt{R^2-x^2} + R^2 \arcsin\left|\frac{x}{R}\right| \right) + \frac{R^2}{2}x - \frac{x^3}{6} \right]_0^R$$

$$V = \left[\left(0 + \frac{R^2}{8}\left(0 + \frac{\pi}{2}R^2\right) + \frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{6} \right) - (0) \right] = \boxed{R^3\left(\frac{\pi R}{16} + \frac{1}{3} \right)}$$

Il calcolo dell'integrale: $\int x^2\sqrt{R^2-x^2}\, dx$ ponendo: $\frac{x}{R} = \operatorname{sen} t$

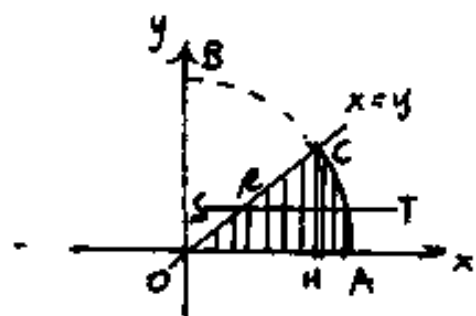
diventa $= R^4 \int \operatorname{sen}^2 t \cos t \, d \operatorname{sen} t = \frac{R^4}{8} \int \operatorname{sen}^2(2t)\, d(2t) =$

diventa $= R^4 \int \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{R^4}{8} \int \operatorname{sen}^2(2t) \, d(2t) =$

$$= \frac{R^4}{8} \; \frac{-(\operatorname{sen} 2t)(\cos 2t) + 2t}{2} = \frac{R^4}{8} \left(2 \operatorname{sen} t \cos^3 t - \operatorname{sen}^3 t \cos t + t \right)$$

da cui tornando in $t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{R}$; $\cos t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}$; ecc.

La scelta dei limiti di integrazione

Supponiamo che un dominio sia delimitato da: $x = y$; $y = 0$; $x^2 + y^2 = R^2$, è simile al nostro dominio cambia solo: $x = y$ anziché $x = 0$. e la $f(x,y) = z = x^2 + y$ sia la stessa.

Si nota che se tagliamo ad $x = \text{cost}$, com'é il tratteggio in figura, per x variabile da 0 ad H i limiti in y sono $y = 0$ ed $y = x$, mentre per x da H ad A i limiti in y sono $y = 0$ ed $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; ciò implica di dover dividere in due intervalli (e quindi due integrali). Se invece sezioniamo ad $y = \text{cost}$, (come in figura con la retta ST si ha che la variabile indipendente scelta è la y che varierà da $y = 0$ ad $y = \overline{HC} = \frac{R}{2}\sqrt{2}$, mentre la x avrá i limiti

$y=0$ a $y = \ldots = \frac{R}{2}\sqrt{2}$, mentre la x avrà i limiti variabili: $x = y$; $x=\sqrt{R^2-y^2}$; ed il volume di questo dominio sarà:

$$V_1 = \int_0^{R/\sqrt{2}} \left(\int_{x=y}^{x=\sqrt{R^2-y^2}} (x^2+y)\,dx \right) dy$$

ed occorrerà integrare prima in X dal y = cost, e sostituirvi i limiti in $f(y)$, poi integrare in y.

Integrando in x otteniamo:

$$V_1 = \int_0^{R/\sqrt{2}} \left[\frac{x^3}{3} + yx\right]_{x=y}^{x=\sqrt{R^2-y^2}} \cdot dy$$

$$V_1 = \int_0^{R/\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(R^2-y^2)^{3/2}}{3} + y\sqrt{R^2-y^2}\right) - \left(\frac{y^3}{3} + y^2\right)\right] dy$$

$$V_1 = \int_0^{R/\sqrt{2}} \frac{R^3}{3}\left(1-\left(\frac{y}{R}\right)^2\right)^{3/2} d\frac{y}{R}\cdot R + \left[-\frac{y^4}{12}\right]_0^{R/\sqrt{2}} - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{R/\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{R/\sqrt{2}} \sqrt{R^2-y^2}\, d(R^2-y^2)$$

posto $\frac{y}{R} = \operatorname{sen} t$

$$V_1 = \frac{R^4}{3}\int_0^{\operatorname{arcsen} 1/\sqrt{2}} \cos^3 t\, d(\operatorname{sen} t) - \frac{R^4}{48} - \frac{R^3\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(R^2-y^2)^{3/2}\right]_0^{R/\sqrt{2}}$$

$$V_1 = \frac{R^4}{3}\left[\frac{3}{8}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4t}{32}\right]_0^{\operatorname{arcsen}(1/\sqrt{2})} - \frac{R^4}{48} - \frac{R^3\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{3}\left[\left(R^2-\frac{R^2}{2}\right)^{3/2} - (R^2-0)^{3/2}\right]$$

$$V_1 = \frac{R^4}{3}\left[\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} + \frac{0}{32}\right] - \frac{R^4}{48} - \frac{R^3\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{3}\left(R^3\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1\right)\right)$$

$$V_1 = \frac{R^4 \pi}{32} + \frac{R^4}{12} - \frac{R^4}{48} - \frac{R\sqrt{2}}{12} + \frac{R^3}{3}\left(\frac{-\sqrt{2}}{4} + 1\right)$$

$$\boxed{V_1 = \frac{R^4 \pi}{32} + \frac{R^4}{16} - \frac{R^3\sqrt{2}}{6} + \frac{R^3}{3}}$$

Per differenza l'altra parte di dominio dovrà essere:

$$V - V_1 = V_2 = \frac{R^4}{32} - \frac{R^4}{16} + \frac{R^3\sqrt{2}}{6}$$

Se consideriamo l'altra parte di dominio è invece conveniente scegliere la x come indipendente ed avremo: $x=0$ ad $x=R/\sqrt{2}$; $y=x$; $y=\sqrt{R^2-x^2}$;

ferma restando la $z=x^2+y$ si ha:

$$V_2=\int_0^{R/\sqrt{2}}\left(\int_x^{\sqrt{R^2-x^2}}(x^2+y)\,dy\right)dx$$

abbiamo già risolto con limiti diversi:

$$V_2=\int_0^{R/\sqrt{2}}\left[x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_x^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\int_0^{R/\sqrt{2}}x^2\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)-x^3+\left(\frac{R^2-x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$V_2=\int_0^{R/\sqrt{2}}\left(x^2\sqrt{R^2-x^2}-x^3+\frac{R^2}{2}-x^2\right)dx=$$

$$V_2=\left[-\frac{x}{4}\left(R^2-x^2\right)^{3/2}+\frac{R^2}{8}\left(x\sqrt{R^2-x^2}\right)+\frac{R^4}{8}\arcsin\left|\frac{x}{R}\right|-\frac{x^4}{4}+\frac{R^2}{2}x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{R/\sqrt{2}}$$

$$V_2=\left[-\frac{R\sqrt{2}}{8}\left(\frac{R^3}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{R^2}{8}\frac{R}{\sqrt{2}}\frac{R}{\sqrt{2}}+\frac{R^4}{8}\frac{\pi}{4}-\frac{R^4}{16}+\frac{R^3}{4}\sqrt{2}-\frac{R^3}{6\sqrt{2}}\right]$$

$$\boxed{V_2 = \frac{R^4 \pi}{32} - \frac{R^4}{16} + \frac{\sqrt{2}}{6} R^3}$$

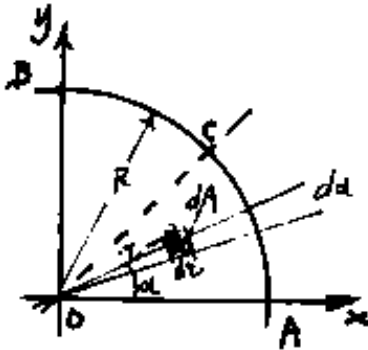
(torna come previsto)

Ci domandiamo se con altri algoritmi, il calcolo degli integrali doppi, possa essere semplificato. In questo caso sarebbe stato più semplice assumere come area elementare nel dominio quella espressa in coordinate polari,

Infatti: $z = r^2\cos^2\alpha + r\,\text{sen}\,\alpha$;

$$\boxed{dA = r\,d\alpha\,dr} \quad ; \quad dV = z\,dA$$

$$dV = \left(r^2\cos^2\alpha + r\,\text{sen}\,\alpha\right) r\,d\alpha\,dr$$

$$V = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \left(r^3\cos^2\alpha + r^2\,\text{sen}\,\alpha\right) dr \cdot d\alpha$$

$$V = \frac{R^4}{4}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \alpha}{2}\right)_0^{\pi/2} + \frac{R^3}{3}\left(-\cos\alpha\right)_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{V = \frac{R^4\pi}{16} + \frac{R^3}{3}}$$

(abbastanza più veloce).

$$V_1 = \frac{R^4}{4}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \alpha}{2}\right)_0^{\pi/4} + \frac{R^3}{3}\left(-\cos\alpha\right)_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{R^4}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{R^3}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

$$\boxed{V_1 = \frac{R^4\pi}{32} + \frac{R^4}{16} + \frac{R^3}{6}(2-\sqrt{2})}$$

$$V_2 = \frac{R^4}{4}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \alpha}{2}\right)_{\pi/4}^{\pi/2} + \frac{R^3}{3}\left(-\cos\alpha\right)_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$V_2 = \frac{R^4}{8}\left(0 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{R^3}{3}\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

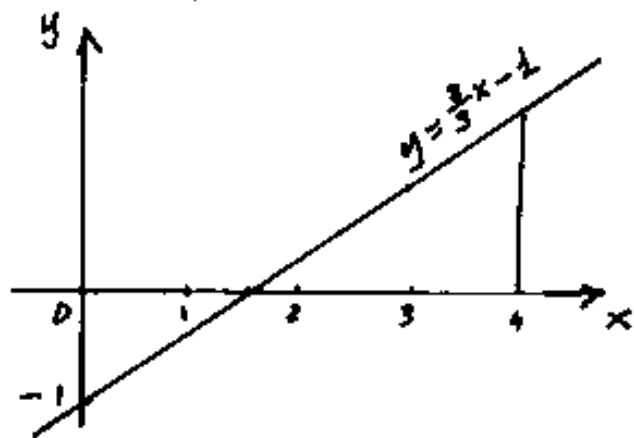
$$\boxed{V_2 = \frac{R^4 \pi}{32} - \frac{R^4}{16} + \frac{R^3\sqrt{2}}{6}}$$

E' facile verificare che: $V_1 + V_2 = V$.

Possiamo dire che, integrali che si risolvono per sostituzione trigonometrica, spesso è meglio in coordinate polari.

Avvertenze nel calcolo di volumi con integrali doppi di campo.

Talvolta può avvenire che ordinate negative rendano negativa un'area o un volume e quindi addizionandosi algebricamente dà per risultato la differenza delle aree o dei volumi.

Per chiarire questo concetto facciamo un esempio semplice; se la richiesta è:

"Calcolare l'integrale"

$$I = \int_0^4 \left(\frac{2}{3}x - 1\right) dx = \left(\frac{x^2}{3} - x\right)_0^4$$

$$I = \frac{16}{3} - 4 = \boxed{I = \frac{4}{3}}$$

ma se la richiesta è:

"Calcolare l'area delimitata dalla retta $y = \frac{2}{3}x - 1$, dall'asse x, dall'asse y e dall'ordinata $x = 4$" dobbiamo spezzare l'integrale cercando

$y = 0 = \frac{2}{3}x - 1 \longrightarrow$ per $x = \frac{3}{2}$ ed avremo:

$$A = \left| \int_0^{3/2} \left(\frac{2}{3}x - 1\right) dx \right| + \left| \int_{\frac{3}{2}}^{4} \left(\frac{2}{3}x - 1\right) dx \right|$$

$$A = \left| \frac{(3/2)^2}{3} - 3/2 \right| + \left| \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Big/ 3 + \frac{3}{2} \right| =$$

$$= \left| -\frac{3}{4} \right| + \left| \frac{4}{3} + \frac{3}{4} \right| = \left| -\frac{3}{4} \right| + \left| \frac{25}{12} \right|$$

$$\boxed{A = \frac{17}{6}}$$

Consideriamo la domanda: (Cfr. L.S. Feldhofer 1000 esercizi di analisi matematica Ed. L. di Giorgio – Torino 1946)(pag 554))

"Calcolare $I = \int_T\int y \, dx\, dy$

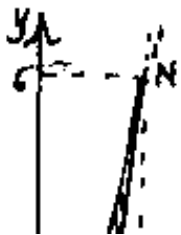
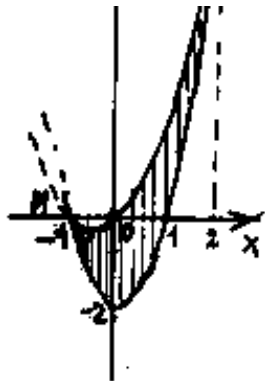
per il dominio T limitato dalle due parabole:

$$y = 2x^2 - 2$$

$$y = x^2 + x \text{ ."}$$

Notiamo subito che la $z = f(x,y) = y$, è un piano passante per l'asse x bisettore del diedro retto: $z\hat{O}y$. Questa osservazione interessa il calcolo dei volumi.

Rispondiamo alla domanda.

I punti M, N comuni alle due parabole sono; $M \equiv (-1, 0)$; $N \equiv (2, 6)$;

Dal disegno è possibile dire che conviene sezionare ad $x = \text{cost}$ (variabile indipendente) ed avremo: $\int^{+2}\int^{(x^2+x)}$

ed avremo:

$$I=\int_{-1}^{2}\left(\int_{2x^2-2}^{x^2+x} y\,dy\right)dx$$

$$I=\int_{-1}^{+2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{2x^2-2}^{x^2+x}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\left(x^4+2x^3+x^2-4x^4+8x^2-4\right)dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+2}\left(-3x^4+2x^3+9x^2-4\right)dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{3}{5}x^5+\frac{2}{4}x^4+\frac{9}{3}x^3-4x\right]_{-1}^{+2}=$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{3}{5}32+\frac{1}{2}16+3\cdot 8-4\cdot 2\right)-\left(+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-3+4\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{24}{5}\right)-\left(\frac{21}{10}\right)\right]=\boxed{I=\frac{27}{20}}$$

Delimitiamo il dominio nei tre quadranti degli assi che attraversa; al fine di cercare il volume fra il piano xy ;($z=0$); il piano: $z=y$ ed il bordo del dominio. Per il III° quadrante possiamo ancora andare ad x=cost ed avremo:

$$V_1 = \int_{-1}^{0}\left(\int_{(2x^2-2)}^{(x^2+x)} y\,dy\right)dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x\right]_{-1}^{0} = \boxed{V_1 = -\left(\frac{+31}{30}\right)}$$

auche per il IV quadrante tagliamo ad x=cost.

$$V_2 = \int_0^1\left(\int_{2x^2-2}^{0} y\,dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(-4x^4+8x^2-4\right)dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{5}x^5+\frac{8}{3}x^3-4x\right]_0^1 = \boxed{V_2 = -\frac{16}{15}}$$

Per il I quadrante non possiamo avere tutto ad x=cost però trasformare in x=f(y) le parabole complicheremmo i calcoli perciò spezziamo in due l'integrale:

$$V_3 = \int_0^1\left(\int_0^{x^2+x} y\,dy\right)dx + \int_1^2\left(\int_{2x^2-2}^{x^2+x} y\,dy\right)dx = \quad \text{(notare i limiti)}$$

$$V_3 = \frac{1}{2}\int_0^1\left[x^4+2x^3+x^2\right]dx + \frac{1}{2}\int_1^2\left[-3x^4+2x^3+9x^2-4\right]dx =$$

$$V_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{4}x^4 + \frac{x^2}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{9}{3}x^3 - 4x\right]_{+1}^{+2}$$

$$V_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{31}{30}\right] + \frac{1}{2}\left[\left(+\frac{24}{5}\right) - \left(-\frac{11}{10}\right)\right] = \left(\frac{31}{60}\right) + \left(\frac{59}{20}\right) = \boxed{V_3 = +\left(\frac{52}{15}\right)}$$

Si verifica: $V_1 + V_2 + V_3 = -\frac{31}{30} - \frac{14}{15} + \frac{52}{15} = \frac{87}{20} = V$

Funzioni implicite

Sia $f(x,y)$ una funzione nelle variabili x ed y, finita e continua in un campo C, e sia x_0 un valore della x, tale che, esista un unico valore della y in modo che si abbia $f(x_0,y)=0$.

E' bene osservare che non tutti i valori della x sono tali da rendere possibile: $f(x,y)=0$, (per esempio: $x^2+y^2-R^2=0$, i valori della x dovranno essere; $x \leq R$, poiché $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$ sarebbe immaginario). Per rendere monodroma, (cioè ad un sol valore,) l'espressione: $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$, possiamo scriverla per valori non negativi: $y=\left|\sqrt{R^2-x^2}\right|$, e per valori non positivi: $y=-\left|\sqrt{R^2-x^2}\right|$.

Se la molteplicità dei valori della y per ogni x_0, dipende dal campo della x, limiteremo il campo della x; se dipende dall'inversione di funzioni trigonometriche, considereremo solo i

valori del I quadrante, eventualmente con segno, ed escludendo $+2K\pi$. (Salvo che il problema non determini univocamente il quadrante).

Questa introduzione vuole essere un chiarimento sulle "Condizioni" poste alla validità del teorema del Dini. Cioè si è voluto far notare

che se una $f(x,y)=0$. non è possibile ridurla ad $y=f(x)$ (cioè non è possibile esplicitarla), occorre tener presente che vi possono essere campi o condizioni ove la funzione non esiste o è ambigua.

Teorema del Dini sulle funzioni implicite

"Sia $f(x,y)$ una funzione di x ed y, finita e continua in un campo C, e supponiamo che per essa siano verificate le seguenti ipotesi:

1°) Le coordinate (x_0, y_0), in un punto interno al campo C, annullino $f(x,y)$, cioè $f(x_0,y_0)=0$.

2°) In un intorno di x_0, y_0, ad esempio nel rettangolo R, di lati $2h_0$, $2k_0$ con centro in (x_0,y_0), la $f(x,y)$ abbia derivate parziali rispetto alle variabili indipendenti x, y, finite e continue.

3) In tutti i punti (x,y) del rettangolo R, cioè: $|x-x_0| \leq h_0$; $|y-y_0| \leq K_0$, si abbia: $f'_{(y)}(x,y) \neq 0$, cioè: $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\right)$.

In queste ipotesi si può determinare in un intorno I di x_0 una ed una sola funzione: $y = f(x)$ di x, la quale, nell'intervallo I, soddisfa la limitazione: $y_{(x)} < K_0$ e identicamente l'equazione $f(x,y) = 0$, cioè per

ogni valore x dell'intervallo I, si ha identicamente
$f(x_0, y_{(x)}) = 0$.

La funzione: $y_{(x)}$ è derivabile in x_0 ed ivi la sua derivata e' data dalla formula:

$$y'_{(x_0)} = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$
"

Esempi

Cerchiamo di capire!

Una funzione implicita $f(x,y) = 0$ e' come dire:
$z = f(x,y) = 0$, da cui: $dz = 0$. perciò:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

ed anche:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx = -\frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y}$$

cioè:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

(cioè la derivata della funzione esplicita è il rapporto delle derivate parziali della implicita preso di segno opposto.)

Facciamo un esempio di funzione esplicitabile.

$f(x,y)=0$ $\quad$ $x^2+y^2-R^2=0$ (forma implicita)

$y=\sqrt{R^2-x^2}$ (forma esplicita) $\quad$ $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x$; $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$;

$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ (che verifica il teorema del Dini)

Facciamo un esempio di funzione esplicitabile solo in x, non esplicitabile in y

$f(x,y)=0$ $\quad$ $y+\operatorname{sen} y-x=0$

Per la derivazione delle funzioni inverse abbiamo:

$x=y+\operatorname{sen} y$; $\frac{dx}{dy}=1+\cos y$; $\frac{dy}{dx}=y'=\frac{1}{1+\cos y}$

applicando il teorema del Dini:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (1 + \cos y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-(-1)}{1+\cos y} = \frac{+1}{1+\cos y} = y'$$

Come si vede occorrono coppie di valori x_0, y_0 tali che $f(x_0,y_0) = 0$ e che $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$: (condizioni 1) e 3) del Dini)

Esempio di funzione implicita non esplicitabile

$$y + \operatorname{sen} y - x + \log(x) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 + \frac{1}{x} = \left(\frac{-x+1}{x}\right); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (1 + \cos y)$$

$$\left(\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dy}{dx}\right); \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)}{x(1+\cos y)}}$$

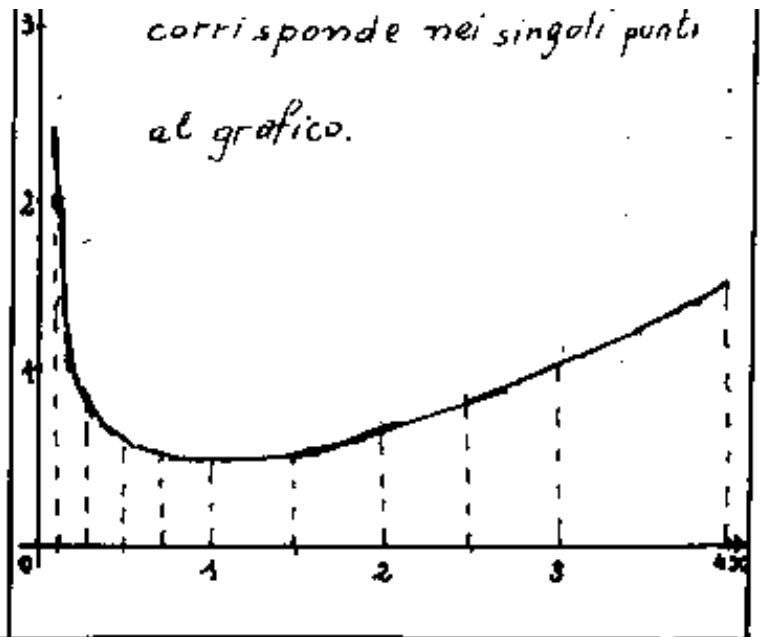
Facciamo una tabella delle coppie di valori x_0, y_0 che verificano l'equazione: $f(x_0, y_0) = 0$

Notiamo che: $(-x + \log|x|) < 0$ è sempre minore di zero, ed ammette due valori uguali per $x<1$ ad $x>1$, mentre per $x = 1$ ammette il massimo negativo (minimo) $= (-1)$.

Perciò affinché si verifichi l'equazione; $(f(x,y) = 0)$; $(y + \operatorname{sen} y)$ dovrà essere maggiore o uguale ad 1

x_0	y_0	$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)}{x(1+\cos y)}$	Grafico della funzione: $(y + \operatorname{sen} y - x + \ln x = 0)$
0,05	2,300081	−56,9436	y NB. La pendenza calcolata
0,25	0,871195	−1,8249144	
0,50	0.6156543	−0,55054	3 corrisponde nei singoli punti

0,50	0,6156543	− 0,55054
0,70	0,5413670	− 0,2307864
1	0,510973	0
1,5	0,561814	+ 0,180542
2	0,678909	+ 0,281174
2,5	0,83944	+ 0,359738
3	1,03932	+ 0,442437
4	1,614665	+ 0,78440

corrisponde nei singoli punti al grafico.

Retta tangente ad una curva espressa in forma implicita ($f(x,y)=0$)

Sappiamo che la retta tangente ad una curva espressa in forma esplicita $y=f(x)$, se è noto il punto di tangenza $T\equiv(x_T, y_T)$, ha per equazione:

$$(y-y_T)=y'_T(x-x_T)$$

od anche:

$$y=y'_T(x)+(f(x_T)-y'_T\cdot x_T)$$

Per curve in forma implicita, per il teorema del Dini:

$$(y-y_T)=\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)(x-x_T)$$

ed anche:

$$\frac{\partial f}{\partial x_T}(x-x_T)+\frac{\partial f}{\partial y_T}(y-y_T)=0$$

(equazione della retta tangente in T alla curva $f(x,y)=0$

Esempio: Le rette tangenti l'ellisse o l'iperbole aventi equazione: $\frac{x^2}{\ } + \frac{y^2}{\ } = 1$ ... $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ ...

equazione: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$, ove: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{a^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{b^2}$; sostituendo: $\dfrac{2x}{a^2}(x - x_T) \pm \dfrac{2y}{b^2}(y - y_T) = 0$; cioè: $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x x_T}{a^2} \pm \dfrac{y y_T}{b^2}$

ma: $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, perciò:

$$\boxed{\frac{x x_T}{a^2} \pm \frac{y y_T}{b^2} = 1}$$

E' l'equazione della retta tangente l'ellisse o l'iperbole nel punto $T \equiv (x_T, y_T)$ di tali curve.

Equazione del piano tangente alla superficie di equazione implicita: $f(x,y,z)=0$

(Coseni direttori della normale)

La simmetria della $f(x,y,z)=0$, ci mostra che noi potremmo prendere una qualsiasi delle tre variabili come dipendente. (cioè: $x=f(y,z)$; $y=f(x,z)$; $z=f(x,y)$)

Noi ci riferiamo a: $z_0=f(x_0,y_0)$.

Supponiamo che in un intorno di $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ sia: $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, estendendo quanto già detto per il piano tangente alla $z=f(x,y)$, la cui formula era:

$$(z-z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$$

Nel caso di equazione implicita avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0)=0$$

equazione del piano tangente alla superficie

equazione del piano tangente alla superficie nel punto: $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$.

Quindi i coseni direttori della normale alla superficie saranno rispettivamente: $\cos(\widehat{nx})$, $\cos(\widehat{ny})$; $\cos(\widehat{nz})$

$\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$	$\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$	$\dfrac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$

(a segni concordi.)

Funzioni implicite definite da sistemi di equazioni - Lo Jacobiano (determinante funzionale)

Se consideriamo l'intersezione fra due superfici espresse da: $f(x,y,z)=0$ ed $\varphi(x,y,z)=0$, se possiamo in esse esplicitare una stessa incognita, avremo: $z=f_1(x,y)$; $z=\varphi_1(x,y)$; uguagliando avremo: $f_1(x,y)-\varphi_1(x,y)=0$ che può scriversi: $g(x,y)=0$.
La "g" è una funzione, nella quale, se è possibile esplicitare la y avremo: $y=g(x)$ (che è la equazione della proiezione sul piano xy della curva intersezione.

Analogamente se possiamo esplicitare la x o la y avremo l'equazione della curva proiettata su yz o su xz.

Avendo due equazioni in tre variabili sono risolvibili solo due variabili in funzione della terza variabile

la terza variabile.

Ciò premesso supponiamo di avere p equazioni in $(n+p)$ variabili, (indichiamo con x le prime n variabili e con y le restanti p variabili), avremo il sistema:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots x_n; y_1, y_2 \dots y_p) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots x_n; y_1, y_2 \dots y_p) = 0 \\ - - - - - - - - - - - - - \\ f_p(x_1, x_2, \dots x_n; y_1, y_2 \dots y_p) = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che esista un punto $P_0 \equiv (a_1, a_2 \ldots a_n ; b_1, b_2, \ldots b_p)$ che soddisfi, sostituendo le sue coordinate, tutte le equazioni del sistema.

Consideriamo un intorno di P_0 dimensionato da:

$$|x_i - a_i| \leq h_i \quad ; \quad |y_j - b_j| \leq K_j \qquad \text{con: } \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots n \\ j = 1, 2, \ldots p \end{matrix} \; ,$$

nel quale le funzioni sono tutte finite e continue insieme alle loro derivate parziali prime.

Chiameremo Jacobiano o determinante funzionale il determinante:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_p}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{vmatrix}$$

costituito dalle derivate parziali prime delle singole funzioni rispetto alle $y_1, y_2 \dots y_p$.

Lo Jacobiano si indica anche con:

$$\frac{d(f_1, f_2, \dots f_p)}{d(y_1, y_2, \dots y_p)} \; ; \text{ oppure: } \frac{\partial(f_1, f_2 \dots f_p)}{\partial(y_1, y_2, \dots y_p)} \; ; \text{ oppure: } J\begin{pmatrix} f_1, f_2 \dots f_p \\ y_1 \;\; y_2 \;\; y_p \end{pmatrix};$$

oppure: $D\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_p \\ y_1 & y_2 & y_p \end{pmatrix}$; od anche $d\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_p \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_p \end{pmatrix}$.

(Troppi nomi per una stessa cosa).

Se lo Jacobiano è diverso da zero in un intorno di $(a_1, a_2 \ldots a_n)$, si ha un solo sistema di funzioni:

$$y_1 = y_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$$
$$y_2 = y_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_p = y_p(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

che in $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ prendono rispettivamente i valori: $(b_1, b_2 \ldots b_n)$ e soddisfano le equazioni del sistema.

Supponiamo di voler trovare l'equazione della retta tangente alla curva intersezione delle su=

perfici: $f(x,y,z)=0$; $\varphi(x,y,z)=0$, da cui siamo partiti. Supponiamo noto $P_0\equiv(x_0,y_0,z_0)$ comune alle due superfici, cioè verifica le loro equazioni e quindi appartiene alla curva intersezione. Lo Jacobiano sia diverso da zero: $\left(J\begin{pmatrix} f & \varphi \\ y & z \end{pmatrix} \neq 0\right)$

Possiamo definire: $y=y_{(x)}$; $z=z_{(x)}$; che soddisfano le equazioni e rappresentano le

equazioni di una curva Γ intersezione delle superfici.

La matrice funzionale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

basta abbia caratteristica 2 in un intorno di P_0 per poter affermare che le due superfici si intersecano secondo una curva Γ.

Se fosse diverso da zero il minore:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Le equazioni parametriche della curva Γ

le equazioni parametriche della curva Γ saranno: $x = x_{(z)}$; $y = y_{(z)}$.

La retta tangente a Γ avrà per equazione:

$$\frac{(x - x_0)}{dx} = \frac{(y - y_0)}{dy} = \frac{(z - z_0)}{dz}$$

ma essendo: $f(x, y, z) = 0$; $\varphi(x, y, z) = 0$,

anche:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = 0$$

e sostituendo a: dx, dy, dz, le quantita' proporzionali: $(x-x_0)$; $(y-y_0)$; $(z-z_0)$, avremo:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z-z_0) = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z-z_0) = 0}$$

Che sono le equazioni di due piani che intersecandosi definiscono la retta tangente alla curva Γ intersezione, quest'ultima, delle superfici: $f(x,y,z) = 0$ e $\varphi(x,y,z) = 0$.

Esempio numerico:

Siano:

$$f(x,y,z)=0 \quad = (X - z^3) = 0$$

$$\varphi(x,y,z)=0 \quad = (X^2 - y^3) = 0$$

eseguiamo le derivate parziali :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -3z^2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -3y^2 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

avremo la matrice funzionale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3z^2 \\ 2x & -3y^2 & 0 \end{vmatrix}$$

ove si nota che qualunque minore (del secondo ordine) si estragga da essa, è diverso da zero, salvo il punto: $(x=0 \ ; \ y=0 \ ; \ z=0)$, cioè la matrice ha caratteristica due.

Riscriviamo le due funzioni in x:

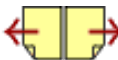
$$z = \sqrt[3]{x} \quad ; \quad y = \sqrt[3]{x^2}$$

(notiamo che rappresentano due cilindri aperti, uno in direzione y, l'altro in direzione z)

L'equazione dei due piani che defini=

L'equazione dei due piani che definiscono la retta tangente sarà:

$$\begin{cases} 1(x-x_0)+0(y-y_0)-3z_0^2(z-z_0)=0 \\ 2x_0(x-x_0)-3y_0^2(y-y_0)+0(z-z_0)=0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} (x - x_0) - 3z_0^2 (z - z_0) = 0 \\ 2x_0 (x - x_0) - 3y_0^2 (y - y_0) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo il punto $P_0 \equiv (1, 1, 1)$, esso verifica entrambe le equazioni delle superfici, perciò appartiene alla curva intersezione dei due cilindri, l'equazione dei piani per P_0 diventa:

$$\begin{cases} (x - 1) - 3(z - 1) = 0 \\ 2(x - 1) - 3(y - 1) = 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x + 0 - 3z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 0 + 1 = 0 \end{cases}$$

che è l'equazione della retta tangente in P_0 alla curva Γ.

Poiché: $x = z^3$; $x = \sqrt{y^3}$;

$$z^3 = \sqrt{y^3}$$

l'equazione: $z = \sqrt{y}$ sarà l'equazione della proiezione di Γ sul piano yz

---

Derivazione di funzioni composte

La funzione: $z = f(x, y)$, sia tale che x ed y siano parametricamente espresse da:

$$x = x(t) \quad \text{ed} \quad y = y(t)$$

ove t è divenuta variabile indipendente.

A noi interessa la derivata di z rispetto a "t" cioè,

$$z'_{(t)} = \frac{dz}{dt} \qquad \text{cioè: } dz = z'_{(t)}\, dt$$

ma noi sappiamo sviluppare il differenziale totale:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

per cui sostituendo:

$$z'_{(t)} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

È questa la formula per la derivazione delle funzioni composte

Funzioni composte

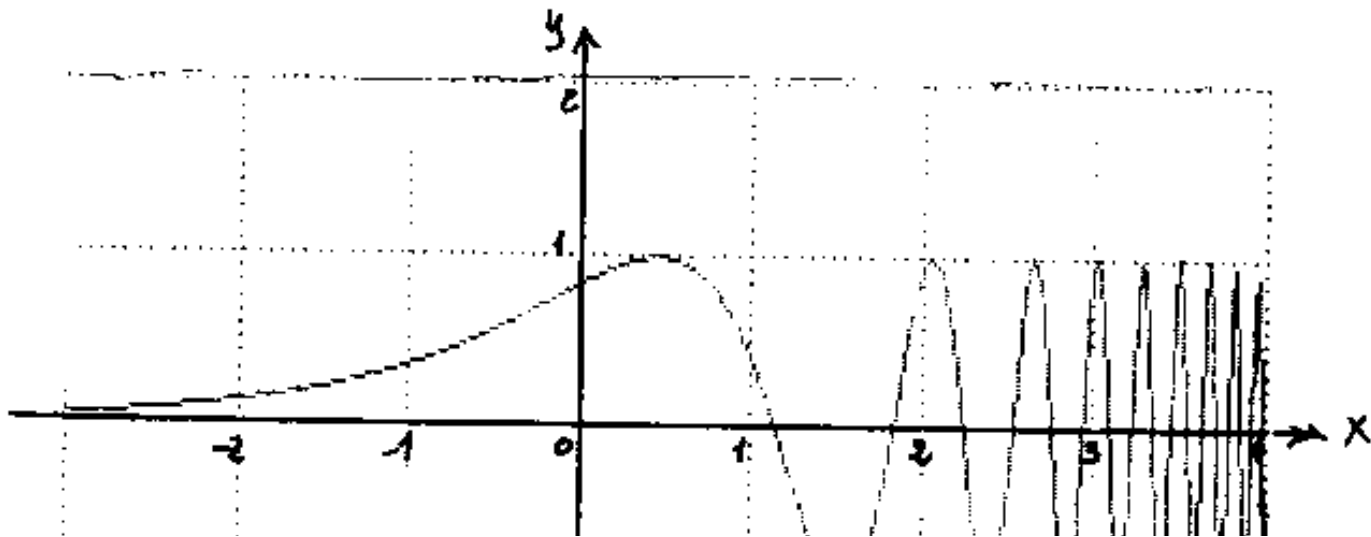
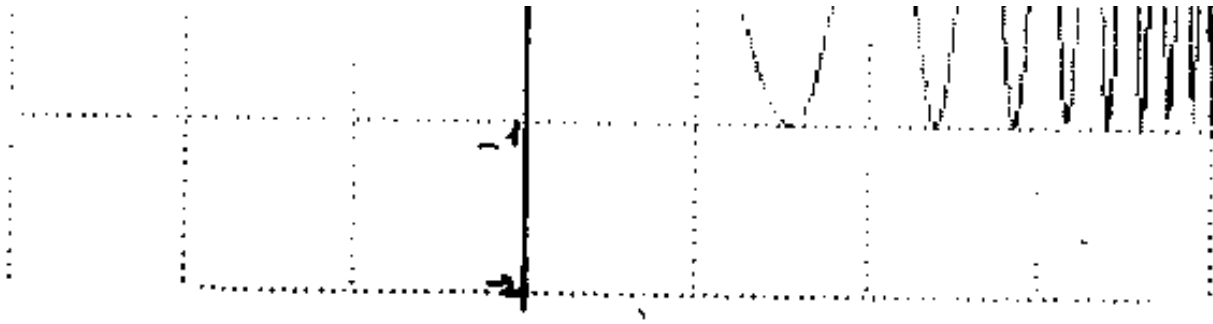
sia: $z = x^2 + y^2$ e sia $x = \ln|t|$; $y = \operatorname{sen}(t)$;

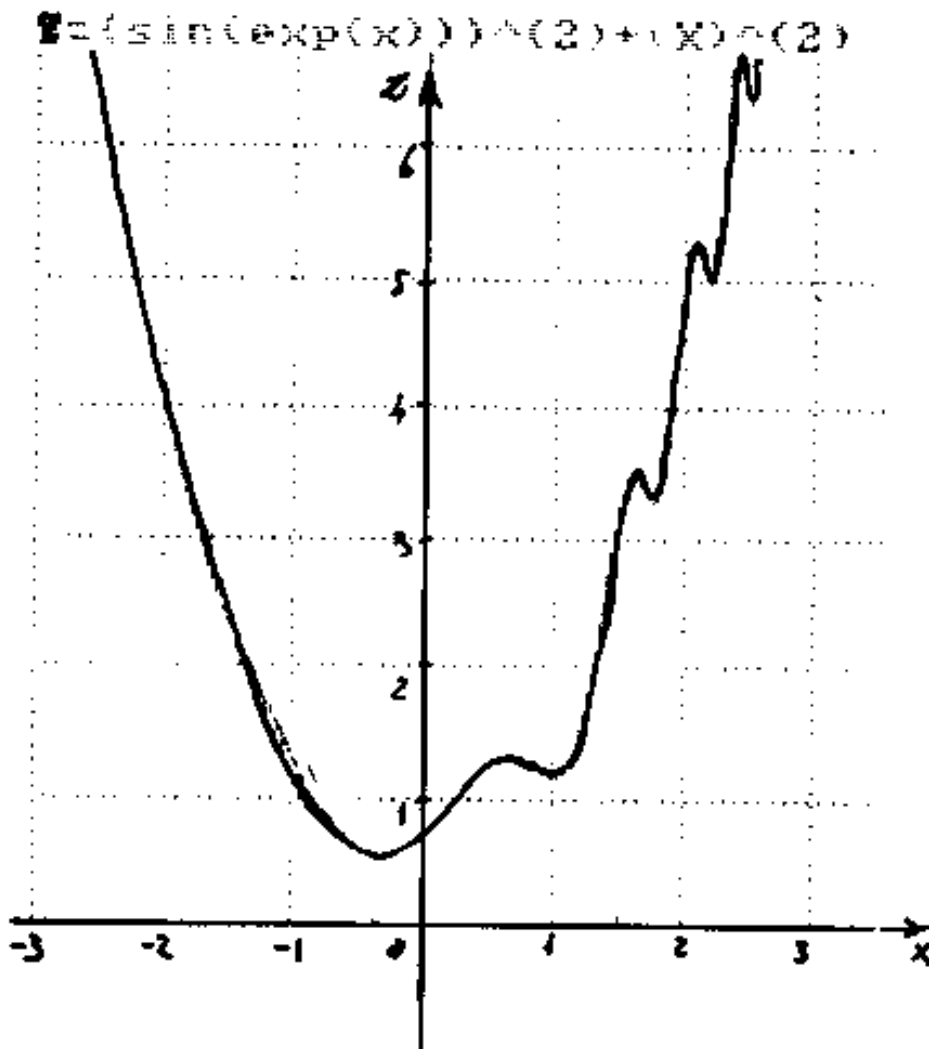
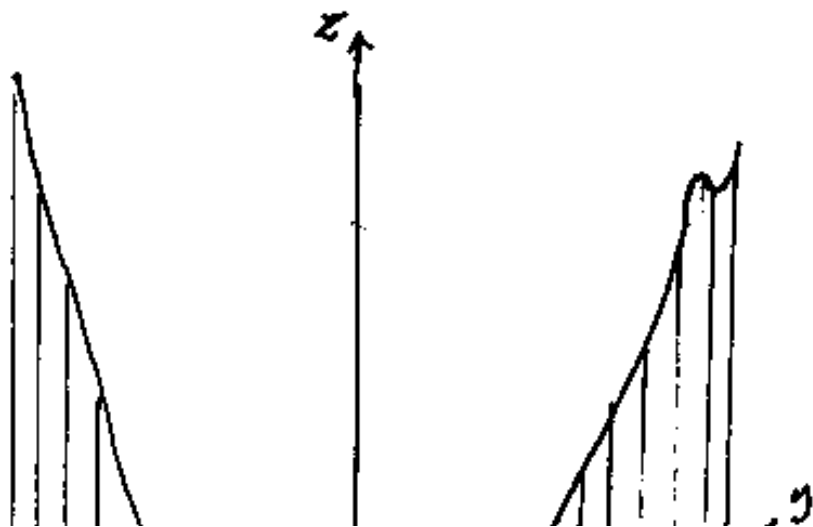
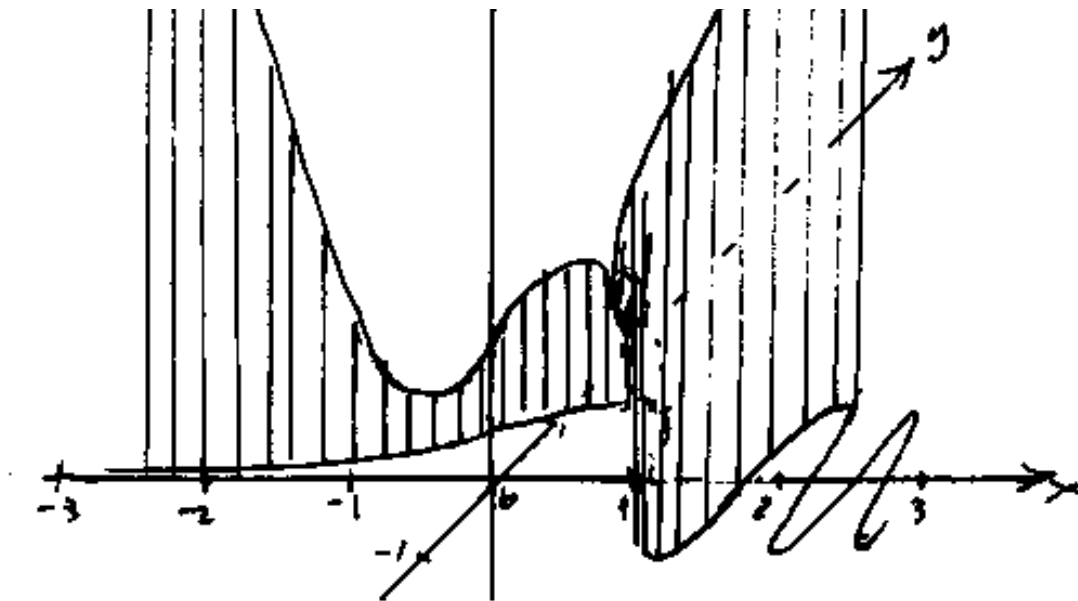
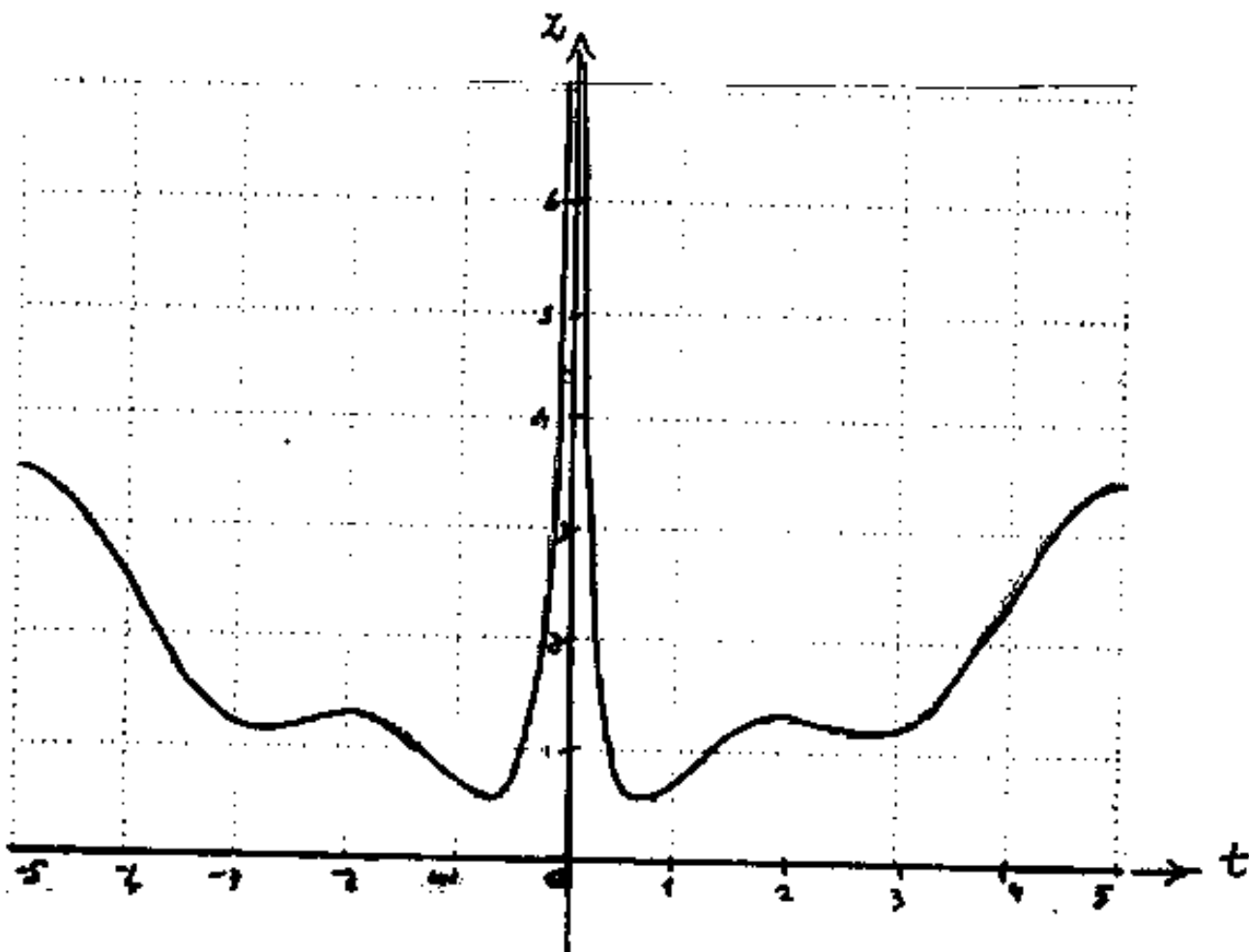
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} = \frac{1}{e^x} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \cos t = \sqrt{1 - y^2}$$

$$z'_{(t)} = (2x)\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = \boxed{z'_{(t)} = \frac{2x}{e^x} + 2y\sqrt{1-y^2}}$$

nell'esempio numerico osserviamo: se consideriamo "t" la variabile indipendente, essa può prendere solo valori positivi, affinché esista la $x = \ln|t|$, perciò poniamo il valore assoluto alla t. La $y = \operatorname{sen}(t)$, limita i valori della y fra -1 e $+1$. Se cerchiamo di realizzare il grafico notiamo che per ogni valore di "t" si ha un punto nel piano, cioè x e y non sono indipendenti, ma legati funzionalmente. $y = \operatorname{sen} t$; $x = \ln|t|$;

$t = e^x = \exp(x) = \operatorname{arcsen}(y)$; per cui:

$$y = \operatorname{sen}(\exp(x))$$

per ciascuno di questi punti vale la $z = x^2 + y^2$ cioè: $z = (\operatorname{sen}(\exp(x)))^2 + x^2$; abbiamo con ciò espresso il valore di z per ogni valore di x, cioè possiamo vedere la superficie proiettata

sul piano xz ed avremo il disegno che riportiamo a fianco.

Noi dobbiamo però pensare le ordinate z, uscenti dal grafico sul piano xy di cui alla pagina precedente, allora possiamo fare un disegno prospettico, ed otterremo una linea nello spazio tridimensionale

Se esprimiamo direttamente la z in funzione di t, cioè: $z = (\ln|t|)^2 + (\sin(t))^2$ otteniamo il grafico: (ove per $t_0 = 0 \to z = \infty$)

Cioè per $t = 0$ si ha $\log_e(0) = -\infty = x$, per avere: $x = -3$ occorre $t = 0{,}04978707$; per avere: $x = +3$ occorre $t = 20{,}0855392$.

Se a t attribuiamo il concetto: "tempo" la funzione composta che ci ha portati a rappresentare una linea in campo tridimensionale diventa una "traettoria" spaziale. Quindi mediante funzioni composte è possibile rappresentare traettorie spaziali.

Osservazioni sull'Jacobiano

Nello studio delle funzioni, lo Jacobiano é di fondamentale importanza.
Se funzioni sono lineari lo Jacobiano si riduce ai coefficienti.
Se le funzioni non sono indipendenti, il determinante è nullo.
Per stabilire se un sistema di funzioni si può invertire, infatti se lo Jacobiano, costruito con le derivate parziali prime, eseguite rispetto alle singole variabili risulta diverso da zero, esiste uno ed un solo sistema di funzioni:

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots y_n)$$

che inverte il sistema

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Se lo Jacobiano è nullo le n funzioni non sono indipendenti, ma legate da relazioni funzionali.

Più in generale si abbia m funzioni in n variabili e per esse facciamo la matrice funzionale, avente per elementi le derivate

parziali delle funzioni rispetto alle variabili:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Se la matrice ha caratteristica m, le m funzioni sono indipendenti; se ha caratteristica r, vuol dire che fra le m funzioni è possibile estrarre r funzioni indipendenti.

Se si hanno n funzioni: $y_1(x_1, x_2 \dots x_n)$; $y_2(x_1 x_2 \dots x_n)$ $\dots$ $y_n(x_1, x_2 \dots x_n)$ che sono funzioni di funzioni in quanto le x sono a loro volta funzioni delle ξ cioè $x_1 = x_1(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)$; $x_2 = x_2(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)$; $\dots$ $x_n = x_n(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)$ possiamo considerare le y_i come funzioni composte delle $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ (a mezzo delle $(x_1 x_2 \dots x_n)$

composte delle $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ per mezzo delle $(x_1, x_2 \ldots x_n)$,

Se vogliamo la derivata parziale di y_i rispetto a ξ_r

avremo:
$$\frac{\partial y_i}{\partial \xi_r} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi_r} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_r} + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \xi_r}$$

con $(i = 1, 2, 3 \ldots n)$; e $(r = 1, 2, 3, \ldots n)$ cioè:

$$\left(J\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}\right) \cdot \left(J\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix}\right) = \left(J\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix}\right)$$

che è il prodotto dei determinanti funzionali.

Inversione di un sistema di funzioni

Date due funzioni $u; v$ nelle due variabili x, y:

ove: $u = u(x,y)$ $\quad v = v(x,y)$

e sia diverso da zero lo Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto che verifica il sistema: $u_0 = u(x_0, y_0)$; $v_0 = v(x_0, y_0)$.

Poniamo:

$$\varphi(u, v, x, y) = u(x,y) - u = 0$$

$$\psi(u, v, x, y) = v(x,y) - v = 0$$

lo Jacobiano:

$$J = \frac{d(\varphi, \psi)}{d(x, y)} = \frac{d(u, v)}{d(x, y)} \neq 0$$

identico a quello già scritto e diverso da zero per ipotesi. Perciò esistono due e due sole funzioni che vogliamo trovare che sono: $x = x(u,v)$ ed $y = y(u,v)$ le quali soddisfino, nell'intorno di $P_0 \equiv (u_0, v_0)$. Chiameremo queste funzioni inverse

$P_0 \equiv (u_0, v_0)$. Chiameremo queste <u>funzioni inverse</u> delle funzioni date.

Differenziando le funzioni date si ha:

$$\left.\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\,; \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\,: \end{aligned}\right\}$$

sistema lineare rispetto a dx, dy

Se risolviamo il sistema nelle incognite dx, dy, con Cramer, notiamo che il determinante dei coefficienti è lo Jacobiano che abbiamo indicato con J, perciò sostituendo la colonna dei termini noti si ha:

$$dx = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} du & \frac{\partial u}{\partial y} \\ dv & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} ; \qquad dy = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & du \\ \frac{\partial v}{\partial x} & dv \end{vmatrix}$$

cioè:

$$dx = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial y}du - \frac{\partial u}{\partial y}dv\right) ; \qquad \left(dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)$$

$$dy = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dv - \frac{\partial v}{\partial x}du\right) \qquad \left(dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

perciò confrontando:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y} ; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial y} ;$$

$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}$;	$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x}$

Differenziando ulteriormente si ottengono d^2x; d^2y; e le derivate parziali del secondo ordine.

Dalle derivate parziali ora trovate, è possibile scrivere lo Jacobiano delle

funzioni inverse:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{-1}{J}\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{-1}{J}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \text{(sviluppando)}$$

$$= \frac{1}{J^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = \left(\frac{1}{J^2}\right)\left[J\right] = \frac{1}{J}$$

<u>Perciò lo Jacobiano delle funzioni inverse è il reciproco del determinante Jacobiano delle funzioni date.</u>

Il procedimento può estendersi ad n funzioni in n incognite: $y_i = y_i(x_1 x_2 \dots x_n)$ con $(i = 1, 2, \dots n)$ se lo Jacobiano è diverso da zero, esiste uno ed un solo sistema di funzioni inverse:

ad un solo sistema di funzioni inverse:

$$x_j = x_j(y_1 \ y_2 \ldots y_n) \quad \text{con } (j = 1, 2, \ldots n)$$

il cui Jacobiano è il reciproco di quello ottenuto con le funzioni date.

Massimi e minimi di funzioni implicite.

Sia data la funzione: $f(x,y) = 0$

(che in un certo campo ammetta coordinate che la soddisfano.)

abbiamo: $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$

Se esiste un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ in cui la y è max o min, in tale punto dovrà essere:

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0,y_0} = 0$; ed avremo anche: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0} = 0$

$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\right)$ (condizione per il teorema del Dini).

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$$

possiamo scrivere:

$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ ed anche: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(y')_{(x)} = 0$

derivando si ha:

derivando si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

cioè:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

nel punto (x_0, y_0) si ha: $y' = 0$ perciò:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0 y_0)} + y''_{(x_0)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0}$$

da cui:

$$y''_{(x_0)} = \frac{-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0 y_0)}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0 y_0)}}$$

I segni delle derivate parziali determinano il segno di $y''_{(x_0)}$, perciò se i segni sono concordi $y''<0$ si ha un MASSIMO

se i segni sono discordi avremo: $y''>0$ e quindi un minimo

ESEMPIO: $f(x,y) = (x^2+2y^2+2xy-2x-2) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+2y-2=0 \rightarrow y_0=(1-x_0)$ sostituendo:

$$f(x_0,y_0) = x_0^2+2(1-x_0)^2+2(x_0)(1-x_0)-2x_0-2=0$$

$$= x_0^2+2-4x_0+2x_0^2+2x_0-2x_0^2-2x_0-2=0$$

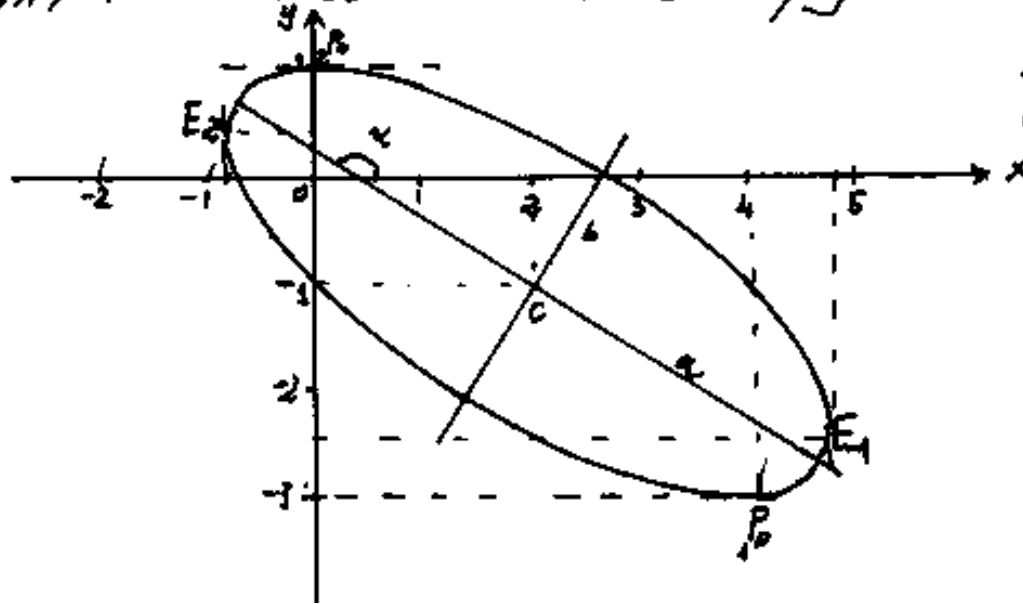
cioè $= x_0^2-4x_0=0$ $\begin{cases} x_0=0\ ;\ y_0=1 \\ x_0=4\ ;\ y_0=-3 \end{cases}$

$$\frac{\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x_0 y_0}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0 y_0}} = \frac{-2}{(4y+2x)}$$

$\frac{-2}{4\cdot 1+2\cdot 0} = -\frac{1}{2} < 0$ (massimo); $(0,1)$

$\frac{-2}{4(-3)+8} = +\frac{1}{6} > 0$ (minimo); $(4,-3)$

Infatti: la conica è l'ellisse in figura: $a=3,236068$

Infatti la conica è l'ellisse in figura: $a = 3,236068$

$b = 1,236068$

$x_c = 2$; $y_c = -1$

$\alpha = 148°;16'57''$

Estremi di una funzione implicita.

Abbiamo già detto che nella espressione di una funzione implicita: $f(x, y, z, t, \ldots) = 0$ non vi sono caratteristiche per riguardare una o più variabili come dipendenti o come indipendenti, perciò le nostre dizioni di massimo e di minimo, si riferivano alla variabile dipendente esplicitata; (normalmente: $y = f(x)$ nel piano e $z = f(x,y)$ nello spazio tridimensionale) non hanno più senso e si possono chiamare: estremi delle variabili.

L'esempio precedente calcolava gli estremi in y

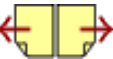
calcoliamo ora gli estremi in x. $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 2x = 0$

cioè: $(x = -2y)$; sostituendo: $4y^2 + 2y^2 - 4y^2 + 4y - 2 = 0$; $y_0 = -1 \pm \sqrt{2}$

$E_1 \equiv (4{,}8284 ; -2{,}4142)$; $E_2 \equiv (-0{,}8284 ; +0{,}4142)$

$$-\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{x_0 y_0}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}} = \frac{-(+4)}{2x + 2y - 2} \begin{cases} E_1 < 0 & \text{(massimo valore della } x) \\ E_2 > 0 & \text{(minimo valore della } x) \end{cases}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{x_0 y_0}$ $\quad \ldots > 0$ (minimo valore della x)

Anche: $f(x,y,z)=0$, ammetterà estremi assoluti e max e min relativi per tutte le variabili riguardate come dipendenti; per es. $(x+y^2+\operatorname{sen} z)=0$, in quanto sono esplicitabili le tre variabili; è facile vederne il campo: $-x=y^2+\operatorname{sen} z$; $y=\sqrt{-x-\operatorname{sen} z}$; $z=\operatorname{arcsen}(-y^2-x)$; $x \leq +1$; per $x=+1$; $z=\frac{3}{2}\pi$; $y=0$. (max valore della x).

L'identità di Eulero sulle derivate delle funzioni omogenee

Premettiamo delle definizioni:

Diciamo: <u>monomio</u> il prodotto di fattori espressi da numeri, lettere, simboli di variabili.

I simboli delle variabili possono presentarsi elevati a potenza, in questo caso dicesi <u>grado del monomio</u> la somma degli esponenti

esempio: $3xy^3z^2$ è un monomio di grado $1+3+2=6$.

Dicesi <u>polinomio</u> la somma algebrica di monomi

Dicesi <u>grado di un polinomio</u> il grado massimo dei monomi che lo costituiscono.

esempio: $ax + bxy + z^3 - 5xz^4$ (quinto grado)

<u>Un polinomio si dice omogeneo</u> quando tutti i monomi che lo costituiscono sono dello stesso grado.

Un polinomio con variabili è una funzione algebrica. Se i singoli monomi di una funzione sono affetti da operatori trascendenti (log sen, cos, tang ecc) la funzione è detta trascendente.

Un funzione: $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ definita in tutto lo spazio n dimensionale salvo casi particolari di punti su piani passanti per l'origine, si dice: omogenea, o meglio, omogenea positiva rispetto alle variabili: $x_1, x_2, \ldots x_n$, quando in qualunque punto della funzione, posto un qualunque parametro $t > 0$ (positivo), esprimendo le x_i come prodotto $t \cdot x_i$, si abbia:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

ove "m" è il grado di omogeneità.

Se sono nulle tutte le coordinate variabili, cioè $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$; si ha:

$$f(0, 0, \ldots 0) = t^m f(0, 0, \ldots 0) \text{ per cui}$$

$f(0, 0, \ldots 0) = 0$ (non mutando se moltiplicata per $t^m > 0$ avendo $tx_1 = tx_2 = \ldots tx_n = 0 = x_1 = x_2 = \ldots x_n$.

Facciamo alcuni esempi:

1) funzioni omogenee di grado zero

$$u = \frac{3x}{2z+5y} = \frac{3tx}{2tz+5ty} = \frac{t}{t}\,\frac{3x}{2z+5y} = t^0\left(\frac{3x}{2z+5y}\right)$$

$$u = \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2z+5y}\right) = t^0 \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2z+5y}\right)$$

(In quanto di grado zero ($t^0=1$) posso porre in evidenza fuori di "f" = (sen), il fattore t^m ...)

Massimi e minimi condizionati

Abbiamo già accennato che p equazioni in (m+p) incognite permettono di risolvere (esplicitare) p incognite in funzione delle restanti m variabili (arbitrarie e quindi indipendenti). Anzi per meglio focalizzare questo, abbiamo indicato con y_i le p variabili esplicitabili e con x_j le restanti m variabili.

Consideriamo ora la funzione:

$$f(x_1, x_2, \dots x_m; y_1, y_2, \dots y_n)$$

nelle m+n variabili legate fra loro da "n" equazioni indipendenti del tipo:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots x_m; y_1, y_2, \dots y_n) = 0 \quad con\ (i = 1, 2 \dots n)$$

Se le n equazioni sono indipendenti, la matrice funzionale ha caratteristica "n"; cioè lo Jacobiano $\left(\frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{d(y_1, y_2, \dots y_n)} \neq 0\right)$ è diverso da zero, e possiamo riguardare le y_i come funzioni delle X.

possiamo riguardare le y_i come funzioni delle x.
cioè, di m variabili indipendenti.

Gli estremi della:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m : y_1, y_2, \ldots y_n)$$

si hanno nei punti ove risulta $df = 0$

cioè:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f}{\partial_2} dy_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n} dy_n = 0$$

Se una funzione omogenea in due variabili è uguagliata a zero si può dividere per la variabile a massimo grado riducendo così l'espressione ad una sola variabile e ciò può consentire risoluzioni facilitate. (Esempio)

$$a x^3 y + b x^2 y^2 + c x y^3 + \cdot\ e y^4 + x^4 = 0$$

dividendo per x^4:

$$a\left(\frac{y}{x}\right) + b\left(\frac{y}{x}\right)^2 + c\left(\frac{y}{x}\right)^3 + e\left(\frac{y}{x}\right)^4 + 1 = 0$$

ove $\left(\frac{x}{y}\right)$ è la nuova variabile che può essere una nuova incognita più facile a calcolarsi.

<u>Si noti che tutte le funzioni omogenee positive di grado m possono considerarsi integrali dell'equazione alle derivate parziali.</u> (vedi, più avanti, il capitolo equazioni differenziali). (Teorema di Eulero)

Se, per rimanere in campo reale, consideriamo "m" <u>intero</u>, e si ha che la relazione:

$f(tx, ty, \ldots tx) = t^m(x, y, \ldots y)$

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

è verificata qualunque sia il valore di t positivo o negativo diremo che l'espressione è Omogenea di grado m. (si omette la parola positiva)

La più generale funzione omogenea di di grado m ha la forma: $x_1^m \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_n}{x_1}\right)$

con φ = funzione arbitraria nei suoi argomenti.

Se poniamo: $u_i = t x_i$, abbiamo:

$$\sum_1^n f(u_i) = t^m \sum_1^n f(x_i)$$

ed essendo:

$$\frac{du_i}{dt} = x_i$$ derivando si ha:

$$\sum_1^n \frac{\partial f(u_1, u_2 \ldots u_n)}{\partial x_i} x_i = \frac{\partial t^m \sum_1^n f(x_i)}{\partial t} = m t^{m-1} \sum_1^n f(x_i)$$

e moltiplicando per t e sostituendo $u_i = x_i \cdot t$:

si ha:

$$\boxed{\sum_1^n \frac{\partial f(u_1, u_2, \ldots u_n)}{\partial x_i} u_i = m f(u_1, u_2, \ldots u_n)}$$

che è <u>l'identità di Eulero</u> e può scriversi:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = m f(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

e si enuncia:

<u>Se una funzione è omogenea di grado m, in ogni punto interno al campo di esistenza, la somma dei prodotti delle coordinate di quel punto, per le corrispondenti derivate parziali della funzione (rispetto alla coordinata moltiplicatore) calcolate nello stesso punto vale il prodotto</u>

tore) calcolate nello stesso punto, vale il prodotto del valore della funzione per il grado di omogeneità.

Per due sole variabili, in ogni punto P della sua esistenza, $f(x,y)=z$, l'identità di Eulero sarà:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P x_P + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P y_P = m \cdot f(x_P, y_P)$$

esempio:

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 \; ; \; x_P\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P = (2ax_P + by_P)x_P \; ; \; y_P\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P = (bx_P + 2cy_P)y_P = 2f(x_P, y_P)$$

Resta valida l'espressione:

$$f(tx_1 + tx_2 + tx_3 + \dots tx_n) = t^m f(x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n)$$

ove: t^m è in evidenza rispetto ad. f

Vogliamo ora dimostrare che la derivata di una funzione omogenea di grado "m" è una funzione omogenea di grado: "m-1"

Sappiamo che:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

cioe:

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots tx_n)}{\partial x_i} \frac{d\, tx_i}{dx_i} = t^m \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial x_i}$$

essendo: t^m = costante ed essendo $\frac{d\, t(x_i)}{dx_i} = t$

abbiamo:

$$\left(\frac{\partial f(tx_1, tx_2 \dots tx_n)}{\partial x_i}\right) t = t^m \left(\frac{\partial f(x_1, x_2 \dots x_n)}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n)}{\partial x_i} = t^{m-1}\left(\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_i}\right)$$

che è la condizione di omogeneità; la relazione può vedersi meglio se indichiamo le derivate parziali rispetto ai x_i col simbolo:

$$f_{x_i}(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^{m-1} f_{x_i}(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

differenziando le n equazioni implicite:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} dy_n = 0$$

con $(i = 1, 2, \dots n)$ risolvendo questo sistema di n equazioni rispetto agli n differenziali dy_1, dy_2, ... dy_n, e sostituendone i valori nell'espressione differenziale di $df = 0$ otterremo una relazione del tipo:

$$L_1 dx_1 + L_2 dx_2 + \dots L_m dx_m = 0$$

e poiché dx_1, dx_2, dx_m sono arbitrari (piccoli non nulli) dovrà essere:

$$L_1 = 0 \;;\; L_2 = 0 \;;\; \dots L_m = 0$$

risolvendo queste "m" equazioni, nelle "m" incognite x_1, x_2, ... x_m troviamo le coordinate, dalle quali, mediante il sistema in cui abbiamo esplicitato le y cioè y_1, y_2, ... y_n possiamo calcolare

le y stesse.

Se queste coordinate verificano il sistema dato, cioè se sono punti della $Z=f(x;y)$ ove $dZ=0$, sono le coordinate estremanti della Z.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Per eliminare i differenziali $dy_1, dy_2, \dots dy_n$; nelle n equazioni differenziali:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m}dx_m+\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2}dy_2+\dots+\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n}dy_n=0$$

con: $(i=1,2,\dots n)$, ed arrivare al sistema:

$L_1=0$, $L_2=0$, .. $L_m=0$ (sopradetto)

moltiplichiamo per $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ (per ora indeterminate) le stesse n equazioni differenziali e sommiamole alla:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m+\frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial f}{\partial y_2}dy_2+\frac{\partial f}{\partial y_n}dy_n=0$$

avremo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\right)dx_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}\right)dx_2+\dots$$

$$\dots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m}\right)dx_m+\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}\right)dy_1+\dots+\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n}\right)dy_n=0$$

data l'arbitrarietá dei coefficienti λ_i, possiamo sce=gliergli in modo che risultino nulli i coefficienti di:

glierli in modo che risultino nulli i coefficienti di: $dy_1, dy_2, \ldots dy_n$, ed essendo la $\mathcal{E}=0$, dovranno essere nulli anche i coefficienti di $dx_1, dx_2 \ldots dx_m$.

Cioè dovranno soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_r} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}\right) = 0 & (r = 1, 2, 3, \ldots m) \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial y_s} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_s}\right) = 0 & (s = 1, 2, 3, \ldots n) \end{cases}$$

Complessivamente abbiamo così il sistema di n equazioni implicite che determinano la funzione z e le $(n+m)$ equazioni del sistema ora scritto; abbiamo così $(2 \cdot n + m)$ equazioni per risolvere le $(n+m)$ coordinate degli estremi di z e gli (n) moltiplicatori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

Si noti che ciò equivale a cercare gli estremi liberi della funzione: $F = f + \varphi_1 \lambda_1 + \varphi_2 \lambda_2 + \cdots \varphi_n \lambda_n$, nella quale si considerano indipendenti tutte le variabili x_i ed y_j ed i moltiplicatori λ come parametri costanti.

In pratica si opera così e si dice di aver applicato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esempio

Si cerchi la distanza di un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ da un piano $ax + by + cz + d = 0$

(Problema che abbiamo già risolto per altra via)

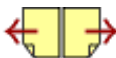
(Problema che abbiamo già risolto per altre vie.)

La distanza è la minima fra le distanze di P_0 dai punti del piano

L'equazione del piano è la $\varphi(x,y,z) = 0$.

La funzione da estremare è:

$$\delta^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

La funzione: $F = \delta^2 + 2\lambda\varphi$.

Annullando le tre derivate parziali della F rispetto ad x, y, z; cioè: $\frac{\partial F}{\partial x}=0$; $\frac{\partial F}{\partial y}=0$; $\frac{\partial F}{\partial z}=0$ abbiamo: $(x-x_0)+\lambda a=0$; $(y-y_0)+\lambda b=0$; $(z-z_0)+\lambda c=0$; moltiplicando rispettivamente per a, b, c e sommando, otteniamo: $ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)+\lambda(a^2+b^2+c^2)=0$

ma: $ax+by+cz=-d$, per cui:

$$\lambda=\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$$

ma abbiamo anche:

$$\delta^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\delta=\lambda\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$$ sostituendo λ

$$\delta_{min}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Risultato che già conoscevamo e che poteva ottenersi direttamente come distanza di piani paralleli di cui

uno dato e l'altro per $P \equiv (x_0', y_0', z_0')$.

Cambiamento di variabili

Abbiamo già avuto occasione di sostituire certe espressioni o funzioni di variabili con una nuova variabile che semplifichi i calcoli. Un esempio banale è l'integrazione col metodo di sostituzione. Vediamo i criteri che conducono alla sostituzione.

---

1) Cambiamento della variabile indipendente nelle espressioni differenziali di una sola variabile.

Sia: $y = f(x)$ e sia: $V = V(x, y, y', y'', y''' \ldots)$ una espressione in x, y e le derivate: y', y'', y'''....

Cambiamo la variabile indipendente "x" con la:

$$x = x(t)$$

(ove: $x(t)$ è una funzione continua e derivabile fino all'ordine che potrà occorrerci)

Per l'invarianza del differenziale primo per le funzioni di una sola variabile:

$$y'_{(x)} = \frac{dy}{dx}$$

(la derivata è un rapporto di differenziali)

per definizione:

$$dy = y'_t \, dt$$

$$dx = x'_t \, dt$$

con y ed x funzioni di t

$$dy = y'_x \, dx$$

$$dy = y'_x \, x'_t \, dt$$

ed ancora:

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Quindi questa formula vera per definizione se la x è la variabile indipendente, vale anche se "y" ed "x" si pensano funzioni di una variabile "t" e dy e dx sono calcolati rispetto a quest'ultima variabile

differenziando il quoziente: dy/dx si ha:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\quad} = \frac{d(y'_x)}{\quad} = y'' = \frac{\frac{d(dy)}{dx} \cdot dx - dy \, \frac{d(dx)}{dx}}{}$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d(y'_x)}{dx} = y''_{(x)} = \frac{\frac{d^2y}{dx}\cdot dx - dy\,\frac{d^2x}{dx}}{(dx)^2}$$

$$\boxed{y''_{(x)} = \frac{d^2y\; dx - dy\, d^2x}{dx^3}}$$

derivata seconda di $y_{(x)}$ per i differenziali di y e di x.

sostituiamo al denominatore:

$$dx^3 = (x'_t dt)^3$$

avremo:

$$y''_{(x)} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{(x'_t)^3}$$

cioè:

$$\boxed{y''_x = \frac{x'_{(t)} \cdot y''_{(t)} - y'_{(t)} \cdot x''_{(t)}}{(x'_t)^3}}$$

Con ciò si sono espresse anche le derivate seconde di $y_{(x)}$ in funzione delle derivate rispetto a t.

ESEMPIO calcolare il raggio di curvatura in coordinate parametriche:

$$x = x(t) \; ; \quad y = y(t)$$

$$\rho \quad (1 + y'^2)^{3/2}$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

sostituendo e semplificando:

$$R = \frac{\left(x'^2_{(t)} + y'^2_{(t)}\right)^{3/2}}{x'_{(t)}\, y''_{(t)} - y'_{(t)} \cdot x''_{(t)}}$$

$$y'''_{(x)} = \frac{d\left(y''_{(x)}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{d^2y \cdot dx - d^2x\,dy}{(dx)^3}\right)}{dx}$$

$$y'''_{(x)} = \frac{\left(d^3y\,dx + d^2x\,d^2y - d^3x\,dy - d^2x\,d^2y\right)dx^3}{(dx)^6} \Big/ dx \; -$$

$$- \frac{\left(d^2y\,dx - d^2x\,dy\right)3\,dx^2 \cdot d^2x}{(dx)^6} \Big/ dx$$

$$\boxed{y'''_{(x)} = \frac{dx\left(d^3y \cdot dx - d^3x\,dy\right) - 3d^2x\left(d^2y\,dx - d^2x\,dy\right)}{(dx)^5}}$$

sostituendo in (t)

$$\boxed{y'''_{(x)} = \frac{x'_{(t)}\left(y'''_{(t)} \cdot x'_{(t)} - x'''_{(t)}\,y'_{(t)}\right) - 3x''_{(t)}\left(y''_{(t)}\,x'_{(t)} - x''_{(t)}\,y'_{(t)}\right)}{\left(x'_{(t)}\right)^5}}$$

In modo analogo si calcolano le derivate successive. Se x ed y sono funzioni di più

successive. Se x ed y sono funzioni di più variabili: $x = \varphi(t,u)$; $y = \psi(t,u)$; avremo:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi}{\partial u}du ; \qquad dy = \frac{\partial\psi}{\partial t}dt + \frac{\partial\psi}{\partial u}du ; \\ d^2x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial u}dt\,du + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial t}d^2t + \frac{\partial\varphi}{\partial u}d^2u ; \\ d^2y = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial u}dt\,du + \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial t}d^2t + \frac{\partial\psi}{\partial u}d^2u ; \end{cases}$$

da sostituire nelle espressioni trovate.

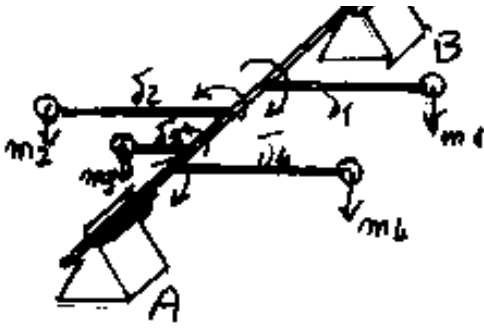
Il calcolo dei baricentri

Il calcolo, in generale, investe il problema dell'equilibrio, di cui si è già fatto cenno, e che tratteremo in seguito.

Occorre considerare due aspetti del calcolo; cioè: "per masse puntiformi" o "per masse continue".

Poiché una volta trovato il baricentro G di una massa continua, per una classe di problemi, posso pensare l'intera massa come fosse concentrata in G, ai fini di ulteriori calcoli; dobbiamo fare molta attenzione ai legami che connettono fra loro le masse puntiformi trattate.

Definizione di momento statico

B

Consideriamo un'asse libero di ruotare su due appoggi A e B. Dall'asse si diramano tanti bracci, o una piastra, o altre connessioni che, in campo gravitazionale permettono alle masse $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$, rispettivamente distanti $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots \delta_n$, dal piano verticale per l'asse,

di trasmettere all'asse stesso, le azioni di rotazione: $m_1\delta_1 = S_1$; $m_2\delta_2 = S_2$; $m_3\delta_3 = S_3$; ... $m_n\delta_n = S_n$. Tali azioni di ruotazione sono dette "momenti statici" e poiché le azioni di rotazione possono avere versi opposti, i momenti statici avranno segno opposto. Per un sistema piano di masse complanare con l'asse, assunto un segno arbitrario per le distanze dalle due parti rispetto all'asse avremo che l'azione complessiva:

$$S_{AB} = \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i$$

del sistema di masse rispetto all'asse AB è detta momento statico delle masse $\sum_{i=1}^{n} m_i$ rispetto all'asse AB.

Si ha l'equilibrio alla ruotazione su AB se $S_{AB} = 0$

Noi diremo Baricentro di un sistema

di masse quel punto G ove pensandovi concentrata la sommatoria delle masse, si ottiene lo stesso momento statico ottenuto dalle singole masse, e cio' rispetto a qualunque asse arbitrario.

Se l'asse è baricentrico è evidente che il momento statico è nullo.

In un sistema piano, se gli assi di riferimento sono x ed y avremo: $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

$S_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ (momento statico rispetto ad y)

$S_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$ (" " " ad x)

$$\left.\begin{aligned} x_G &= \frac{S_y}{M} = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i} \\ y_G &= \frac{S_x}{M} = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i} \end{aligned}\right\}$$ coordinate di G

Se il sistema di masse è uniformemente distribuito nel piano. (ciò avviene per una lastra di spessore costante s e densità costante γ) avremo che l'elemento di massa

infinitesimo dm è dato dal prodotto del volume infinitesimo dV per la densità: ($dm = \gamma dV$) e quest'ultimo dall'area infinitesima per lo spessore: ($dV = s\,dA$) cioè: $\boxed{dm = (\gamma s)\,dA}$ la massa elementare "dm" è proporzionale all'area elementare "dA"

dA
s

Perciò estendendo ai sistemi continui i risultati ottenuti per le masse puntiformi avremo:

$$M = \gamma_s \int dA = \gamma_s A$$

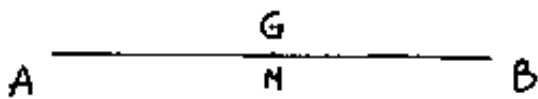
$$S_y = \gamma_s \int_A x \, dA = \int_M x \, dm$$

$$S_x = \gamma_s \int_A y \, dA = \int_M y \, dm$$

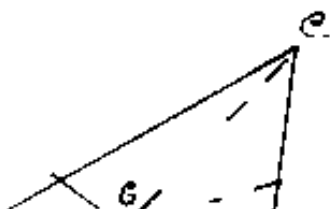
$$\frac{S_y}{M} = x_G = \frac{\gamma_s \int x \, dA}{\gamma_s \int dA} = \boxed{x_G = \frac{S_y}{A}}$$

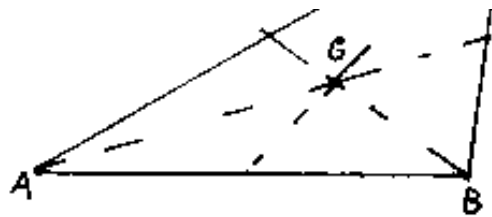
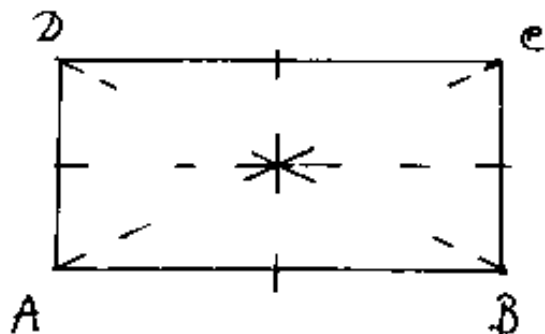
$$\frac{S_x}{M} = y_G = \frac{\gamma_s \int y \, dA}{\gamma_s \int dA} = \boxed{y_G = \frac{S_x}{A}}$$

Facciamo alcuni esempi di Baricentri

A —— G/M —— B

Di un segmento G = punto medio

C

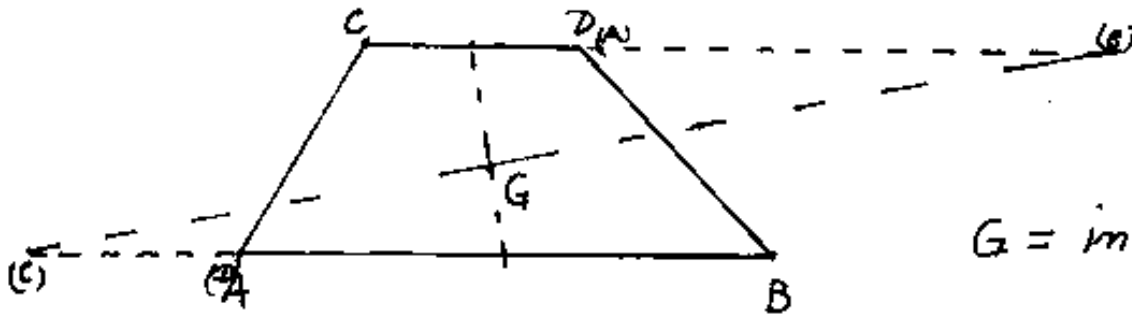
G

di un triangolo:

G = incontro mediane

G = incontro mediane

di un rettangolo (o quadrato)

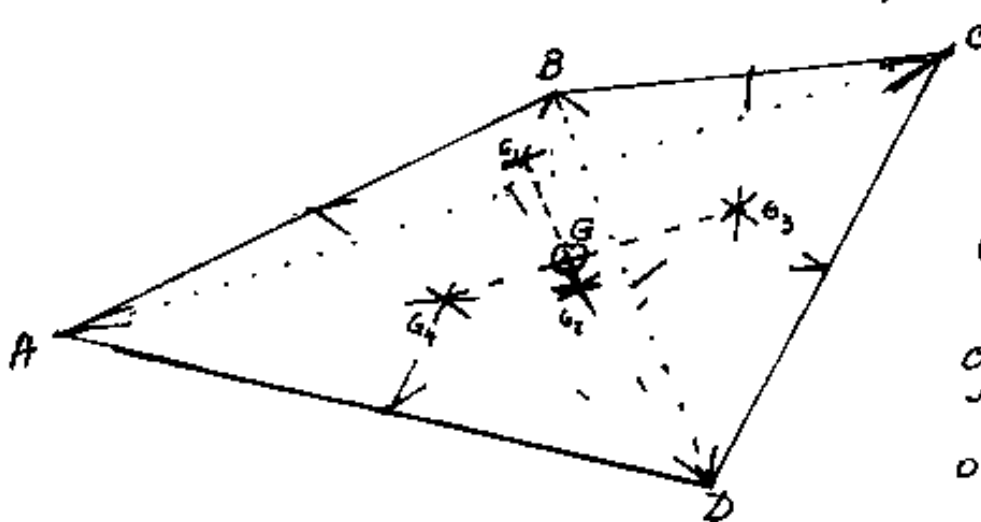
G = incontro mediane

ed anche: incontro diagonali.

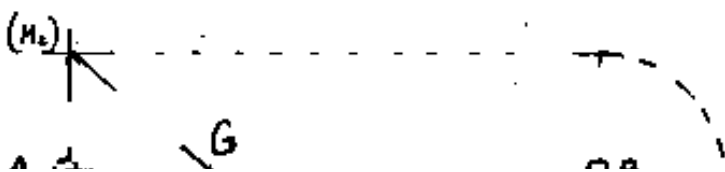
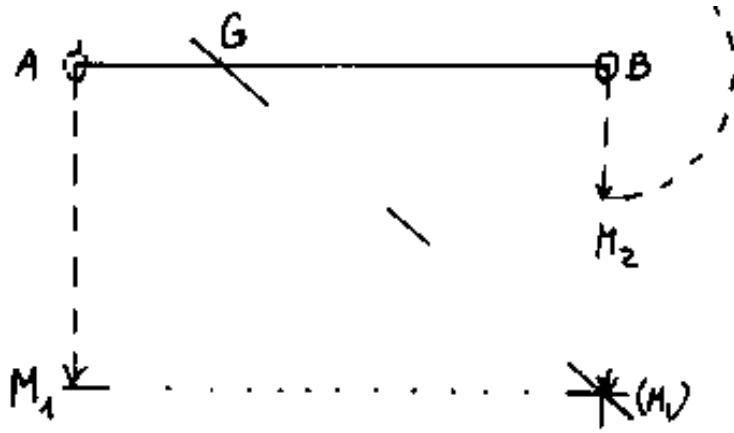
di un trapezio

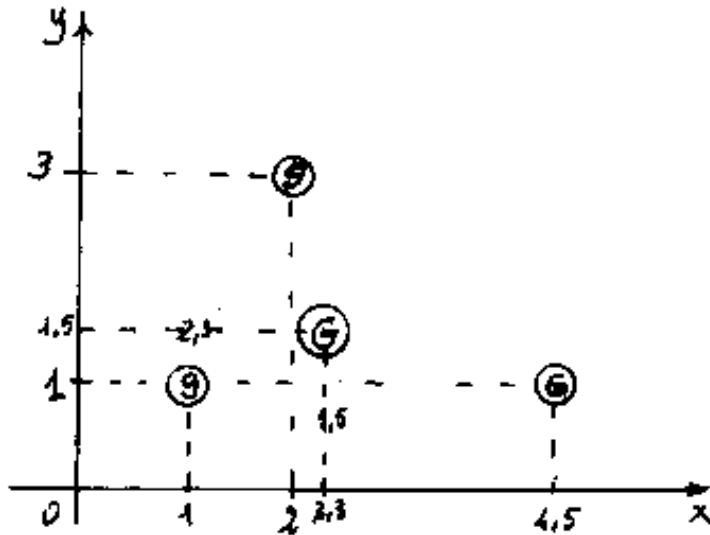
C D (a) (a) G (c) (b) A B

G = incontro sulla mediana delle basi con la congiungente gli estremi della somma delle basi ottenuta aggiungendo a ciascuna base l'altra (da bande opposte).

di un quadrilatero

B C G₄ G G₃ G₁ A G₂ D

G = sulle congiungenti i baricentri dei triangoli in cui può essere scomposto dalle diagonali.

di due masse diverse
(o due forze parallele)

(M₂) G

G = intersezione del segmento $\overline{AB}$ congiungente le due masse con la retta congiungente le punte delle due forze che le rappresentano e che si sono scambiata la posizione ed una è opposta.

masse puntiformi

$m_1 = 9 \equiv (1,1)$

$m_2 = 5 \equiv (2,3)$

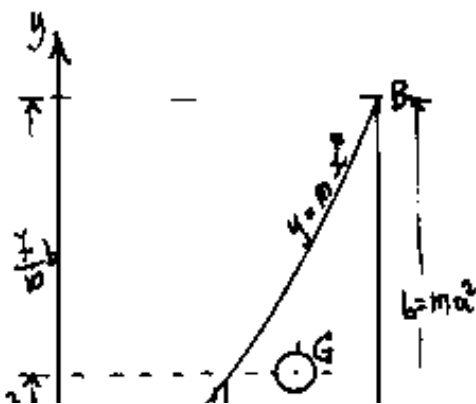
$m_3 = 6 \equiv (4{,}5,1)$

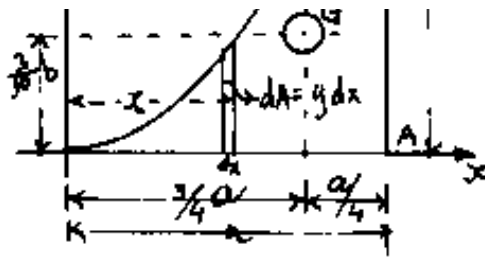
$\Sigma m = M = 20$

$S_y = 9\cdot1 + 5\cdot2 + 6\cdot4{,}5 = 46$; $\frac{S_y}{M} = \frac{46}{20} =$ $X_G = 2{,}3$

$S_x = 9\cdot1 + 5\cdot3 + 6\cdot1 = 30$; $\frac{S_x}{M} = \frac{30}{20} =$ $Y_G = 1{,}5$

Le masse m_1, m_2, m_3, possono essere i consumi giornalieri di energia termica, in tal caso G rappresenta la più conveniente posizione della centrale generatrice.

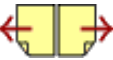
Triangolo parabolico (OAB)

$A = \int_0^a mx^2 dx = \frac{ma^3}{3}$ $A = \frac{ab}{3}$

$S_y = \int_0^a mx^3 dx = \frac{ma^4}{4}$ $S_y = \frac{a^2b}{4}$

$$S_y = \int_0^a m x^3 dx = \frac{ma^4}{4} \qquad S_y = \frac{\ \ }{4}$$

$$S_x = \int_0^a \frac{y}{2} dA = \int_0^a \frac{m^2 x^4}{2} dx = \frac{ma^5}{10} \qquad S_x = \frac{b^2 a}{10}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{b a^2/4}{b a/3} = \frac{3}{4} a$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{b^2 a/10}{b a/3} = \frac{3}{10} b$$

$$G \equiv \left(\frac{3}{4} a, \frac{3}{10} b\right)$$

baricentro di un spezzata

siano $A \equiv (1;2)$; $B \equiv (2,5;3)$; $C \equiv (4,5;3,5)$; $D \equiv (6,5;2,5)$ i vertici della linea spezzata, avremo che le coordinate dei baricentri dei singoli tratti saranno: $G_{AB} \equiv \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

$G_{BC} \equiv \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right)$; $G_{CD} \equiv \left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}\right)$.

le lunghezze dei singoli tratti:

$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$; $\overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$; $\overline{CD}\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$

Numericamente: $\overline{AB} = \sqrt{3,25}$; $\overline{BC} = \sqrt{4,25}$, $\overline{CD} = \sqrt{5}$

$G_{AB} \equiv (1,75;2,5)$; $G_{BC} \equiv (3,5;3,25)$; $G_{CD} \equiv (5,5;3)$;

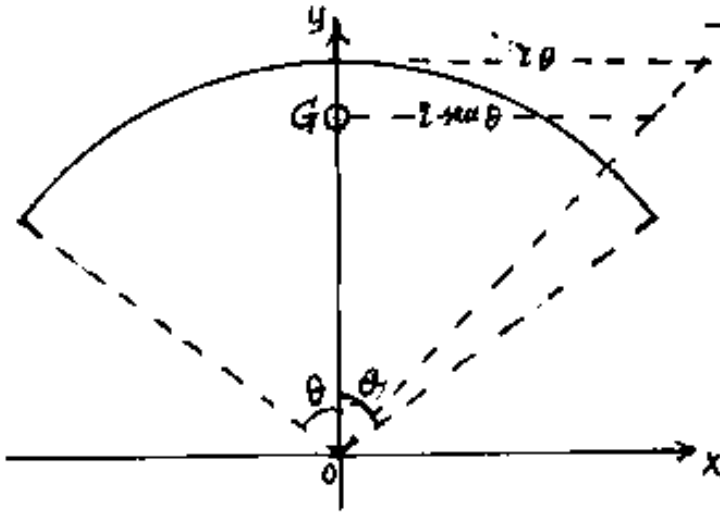
$S_y = \left(1,75\sqrt{3,25} + 3,5\sqrt{4,25} + 5,5\sqrt{5}\right) = 22,66866609$

$L = \sqrt{3,25} + \sqrt{4,25} + \sqrt{5} = 6,100396428$

$x_G = 3,715933$

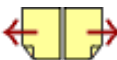
$y_G = 2.936725487$

$$S_x = \left(2,5\sqrt{3,25} + 3,25\sqrt{4,25} + 3\sqrt{5}\right) = 17,91518967 \Big\} \; y_G = 2,936725487$$

Arco di cerchio

$$L = 2r\theta \;;\; S_x = 2\int_0^{\theta} r \, r\cos\theta \, d\theta$$

$$y_G = \frac{S_x}{L} = \frac{2r^2 \operatorname{sen}\theta}{2r\,\theta} =$$

$$\boxed{y_G = r\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}$$

$$y_G = r\,(\text{ra}\operatorname{sen}\theta)$$

Il baricentro di una linea

Se la linea è simmetrica rispetto ad un asse, il baricentro è sull'asse di simmetria, e quindi basta una sola coordinata per individuarlo.

Sia $y = f(x)$, detto $d\ell = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ l'elemento di lunghezza, avremo che la lunghezza del tratto $\overline{AB}$ di linea sarà: $L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx$, e che i momenti statici rispetto agli assi saranno:

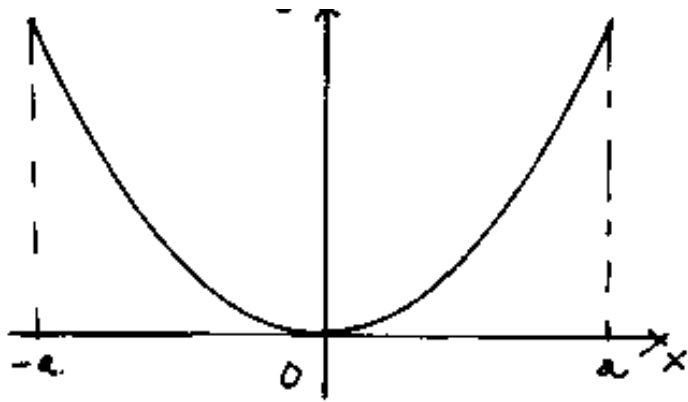
$$S_y = \int_a^b x\, d\ell \; ; \quad S_x = \int_a^b y\, d\ell .$$

per cui:

$$x_G = \frac{S_y}{L} \; ; \quad y_G = \frac{S_x}{L}$$

Esempi: <u>baricentro della parabola</u>: $y = mx^2$

(è simmetrica rispetto ad y : $x_G = 0$) ; $y' = 2mx$

$$d\ell = \sqrt{1 + 4m^2x^2}\, dx$$

$$dL = \sqrt{1+4m^2x^2}\;dx$$

$$L_{OA} = \int_0^a \sqrt{1+4m^2x^2}\;dx$$

$$L_{OA} = \frac{1}{4m}\int_0^a \sqrt{1+4m^2x^2}\;d(4m)x$$

posto: $2mx = \mathrm{senh}\,t$

$$d(2mx) = \cosh t\,dt\;;\quad \sqrt{1+(2mx)^2} = \cosh t\;;\quad L = \frac{1}{2m}\int^a \cosh^2(t)\,dt$$

$$L = \frac{1}{2m}\left[\frac{\operatorname{senh}(t)\cosh(t) + t}{2}\right] =$$

$$L = \frac{1}{2m}\left[\frac{2mx\sqrt{1+(2mx)^2} + \operatorname{argsenh}(2mx)}{2}\right]_0^a$$

$$\boxed{L = \frac{x}{2}\sqrt{(2mx)^2+1} + \frac{\ln\left|(2mx)+\sqrt{(2mx)^2+1}\right|}{4m}}$$

$$S_{\widehat{OA}}(x) = \int_0^a y \cdot dl = \int_0^a (mx^2)\sqrt{1+(2mx)^2}\,dx =$$

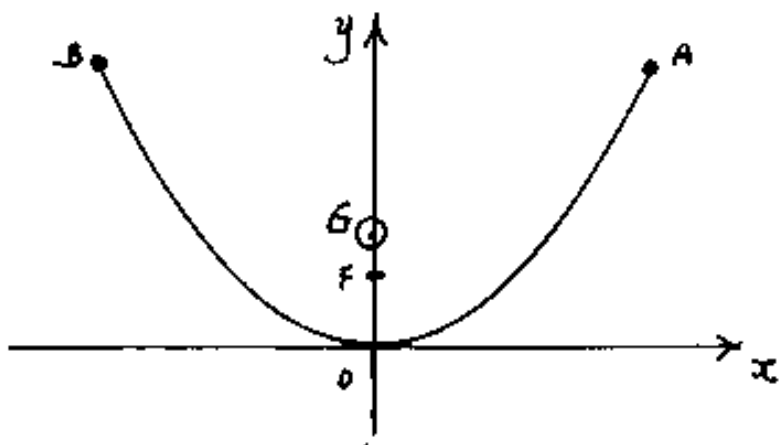
possiamo ridurre: $S_{x\,\widehat{OA}} = \frac{1}{12m}\int_0^a x\, d\left(1+(2mx)^2\right)^{3/2}$ ed integrare per parti, oppure sostituire: $(2mx) = \operatorname{senh}(t)$, in ogni caso si ottiene:

$$\boxed{S_x = \left(\frac{x}{32m} + \frac{mx^3}{4}\right)\sqrt{1+(2mx)^2} - \frac{\ln\left|(2mx)+\sqrt{1+(2mx)^2}\right|}{64m^2}}$$

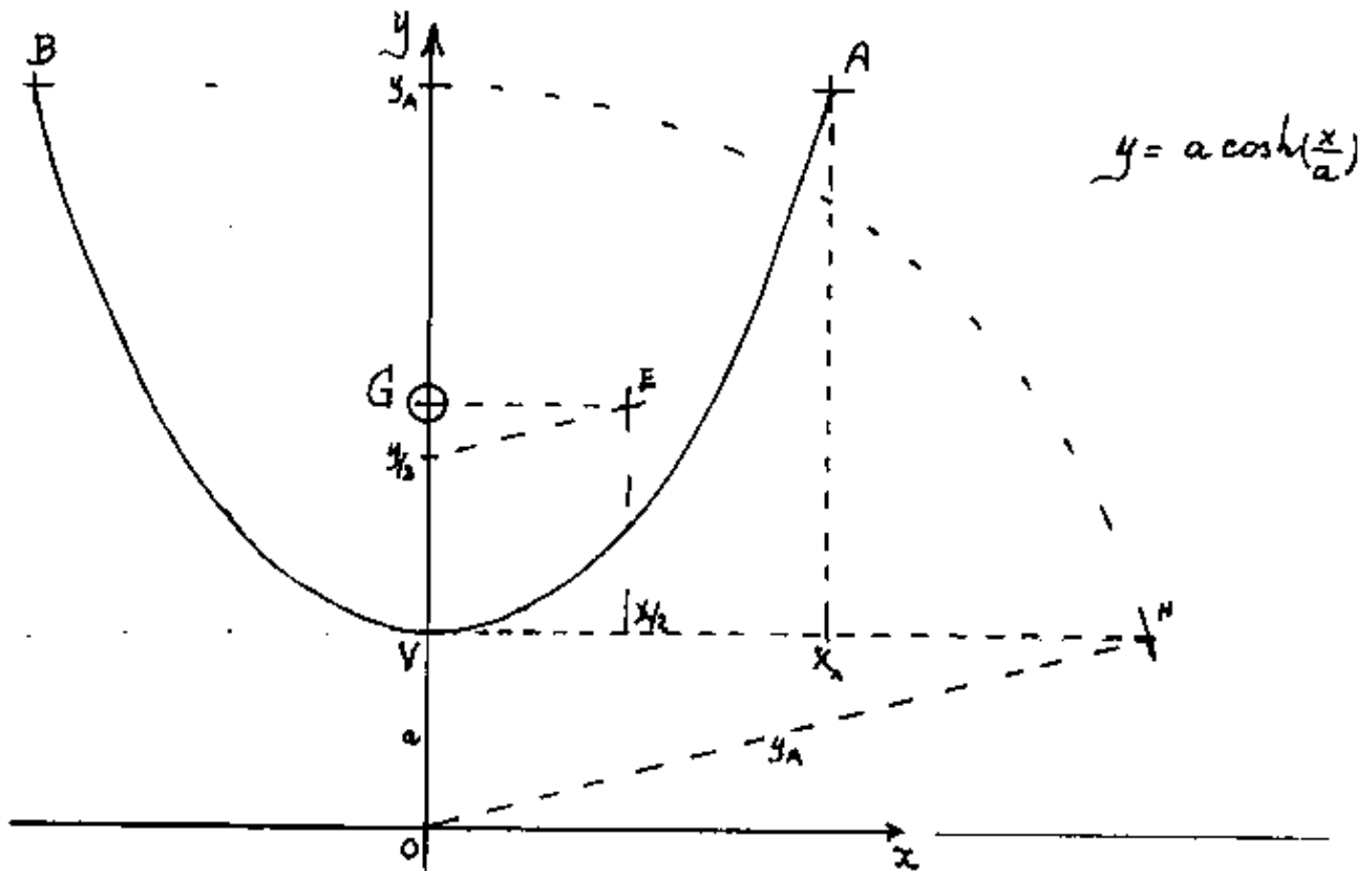
Per $x = 1$ ed $m = 1$ si ha: $L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|2+\sqrt{5}\right| = 1{,}4789$

$S_b = 0{,}606337$: $y_G = \frac{S_b}{L} = 0{,}40998 \simeq 0{,}41$

$J_b = 0{,}606007$ $\qquad J_G = \frac{\ldots}{L} = 0{,}40970 \cong 0{,}41$

B
y
A
G
F
O
x

Baricentro di una catenaria

Sappiamo che la catenaria è la configurazione di equilibrio di una catenella di peso uniforme liberamente sospesa a due punti A e B.

$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

Costruzione grafica

Riportato in $\overline{OH}$ l'ordinata: $y_B = y_A$ abbiamo $\overline{VH}$ =

riportato in un [illegible]. $J_B = J_A$ abbiamo VA =
= lunghezza L di $\widehat{VA} = \widehat{VB}$ (raddrizzata). Da $y/2$
la parallela ad $\overline{OH}$ fino ad incontrare in E
l'ordinata per $x/2$ da E la parallela ad x
fino a G. (Baricentro di $\widehat{AVB}$).

Calcolo analitico

$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ (equaz. della catenaria)

$y' = \operatorname{senh}\frac{x}{a}$

$dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)dx$ (elemento di lunghezza)

$L = a\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) =$ (lunghezza di un ramo di ascissa x)

Momento statico rispetto ad x:

$$S_x = \int y\,dl = \int\left(a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right)dx\right) = a^2\int \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$S_x = a^2\left(\frac{\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}}{2}\right)$$

$$y_G = \frac{S_x}{L} = \frac{a^2\left(\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)\right)\frac{1}{2}}{a\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

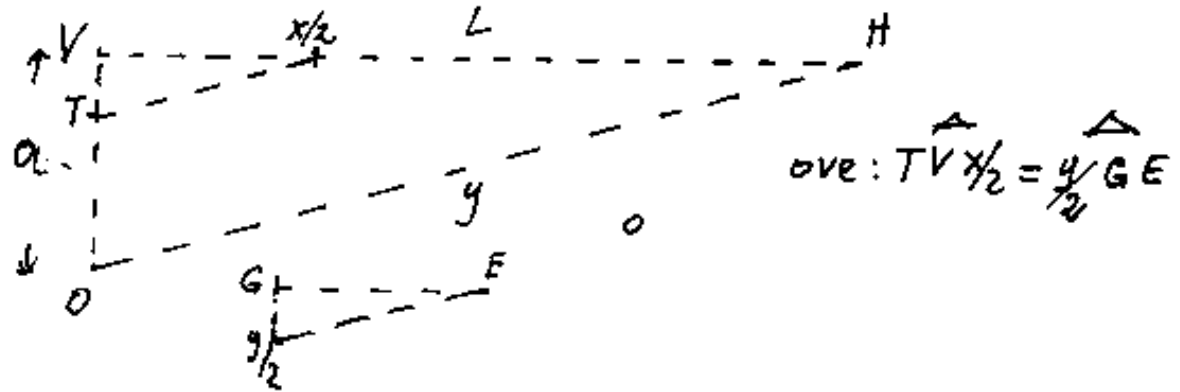
$$y_G = \frac{a}{2}\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{\operatorname{senh}\frac{x}{a}}\right)$$

$$\boxed{y_G = \frac{y}{2} + a\frac{x/2}{L}}$$

Cioè l'ordinata del baricentro sovrasta

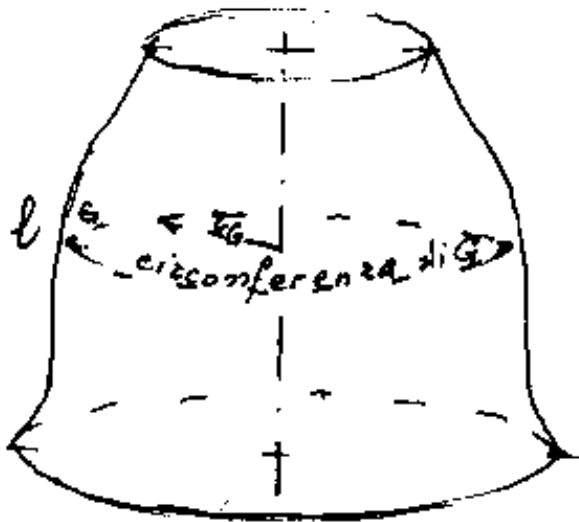
Cioe l'ordinata del baricentro sovrasta metà dell'ordinata degli estremi della grandezza: $a\,\frac{x/2}{L}$ da cui la costruzione grafica

V x/2 L H
T
a
y
O
G E
y/2

ove: $T\hat{V}\frac{x}{2} = \frac{y}{2}\hat{G}E$

Il volume dei solidi di rotazione

(Teoremi di Pappo e Guldino)

I° Teorema:

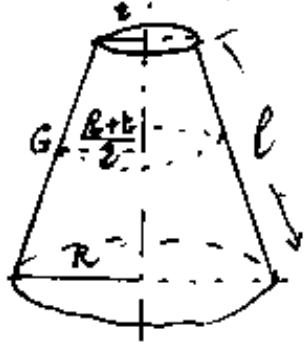
L'area della superficie generata da una linea che ruota intorno ad un asse (complanare) è data dalla lunghezza della linea per la circonferenza descritta dal suo baricentro.

$$S = l \cdot 2\pi r_G$$

Esempi:

I° superficie laterale del tronco di cono.

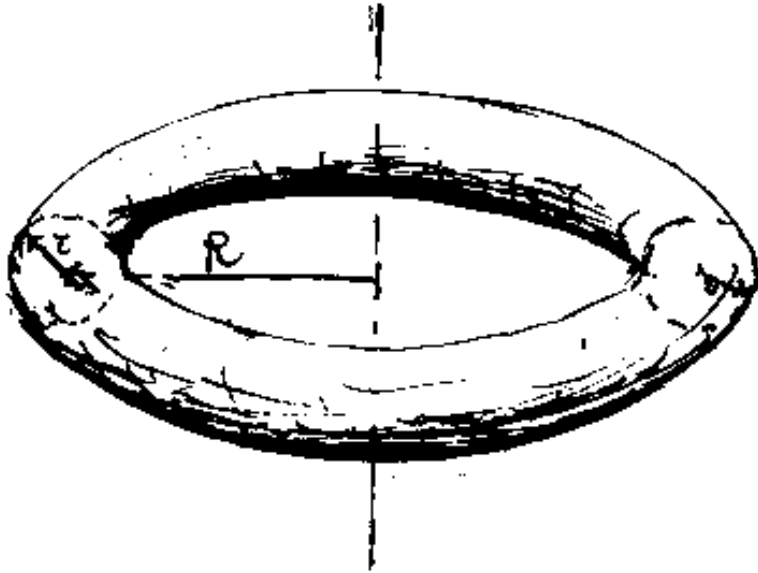
I superficie laterale del tronco di cono.

$$\ell = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$$

$$S_\ell = \ell \, 2\pi \, \frac{R+r}{2}$$

$$S_\ell = \ell (R+r)\pi$$

Se $r = 0$ si ha la superficie laterale del cono.

$$S_\ell = \ell R \pi .$$

e) Superficie torica

$$Sl = (2\pi r)(2\pi R)$$

$$Sl = 4\pi^2 r R$$

2° Teorema:

Il volume generato dall'area di una superficie piana che ruota intorno ad un asse (complanare) è dato dall'area della superficie moltiplicata per la circonferenza descritta dal suo baricentro.

$$V = A \cdot 2\pi r_G$$

Esempi:

Esempi:

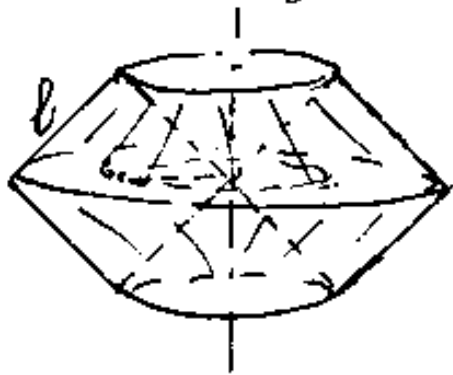
1) Volume del toro: $V = (r^2\pi)(2R\pi)$

$$\boxed{V = 2\pi^2 r^2 R}$$

2) Volume del cono generato dal triangolo rettangolo che ruota intorno l'altezza.

$$V = \left(\frac{Rh}{2}\right)\left(2\pi \frac{R}{3}\right)$$

$$\boxed{V = \frac{hR^2\pi}{3}}$$

3) Calcolare la superficie laterale ed il volume del solido generato da un quadrato di lato ℓ che ruota intorno ad un asse parallelo ad una diagonale e passante per un vertice del quadrato.

Si sono generati due tronchi di cono affacciati per la base e svuotati di due coni.

$$S\ell = (4\ell)\left(2\pi \frac{\ell}{2}\sqrt{2}\right) =$$

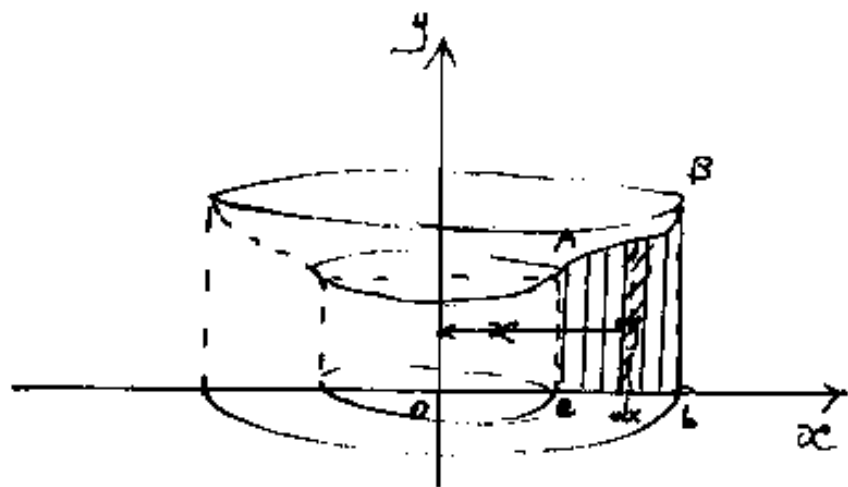
$$\boxed{S_\ell = 4\ell^2\pi\sqrt{2}}$$

$$V = (\ell^2)\left(2\pi \frac{\ell}{2}\sqrt{2}\right) \quad ; \quad \boxed{V = \ell^3\pi\sqrt{2}}$$

Si noti la snellezza della risoluzione.

Questo secondo teorema ammette una ulteriore semplificazione quando si debba calcolare il volume del solido di rotazione generato dall'area lra-

di rotazione generato dall'area fra la linea $y = f(x)$ ed uno degli assi cartesiani che è anche asse di rotazione.

Consideriamo il tratto di linea A,B e l'area che essa forma con l'asse delle x, avremo: $A = \int_a^b f(x)\,dx$; e supponiamo di

voler calcolare il volume generato dall'area per una rotazione intorno all'asse y.

Per trovare il raggio della circonferenza descritta dal baricentro che, in questo caso è:

$$R_G = x_x = \frac{S_y}{A}$$

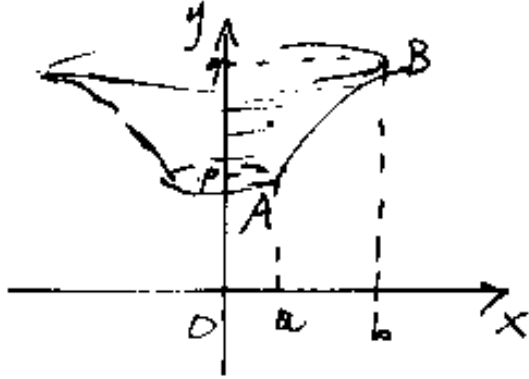
ma il volume è:

$$V = A \cdot 2R_G\pi = \cancel{A} \cdot \frac{S_y\, 2\pi}{\cancel{A}}$$

$$\boxed{V = 2S_y\pi}$$

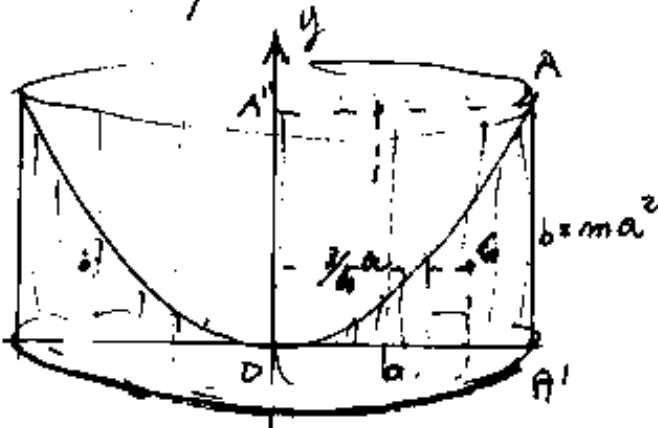
e non occorre calcolare neppure l'area.

Ciò vale anche se l'asse di rotazione è l'asse x infatti: $\boxed{V = S_x 2\pi}$

Qualora l'area sia delimitata dalla curva e dall'asse y, il calcolo dell'area: $A = \int x\,dy$ ed il calcolo del momento statico: $S_y^* = \int \frac{x^2}{2}\,dy$, il volume è ancora:

$$V = S_y^* \cdot 2\pi .$$

In generale vale il teorema:

<u>Il volume del solido generato da un'area che ruota intorno ad un asse è dato dal momento statico di quell'area rispetto a quell'asse moltiplicato per 2π.</u>

Esempi

volume del solido generato dal triangolo parabolico $OA'A$ che ruota intorno all'asse y.

$$V = A \cdot 2\pi x_G = \left(\frac{ab}{3}\right) 2\pi \cdot \frac{3}{4} a$$

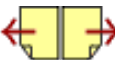
$$\boxed{V = \frac{a^2 b \pi}{2}}$$

verifichiamo: $S_y = \int_0^a x^3 m\, dx = \frac{a^2 b}{4}$ per cui: $V = \frac{a^2 b}{4} \cdot 2\pi = \frac{a^2 b \pi}{2}$

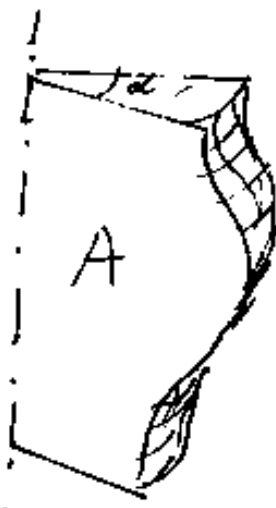
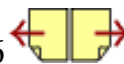
Il volume della cavità parabolica sarà il volume del cilindro: $a^2 b\pi$ diminuito del volume della parte solida $a^2 b \pi - \frac{a^2 b \pi}{2} = \frac{a^2 b \pi}{2}$ (I due volumi sono uguali) e poiché l'area del triangolo

... e poiché l'area del triangolo parabolico convesso $AA''O = \frac{2}{3}ab$ avremo che il baricentro $X_{G_1} = \frac{a^2 b\pi}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}ab} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{3}{8}a$.

Analogamente si può calcolare $y_{G_1} = \frac{3}{5}b$.

Si può dire anche che: "Il momento statico di un'area rispetto ad un asse è il volume generato da quell'area nella rotazione intorno all'asse diviso l'angolo di cui ha ruotato.

Il momento statico sarebbe quindi da riguardare, *dimensionalmente*, come il prodotto di una massa per una distanza divisa per l'angolo di cui ha ruotato. (cioè per unità di radiante).

Questa affermazione (contraria al parere dei fisici, secondo i quali l'angolo non ha dimensione fisica) sana molte incongruenze della fisica classica, infatti mentre *un volume* è per es. "cm^3" *il momento statico di un'area è* (cm^3/rad); mentre il lavoro di una forza è "*Kg.m*", il *momento di una forza è* "Kgm./rad", e diventa *lavoro* se il momento ruota di un angolo α_{rad} perché $\frac{Kgm}{rad} \cdot rad = Kgm$. Analogamente il momento statico di un'area diventa volume se si moltiplica per l'angolo di cui ha ruotato $\frac{cm^3}{rad} \cdot rad = cm^3$.

$$\boxed{V = S \cdot \alpha}$$

zdd

A

Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali

Diconsi "equazioni differenziali" quelle espressioni algebriche nelle quali figurano le derivate y', y'', ... y^n della y; oppure i differenziali "dx", dy, ed altri.

Si distinguono in:

- ordinarie - quando le derivate sono funzioni di una sola variabile, (x).
- a derivate parziali - quando sono funzioni di più variabili.

Equazioni differenziali ordinarie

- Dicesi "Ordine" di una equazione differenziale

l'ordine massimo delle derivate che figurano nel=
l'equazione. (se figura solo y' è un'equazione del primo
ordine, se figura y'' è del secondo ordine ... e così via)
- Risolvere una equazione differenziale si=
gnifica trovare una: $y = f(x, c_1, c_2, \ldots c_n)$, (cioè
una funzione della x e di tante costanti arbitra=
rie: C_1, C_2 ... C_n, quant'è l'ordine dell'equazione),

tale che, sostituita con le sue derivate nella equazione data, la soddisfi.

Quindi per verificare se abbiamo trovato una vera risoluzione occorre fare le sostituzioni nell'equazione data, ma il fatto che la verifichi non è condizione sufficiente per affermare che quella risoluzione è generale

Poiché nell'espressione risolutiva non figurano le derivate, è chiaro che vi saranno stati dei procedimenti di integrazione, dai quali sono scaturite le costanti arbitrarie. Perciò, la risoluzione contenente le costanti arbitrarie è detta:

Integrale generale dell'equazione data; essa rappresenta la famiglia di tutte le possibili funzioni della x $(y=f(x))$ che si ottengono attribuendo valori numerici (arbitrari) alle costanti.

L'espressione risolutiva nella quale abbiamo sostituito dei valori numerici alle costanti è detta: Integrale particolare e rappresenta: una delle infinite funzioni della famiglia definita dall'integrale generale.

Se la famiglia di curve definite dalle funzioni dell'integrale generale, ammette una:

<u>curva inviluppo</u>: $(y = \varphi(x))$, in questa espressio=ne non figureranno costanti arbitrarie, e veri=ficherà l'equazione differenziale data perché ad ogni punto della curva inviluppo corrisponde un punto di una delle curve della famiglia espres=sa dall'integrale generale. $L_a : y = \varphi_{(x)}$ è detta: <u>Integrale singolare</u> e può anche rica=varsi considerando le $C_1, C_2, \ldots C_n$ come funzioni della x, cioè: $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots C_n(x)$.

Facciamo un esempio di "famiglie di linee determina=te da un parametro". Per semplicità consideriamo l'equazione: $y = mx + q$; se riguardiamo "m" come "<u>parametro</u>" abbiamo la "<u>famiglia</u>" delle rette passanti per $(x = 0;\ y = q)$. Se invece riguar=diamo "q" come <u>parametro</u> abbiamo <u>la famiglia</u> di rette parallele inclinate di "m" sulle ascis=se: $y' = m$; $m = \dfrac{y - q}{x}$; $y' = \dfrac{y - q}{x}$ che può scriversi: dy $\quad y - q$

scriversi: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-q}{x}$ ed anche (separando le variabili: $\frac{dy}{y-q} = \frac{dx}{x}$ ed integrando

$\ln|y-q| = \ln|x| + C$ e considerando: $C = \ln|m|$

abbiamo $\ln|y-q| = \ln|mx|$ da cui:

$|y-q| = |mx|$ cioe: $y = mx + q$

Se invece avessimo considerato "q" come parametro, l'equazione differenziale diventa: $y' = m$ cioè: $dy = m\,dx$, ove integrando si ha: $y = mx + c$ ove: $c = q$.

Abbiamo con ciò cercato di far vedere le correlazioni fra le costanti di integrazione ed i parametri di una famiglia di curve (funzioni).

Come nasce una equazione differenziale?

Si può costruire una equazione differenziale per eliminazione di costanti, cioè data una funzione: $y = f(x, c_1, c_2, \dots c_n)$, derivando n volte:

$$y' = f(x, c_1, c_2 \dots c_n)$$

$$y'' = f(x, c_1, c_2 \dots c_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = f(x, c_1, c_2, \dots c_n)$$

Si ha un sistema di $(n+1)$ equazioni nelle "n"

Si ha un sistema di $(n+1)$ equazioni nelle "n" incognite $C_1, C_2, \ldots C_n$. per determinare le quali bastano "n" equazioni, trovate quindi: $C_1, C_2, \ldots C_n$ in funzione di $x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}$, si sostituiscono nella $(n+1)$ esima equazione rimanente ottenendo:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

Che è la nostra equazione differenziale ottenuta per eliminazione di costanti arbitrarie.

Da ciò è possibile dimostrare che data una equazione differenziale esiste ed è unico il suo integrale generale dipendente da n costanti arbitrarie.

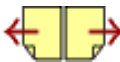
Come vedremo, i tipi di equazioni differenziali ordinarie, sono molteplici, praticamente infiniti. È assolutamente necessario, prima di iniziare i calcoli, individuare il tipo di equazione.

Il calcolo delle equazioni differenziali ordinarie.

Ricordiamo, prima di tutto, le operazioni elementari del calcolo differenziale:

$y = f(x)$. differenziando: $dy = f'(x)\, dx$

$y = f(x)$: differenziale : $dy = f(x)\,dx$

$z = f(x, y)$	"	$dz = \frac{\partial f_x}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_y}{\partial y}\,dy$
$z = (x \pm y)$	"	$dz = dx \pm dy$
$z = (x \cdot y)$	"	$dz = y\,dx + x\,dy$ (si usa spesso)
$z = \frac{x}{y}$	"	$dz = \frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy$
$z = x^y$	"	$dz = y(x)^{y-1}\,dx + x^y \ln\lvert x\rvert\,dy$
$z = \frac{x+y}{x-y}$	"	$dz = \frac{2x\,dy - 2y\,dx}{(x-y)^2}$

$z = \operatorname{sen}(x+y)$ differenziando: $dz = (\cos(x+y))(dx + dy)$

$z = f(x \pm y)$ " $dz = f'_{(x \pm y)}[dx \pm dy]$

$z = f(x \cdot y)$ " $dz = f'_{(x \cdot y)}[y\,dx + x\,dy]$

$z = (\varphi_{(x)})(\psi_{(y)})$ " $dz = \varphi'_{(x)}\psi_{(y)}\,dx + \varphi_{(x)}\psi'_{(y)}\,dy$

Per riconoscere se una espressione differenziale è un differenziale esatto, si applica il criterio di Schwarz. Cioè accertiamo se sono uguali le derivate seconde miste; l'espressione da esaminare si presenta nella forma:

$$P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}\,dy = 0$$

ove: $P_{(x,y)}$ ed $Q_{(x,y)}$ sono polinomi in x ed y.

noi vogliamo sapere se esiste una $Z = f(x,y)$ tale che:

$$dz = P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}\,dy$$

riguardiamo l'espressione come fosse:

$$d\left(f_{(x,y)}\right) = \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial x} dx + \frac{\partial f_{(x,y)}}{\partial y} dy$$

ove derivando ulteriormente per derivate miste si ha :

$$\frac{\partial^2 f_{(x,y)}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_{(x,y)}}{\partial y \partial x} \quad \text{(Schwarz)}$$

cioè se:

$$\boxed{\frac{\partial P_{(x,y)}}{\partial y} = \frac{\partial Q_{(x;y)}}{\partial x}} \quad \text{(sono uguali)}$$

Noi abbiamo riguardato $P_{(x,y)}$ come fosse la derivata parziale rispetto ad x di una ipotetica $z=f(x,y)$; cioè: $P_{(x,y)} = \frac{\partial z}{\partial x}$
ed abbiamo riguardato $Q_{(x,y)}$ come fosse la derivata parziale rispetto ad y della stessa per ora ipotetica $z=f(x,y)$; cioè: $Q_{(x,y)} = \frac{\partial z}{\partial y}$
facendo le derivate seconde miste

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P_{(x,y)}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q_{(x,y)}}{\partial x}$$

Se le espressioni sono uguali cioè se:

$$\frac{\partial P_{(x,y)}}{\partial y} = \frac{\partial Q_{(x,y)}}{\partial x}$$

allora l'espressione: $(P_{(x,y)}dx + Q_{x,y}dy)$ è <u>un differenziale esatto</u> ed esiste quindi una funzione $z=f(x,y)$ (detta anche funzione potenziale) tale che il suo

<u>funzione potenziale</u>) tale che il suo integrale dipende solo dai limiti di integrazione:

$$\int_a^b dz = \int_a^b \left(P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}\,dy\right) = (b-a)$$

I tipi di equazioni differenziali

Equazioni differenziali del primo ordine

Ove: $y' = \frac{dy}{dx}$ è il massimo ordine di derivata che figura nell'equazione.

L'equazione completa è del tipo:

$$f(x, y, y') = Q$$

(ove Q può essere una costante od anche funzione di x,y)

Se $Q = 0$ l'equazione è detta omogenea

Se provvisoriamente abbiamo noi posto $Q = 0$ l'equazione di cui sopra diventa:

$$f(x, y, y') = 0$$

ed è detta:

omogenea associata

Poiché per risolvere una equazione differenziale completa è necessario risolvere prima la sua

le completa è necessario risolvere prima la sua omogenea associata, è importante tipizzare le equazioni differenziali omogenee:

$$f(x, y, y') = 0$$

Equazioni differenziali del I° ordine

Equazioni risolvibili rispetto ad y'

$$y' = F(x,y)$$

possono ridursi alla forma:

$$P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}\,dy = 0$$

si hanno i seguenti casi:

1) $P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}\,dy = 0$ — è un differenziale esatto

cioè: $\dfrac{\partial P_{(x,y)}}{\partial y} = \dfrac{\partial Q_{(x,y)}}{\partial x}$ (Schwarz) allora si integra:

$$\int_{(\text{ad } y = \text{cost})} P_{(x,y)}\,dx + \int_{(\text{ad } x = \text{cost})} Q_{(x,y)}\,dy + C = Z = f(x,y).$$

---

2) $f_{(x)}\,dx + \varphi_{(y)}\,dy = 0$ — a variabili separabili

ove $f(x)$ è funzione della sola x e φ_y è funzione della sola y, si integra direttamente.

---

3) $P \quad dx \quad Q \quad dy$ ... coefficienti ...

3) $P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}\,dy = 0$ a coefficienti omogenei

cioè quando $P_{(x,y)}$ e $Q_{(x,y)}$ sono polinomi in x ed in y dello stesso grado si divide per x al massimo grado e si pone: $t = \frac{y}{x}$ in tal modo si riduce a variabili separabili.

---

4) $y' = \varphi\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$ — riducibile a coeff. omogenei

in questa forma è riducibile a coefficienti omogenei.

---

5) $y' + P_{(x)} y = Q_{(x)}$ — equazione lineare

ove: $P_{(x)}$ e $Q_{(x)}$ sono funzioni della sola x.

è un importantissimo tipo di equazione differenziale del primo ordine, non omogenea, di cui esiste una facile formula risolutiva, direttamente applicabile, senza fare l'iter di calcolo attraverso l'omogenea associata.

La formula risolutiva è:

$$y = e^{-\int P_{(x)} dx} \left[\int Q_{(x)} e^{+\int P_{(x)} dx} dx + C \right]$$

ove la: $e^{-\int P_{(x)} dx}$ moltiplica anche la costante C.

---

6) $y' + P_{(x)} y = Q_{(x)} y^n$ — equazione di Bernouilli

essa non è lineare perchè al secondo membro figura una potenza della y. Dividendo per y^n e sostituendo: $z = y^{n-1}$; $z' = (n-1)y^{n-2}$ si trasforma in lineare in z.

7) $y' + L_{(x)} y^2 + M_{(x)} y + N_{(x)} = 0$ equaz. di Riccati

ove: $L_{(x)}$, $M_{(x)}$, $N_{(x)}$ sono funzioni della sola x

essa può scriversi:

$$y' + P_{(x)} y = Q_{(x)} y^2 + R_{(x)}$$

con $P_{(x)}$, $Q_{(x)}$, $R_{(x)}$ funzioni della sola x. (Si trasforma in una equazione di Bernouilli.)

Equazioni non risolte rispetto ad y'

ammettono vari tipi:

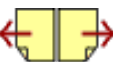
8) y' ammetta più radici: $y' = f_1(x,y)$; $y' = f_2(x,y)$; ... $y' = f_n(x,y)$;

calcoliamo gli integrali:

$$\int y' - f_1(x,y) = 0 \ ; \ \int y' - f_2(x,y) = 0 \ ; \ ... \int y' - f_n(x,y) = 0$$

avremo:

$$F_1(x,y,c_1) \ ; \ F_2(x,y,c_2) \ ; \ ... F_n(x,y,c_n) \ ;$$

e l'integrale generale sarà il prodotto:

l'integrale generale sarà il prodotto :

$$\left(F_1(x,y,c_1)\right)\left(F_2(x,y,c_2)\right) \cdots \cdots \left(F_n(x,y,c_n)\right) = 0$$

dei singoli integrali.

---

9) $f(y,y')$ mancante della x – si opera un cambiamento di variabile ponendo: $y_{(x)} = g_{(t)}$; $y'_{(x)} = \varphi_{(t)}$ ed applichiamo la formula:

$$x = \int_0^t \frac{g'_{(t)}}{\varphi_{(t)}}\,dt + C$$

---

10) $f(x, y')$ (mancante della y) si pone:

$$x = g(t) \; ; \; y'_{(x)} = \varphi(t) \; ; \quad y'_{(t)} dt = y'_{(x)} x'_{(t)} dt = \varphi_{(t)} g'_{(t)} dt$$

$$y = \int_0^t \varphi_{(t)} g'_{(t)} dt + c$$

Equazioni che si integrano con procedimento di derivazione (introducendo un parametro)

11) $y = x f(y') + \varphi(y')$ equaz. di Monge-D'Alembert-Lagrange

Si deriva rispetto ad x e si pone $y' = P$ – con ciò si trasforma in lineare (eliminando P si ha l'integrale generale) (vedi 12)

12) $y = x y' + \psi(y')$ equazione di Clairaut

Se nell'equazione di Monge all'atto della eliminazione di P con l'equazione data si ha: $P = f(P)$, la formula diventa illusorea. Per esempio:

la formula diventa ...

$$y = x \cdot P + \varphi(P)$$

che è l'equazione di Clairaut, e che si risolve ponendo la costante arbitraria "C" al posto di 'y'' nell'equazione data.

13) $F(x, y, y') = 0$ Equazioni Omogenee (del primo ordine)

14) $P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$ Il fattore integrante [vedi 1), 2), 3)]

I metodi risolutivi

Non seguiremo esattamente l'ordine numerico dei tipi di equazioni proposti, ma cercheremo di procedere iniziando dai casi più semplici, indicando però il numero di riferimento.

---

2) Equazioni a variabili separabili: $\left(\varphi_{(x)}\,dx + \psi_{(y)}\,dy = 0\right)$

esempio:

$$\boxed{y' = x \cdot y}$$ si ha: $\frac{dy}{dx} = xy$

separando le variabili: $\frac{dy}{y} = x\,dx$

integrando direttamente: $\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$ cioè

$$\boxed{\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1}$$

si è raggruppata in C_1 la costante additiva dei due integrali. Se poniamo: $C_1 = \ln|c|$ si ha

$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = \frac{x^2}{2}$ si ha: $$\boxed{y = C\,e^{\frac{x^2}{2}}}$$

che è l'integrale generale di $y' = xy$.

[illegible]

per ogni valore numerico di C (per es. $C=5$) si

l'integrale particolare : $y = 5e^{x^2/2} = 5\sqrt{e^{x^2}}$.

2) esempio : $x \cdot y \cdot y' = 1 - y^2$ $\Rightarrow$ $\dfrac{y\,dy}{(1-y^2)} = \dfrac{dx}{x}$

ridotta a variabili separate, integrando:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-y^2)}{(1-y^2)} = \int \frac{dx}{x}$$ da cui :

$$-\frac{1}{2}\ln|1-y^2| = \ln x + C_1 \qquad \text{posto } C_1 = -\ln|C^{\frac{1}{2}}|$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{C}} \quad ; \quad y^2 = 1-\frac{C}{x^2}$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{1-\frac{C}{x^2}}} \quad \text{(integrale generale)}$$

Si noti come si possono ottenere espressioni diverse variando l'arbitrarietà di "C"

È molto importante vedere subito se le variabili sono separabili.

---

1) Equazioni differenziali esatti: $(P_{(x,y)} + Q_{(x,y)} = 0)$

Prima si verifica se è un differenziale esatto, poi si integra direttamente ad $y=\text{cost.}$ in dx ed a $x=\text{cost.}$ in dy.

1) Esempio

$$\boxed{(x+3)\,dy + (4x^2+y)\,dx = 0} \text{ eq. data}$$

$$\frac{\partial (x+3)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial (4x^2+y)}{\partial y} = 1$$

per Schwarz, essendo uguali possono considerarsi derivate seconde: $\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y \partial x}$ di una funzione z la cui l'espressione data è un differenziale esatto cioè: $z = f(x,y)$

$$dz = (x+3)dy + (4x^2+y)dx$$

cioè noi consideriamo

$$(x+3)\,dy = \frac{\partial z}{\partial y}\,dy \quad (\text{ad } x = \text{costante})$$

$$(4x^2+y)\,dx = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx \quad (\text{ad } y = \text{costante})$$

integrando:

$$\int (x+3)\,dy = xy + 3y + C_{(x)}$$

Si noti che nella costante di integrazione vi possono essere delle x perdute nella derivata parziale ad $x = \text{cost}$.

$$\int (4x^2+y)\,dx = \frac{4}{3}x^3 + xy + C_{(y)}$$

anche qui vi possono essere delle y nella costante di integrazione, ma le due primitive delle derivate parziali prime ad $x = \text{cost}$ e a $y = \text{costante}$ debbono essere uguali essendo originariamente la stessa $z = f(x,y)$ perciò:

$$\cancel{xy} + 3y + C_{(x)} = \cancel{xy} + \frac{4}{3}x^3 + C_{(y)}$$

dal confronto si ha:

dal confronto si ha:

$$C_{(x)} = \frac{4}{3}x^3 + C \quad ; \quad C_y = 3y + C$$

perciò:

$$z = \boxed{\frac{4}{3}x^3 + xy + 3y + C = 0}$$

è l'integrale generale (forma implicita)

dell'equazione data: $\boxed{(x+3)dy + (4x^2+y)dx = 0} = dz$

che si verifica differenziando.

Se esplicitiamo la y si ha:

$$\boxed{y = \frac{-\left(\frac{4}{3}x^3 + C\right)}{(x+3)}}$$

(integrale generale)
(forma esplicita)

<u>verifica</u>: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-4x^2(x+3) + \left(\frac{4}{3}x^3 + C\right)}{(x+3)^2} = \frac{-4x^2 - y}{(x+3)}$

da cui: $\boxed{(x+3)dy + (4x^2 + y)dx = 0}$

<u>torna l'equazione data.</u>

Se nell'integrale generale poniamo $C = 36$

si ha $y = -\frac{4}{3}\frac{(x^3 + 3^3)}{(x+3)}$: si ha: $\boxed{y = -\frac{4}{3}x^2 + 4x - 12}$

<u>l'integrale particolare con $C = 36$</u> è una parabola ad asse verticale verso il basso che ha il vertice $V \equiv (+3/2; -9)$ cioè non taglia l'asse delle ascisse.

---

3) <u>Equazioni differenziali a</u> coefficienti omogenei $(P_{(x,y)}dx + Q_{(x,y)}dy = 0)$

coefficienti omogenei $\left(P_{(x,y)}dx + Q_{(x,y)}dy\right)=0$

Dopo aver verificato che l'equazione non è un differenziale esatto (Schwarz) e quindi non può risolversi col metodo sovraesposto, ed aver verificato che l'espressione non è a variabili separabili, di cui abbiamo già visto il metodo risolutivo, verificato che i due

polinomi $P_{(x,y)}$ e $Q_{(x,y)}$ sono dello stesso grado e quindi che l'equazione può definirsi a coefficienti omogenei, si divide per x al massimo esponente, si sostituisce: $\frac{y}{x}=t$; $\frac{y^2}{x^2}=t^2$; ... $\frac{y^n}{x^n}=t^n$; $dy=(x\,dt+t\,dx)$ e l'equazione diventa a variabili separabili.

3) Esempio:

$$(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$$

$$\frac{\partial(x+y)}{\partial y}=1 \neq \frac{\partial(y-x)}{\partial x}=-1$$

non è un differenziale esatto.

divido per x

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)dx+\left(\frac{y}{x}-1\right)dy=0$$

sostituisco $t=\frac{y}{x}$; $dy=(x\,dt+t\,dx)$

$$dx+t\,dx+tx\,dt+t^2dx-x\,dt-t\,dx=0$$

$$(1+t^2)\,dx+(t-1)\,x\,dt=0$$

$$\left(\frac{1}{[illegible]}\right)dx+\left(\frac{(t-1)}{[illegible]}\right)dt=0$$ ridotta a variabili

$$\left(\frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{(t-1)}{(t^2+1)}\right)dt = 0$$ diventa a variabili separabili:

integrando:

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|t^2+1| - \operatorname{arctg}(t) + c_1 = 0 \quad ; \quad (c_1 = \ln c)$$

$$\ln\left|c \cdot x \cdot \sqrt{t^2+1}\right| = \operatorname{arctg}(t)$$

$$\ln\left|c\sqrt{y^2+x^2}\right| = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\boxed{e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)} = c\sqrt{y^2+x^2}}$$ (integrale generale)

4) Equazione riducibile a coefficienti omogenei:

$$y' = \varphi\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$$

1) Esempio:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{x - 2y + 3}{4x + 5y - 1}\right)$$

sappiamo che aggiungere o togliere costanti ad un fattore differenziale questo non cambia perciò facciamo una traslazione di assi ponendo

$X = x + \alpha$; $Y = y + \beta$; $\frac{dy}{dx} = \frac{d(Y+\beta)}{d(X+\alpha)}$

scegliamo α e β in modo che:

$$a\alpha + b\beta + c = 0 \qquad ; \quad a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$

cioè:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - 2\beta + 3 &= 0 \\ 4\alpha + 5\beta - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} -4\alpha + 8\beta - 12 &= 0 \\ 4\alpha + 5\beta - 1 &= 0 \\ \hline \beta &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5\alpha - 10\beta + 15 &= 0 \\ 8\alpha + 10\beta - 2 &= 0 \\ \hline \alpha &= -1 \end{aligned}$$

sostituendo:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{X - 1 - 2(Y+1) + 3}{4(X-1) + 5(Y+1) - 1}\right) = \varphi\left(\frac{X - 2Y}{4X + 5Y}\right)$$

L'espressione è omogenea, quindi posto $t = \frac{Y}{X}$

si ha: $dy = x\,dt + t\,dx = dx \cdot \varphi\left(\frac{1-2t}{4+5t}\right)$

$$\frac{dt}{\varphi\left(\frac{1-2t}{4+5t}\right) - t} = \frac{dx}{x} \qquad \text{(a variabili separate)}$$

è ridotta a variabili separate, ma la φ (è una funzione di grado zero rispetto ad x ed y) può rendere complessa l'integrazione.

5) Equazioni differenziali lineari

Diconsi lineari quelle equazioni in cui la y e le sue derivate hanno esponente 1.

Questa importante classe di equazioni differenziali, per il primo ordine, si presenta nella forma:

$$y' + P_{(x)} y = Q_x$$

ove $P_{(x)}$ e $Q_{(x)}$ sono <u>funzioni</u> note della x.

In quanto l'equazione non è uguagliata a zero, (figura $Q_{(x)}$), non è una equazione omogenea, pertanto per risolverla occorrerà considerare l'omogenea associata:

$$y' + P_{(x)} y = 0$$

Risolta la quale: $\left(\frac{dy}{y} = -P_{(x)} dx\right)$; si impone che verifichi $Q_{(x)}$ si ottiene l'integrale generale:

generale:

$$y = e^{-\int P_{(x)} dx} \left(\int Q_x \cdot e^{+\int P_{(x)} dx} \cdot dx + C \right)$$

formula che può applicarsi direttamente senza fare tutti i passaggi attraverso l'omogenea associata, tenendo presente che $e^{-\int P_{(x)} dx}$ moltiplica anche la costante C.

Vediamo, per completezza, come è stata ricavata la formula risolutiva.

Risolviamo l'omogenea associata:

$y' + P_{(x)}y = 0$; $\frac{dy}{y} = -P_{(x)}dx$; $\ln|y| = -\int P_{(x)}dx + c_1$

$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int P_{(x)}dx$

$$\boxed{y_0 = ce^{-\int P_{(x)}dx}}$$ integrale dell'omogenea associata

Se poniamo $\boxed{y = (u \cdot v)}$ abbiamo $\boxed{y' = u'v + uv'}$ (ove u e v sono funzioni della x).

Data l'arbitrarietà di u e v a cui si è imposta la sola condizione: $\boxed{u \cdot v = y}$, per determinare u e v occorre un'altra condizione a cui debbono sottostare (anche questa arbitraria) noi porremo: $\boxed{v' + vP_{(x)} = 0}$ (ove v tiene il posto di y_0 nell'omogenea associata, per cui: $\boxed{v = ce^{-\int P_{(x)}dx}}$)

Sostituiamo ora nella equazione data la y' e la y avremo:

e la y avremo:

$$(u'v + v'u) + uv(P_{(x)}) = Q_{(x)}$$

che possiamo scrivere:

$$u'v + u(v' + v(P_{(x)})) = Q_{(x)}$$

ma: $(v' + vP_{(x)} = 0)$ per cui $u' = Q_{(x)}/v$

$$\int u' = (v)^{-1} \cdot Q_{(x)} = \int (Ce^{-\int P_{(x)}dx})^{-1} Q_{(x)} = \left(\int Q_{(x)} e^{+\int P_{(x)}dx} + C\right)$$

sostituendo nella $y = u \cdot v$ si ha (raggruppando la costante arbitraria di integrazione)

$$y = e^{-\int P_{(x)} dx} \left(\int Q_{(x)} e^{+\int P_{(x)} dx} dx + C \right)$$

5) Esempio

$$y' + ay = e^{mx}$$

applicando la formula

$$y = e^{-\int a\,dx} \left(\int (e^{mx}) \cdot e^{+\int a\,dx} dx + C \right)$$

$$y = e^{-ax} \left(\int e^{(m+a)x} dx + C \right)$$

$$y = e^{-ax} \left(\frac{e^{(m+a)x}}{m+a} + C \right)$$

$$y = \frac{e^{mx}}{m+a} + \frac{C}{e^{ax}}$$

integrale generale.

Verifichiamo:

$$y' = \frac{m}{m+a} e^{mx} - aC e^{-ax}$$

sommando:

$$ay = \frac{a}{m+a} e^{mx} + aC e^{-ax}$$

sommando:

$$ay = \frac{a}{m+a} e^{mx} + aCe^{-ax}$$

$$y' + ay = e^{mx} \quad \text{(torna l'eq. data)}$$

Questo tipo di equazioni ci ha portato a risolvere eq. diff. non omogenee. Si noti però che $P_{(x)}$ e $Q_{(x)}$ sono funzioni della sola (x).

Si noti che le equazioni a variabili separabili, o differenziali esatti, od a coefficienti omogenei, non sono in genere lineari.

---

6) Equazione di Bernouilli $\boxed{y' + P_{(x)}y = Q_{(x)}y^n}$

figura la potenza y^n che moltiplica $Q_{(x)}$ (non è lineare), però con opportune trasformazioni e cambiamenti di variabile può ridursi a lineare.

Infatti dividendo per y^n l'equazione diventa:

$$y' \cdot y^{-n} + P_{(x)}\, y^{(1-n)} = Q_x$$

posto: $z = y^{(1-n)}$; $z' = (1-n)\, y^{-n} y'$; $\frac{z'}{(1-n)} = y' y^{-n}$

sostituendo e moltiplicando per $(1-n)$ si ha:

l'equazione $\boxed{z' + \left((1-n)P_{(x)}\right)z = \left((1-n)\,Q_{(x)}\right)}$ (lineare)

applicando la formula risolutiva dell'equazioni lineari si ha:

$$z = \left\{ e^{-(1-n)\int P_{(x)}dx} \left(\int (1-n)Q_{(x)}\, e^{+(1-n)\int P_{(x)}dx} \ldots \right) \right\}$$

$$Z = \left\{ e^{-(1-n)\int P_{(x)}dx} \left(\int (1-n) Q_{(x)} e^{+(1-n)\int P_{(x)}dx} + C \right) \right\}$$

$$\text{ma: } y = Z^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}$$

$$\boxed{y = \left\{ e^{-(1-n)\int P_{(x)}dx} \left((1-n) \int Q_{(x)} e^{+(1-n)\int P_{(x)}dx} \cdot dx + C \right) \right\}^{\frac{1}{(1-n)}}}$$

<u>Integrale generale</u> applicabile direttamente.

6) Esempio:

eq. data:

$$y' + (\cot g(x))y = (\sqrt{\operatorname{sen} x})\, y^{3/2}$$

$n = 3/2$ (frazionario) $(1-n) = -\frac{1}{2}$;

applicando la formula risolutiva:

$$e^{-(1-n)\int P(x)dx} = e^{\frac{1}{2}\int \cot g\, x\, dx} = e^{\frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x|} = e^{\ln\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

$$y = \left\{\sqrt{\operatorname{sen} x}\left(-\frac{1}{2}\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx + c\right)\right\}^{1/-1/2}$$

$$y = \left\{\sqrt{\operatorname{sen} x}\left(-\frac{x}{2} + c\right)\right\}^{-2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\operatorname{sen} x\left(\frac{-x}{2} + c\right)^2}}$$

integrale generale dell'equazione data

Verifica:

$$y' = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,\frac{1}{\left(-\frac{x}{2}+c\right)^2} + \frac{1\;(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)}{(\operatorname{sen} x)\left(-\frac{x}{2}+c\right)^3}$$

$$y' = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x\left(-\frac{x}{2}+c\right)^2}\right)\left(-\cot g(x) + \frac{1}{\left(-\frac{x}{2} + C\right)}\right)$$

$$\left(\operatorname{sen} x\left(-\frac{x}{2}+c\right)^2\right)\left(\quad\ldots\quad \left(-\frac{x}{2}+C\right)\right)$$

$$y' = y\left(-\operatorname{cotg}(x) + \frac{1}{\left(\frac{-x}{2}+c\right)}\right)$$

$$\boxed{y' + y\operatorname{cotg}(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen} x\left(\frac{-x}{2}+c\right)^3}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right) y^{3/2}} = \left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)\frac{1}{(\operatorname{sen} x)^{3/2}\left(-\frac{x}{2}+c\right)^{2\cdot\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\operatorname{sen} x\left(\frac{-x}{2}+c\right)^3}$$

cioè:

$$\boxed{y' + y\operatorname{cotg} x = \left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right) y^{3/2}}$$

(turna)

7) Equazioni differenziali di Riccati

l'equaz. $y' + P_{(x)}y + Q_{(x)}y^2 + R_{(x)} = 0$ data

Non è lineare, (y^2), non è omogenea. $P_{(x)}$, $Q_{(x)}$, $R_{(x)}$ sono funzioni della sola (x).

Per risolvere questo tipo di equazioni è necessario trovare un <u>integrale particolare</u> che indichiamo con y_0 (l'integrale particolare non ha le costanti arbitrarie). Sostituendo y_0 nella equazione data: $y_0' + P_{(x)}y_0 + Q_{(x)}y_0^2 + R_{(x)} = 0$

Sottraendo termine a termine dalla equazione data e ponendo: $t = (y - y_0)$ $\quad y = (t + y_0)$; $(y + y_0) = t + 2y_0$

$$t' + P_{(x)}t + Q_{(x)}(y - y_0)(y + y_0) = 0 \quad = t' + P_{(x)}t + Q_{(x)}(t)(t + 2y_0) = 0$$

infine:

$$t' + \left(P_{(x)} + 2y_0 Q_{(x)}\right)t = -Q_{(x)}t^2$$

L'equazione risulta così trasformata in una equazione di Bernouilli con ($n=2$), perciò ap=

equazione di Bernoulli con (n=2), perciò ap= plicando la formula si ha:

$$t = \left[e^{+\int (P_{(x)} + 2y_0 Q_{(x)}) dx} \left((-1) \int Q_{(x)} \, e^{-\int (P_{(x)} + 2y_0 Q_{(x)}) dx} dx + C \right) \right]^{(-1)}$$

$$y = t + y_0$$

Occorre sapere come si possono trovare integrali particolari (y_0), o in quali casi sono noti a priori.

Se invece poniamo: $\boxed{y = y_0 + \frac{1}{z}}$ che equivale a $\boxed{t = \frac{1}{z}}$ si ha l'equazione lineare:

$$\boxed{z' - \left(2Q_{(x)}y_0 + P_{(x)}\right)z = Q_{(x)}}$$

applicando la formula:

$$z = e^{\int (2Q_{(x)}y_0 + P_{(x)})\,dx}\left[\int Q_{(x)}\, e^{-\int (2Q_x y_0 + P_x)\,dx}\,dx + C\right]$$

se z_1 e z_2 sono due integrali particolari:

$$z = \frac{1}{y - y_0} \quad ; \quad z_1 = \frac{1}{y_1 - y_0} \quad ; \quad z_2 = \frac{1}{y_2 - y_0}$$

Il fatto che, risolvendo una equazione lineare, la costante arbitraria moltiplica una funzione $\varphi_{(x)}$ cioè: $y = C\varphi_{(x)} + \psi_{(x)}$ è l'integrale generale e quindi un generico integrale particolare sarà del tipo: $y_i = C_i\varphi_{(x)} + \psi_{(x)}$ ed anche: $y - y_i = (C - C_i)\varphi_{(x)}$ e quindi dividendo per $y - y_1$; $y_2 - y_1$ si ha: $i = 0, 1, 2$

$$\frac{y - y_0}{y - y_1} = \frac{(C - C_0)\,\varphi_{(x)}}{(C - C_1)\,\varphi_{(x)}} \; ; \; \frac{y_2 - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{C_2 - C_0}{C_2 - C_1}$$

quindi $\frac{y_2 - y_0}{\ldots} : \frac{y - y_0}{\ldots}$ = cost (y, y, y, y) = cost

quindi $\frac{y_2 - y_0}{y_2 - y_1} : \frac{y - y_0}{y - y_1} = \text{cost.}, (y_0, y_1, y_2, y) = \text{cost.}$

Il birapporto di quattro integrali particolari è costante (nell'eq. di Riccati) per cui se sono noti tre integrali particolari la equazione di Riccati si integra risolvendo y nel birapporto di cui sopra.

Equazioni differenziali del primo ordine non risolte rispetto alla derivata prima

8) y' ammetta più radici $\qquad f(y', y, x) = 0$

risolvendo rispetto ad y' si ottengano n risoluzioni (radici) $y_1' = \varphi_1(x,y)$; $y_2' = \varphi_2(x,y)$; $\dots$ $y_n' = \varphi_n(x,y)$.
ciascuna di queste radici avrà il suo integrale generale del tipo:

$$F_1(x,y,c_1) \; ; \; F_2(x,y,c_2) \; ; \; \dots \; F_n(x,y,c_n)$$

Ciò premesso chiameremo integrale generale dell'equazione data una espressione che comprenda tutti gli integrali generali delle singole risoluzioni.

8) Esempio $\qquad y'^2 - a^2x^2 = 0$

$$y_1' = +ax \; ; \; y_2' = -ax \; ; \; y_1 = \frac{ax^2}{2} + C_1 \; ; \; y_2 = -\frac{ax^2}{2} + C_2$$

$$\left(y-\left(\frac{ax^2}{2}\right)-c_1\right)\left(y+\frac{ax^2}{2}-c_2\right)=0$$

Integrale generale dell'equazione data.

Prive di una delle due variabili

Sono del tipo: $f(y, y') = 0$; $f(x, y') = 0$

Abbiamo già avuto occasione di incontrare entrambe le equazioni in esempi che, caso per caso, abbiamo risolto. Ora vogliamo generalizzare.

---

9) Equazioni prive della x

$$f(y, y') = 0$$

Sia: $y = g_{(t)}$; $\frac{dy}{dx} = y'_{(x)} = \varphi_{(t)}$ una risoluzione dell'equazione espressa parametricamente in t. cerchiamo anche l'equazione di x espressa parametricamente in t.

Se $t = \alpha$ è una radice dell'equazione: $\varphi_{(t)} = 0$, la retta dell'equazione : $y = y_{(\alpha)}$ è una curva integrale dell'equazione data. Per altri valori di "t" in un intervallo in cui $\varphi_{(t)} \neq 0$; $dy = g'_{(t)} dt$, ma :

... in cui $\varphi(t) \neq 0$, $dy = g'(t)\,dt$, ...

$dy = \varphi(t)\,dx$ per cui:

$$dx = \frac{g'(t)}{\varphi(t)}\,dt \qquad \boxed{x = \int_{t_0}^{t} \frac{g'(t)}{\varphi t}\,dt}$$

ed $\boxed{y = g(t)}$ sono le equazioni parametriche in t che risolvono il problema.

---

9) Esempio:

$$y'^3 - yy' + y = 0$$

poniamo: $\varphi_{(t)} = y'_{(x)} = t$ da cui sostituendo e risolvendo in y si ha:

$$y = \left(\frac{t^3}{t-1}\right) = \left(g_{(t)}\right)$$

derivando:

$$g'_{(t)} = \frac{3t^2(t-1) - t^3}{(t-1)^2}\,dt = \frac{2t^3 - 3t^2}{(t-1)^2}\,dt$$

essendo: $dx = \frac{g'_{(t)}}{\varphi t}\,dt$

$$dx = \frac{2t^3 - 3t^2}{t(t-1)^2}\,dt$$

$$dx = \frac{2t^2 - 3t}{(t-1)^2}\,dt$$

$$dx = \frac{2(t^2 - 2t + 1) + t - 2}{(t-1)^2}\,dt = \quad dx = \frac{2(t-1)^2 + (t-1) - 1}{(t-1)^2}\,dt$$

$$X = 2\int dt + \int \frac{dt}{(t-1)} - \int \frac{dt}{(t-1)^2} =$$

$$X = 2t + \ln|t-1| + \frac{1}{(t-1)} + C$$

$$y = \frac{t^3}{(t-1)}$$

$$y = \frac{t}{(t-1)}$$

Sono le equazioni parametriche dell'integrale generale dell'equazione data

---

10) Equazioni prive della y $f(x, y') = 0$

Analogamente al caso precedente si cerca di esprimere l'integrale generale mediante funzioni parametriche in t. cioè: $x = \rho_{(t)}$; $y = g_{(t)}$

$$\frac{dy}{dx} = y'_{(x)} = \varphi_{(t)} \quad : \quad dx = \rho'_{(t)} dt \quad dy = \varphi_{(t)} dt = g'_{(t)} dt$$

$$dy = \varphi_t dx = \varphi_{(t)} \rho'_{(t)} dt \qquad g(t) = y = \int_{t_0}^{t} \varphi_{(t)} \rho'_{(t)} dt.$$

10)

Esempio: $y'^3 + xy' + x = 0$ (analogo al precedente)

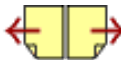
$$y' = \varphi_{(t)} = t \quad \text{da cui} \quad x = \frac{t^3}{t-1}$$

$$dx = \frac{3t^2(t-1) - t^3}{(t-1)^2} dt \; . \; dy = \varphi_{(t)} \cdot \frac{dx}{dt} = t \frac{2t^3 - 3t^2}{(t-1)^2} dt$$

$$dy = \frac{2t^4 - 3t^3}{(t-1)^2} dt = \frac{(2t^2+t)(t^2-2t+1) - t + 1 - 1}{(t-1)^2} =$$

$$dy = \left((2t^2 + t) - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt$$

integrando:

$$y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^2}{2} - \ln|t-1| + \frac{1}{t-1} + C$$

$$x = \frac{t^3}{t-1}$$

Equazioni parametriche in t dell'integrale generale dell'equazione data

Equazioni che si integrano con procedimento di derivazione (introducendo un parametro)

Data l'equazione: $\boxed{y = f(x, y')}$ esplicitata in y

supponiamo nota: $y'_{(x)} = (P_{(x)})$ avremo:

$$y = f(x, P_{(x)})$$

$$dy = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial P_{(x)}} dP$$

cioè:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \boxed{P_{(x)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial P} \frac{dP}{dx}}$$

ove sia possibile integrare questa equazione avremo che il suo integrale generale sarà: $\boxed{F(x, P_x, c) = 0}$ eliminando P con la $y = f(x, P)$ avremo l'integrale in y.

Esempio: $\boxed{y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}}$ posto $y' = P = \frac{dy}{dx}$

avremo: $\boxed{y = \left(P^2 - xP + \frac{x^2}{2}\right)}$ derivando

$$dy = (+x - P)\, dx + (2P - x)\, dP$$

$$dy = (+x - P)\,dx + (P - x)\,dP$$

$$\frac{dy}{dx} = x - P + (P - x)\frac{dP}{dx} = P$$

$$(2P - x)\,dP = (2P - x)\,dx \qquad \boxed{P = x + c}$$

sostituendo:

$$y = \left((x+c)^2 - x(x+c) + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$y = \left(x^2 + 2cx + c^2 - x^2 - cx + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + cx + c^2}$$ soluzione generale

11) Equazione di Monge-D'Alambert-Lagrange

L'equazione : $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ da alcuni detta "di Monge", da altri "di D'Alambert"-Lagrange" ed altri ancora semplicemente: "di Lagrange". rientra nel tipo: $y = f(x, y)$, ora trattato con procedimento di derivazione, ponendo: $y' = P$.

si arriva a:

$$P = \varphi_{(P)} + \left(x\varphi'_{(P)} + \psi'_{(P)}\right)\frac{dP}{dx}$$

supposto: $\left(P - \varphi_{(P)}\right) \neq 0$ (altrimenti l'eq. è detta di Clairaut)

abbiamo l'equazione lineare in x (attenzione! in x)

$$\left(P - \varphi_{(P)}\right)\frac{dx}{dP} = x\varphi'_{(P)} + \psi'_{(P)}$$

$$\frac{dx}{dP} - \frac{\varphi'_{(P)}}{\left(P - \varphi_{(P)}\right)} = \frac{\psi'_{(P)}}{\left(P - \varphi_{(P)}\right)}$$

integrando (con la formula che conosciamo) si ha:

$$x = e^{+\int \frac{\varphi'_{(P)}}{(P - \varphi_{(P)})}dP}\left[\int e^{-\int \frac{\varphi'_{(P)}}{(P - \varphi_{(P)})}dP}\cdot\left(\frac{\psi'_{(P)}}{(P - \varphi_{(P)})}\right)dP + C\right] = F(P, C)$$

L'integrale generale si ottiene eliminando P

L'integrale generale si ottiene eliminando P con l'equazione:

$$y = x\,\varphi_{(P)} + \psi_{(P)}$$

Sia α una radice dell'eq. $(P - \varphi_{(P)}) = 0$ (Posta da noi = zero) cioè sia $(\alpha - \varphi_{(\alpha)}) = 0$, (con α = cost.) cioè $\frac{d\alpha}{dx} = 0$ avremo, (sostituendo) gli integrali singolari:

$$y = \varphi_{(\alpha)} + \psi_{\alpha}$$

che sono rette.

11) Esempio : $y = y'^2 + xy' + x$

$(y' = p)$

$$y = p^2 + (p+1)x$$

$$dy = (2p + x)dp + (p+1)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = p = (2p+x)\frac{dp}{dx} + (p+1)$$

$$-(2p+x) = \frac{dx}{dp} \qquad \left(x' + (1)x = -2p\right)$$

$$x = e^{-\int dp}\left[\int e^{\int dp}(-2p)d \quad + c\right]$$

$$x = e^{-p}\left[-\int e^{p}(2p)dp + c\right] = +e^{-p}\left[-2pe^{p} + 2e^{p} + c\right]$$

$$x = -2(p-1) + ce^{-p}$$

sostituendo nella $y = p^2 + (p+1)x$

$$y = p^2 - 2(p^2 - 1) + ce^{-p}(p+1)$$

$$y = -p^2 + 2 + ce^{-p}(p+1)$$

$$x = -p + c/_{dp} + 2 \qquad)$$

$$\begin{cases} x = -P + C/e^P + 2 \\ y = -P^2 + \dfrac{C(P+1)}{e^P} + 2 \end{cases}$$

Sistema di equazioni parametriche in P

costituiscono l'integrale generale dell'equazione data. —

12) Equazione di Clairaut.

$$y = xy' + \psi(y')$$

ove, rispetto all'equazione precedente: $\varphi_{(p)} = P = y'$

Posto, al solito $y' = P$ si ha: $y = P \cdot x + \psi_{(P)}$

differenziando $P = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial(Px + \psi_{(P)})}{\partial x} + \frac{\partial(P \cdot x + \psi_{(P)})}{\partial P} \frac{dP}{dx}$

$$P = P + (x + \psi'_P) \frac{dP}{dx}$$

$$\left(x + \psi'_P\right)\frac{dP}{dx} = 0 \qquad \frac{dP}{dx} = 0$$

cioè: $P = C$ = costante e gli integrali saranno:

$$y = Cx + \psi_{(c)}$$

cioè delle rette.

12) Esempio:

$$y = x \cdot y' + \text{arctg}(y')$$

Posto: $y' = P$

$y = P \cdot x + \text{arctg}\, P \qquad P = P + \left(x + \left(\frac{1}{1+P^2}\right)\right)\frac{dP}{dx}$

$$\boxed{y = Cx + \operatorname{arctg} C}$$ integrale generale

Se avessimo preso come eq data $y = y'x + y'$.

avremmo avuto l'equazione: $y = Cx + C$ cioè

$y = C(x+1)$ che la famiglia di rette passanti per

il punto $(x = -1)$; $(y = 0)$.

Le equazioni differenziali omogenee

Prima di affrontare l'argomento riportiamo <u>Il teorema di Eulero</u> (vedi anche funzioni omogenee)

Consideriamo l'espressione:

$$F_{(t)} = \frac{f(tx_1 + tx_2 + \dots tx_n)}{t^m} = \frac{f(u_1, u_2 \dots u_n)}{t^m}$$

derivando rispetto a t:

$$F'_{(t)} = \frac{1}{t^m}\left[f_{x_1}(u_1, u_2, \dots u_n)X_1 + \dots + f_{(x_n)}(u_1, u_2 \dots u_n)X_n\right] - \frac{m}{t^{m+1}}f(u_1, u_2 \dots u_n) =$$

$$F'_t = \frac{1}{t^{m+1}}\left[f_{x_1}(u_1, u_2, \dots u_n)u_1 + \dots + f_{(x_n)}(u_1, u_2, \dots u_n)u_n - m f(u_1, u_2 \dots u_n)\right]$$

ma per <u>l'identita' di Eulero</u> $F'_{(t)} = 0$, cioe': $F_{(t)} = C =$ (costante), cioe':

$$\frac{f(tx_1 + tx_2 + \dots tx_n)}{t^m} = C = \text{(costante)}$$

per $t = 1$

$$\frac{f(tx_1 + tx_2 + \dots tx_n)}{t^m} = f(x_1, x_2 \dots x_n) = C = cost.$$

sostituendo (data l'arbitrarieta' della costante)

ritorna:

ritorna:

$$f(tx_1 + tx_2 + \dots tx_n) = t^m f(x_1, x_2 \dots x_n)$$

ciò vuol dire che:

Tutte le funzioni omogenee positive di grado m, sono integrali dell'equazione alle derivate parziali (Teorema di Eulero)

14) Il fattore integrante

Torniamo ad equazioni del tipo:

$$P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}\,dy = 0$$

qualora l'espressione non sia un differenziale esatto cioè: $\frac{\partial P_{(x,y)}}{\partial y} \neq \frac{\partial Q_{(x,y)}}{\partial x}$

Poiché l'espressione, essendo uguagliata a zero, può essere moltiplicata per un fattore qualsiasi, senza che cambi; ci domandiamo se esiste un fattore $F_{(x,y)}$ tale che renda l'espressione un differenziale esatto.

Tale fattore detto: fattore integrante, esiste sempre, anzi ne esistono infiniti, trovato uno, si può trovare la formula che li comprenda tutti.

Infatti: $\frac{dy}{dx} = \frac{-P_{(x,y)}}{Q_{(x,y)}}$, dovrà essere: $\frac{P_{(x,y)}}{Q_{(x,y)}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$.

poniamo: $\mu = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{P_{(x,y)}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{Q_{(x,y)}}$ avremo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P_{(x,y)} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q_{(x,y)}$$ per cui:

$$\mu P_{(x,y)} dx + \mu Q_{(x,y)} dy = 0$$

diventa:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0}$$

(μ dovrà essere tale da soddisfare la condizione di Schwarz)

Facciamo alcuni esempi:

Per trovare il fattore integrante si accerta se

$$\left(\frac{\partial P_{(xy)}}{\partial y} - \frac{\partial Q_{(xy)}}{\partial x}\right)\frac{1}{Q_{(xy)}} = F_{(x)} \quad \text{allora} \quad \mu = \mu_{(x)}$$

$$\left(\frac{\partial P_{(xy)}}{\partial y} - \frac{\partial Q_{(xy)}}{\partial x}\right)\frac{1}{P_{(xy)}} = F_1\, y \quad \text{"} \quad \mu = \mu_{(y)}$$

---

14) Esempio: $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$

$$\frac{\partial P_{(xy)}}{\partial y} = (2x + x^2 + y^2) \; ; \qquad \frac{\partial Q_{(xy)}}{\partial x} = 2x$$

$$\left(\frac{\partial P_{(xy)}}{\partial y} - \frac{\partial Q_{(xy)}}{\partial x}\right)\frac{1}{Q_{(xy)}} = \left[(2x + x^2 + y^2) - (2x)\right]\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 1 \qquad (*)$$

quindi: $\mu = \mu_{(x)}$

poiché deve essere: $\frac{\partial(\mu P_{(xy)})}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q_{(xy)})}{\partial x}$ cioè: $\frac{\partial \mu_x}{\partial y} = 0$

$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + Q \frac{d\mu}{dx}$ avremo:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx = dx \; ; \; \ln|\mu| = x \; ; \; \boxed{\mu = e^x}$$

avremo:

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)\,dy = 0$$

che è il differenziale di $\boxed{y e^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) - c = 0}$

differenziando con la regola del prodotto

$$\left[y e^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)+ y e^x(2x)\right]dx + \left[e^x\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)+ y e^x\frac{2y}{3}\right]dy=0$$

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2+y^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x(2x + x^2 + y^2) = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x(x^2+y^2) + e^x(2x).$$

Esempio:

$$(x+y^2)\,dx-(2xy)\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y \; ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y \quad \text{(diverso il segno)}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{-1}{2xy}=\frac{-4y}{2xy}=\frac{-2}{x} \quad \text{cioè } \mu=\mu_{(x)}$$

$$\frac{\partial(\mu_{(x)}P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu_{(x)}Q)}{\partial x} \; ; \quad \mu\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{d\mu}{dx}+\mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{-2}{x}dx \; ; \quad \ln|\mu|=\ln\frac{1}{x^2} \; ; \quad \mu=\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\left(2\frac{y}{x}\right)dy=0$$

è il differenziale di:

$$\ln|x|-\left(\frac{y^2}{x}\right)+C=0$$

Il fatto di poter decidere se μ è solo funzione della x o solo funzione della y, ne facilita la determinazione perchè: $\frac{\partial \mu_{(x)}}{\partial y}=0$; $\frac{\partial \mu_{(y)}}{\partial x}=0$

In generale se: $\mu_{(x,y)}$ è un fattore integrante dell'equazione, il suo integrale generale $\mu(x,y)\,f(x,y)$ è ancora un fattore integrante dell'equazione stessa, perciò se conosciamo due fattori integranti $\mu_{(x,y)}$ e $\upsilon_{(x,y)}$ avremo che $\frac{\upsilon(x,y)}{\mu(x,y)} = C$ è l'integrale generale.

Equazioni omogenee del primo ordine

Abbiamo già trattato un caso particolare di equazioni differenziali omogenee cioè con la x e la y dello stesso grado "m" nei coefficienti $P_{(x,y)}$ e $Q_{(x,y)}$ rispettivamente di dx e dy e che abbiamo chiamato a <u>coefficienti omogenei</u>.

Consideriamo ora l'equazione:

$$\boxed{F(x, y, y') = 0}$$

che per essere omogenea di grado m rispetto ad x ed a y può scriversi:

$$\boxed{F(\gamma x, \gamma y, y') = \gamma^m F(x, y, y')}$$

dividendo per x al massimo esponente "m" avremo:

$$F\left(1, \frac{y}{x}, y'\right) = \frac{F(x, y, y')}{x^m}$$

e ponendo $\frac{y}{x} = t$. (come abbiamo fatto per le equazioni a coefficienti omogenei) la funzione diventa: $\varphi(t, y') = 0$ e se possiamo risolverla rispetto ad $y' = \frac{dy}{}$ si riduce a coefficienti omo

rispetto ad $y' = \frac{dy}{dx}$ si riduce a coefficienti omogenei. Ma se y' non è esplicitabile, poniamo

$$t_0 = \frac{y}{x} = g(t) \qquad y'_{(x)} = \varphi(t)$$

differenziando:

$$y = x\,g(t) \qquad \text{abbiamo:}$$

$$dy = x\,g'_{(t)}\,dt + g_{(t)}\,dx \qquad \text{ed anche:}$$

$$dy = y'_{(x)}\,dx = \varphi(t)\,dx$$

confrontando i due dy si ha:

$$\left(g_{(t)} - \varphi_{(t)}\right) dx + x\, g'_{(t)}\, dt = 0$$

nella quale è possibile separare le variabili:

$$\frac{dx}{x} + \frac{g'(t)}{\left(g_{(t)} - \varphi_{(t)}\right)} dt = 0$$

per cui:

$$x = C\, e^{\int \frac{g(t)}{(g_{(t)} - \varphi_{(t)})} dt}$$ ed anche

$$\boxed{y = C\left(g_{(t)}\right) e^{\int \frac{g'(t)}{(g_{(t)} - \varphi_{(t)})} dt}}$$

Esempio

$$\boxed{(x+y)\, y' = x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \qquad \left(t = \frac{y}{x}\right)$$

$$y' = \frac{\operatorname{arctg}(t)}{(1+t)} \qquad dy = \frac{\operatorname{arctg}(t)}{(1+t)} dx$$

differenziando: $y = tx$ si ha: $dy = t\,dx + x\,dt$

confrontando i due dy:

$$t\,dx + x\,dt = \frac{\operatorname{arctg}(t)}{(1+t)} dx$$

$$x\,dt = \left(\frac{\operatorname{arctg} t}{(1+t)} - t\right) dx$$

$$\ln x = \int \frac{(1+t)}{\operatorname{arctg}(t) - t - t^2}\, dt + c_1$$

$$x = c\, e^{\int \frac{(1+t)\, dt}{\operatorname{arctg}(t) - t - t^2}}$$

$$\boxed{y = c \cdot t\, e^{\int \frac{(1+t)}{\operatorname{arctg}(t) - t - t^2}\, dt}}$$

Equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo

Il tipo più generale delle equazioni differenziali di ordine n con variabile indipendente x e dipendente y è:

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$

il cui integrale generale sarà del tipo:

$$y = \phi(x, C_1, C_2, \dots C_n)$$

se la y è esplicitabile o

$$\Psi(y, x, C_1, C_2, \dots C_n)$$

ove la y è funzione della x e di "n" costanti arbitrarie "C". (la y può anche essere considerata un derivata di ordine zero, in tal senso se P_i è funzione della x : $\sum_{i=0}^{n} P_{(i)} y^{(i)} = 0$ è una equazione differenziale lineare perché le derivate non hanno esponenti, omogenea perché uguaglia

ta a zero la Σ. (non sarebbe omogenea se fosse $= Q(x)$)

Procediamo con ordine tipizzando le varie equazioni differenziali, iniziando da equazioni facilmente quadrabili.

$$y^{(n)} = f(x)$$

L'integrale è:

$$y = \left[\left(\int^{(n)} f(x)\,dx^n\right) + c_1(x^{n-1}) + c_2(x^{n-2}) + \dots + c_{n-1}(x) + c_n\right]$$

Esempio: $y''' = \operatorname{sen}(x)$

$$y'' = -\cos(x) + C_1''$$

$$y' = -\operatorname{sen}(x) + C_1' x + C_2'$$

$$(C_1 = C_1'/2) \qquad y = \cos(x) + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

Ad equazioni di questo tipo sono riducibili quelle espressioni risolvibili in $y^{(n)} = f(x)$

Esempio:

$$(x)(y''')^2 - (x^2+1)(y''') + x = 0$$

$$y''' = \frac{(x^2+1) \pm \sqrt{x^4+2x^2+1-4x^2}}{2x}$$

$$y''' = \frac{(x^2+1) \pm (x^2-1)}{2x} \begin{cases} = x = y_1''' \\ = \dfrac{1}{x} = y_2''' \end{cases}$$

$$y_1'' = \frac{1}{2}x^2 + C_1'' \; ; \quad y_1' = \frac{1}{6}x^3 + C'x + C_2' \; ; \quad \boxed{y_1 = \frac{1}{24}x^4 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3}$$

$$y_2'' = \ln x + C_1'' \; ; \quad y_2' = x\ln|x| - x + C_1' x = y_2' = x \ln|x| + C_1 x + C_2$$

$$y_2 = (x^2 \ln|x| + x)\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(x^2 \ln|x|\right) + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

Come si vede le due radici di y''' portano a due integrali generali abbastanza diversi pur mantenendo la forma dell'espressione.

Equazioni differenziali lineari omogenee

I determinanti Wronskiani

E' questa una classe di equazioni differenziali particolarmente interessante, del tipo:

$$P_n y^{(n)} + P_{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0$$

Ove: P_n, P_{n-1} P_i P, sono funzioni della x.

Qualora i "P_i" fossero costanti: $a_n, a_{n-1} \dots a$ l'equazione viene detta: <u>a coefficienti costanti</u>, Qualora il polinomio sia uguagliato a $Q_{(x)}$ od anche costante, si riduce l'equazione non omogenea a questa classe come <u>"omogenea associata"</u>.

Questi tipi di equazione saranno trattati nel seguito.

Per la nostra equazione, se: $y_1, y_2, \dots y_K$,

sono K integrali particolari, ciascuno di essi verificherà l'equazione data.
Poiché l'equazione è uguagliata a zero, moltiplicandola per una costante C non muta.
Cioè anche se gli integrali particolari sono moltiplicati per costanti arbitrarie "C_i", verificano ugualmente la equazione.

Infine anche:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_k y_k$$

sarà un integrale che verificherà l'equazione

Qualora $k = n$ avremo:

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n}$$

che è un integrale che verificherà l'equazione di ordine n; e poiché dipende da n costanti arbitrarie, ci domandiamo se per caso non sia <u>l'integrale generale</u> o, quali condizioni richiede per esserlo:

Derivando $(n-1)$ volte l'espressione:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots\cdots + C_n y_n = 0$$

abbiamo:

$$C_1 y' + C_2 y_2' + \cdots + C_n y_n' = 0$$

$$C_1 y'' + C_2 y_2'' + \cdots + C_n y_n'' = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$C_1 y^{(n-1)} + C_2 y^{(n-1)} + \cdots + C_n y^{(n-1)} = 0$$

In questo sistema lineare omogeneo riguardia=

In questo sistema lineare omogeneo riguardia= mo le <u>C come incognite</u> e scriviamo il deter= minante dei coefficienti; che simboleggere= mo con la lettera W ed è chiamato:

<u>Determinante Wronskiano.</u> Cioè:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

Condizione necessaria perché il sistema lineare omogeneo di cui sopra, ammetta soluzioni è che sia identicamente nullo il suo determinante Wronskiano ($W=0$). Ma l'essere nullo il determinante Wronskiano implica anche che le n funzioni: $y_1, y_2, \dots y_n$, siano linearmente dipendenti (nel campo in cui tali funzioni sono finite e continue)

Le n funzioni: $y_1, y_2, \dots y_n$, non sono linearmente indipendenti se esiste fra esse una

relazione lineare omogenea a coefficienti costanti (non tutti nulli) ($W = 0$) cioè esiste:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$$

cioè è possibile determinare n costanti C_1, C_2, C_n non tutte nulle che la verifichino, non è invece possibile determinare tali costanti se le y_1, y_2, .. y_n sono fra loro indipendenti ($W \neq 0$).

Quindi il determinante Wronskiano serve ad indica-re se le $y_1, y_2, \dots y_m$ sono o meno indipendenti

$$W = \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{(dipendenti) esiste } (c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0) \\ \neq 0 \rightarrow \text{(indipendenti) non è possibile trovare le } n \text{ costanti che verifichino } (c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots c_n y_n = 0) \end{cases}$$

Regola di derivazione di un determinante

(applicazione al Wronskiano)

Si abbia un determinante rappresentato dallo sviluppo simbolico:

$$D = \sum \pm a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3} \dots a_{ni_n}$$

ove le a_{ik} sono funzioni derivabili della x, derivando abbiamo:

$$D' = \sum \pm a'_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots a_{ni_n} + \sum \pm a_{1i_1} \cdot a'_{2i_2} \dots a_{ni_n} + \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a'_{ni_n}$$

quindi:

"<u>La derivata di un determinante è data dalla somma dei determinanti ottenuti deri-</u>

vando successivamente la prima, la seconda, ...
... l'n^{ma} riga (colonna)

Applichiamo questa regola al determinante Wronskiano; notiamo che derivando la I^ riga diventa uguale alla seconda (due righe uguali

determinante nullo). Se deriviamo la seconda riga, questa diventa uguale alla terza, e così via salvo l'ultima riga. Quindi tutti i determinanti della sommatoria che esprimono D' sono nulli salvo l'ultimo.

cioè per derivare un determinante Wronskiano, basta derivare la sua ultima riga. (mancherà la riga della derivata (n-1)) ed il determinante sarà:

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Si può dire che: se nel campo (a,b) si ha: $W=0$ e la matrice M ottenuta sopprimendo l'ultima riga al determinante W' ha, (per ogni punto di (a,b)), caratteristica $(n-1)$ allora le n funzioni $y_1, y_2, \dots y_n$ sono linearmente legate ed esistono n costanti $c_1, c_2 \dots c_n$ (non tutte nulle) per cui si abbia:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0$$

Data l'arbitrarietà delle costanti di integrazione abbiamo che, affinché l'espressione:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

Sia l'integrale generale dell'equazione:

$$P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_2 y'' + P_1 y' + P_0 y = 0$$

è necessario che il loro Wronskiano sia diverso da zero: $\left(W_{(y_1, y_2 \dots y_n)} \neq 0\right)$ in ogni punto del campo (a,b).

Cioè le: $y_1, y_2, \dots y_n$ (integrali particolari) devono essere linearmente indipendenti

---

Esempio: di una equazione differenziale di terzo ordine, si conoscono gli integrali particolari $y_1 = x$; $y_2 = x^2$; $y_3 = x^3$; Per vedere se una espressione del tipo: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ è un integrale generale facciamo il Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{cases} +12x^3 + 0 + 2x^3 \\ -0 - 6x^3 - 6x^3 \end{cases} = 2x^3 \neq 0$$

(indipendenti)

è un integrale generale.

Possiamo imporre condizioni per risolvere le costanti: $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$ e trovare soluzioni particolari. (per es. per $x = 1$; $y = 0$; $y' = -1$; $y'' = 2$), abbiamo:

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 \rightarrow C_1 + 2C_2 + 3C_3 = -1$$

$$y'' = 0 + 2C_2 + 6C_3 x \rightarrow 0 \quad 2C_2 + 6C_3 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} +12 + 0 + 2 \\ 0 - 6 - 6 \end{matrix} \right. = +2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 0 + 6 - 2 \\ -4 \quad 0 + 6 \end{matrix} \right. = +6 \qquad C_1 = \frac{6}{2} = +3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} -6 + 0 + 2 \\ 0 - 6 \quad 0 \end{matrix} \right. = -10 \qquad C_2 = \frac{-10}{2} = -5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 4 + 0 + 0 \\ 0 + 2 - 2 \end{matrix} \right. = 4 \qquad C_3 = \frac{4}{2} = 2$$

cioè:

integrale particolare: $y = 3x - 5x^2 + 2x^3$

$y_1 \quad C_1 = 1 \; ; \; C_2 = 0 \; ; \; C_3 = 0$

$y_2 \quad C_1 = 0 \; ; \; C_2 = 1 \; ; \; C_3 = 0$

$y_3 \quad C_1 = 0 \; ; \; C_2 = 0 \quad C_3 = 1$

} integrali particolari noti

Sistema fondamentale di integrali di una equazione differenziale lineare omogenea Formula di Liouville

Si abbia l'equazione:

$$F_{(y)} = f_{(n)} y^{(n)} + f_{(n-1)} y^{(n-1)} + f_{(n-2)} y^{(n-2)} + \dots + f_{(2)} y'' + f_{(1)} y' + f_{(0)} y = 0$$

Con $f_{(0)}, f_{(1)}, \dots f_{(n)}$ funzioni continue in un intervallo: (a,b)

E' possibile costruire, in un intorno di x_0 in (a,b), n integrali particolari: $y_1, y_2, \dots y_n$ dell'equazione data, che siano linearmente indipendenti.

Consideriamo infatti un qualsiasi determinante di ordine n, a termini costanti, diverso da zero:

$$D = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & & K_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

possiamo uguagliare l'integrale: $y_{i(x_0)} = K_{1(i)}$; $y'_{i(\dots)} = K_{2i} \dots$

possiamo uguagliare l'integrale: $y_{i(x_0)} = K_{1(i)}$; $y'_{i(x_0)} = K_{2i}$ .... $y^{(n-1)}_{i(x_0)} = K_{ni}$. Poiché D corrisponde al Wronskiano $\neq 0$ gli n integrali sono linearmente indipendenti.

È possibile dimostrare che: $W' = -\frac{f_{(n-1)}}{f_{(n)}} W$ da cui integrando si ha la notevole formula di Liouville:

$$W_{(x)} = W_{(x_0)} e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{f_{n-1}}{f_n} dx}$$

dalla quale avendosi $W_{(x_0)} \neq 0$ segue $W_{(x)} \neq 0$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Consideriamo inizialmente le equazioni lineari Omogenee a coefficienti costanti.

Queste equazioni del tipo:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

indipendentemente dall'ordine dell'equazione, si risolvono tutte sostituendo l'ordine delle derivate con esponenti su una nuova incognita Z che in tal modo formerà la cosiddetta equazione caratteristica

$$a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \cdots + a_3 Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0 = 0$$

Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ sono le radici, diverse fra loro, reali o complesse della equaz. caratteristica avremo:

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots c_n e^{\alpha_n x}$$

$$y = c_1 e^{\cdots} + c_2 e^{\cdots} + \ldots\ldots c_n e^{\cdots}$$

che è l'integrale generale.

Se nel polinomio vi sono radici uguali per esempio: μ radici uguali così che l'eq. caratteristica possa scriversi:

$$(z-\alpha)^{\mu}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots = 0$$

avremo che il corrispondente integrale generale

diventa:

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_1 x} + c_3 e^{\alpha_1 x} + c_4 x e^{\alpha x} + c_5 x^2 e^{\alpha x} + \dots c_n x^{\mu-1} e^{\alpha x}$$

$$\underset{1}{} \quad \underset{2}{} \quad \underset{3}{} \quad \dots \quad \underset{\mu}{}$$

Nel caso di equazioni del primo ordine

$ay' + by = 0$ (eq. diff. data)

$az + b = 0$ (eq. caratteristica)

$z = -b/a$ per cui : $y = C \cdot e^{-b/a\,x}$ (integrale generale)

derivando: $y' = C\left(-\frac{b}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}x}$ cioè:

$ay' = (-b)\left(Ce^{-\frac{b}{a}x}\right) = -by$ quindi:

$ay' + by = 0$ che verifica la risoluzione.

Nel caso di: equazione differenziale, lineare, omogenea, a coefficienti costanti, del secondo ordine, in generale si ha:

$$ay'' + by' + cy = 0$$ eq. diff. data

$$az^2 + bz + c = 0$$ eq. caratteristica

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ radici delle eq. caratteristica

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$$ integrale generale

Se le radici sono reali e diverse l'integrale generale resta:

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}.$$

Se le radici sono reali ed uguali l'integrale generale diventa: (essendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$)

$$y = C_1 e^{\alpha x} + x C_2 e^{\alpha x}$$

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 x)\, e^{\alpha x}}$$

integrale generale

Se le radici sono complesse: $\alpha_1 = r + iq$; $\alpha_2 = r - iq$; l'integrale generale diventa:

$$\boxed{y = C_{1_0} e^{(r+iq)x} + C_{2_0} e^{(r-iq)x}}$$

abbiamo indicizzato con zero le due costanti iniziali C_{1_0} e C_{2_0} per trasformarle.

$$y = e^{rx} \left(C_{1_0} e^{iqx} + C_{2_0} e^{-iqx} \right)$$

poniamo: $C_{1_0} = \dfrac{C_1 + C_2/i}{2}$; $C_{2_0} = \dfrac{C_1 - C_2/i}{2}$

sostituendo abbiamo:

sostituendo abbiamo:

$$y = e^{rx}\left(\frac{c_1 e^{iqx}}{2} + \frac{c_2 e^{iqx}}{2i} + \frac{c_1 e^{-iqx}}{2} - \frac{c_2 e^{-iqx}}{2i}\right)$$

$$y = e^{rx}\left(c_1 \frac{e^{iqx} + e^{-iqx}}{2} + c_2 \frac{e^{iqx} - e^{-iqx}}{2i}\right)$$

ricordando la trigonometria complessa:

$$\boxed{y = e^{rx}\left[c_1 \cos(qx) + c_2 \operatorname{sen}(qx)\right]}$$

Esempi: 1) $y'' - 7y' + 12y = 0$ (eq. data)

$z^2 - 7z + 12 = 0$ (eq. caratteristica)

$$\begin{matrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{matrix} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \begin{cases} = \frac{8}{2} = 4 \\ = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}$ (integrale generale)

2) $y'' - 6y' + 9 = 0$ (eq. data)

$z^2 - 6z + 9 = 0$ (eq. caratteristica)

$(z-3)^2 = 0$ $z_1 = z_2 = +3$

$$y = C_1 e^{3x} + x C_2 e^{3x}$$

$y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$ (integrale generale)

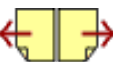
3) $y'' - 4y' + 6{,}25y = 0$ (eq. data)

$z^2 - 4z + 6{,}25 = 0$ (eq. caratteristica)

$$\begin{matrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{matrix} = \frac{4 \pm \sqrt{16-25}}{2} = \begin{cases} (2 + \frac{3}{2}i) \\ (2 - \frac{3}{2}i) \end{cases}$$ radici complesse

$$y = C_{1_0} e^{(2 + \frac{3}{2}i)x} + C_{2_0} e^{(2 - \frac{3}{2}i)x}$$

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos\frac{3}{2}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{3}{2}x\right)$$ (integrale generale)

Possiamo verificare i risultati derivando successivamente gli integrali generali

verifiche:

1) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}$; $y' = 4C_1 e^{4x} + 3C_2 e^{3x}$; $y'' = 16C_1 e^{4x} + 9C_2 e^{3x}$

$$y'' = 16 C_1 e^{4x} + 9 C_2 e^{3x}$$

$$-7y' = -28 C_1 e^{4x} - 21 C_2 e^{3x}$$

$$12y = 12 C_1 e^{4x} + 12 C_2 e^{3x}$$

$$y'' - 7y' + 12y = 0 \quad 0 \qquad \text{(torna)}$$

2) $y = C_1 e^{3x} + x C_2 e^{3x}$; $y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3x C_2 e^{3x}$;

$$y'' = 9C_1 e^{3x} + 3C_2 e^{3x} + 3C_2 e^{3x} + 9x C_2 e^{3x}$$

$$y'' = 9C_1 e^{3x} + 6C_2 e^{3x} + 9 C_2 x e^{3x}$$

$$-6y' = -18 C_1 e^{3x} - 6C_2 e^{3x} - 18 C_2 x e^{3x}$$

$$9y = 9C_1 e^{3x} \qquad + 9 C_2 x e^{3x}$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad \text{(torna)}$$

3) $y = e^{2x}\left(C_1 \cos\frac{3}{2}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{3}{2}x\right)$;

$$y' = 2e^{2x}\left(C_1 \cos\frac{3}{2}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{3}{2}x\right) + e^{2x}\left(-\frac{3}{2}C_2 \operatorname{sen}\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\cos\frac{3}{2}x\right)$$

$$y' = e^{2x}\left(\frac{7}{2}C_1 \cos\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}C_2 \operatorname{sen}\frac{3}{2}x\right)$$

$$y'' = 2e^{2x}\left(\frac{7}{2}c_1 \cos\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}c_2 \operatorname{sen}\frac{3}{2}x\right) + e^{2x}\left(-\frac{21}{4}c_1 \operatorname{sen}\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}c_2 \cos\frac{3}{2}x\right)$$

$$y'' = e^{2x}\left(\frac{31}{4}c_1 \cos\frac{3}{2}x - \frac{17}{4}c_2 \operatorname{sen}\frac{3}{2}x\right)$$

$$y'' = e^{2x}\left(\frac{31}{4}c_1 \cos\frac{3}{2}x - \frac{17}{4}c_2 \operatorname{sen}\frac{3}{2}x\right)$$

$$-4y' = e^{2x}\left(\frac{-56}{4}c_1 \cos\frac{3}{2}x - \frac{8}{4}c_2 \operatorname{sen}\frac{3}{2}x\right)$$

$$6{,}25\,y = +\frac{25}{4}y = e^{2x}\left(\frac{25}{4}c_1 \cos\frac{3}{2}x + \frac{25}{4}c_2 \operatorname{sen}\frac{3}{2}x\right)$$

$$y'' - 4y' + 6{,}25\,y = 0 \qquad (\text{torna})$$

Equazioni lineari omgenee, a coefficienti costanti, del secondo ordine, mancanti di y', (cioè del tipo $y'' \pm \mu y = 0$)

L'equazione caratteristica:

$$z^2 \pm \mu^2 = 0 \qquad (\mu = \text{costante})$$

da cui: $z = \pm\mu$ oppure: $z = \pm i\mu$

1) nel caso di:

$$\boxed{y'' - \mu^2 y = 0}$$ si ha:

$$y = C_1 e^{+\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$$

posto: $C_1 = \frac{(\alpha + \beta)}{2}$; $C_2 = \frac{(\alpha - \beta)}{2}$; $(C_1, C_2$, arbitrarie)

$$y = \frac{1}{2}(\alpha e^{\mu x} + \beta e^{\mu x} + \alpha e^{-\mu x} - \beta e^{-\mu x})$$

$$y = \alpha \frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{2} + \beta \frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{2}$$

$$\boxed{y = \alpha \cosh(\mu x) + \beta \operatorname{senh}(\mu x)}$$

$$y = \alpha \cosh(\mu x) + \beta \operatorname{senh}(\mu x)$$

l°) nel caso di:

$$y'' + \mu^2 y = 0$$ si ha :

$$y = C_1 e^{i\mu x} + C_2 e^{-i\mu x}$$

Ponendo: $\dfrac{Ki\,\text{sen}\,\varphi + K\cos\varphi}{2} = C_1$; $\dfrac{K\cos\varphi - Ki\,\text{sen}\,\varphi}{2} = C_2$

si ha:

$$y = \frac{1}{2}\left(Ki\,\text{sen}\,\varphi\, e^{i\mu x} + K\cos\varphi\, e^{i\mu x} - Ki\,\text{sen}\,\varphi\, e^{-i\mu x} + K\cos\varphi\, e^{-i\mu x}\right)$$

$$y = K\frac{e^{i\mu x} + e^{-i\mu x}}{2}\cos\varphi + K\frac{e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}}{2}i\,\text{sen}\,\varphi \qquad (i^2 = -1)$$

$$y = K\cos(\mu x)\cos\varphi - K\frac{e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}}{2i}\,\frac{i\,\text{sen}\,\varphi}{i}$$

$$y = K\left(\cos\mu x\cos\varphi - \text{sen}\,\mu x\,\text{sen}\,\varphi\right)$$

$$\boxed{y = K\cos(\mu x + \varphi)}$$

ove K e φ sono costanti arbitrarie.

3) nel caso generale:

$$\boxed{y'' - Sy' + Py = 0} \rightarrow z^2 - Sz + P = 0$$

Le radici: ρ_1 e ρ_2 $= \dfrac{+S}{2} \pm \sqrt{\dfrac{S^2}{4} - P}$

I)

$\Delta = 0 \rightarrow \rho_1 = \rho_2$ per cui: $\boxed{y = e^{\frac{S x}{2}}(C_1 + C_2 x)}$

II)

$$\Delta > 0 \rightarrow \rho_1 \neq \rho_2 \text{ (reali)} \rightarrow \boxed{y = C_1 e^{\rho_1 x} + C_2 e^{\rho_2 x}}$$

III)

$$\Delta < 0 \rightarrow i\rho_1 ; i\rho_2 \rightarrow \left(C_1 e^{i\rho_1 x} + C_2 e^{i\rho_2 x}\right) = y =$$

$$y = e^{-\frac{\rho}{2}x}\left(C_1 \cos\mu x + C_2 \operatorname{sen}\mu x\right) = \boxed{y = K e^{\frac{\rho}{2}x}\left(\cos\mu x + \varphi\right)}$$

Equazioni differenziali lineari omogenee, a coefficienti costanti, di ordine "n" (qualsiasi)

Vale per l'equazione caratteristica quanto esposto per le equazioni di grado n; cioè, se "n" è dispari si ha almeno una radice reale, mentre le eventuali radici complesse vanno a coppie di due radici complesse coniugate, e quindi riducibili a seno e coseno nell'integrale generale. Le radici reali, doppie in valore assoluto ($\pm\mu$), abbiamo visto che possono ridursi a seno e coseno iperbolico nell'integrale generale.

Nel caso di radici multiple: $(z-\alpha)^n = 0$, l'integrale generale sarà:

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} + C_3 x^2 e^{\alpha x} + \dots C_n x^{n-1} e^{\alpha x}$$

che può scriversi:

che può scriversi:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots\ldots C_n x^{n-1}\right)$$

Ma l'equazione caratteristica di grado n, supponiamo abbia μ_1 radici $= \alpha_1$; μ_2 radici $= \alpha_2$; μ_3 radici $= \alpha_3$ ..... μ_K radici $= \alpha_K$.

ove: $(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_K = n)$

avremo il sistema:

$$\begin{cases} e^{\alpha_1 x}\left(1,\ x,\ x^2,\ \ldots\ldots\ x^{\mu_1-1}\right) \\ e^{\alpha_2 x}\left(1,\ x,\ x^2,\ \ldots\ldots\ x^{\mu_2-1}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\alpha_k x}\left(1,\ x,\ x^2,\ \ldots\ldots\ x^{\mu_k-1}\right) \end{cases}$$

che è meglio scrivere:

$$\begin{cases} e^{\alpha_1 x},\ xe^{\alpha_1 x},\ x^2 e^{\alpha_1 x}\ \ldots\ldots\ x^{\mu_1-1}\cdot e^{\alpha_1 x} \\ e^{\alpha_2 x},\ xe^{\alpha_2 x},\ x^2 e^{\alpha_2 x}\qquad x^{\mu_2-1}e^{\alpha_2 x} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\alpha_k x},\ xe^{\alpha_k x},\ x^2 e^{\alpha_k x}\ \ldots\ldots\ x^{\mu_k-1}e^{\alpha_k x} \end{cases}$$

poiché è possibile dimostrare che le μ funzioni:

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ x^2 e^{\alpha x}\ \ldots\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}$$

danno μ integrali particolari (linearmente indipendenti) dell'equazione:

$$\boxed{F_y = a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

Le n funzioni linearmente indipendenti del sistema sopra scritto, formano il sistema fondamentale dell'equazione stessa.

Ciò vale anche se i coefficienti "a" costanti, sono numeri complessi.

Esempi di radici multiple

1) $$y'' + 4y' + 4y = 0$$ (equazione data)

$$z^2 + 4z + 4 = 0$$ (equazione caratteristica)

cioè: $(z+2)^2 = 0$ $\quad \alpha_1 = \alpha_2 = -2$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

od anche:

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$$ (integrale generale)

verifichiamo derivando:

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x} - 2c_2 x e^{-2x}$$

$$y'' = +4c_1 e^{-2x} - 2c_2 e^{-2x} - 2c_2 e^{-2x} + 4c_2 x e^{-2x}$$

$$y'' = 4c_1 e^{-2x} - 4c_2 e^{-2x} + 4c_2 x e^{-2x}$$

Sostituiamo nell'equazione data:

$$0 = 4e^{-2x}(C_1 - C_2 + C_2 x) + 4e^{-2x}(-2C_1 + C_2 - 2C_2 x) + 4e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$$

semplificando risulta verificata.

---

2) $$y''' - 15y'' + 75y' - 125y = 0$$ (equazione data)

2) $$y''' - 15y'' + 75y' - 125y = 0$$ (equazione data)

$$z^3 - 15z^2 + 75z - 125 = 0 = (z-5)^3$$ (equaz. caratteristica)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = +5$$

$$y = e^{+5x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right)$$ (integrale generale)

che può verificarsi derivando.

---

3) $y''' - 12y'' + 49y' - 58y = 0$ (equaz. data)

$z^3 - 12z^2 + 49z - 58 = 0$ (equaz. caratteristica)

di radici: $z_1 = +2$; $z_2 = 5+2i$; $z_3 = 5-2i$

porta ad un integrale generale:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2^{(5+2i)x} + C_3^{(5-2i)x}$$

che, per quanto già detto, può scriversi: (pag. 480)

$$y = C_1 e^{2x} + e^{5x}\left(C_2 \cos(2x) + C_3 \operatorname{sen}(2x)\right)$$

---

4) $y''' - y'' - 4y' + 4 = 0$ (equazione data)

$z^3 - z^2 - 4z + 4 = 0$ (equaz. caratteristica)

di radici: $z_1 = 1$; $z_2 = 2$; $z_3 = -2$

porta all'integrale generale:

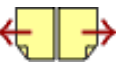
$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{+2x} + C_3 e^{-2x}$$

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{+2x} + C_3 e^{-2x}$$

che, per quanto già detto, può scriversi:

(pag 483)

$$y = C_1 e^{x} + \alpha \cosh(2x) + \beta \operatorname{senh}(2x)$$

Cioè le coppie di radici complesse coniugate, si trasformano in seno e coseno circolare, le coppie di radici reali uguali ed opposte si trasformano in seno e coseno iperbolico.

La risoluzione completa delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = Q_{(x)}$$

Risolta l'omogenea associata, ottenuta ponendo $Q_x = 0$, si presentano vari metodi per risolvere l'equazione data.

1) Se conosciamo un integrale particolare: y_p della equazione data, l'integrale generale è dato dalla somma dell'integrale y_0 dell'omogenea associata e dell'integrale particolare; cioè:

$$y = y_0 + y_p \qquad \text{(Liouville)}$$

Purtroppo mentre la risoluzione della omogenea associata non presenta problemi

e troviamo y_o, l'integrale particolare y_p in genere non lo conosciamo, però può essere utile fare qualche tentativo per vedere se possiamo trovarlo, altrimenti useremo altri metodi per esempio col metodo di Lagrange delle variazioni delle costanti arbitrarie.

Esempio:

Sia: $y'' + a^2 y = 2\cos(mx) + 3\,\text{sen}(mx)$ l'eq. data

L'omogenea associata non presenta difficoltà:

$\alpha = \pm ia \rightarrow$ $y_0 = C_1 \cos(ax) + C_2\,\text{sen}(ax)$

Il nostro:

$$Q_{(x)} = 2\cos(mx) + 3\,\text{sen}(mx)$$

un integrale particolare potrebbe essere dello stesso tipo: $y_p = \alpha\cos(mx) + \beta\,\text{sen}(mx)$

verifichiamo derivando:

$$y_p' = -m\alpha\,\text{sen}(mx) + m\beta\cos(mx)$$

$$y_p'' = -m^2\alpha\cos(mx) - m^2\beta\,\text{sen}(mx)$$

sostituiamo nell'equazione data:

$$\left(-m^2\alpha\cos(mx) - m^2\beta\,\text{sen}(mx)\right) + a^2\left(\alpha\cos(mx) + \beta\,\text{sen}(mx)\right) = Q_{(x)}$$

raggruppando: e riportando $Q_{(x)}$

$$\left(-m^2\alpha + a^2\alpha\right)\cos(mx) + \left(-m^2\beta + a^2\beta\right)\text{sen}(mx) = 2\cos(mx) + 3\,\text{sen}(mx)$$

$$\left(a^2 - m^2\right)\alpha = 2$$

$$\left(a^2 - m^2\right)\beta = 3$$

$$(a^2 - m^2)\beta = 3$$

E' andata bene, per cui l'integrale particolare è:

$$y_p = \frac{2\cos(mx) + 3\,\text{sen}(mx)}{(a^2 - m^2)}$$

e l'integrale generale sarà:

$$y = C_1\cos(ax) + C_2\,\text{sen}(ax) + \frac{2\cos(mx) + 3\,\text{sen}(mx)}{(a^2 - m^2)}$$

verifichiamo derivando e sostituendo nell'equazione data:

$$y' = -C_1 a \,\mathrm{sen}(ax) + C_2 a \cos(ax) - \frac{2m\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2 - m^2} + \frac{3m\cos(mx)}{a^2 - m^2}$$

$$y'' = -c_1 a^2 \cos(ax) - C_2 a^2 \,\mathrm{sen}(ax) - \frac{2m^2\cos(mx)}{a^2 - m^2} - \frac{3m^2\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2 - m^2}$$

$$a^2 y = C_1 a^2 \cos(ax) + C_2 a^2 \,\mathrm{sen}(ax) + \frac{2a^2}{a^2 - m^2}(\cos(mx)) + \frac{3a^2(\mathrm{sen}(mx))}{a^2 - m^2}$$

$$y'' + a^2 y = \cos(mx)\left[\frac{2a^2 - 2m^2}{a^2 - m^2}\right] + \mathrm{sen}(mx)\left[\frac{3a^2 - 3m^2}{a^2 - m^2}\right]$$

$$\boxed{y'' + a^2 y = 2\cos(mx) + 3\,\mathrm{sen}(mx)}$$

torna l'equazione data.

Notare che l'esempio ci dà già delle indicazioni per cercare l'integrale particolare.

Altro esempio eq data: $\boxed{y'' - 7y' + 12y = x}$

abbiamo già calcolato l'omogenea associata.

$$\boxed{y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}}$$

$Q_x = x$ è di primo grado in x

... = x è di primo grado in x

proviamo: $y_p = ax$; $y_p' = a$; $y'' = 0$; $-7a + 12ax = x$ (impossibile)

proviamo: $y_p = ax + b$; $y_p' = a$; $y'' = 0$; $\rightarrow -7a + 12ax + 12b = x$

affinché l'uguaglianza sia verificata deve essere:

$a = \frac{1}{12}$; $-\frac{7}{12} + 12b = 0$; cioè $b = \frac{7}{144}$; $\boxed{y_p = \frac{x}{12} + \frac{7}{144}}$

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{x}{12} + \frac{7}{144}}$$ (integrale generale)

Quello che abbiamo visto non é il solo metodo per risolvere le equazioni differenziali complete a coefficienti costanti. Esso consiste nel= l'ipotezzare l'integrale particolare secondo una funzione generica del tipo di Q(x), poi derivando determinare i parametri che la definiscono sostituendo nella equa= zione data. Vediamo ora il:

Metodo generale per la risoluzio= ne di una equazione differenziale completa a coefficienti costanti, o a coefficienti funzioni continue della x.

Premesso che un sistema di integrali particolari dell'equazione differenziale lineare omogenea:

$$F(y) = P_0 y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots\dots + P_{n-1} y' + P_n y = 0$$

cioè: $y_1 ; y_2 \dots y_n$ per i quali il Wronskiano

cioè: $y_1; y_2; \dots y_n$ per i quali il Wronskiano sia diverso da zero ($W \neq 0$), cioè siano fra loro indipendenti linearmente, un tale sistema è detto: "Un sistema fondamentale dell'equazione F(y)" (Fuchs). L'equazione è l'omogenea associata dell'equazione data il cui secondo membro: X o $Q(x)$

è costituito da funzioni continue della x.
Abbiamo visto che se $y_1, y_2, \dots y_n$ è un sistema fondamentale dell'omogenea associata $F(y)=0$ ed $\bar{y}$ è un integrale particolare, abbiamo che l'integrale generale è:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + \bar{y}$$

che abbiamo sinteticamente esposto: $(y = y_0 + y_p)$; nel trattare equazioni lineari a coefficienti costanti.
Sostituendo ad $F(y)=X$; $F\bar{y}=X$ (ove X è una $f(x)$) avremo sottraendo che $F(y-\bar{y})=0$ ed essendo $(y-\bar{y})$ soluzione dell'equazione omogenea avremo:

$$(y-\bar{y}) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots C_n y_n$$

che poteva dedursi direttamente.
Il metodo, dovuto a Lagrange, per determinare un integrale particolare della $F(y)=X$, consiste nel considerare le costanti $C_1, C_2, \dots C_n$ come funzioni della x, cioè $C_1(x), C_2(x) \dots C_n(x)$;

... $C_1(x)$, $C_2(x)$ ... $C_n(x)$;

in modo che determinino un integrale particolare; cioè:

$$\bar{y} = C_{1(x)} y_1 + C_{2(x)} y_2 + \cdots C_{n(x)} y_n$$

derivando abbiamo:

$$\bar{y}' = \left[C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \cdots C_{n(x)}' y_n \right] + \left[C_{1(x)} y_1' + C_{2(x)} y_2' + \cdots C_{n(x)} y_n' \right]$$

Poiche' le derivate di costanti sono nulle, in questo caso poniamo: $-\left[C'_{1(x)}y_1 + C'_{2(x)}y_2 + \dots + C'_{n(x)}y_n\right] = 0$, (notare che è l'intera espressione posta = 0); avremo:

$$\bar{y}' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \dots + C_n y'_n$$

e derivando avremo:

$$\bar{y}'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \dots C_n y''_n$$

e considerando nulle le derivate delle C_i fino alle derivate di ordine n- avremo il sistema:

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0$$

$$C'_2 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = \frac{X}{P_0}$$

ove le derivate erano moltiplicate ordinatamente per $P_n, P_{n-1}, \dots, P_0$., semplificando si ha il sistema. Infatti: $\bar{y}$ deve verificare l'equazione cioè: $F(\bar{y}) = X$ ed anche:

$$P_0\left[C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)}\right] = X$$

Il sistema soprascritto costituisce un Wronskiano diverso da zero, $W \neq 0$; con Cramer, possiamo determinare le $C_i' = \dfrac{W_{ni}\, X}{P_0\, W}$; $(i = 1, 2, \dots n)$ ove W_{ni} è il complemento algebrico di $y_i^{(n-1)}$; cioè abbiamo sviluppato il determinante secondo

l'ultima riga. Risolte le c_i' occorrerà integrare per trovare le $C_i = \int c_i' dx = \int \frac{W_{mi} X}{P_0 W} dx$, da sostituire nell'equazione. Cioè:

$$\bar{y} = y_1 \int \frac{W_{m1} X}{P_0 W} dx + y_2 \int \frac{W_{m2} X}{P_0 W} dx + \dots + y_n \int \frac{W_{mn} X}{P_0 W} dx$$

ci dà il nostro integrale particolare.

Se pensiamo che le costanti sono arbitrarie cioè possono variare ad arbitrio, nulla vieta che la variazione (arbitraria), fra le infinite possibili, si consideri funzione della x; da ciò il metodo detto anche: "metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie"

Esempi (iniziamo con equazioni lineari a coefficienti costanti, già risolte con metodi diversi, vedi pag. prec.)

Equazione data: $y'' - 7y' + 12y = x$

omogenea associata: $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$

consideriamo C_1 e C_2 funzioni della x e deriviamo

$$y_0' = C_1' e^{3x} + C_2' e^{4x} + 3C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{4x}$$

poniamo: $(C_1' e^{3x} + C_2' e^{4x}) = 0$

ricordando che all'ultima derivata non si annullano le C_i',

derivando la:

$$y_0' = 3C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{4x}$$

si ha:

$$y_0'' = \left[3C_1' e^{3x} + 4C_2' e^{4x}\right] + \left[9C_1 e^{3x} + 16 C_2 e^{4x}\right]$$

Scriviamo il sistema: uguagliando a $\frac{X}{p_0}$ l'espressione

delle C_i'

$$C_1' e^{3x} + C_2' e^{4x} = 0$$
$$3C_1' e^{3x} + 4C_2' e^{4x} = X$$

con Cramer:

$$\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ 3e^{3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4e^{7x} - 3e^{7x} = e^{7x} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & e^{4x} \\ X & 4e^{4x} \end{vmatrix} = -Xe^{4x} \rightarrow C_1' = \frac{-Xe^{4x}}{e^{7x}} = -Xe^{-3x}$$

$$\begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & X \end{vmatrix} = Xe^{3x} \rightarrow C_2' = \frac{Xe^{3x}}{e^{7x}} = Xe^{-4x}$$

$$C_1 = \int C_1' dx = \int -x e^{-3x} dx = \int \frac{x}{3} d e^{-3x} = \frac{x}{3} e^{-3x} - \frac{1}{3}\int e^{-3x} dx =$$

$$\boxed{C_1 = e^{-3x}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) + K_1}$$

$$C_2 = \int C_2' dx = \int x e^{-4x} dx \rightarrow \boxed{C_2 = -e^{-4x}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{16}\right) + K_2}$$

sostituendo nell'integrale dell'associata si ha:

$$\bar{y} = \left[e^{-3x}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) + K_1\right] e^{3x} + \left[-e^{-4x}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{16}\right) + K_2\right] e^{4x}$$

$$y = K_1 e^{3x} + K_2 e^{4x} + \frac{x}{12} + \frac{7}{144}$$ integrale generale

ove: $K_1 e^{3x} + K_2 e^{4x} = y_0$ dell'omogenea associata con K_1 e K_2 costanti arbitrarie e

$$\frac{x}{12} + \frac{7}{144} = \bar{y} = y_p$$ = integrale particolare

ove non figurano costanti arbitrarie

Si noti com'è stato più veloce cercarsi subito l'integrale particolare.

Esempio:

equazione data: $y'' + a^2 y = 2\cos(mx) + 3\,\mathrm{sen}(mx)$

integrale dell'associata: $y_0 = C_1 \cos(ax) + C_2\,\mathrm{sen}(ax)$

applicando il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie, si ha: (derivando y_0)

$$y_0' = [C_1' \cos(ax) + C_2'\,\mathrm{sen}(ax)] + [-aC_1\,\mathrm{sen}(ax) + aC_2\cos(ax)]$$

$y_0' = [C_1 \cos(ax) + C_2 \,\mathrm{sen}(ax)] + [\ldots]$

poniamo zero il primo addendo e deriviamo di nuovo:

$$y_0'' = \left[-aC_1' \,\mathrm{sen}(ax) + aC_2' \cos(ax)\right] + \left[-a^2 C_1 \cos(ax) - a^2 C_2 \,\mathrm{sen}(ax)\right]$$

si ha il sistema:

$$\begin{cases} C_1' \cos(ax) + C_2' \,\mathrm{sen}(ax) = 0 \\ -aC_1' \,\mathrm{sen}\, ax + aC_2' \cos(ax) = 2\cos(ux) + 3\,\mathrm{sen}(ux) \end{cases}$$

con Cramer si ha:

$$\begin{vmatrix} \cos(ax) & \operatorname{sen}(ax) \\ -a\operatorname{sen}(ax) & +a\cos(ax) \end{vmatrix} = a\cos^2(ax) + a\operatorname{sen}^2(ax) = a$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}(ax) \\ [2\cos(mx)+3\operatorname{sen}(mx)] & a\cos(ax) \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}(ax)\left[2\cos(mx)+3\operatorname{sen}(mx)\right]$$

$$\boxed{C_1' = \frac{-\operatorname{sen}(ax)}{a}\left[2\cos(mx)+3\operatorname{sen}(mx)\right]}$$

$$\begin{vmatrix} \cos(ax) & 0 \\ -a\operatorname{sen}(ax) & [2\cos(mx)+3\operatorname{sen}(mx)] \end{vmatrix} = \cos(ax)\left[2\cos(mx)+3\operatorname{sen}(mx)\right]$$

$$\boxed{C_2' = \frac{\cos(ax)}{a}\left[2\cos(mx)+3\operatorname{sen}(mx)\right]}$$

integrando C_1' e C_2' si ha:

$$C_1 = \int C_1'\,dx = \frac{-2}{a}\int \operatorname{sen}(ax)\cos(mx)\,dx + \frac{-3}{a}\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(mx)\,dx$$

$$C_2 = \int C_2'\,dx = \frac{2}{a}\cdot\int \cos(ax)\cos(mx)\,dx + \frac{3}{a}\int \cos(ax)\operatorname{sen}(mx)\,dx$$

$$C_2 = \int C_2\, dx = \frac{\ldots}{a} \int \cos(ax) \ldots$$

Per risolvere questo tipo di integrali occorre avvalersi delle formule di prostaferesi (v. Vol I) di cui riportiamo le relazioni che interessano; consideriamo: $(ax) = \left(\frac{p+q}{2}\right)$; $(mx) = \left(\frac{p-q}{2}\right)$;

$(ax) > (mx)$: $(p) = (a+m)x$; $(q) = (a-m)x$;

$(p) = (ax + mx)$; $(q) = (ax - mx)$;

Nelle formule di prostaferesi:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(p)+\operatorname{sen}(q)\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(q)-\cos(p)\right) \end{array}\right\} \text{per } e_1'$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(p)+\cos(q)\right) \\ \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(p)-\operatorname{sen}(q)\right) \end{array}\right\} \text{per } e_2'$$

---

sostituiamo i valori:

$$\operatorname{sen}(ax)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(ax+mx)+\operatorname{sen}(ax-mx)\right)$$

$$\operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(mx) = \frac{1}{2}\left(\cos(ax-mx)-\cos(ax+mx)\right)$$

$$\cos(ax)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left(\cos(ax+mx)+\cos(ax-mx)\right)$$

$$\cos(ax)\operatorname{sen}(mx) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(ax+mx)-\operatorname{sen}(ax-mx)\right)$$

$$C_1 = \frac{-3}{2a}\int\left(\operatorname{sen}(ax+mx)+\operatorname{sen}(ax-mx)\right)dx + \frac{-3}{2a}\int\left(\cos(ax-mx)-\cos(ax+mx)\right)dx$$

$$C_2 = \frac{-3}{2a}\int\left(\cos(ax+mx)+\cos(ax-mx)\right)dx + \frac{3}{2a}\int\left(\operatorname{sen}(ax+mx)-\operatorname{sen}(ax-mx)\right)dx$$

$$C_1 = \frac{1}{a}\left(\frac{-\cos(ax+mx)}{(a+m)} + \frac{-\cos(ax-mx)}{(a-m)}\right) - \frac{3}{2a}\left(\frac{\operatorname{sen}(ax-mx)}{(a-m)} - \frac{\operatorname{sen}(ax+mx)}{(a+m)}\right) + K_1$$

$$C_2 = \frac{1}{a}\left(\frac{\operatorname{sen}(ax+mx)}{(a+m)} + \frac{\operatorname{sen}(ax-mx)}{(a-m)}\right) + \frac{3}{2a}\left(\frac{-\cos(ax+mx)}{(a+m)} - \frac{-\cos(ax-mx)}{(a-m)}\right) + K_2$$

riduciamo allo stesso denominatore:

Riepilogo di integrali di equazioni omogenee

equazione data	integrale
$y' \pm ay = 0$	$y = Ce^{\pm ax}$
$y' + P_{(x)}y = 0$	$y = Ce^{-\int P_{(x)}dx}$
$y' + P_{(x)}y = Q_{(x)}$	$y = e^{-\int P_{(x)}dx}\left(\int Q_{(x)} e^{+\int P_{(x)}dx}dx + C\right)$
$y'' - \mu^2 y = 0$	$y = C_1\cosh(\mu x) + C_2 \operatorname{senh}(\mu x) = y = K_1\cosh(\mu x + K_2)$
$y'' + \mu^2 y = 0$	$y = C_1\cos(\mu x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu x) = y = K_1\cos(\mu x + K_2)$
$y^{(n)} - f_{(x)} = 0$	$y = \left[\left(\int f_{(x)}^{(n)}dx\right) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots C_{n-1}x + C_n\right]$
nel caso in cui l'eq. caratteristica si riduca: $(z-\alpha)^n = 0$	$y = e^{\alpha x}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots + C_nx^{n-1})$

(radici multiple	
se le radici dell'equaz. caratter. sono: $(p \pm iq)$	$y = e^{px}(c_1 \cos(qx) + c_2 \operatorname{sen}(qx))$

$$C_2=\left[2\,\mathrm{sen}(ax)\cos(mx)-\frac{2m}{a}\cdot\cos(ax)\,\mathrm{sen}(mx)+3\,\mathrm{sen}(ax)\,\mathrm{sen}(mx)-\right.$$

$$\left.-\frac{3m}{a}\,\mathrm{sen}(ax)\,\mathrm{sen}(mx)\right]\frac{1}{(a^2-m^2)}+K_2$$

$$\boxed{C_2=\frac{\mathrm{sen}(ax)\big(2\cos(mx)+3\,\mathrm{sen}(mx)\big)-\frac{m}{a}\cos(ax)\big(2\,\mathrm{sen}(mx)-3\cos(mx)\big)}{(a^2-m^2)}+K_2}$$

sostituendo C_1 e C_2 nell'integrale dell'associata: $y_0=C_1\cos(ax)+C_2\,\mathrm{sen}(ax)$; si ha:

$$\cos^2(ax)\left(\frac{2\cos(mx)+3\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2-m^2)}\right)+\frac{m}{a}\,\mathrm{sen}(ax)\cos(ax)\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(mx)-3\cos(mx)}{a^2-m^2}\right)+$$

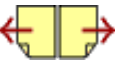
$$+K_1\cos(ax)+\mathrm{sen}^2(ax)\left(\frac{2\cos(mx)+3\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2-m^2)}\right)-$$

$$-\frac{m}{a}\,\mathrm{sen}(ax)\cos(ax)\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(mx)-3\cos(mx)}{(a^2-m^2)}\right)+K_2\,\mathrm{sen}(ax)$$

cioè:

$$\boxed{y=K_1\cos(ax)+K_2\,\mathrm{sen}(ax)+\left(\frac{2\cos(mx)+3\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2-m^2)}\right)}$$

risultato che avevamo già ottenuto con altro metodo (vedi pag 490), e che abbiamo già verificato.

La lungaggine e la complessità di questo procedimento può implicare errori di calcolo, per questo abbiamo sviluppato nei particolari le singole parti ed evidenziato le semplificazioni.

Altri esempi

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = e^{-3x}}$$ (equaz. data)

radici dell'omogenea associata $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 2$.

$y_o = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$ (integrale dell'associata.)

(Con Liouville) supponiamo: $y_p = a e^{-bx}$ per ora con a e b costanti (potrebbero essere funzioni della x)

$y'_p = -ab\, e^{-bx}$; $y''_p = +ab^2 e^{-bx}$; sostituendo nella eq. data: $ae^{-bx}(b^2 + 3b + 2) = e^{-3x}$

per $b = +3$; $a(9+9+2) = 1$ perciò $a = \frac{1}{20}$

$$y_p = \frac{e^{-3x}}{20} \qquad y = (y_o + y_p)$$

$$\boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{e^{-3x}}{20}}$$ integrale generale

infatti: $-3y' = -3C_1 e^{x} - 6C_2 e^{x} + \frac{9}{20} e^{-3x}$

$y'' = C_1 e^{x} + 4C_2 e^{x} + \frac{9}{20} e^{-3x}$

e $y = 2C_1 e^{x} + 2C_2 e^{x} + \frac{2}{20} e^{-3x}$ sommando:

$y'' - 3y' + 2y = \frac{20}{20} e^{-3x}$

Col metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0 \\ C_1' e^x + 2C_2' e^{2x} = e^{-3x} \end{cases} \qquad \begin{matrix} C_1 e^x + 2 C_2 e^{2x} \\ C_1 e^x + 4 C_2 e^{2x} \end{matrix}$$

risolvendo il sistema: $\boxed{C_1' = -e^{-4x}}$; $\boxed{C_2' = e^{-5x}}$

integrando: $\boxed{C_1 = \frac{1}{4} e^{-4x} + K_1}$; $\boxed{C_2 = \frac{-1}{5} e^{-5x} + K_2}$

Criteri ed artifizi vari

Abbassamento dell'ordine dell'eq. diff.

Qualora una equazione differenziale man=chi della y o anche della y e della y', o in generale delle derivate al di sotto di un un certo ordine è possibile, ope=rando un cambiamento di variabile, abbas=sare l'ordine dell'equazione data.

Esempio:

$$\boxed{y''' + P_{(x)}y'' = Q_x}$$ equaz. data

considero: $t'' = y'''$, $t' = y''$, $t = y'$ — abbasso di un grado di derivazione l'equazione

e l'equazione diventa:

$$t'' - \quad t' = Q_{(x)}$$

$z(x)$

considero: $\left.\begin{array}{l} z' = t'' \\ z = t' \end{array}\right\}$ abbasso ancora di un grado di derivazione

e l'equazione diventa: $z' + P_{(x)} z = Q(x)$

$$z = e^{-\int P_{(x)} dx} \left(\int Q_{(x)} e^{+\int P_{(x)} dx} dx + C_1 \right) = t'$$

e quindi: $t = \int t' dx = y'' + C_2$; $\int t dx = \int y' dx = y + C_2$.

delle variazioni delle costanti arbitrarie si ha:

derivando $y_0 = (C_1 + x C_2) e^x$

$$y_0' = (C_1' + C_2 + x C_2') e^x + (C_1 + x C_2) e^x$$

$$y_0' = \underbrace{C_1' e^x + x C_2' e^x}_{=0} + C_1 e^x + C_2 e^x + x C_2 e^x$$

$$y_0'' = (C_1' + C_2' + C_2 + x C_2' + C_1 + C_2 + x C_2) e^x$$

si ha il sistema:

dividendo per e^x:
$$\begin{cases} (C_1' + x C_2') = 0 \\ (C_1' + (x+1) C_2') = 1 \end{cases}$$

da cui: $C_1' = -x$; $C_2' = 1$

integrando:

$$C_1 = \left(\frac{-x^2}{2} + K_1\right) \quad ; \quad C_2 = (x + K_2)$$

e sostituendo nell'integrale dell'associata:

$y = (C_1 + C_2 x) e^x$ [illegible]

$y_0 = (C_1 + C_2 x) e^x$ si ha:

$$y = \left(-\frac{x^2}{2} + K_1 + (x + K_2)x \right) e^x$$

$$\boxed{y = \left(K_1 + K_2 x + \frac{x^2}{2} \right) e^x}$$

che torna l'integrale generale.

Esempio numerico

$$\boxed{y''' - 5y'' = e^{6x}}$$ eq. data

$$t'' - 5t' = e^{6x}$$ un ordine in meno

$$z' - 5z = e^{6x}$$

$$z = e^{+5\int dx}\left(\int e^{6x} \cdot e^{-5\int dx}\, dx + c_1\right)$$

$$= e^{5x}\left[\int e^{6x} e^{-5x}\, dx + c_1\right]$$

$$= e^{5x}\left[\int e^{x} dx + c_1\right]$$

$$= e^{5x}(e^{x} + c_1)$$

$$= (e^{6x} + c_1 e^{5x}) = t'$$

$$t = \int(e^{6x} + c_1 e^{5x})\, dx = \frac{1}{6}e^{6x} + \frac{c_1}{5}e^{5x} + c_2 = y'$$

$$y = \int\left(\frac{e^{6x}}{6} + \frac{c_1}{5}e^{5x} + c_2\right) dx = \boxed{\frac{e^{6x}}{36} + \frac{c_1 e^{5x}}{25} + c_2 x + c_3}$$

$$y' = \frac{e^{6x}}{6} + \frac{C_1 e^{5x}}{5} + C_2$$

$$\left.\begin{aligned} 5y'' &= 5e^{6x} + 5e^{5x} \\ y''' &= 6e^{6x} + 5e^{5x} \end{aligned}\right\} y''' - 5y'' = e^{6x} \quad (\text{torna})$$

Le Medie

1) Media aritmetica semplice. (m)

Dicesi media aritmetico semplice di "n" quantitá: a_1, a_2, a_3 ..... a_n; il rapporto:

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

che puó esprimersi piú sinteticamente:

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} a_i$$

Si usa spesso simboleggiare il termine medio con: " $\bar{a}$ " $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} a_i$; $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i$.

---

2) Media aritmetica ponderata. (mp)

Dicesi media aritmetica ponderata delle quantitá: a_1, a_2, a_3, ... a_n; ponderalmente valutate dai "pesi": α_1, α_2, α_3, ... α_n; il rapporto:

$$(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \dots + a_n\alpha_n)$$

$$mp = \frac{(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n)}$$

più sinteticamente:

$$mp = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i\alpha_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i}$$

Se $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ sono le portate di un torrente nei periodi: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$; $mp =$ è la portata media nel periodo $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i$

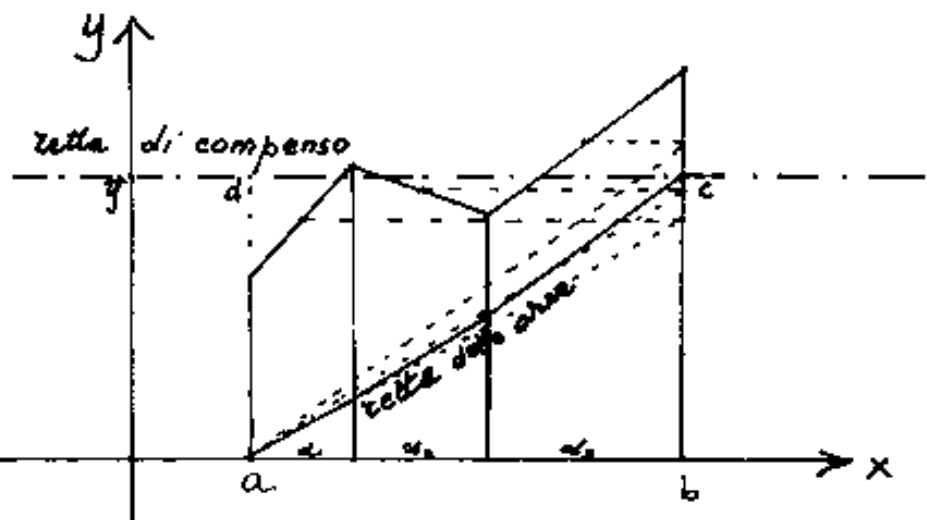
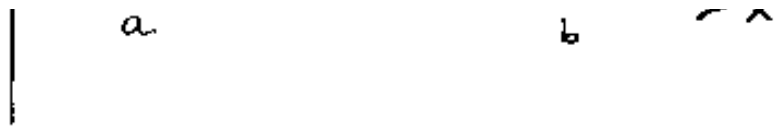
Qualora i pesi α siano uguali fra loro: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_n$ si ricade nella media aritmetica semplice, infatti:

$$m = \frac{\alpha \sum^{n} a_i}{\alpha (n)}$$

Se $y = f(x)$; nel tratto a, b l'ordinata media sarà: $\bar{y} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx$ e la retta $y = \bar{y}$ è detta retta di compenso.

Nel caso della integrazione grafica, la retta di compenso si ottiene prendendo come base un segmento uguale ad $(b-a)$:

l'area del rettangolo abcd equivale all'area della somma dei trapezi.

a b

Si noti che chiamando: α_1, α_2, α_3, le altezze dei trapezi e con y_1, y_2, y_3 le medie delle basi si ha: $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(b-a)$; $\bar{y}=\dfrac{y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+y_3\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$

Si noti anche, che, nel calcolo dei baricentri si fanno medie ponderali.

3) Media geometrica (mg)

Dicesi media geometrica di n valori, la radice ennesima del loro prodotto:

$$mg = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdot \cdot a_n}$$

Qualora i valori siano solo due a, b ; avremo:

$$mg = \sqrt{a\,b}$$

vale la proporzione:

$$a : mg = mg : b$$

cioè il medio geometrico è anche medio propor= zionale. Quando $mg = (b-a)$ si ha la sezione aurea.

Se prendiamo i logaritmi si ha:

$$\log(mg) = \frac{1}{n}\left(\log(a_1) + \log(a_2) + \dots + \log(a_n)\right)$$

Cioè il logaritmo del medio geometrico è la media aritmetica dei logaritmi dei singo, li valori.

li valori.

4) <u>Media geometrica ponderata</u> (mgp)

se le quantità: $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ sono ponderalmente valutate in base ai "pesi": $f_1, f_2, f_3, \dots f_n$ avremo:

$$\bar{a}_g = mgp = \sqrt[\sum_1^n f_i]{a_1^{f_1} \cdot a_2^{f_2} \cdot \dots \cdot a_n^{f_n}}$$

$$\bar{a}_g^f = mgp = \sqrt[n]{a_1^{f_1} \cdot a_2^{f_2} \dots \cdot a_n^{f_n}}$$

Notiamo che i pesi: $f_1, f_2, f_3, \dots f_n$ i possono considerarsi "frequenze".

Se prendiamo i logaritmi delle due espressioni abbiamo:

$$\log(\bar{a}_g) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} f_i \log(a_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} f_i}$$

Cioè il logaritmo del medio geometrico ponderale è la media aritmetica ponderata dei logaritmi delle singole quantità

Per l'altra espressione si ha:

$$\log(\bar{a}_g^{\bar{f}}) = \bar{f} \log(\bar{a}_g) = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} f_i \log(a_i)}{n}$$

cioè il logaritmo del valore già pesato del medio geometrico ponderale è la media aritmetica semplice dei logaritmi delle singole quantità.

Dividendo membro a membro queste due espressioni si ha: (la seconda divisa dalla prima)

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_i}{n}$$

Cioè il peso medio (o frequenza media) è dato dalla media aritmetica semplice dei singoli pesi (o singole frequenze).

4) Media Armonica ;(ma)

Dicesi, in generale, medio armonico di "n" quantità: $a_1, a_2, \ldots a_n$; il reciproco della media aritmetica dei reciproci:

$$ma = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\frac{1}{ma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{a_i}\right)$$

Quando le quantità sono solo due: "a" e "c" abbiamo già introdotto il medio armonico "b", nel trattare la proporzione armonica: "Dicesi medio armonico un valore "b" rispetto ad altri due "a" e "c", quando gli scostamenti fra il medio armonico "b" e gli altri due valori "a" e "c" sono proporzionali a questi ultimi:

questi ultimi:

$$(a-b):(b-c) = a : c$$

da cui svolgendo:

$$ab - ac = ac - bc$$

$$b = \frac{2ac}{a+c} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$$

ed anche:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$$

Media armonica associata a frequenze. (m.a.a.)

Abbiamo visto medie ponderali aritmetiche e geo-metriche. Nelle aritmetiche le quantità "a_i", con $i = 1 \ldots n$, agivano come addendi per cui se il peso era α_i, il valore del termine era: $\alpha_i \cdot a_i$, essendo: $\alpha_i a_i = \underset{1}{\overset{\frown}{a_i}} + \underset{2}{\overset{\frown}{a_i}} + \cdots \underset{\alpha_i}{\overset{\frown}{a_i}}$.

Nella media geometrica le quantità a_i agi-scono come fattori per cui se il peso era f_i il valore del termine è: $a_i^{f_i} = \underset{1}{\overset{\frown}{a_i}} \cdot \underset{2}{\overset{\frown}{a_i}} \cdots \underset{f_i}{\overset{\frown}{a_i}}$.

Nella media armonica ponderale, occorre sia chiarito se i valori dei termini sono da considerarsi come prodotto con i rispettivi pesi, oppure se il loro valore è dato dalla potenza che ha per esponente i pesi. Poiché i singoli termini figu-rano nella media come "reciproci", anche per i

tano nella media come [illegible], allora per i pesi (meglio chiamarli frequenze) si prendono i reciproci e se ne fa il prodotto.

$$(maa) = \frac{n}{\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} + \dots \frac{f_n}{a_n}}$$

$$\frac{1}{(maa)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f_i}{a_i}$$

Moda e Mediana

Cerchiamo di capire e quindi distinguere i vari aspetti del concetto: "frequenza".
Abbiamo già introdotto la frequenza come cicli al secondo, (si usa anche per le onde elettromagnetiche) e poiché in fisica hanno convenuto che la misura angolare non ha dimensioni (ciò dovrà essere rivisto), si usa dire che la frequenza è l'inverso del periodo ($f = \frac{1}{T}$) ove per periodo si intende il tempo per compiere un ciclo. Però come "frequenza" "nel tempo" si può pensare al numero di persone che attraversano un ponte in un anno, o in un giorno, o in una ora, e la frequenza nell'unità di tempo sarà tanto maggiore quanto più è fitta la folla e quanto più è veloce il loro spostarsi.
Ma esiste anche un'altro concetto di frequenza, indipendente dal tempo. Per esempio

<u>quenza</u>, indipendente dal tempo. Per esempio in una serie di 100 esperimenti si sono avuti: α volte "a" ; β volte "b"; γ volte "c" .... ecc ove: $(\alpha+\beta+\gamma+\cdots=100)$ possiamo esprimere la frequenza in percentuale; cioè: la frequenza di "a" in quella serie di esperienze è stata di $\alpha\%$ quella di "b" del $\beta\%$, di "c" del $\gamma\%$ ...esprimibili con numeri: $0\div1$.

ciò premesso chiameremo: "<u>Moda</u>" in una distribuzione di frequenza, il valore che corrisponde alla frequenza massima. Un esempio banale: se su 100 donne che si incontrano si nota che 80 sono vestite di rosso, si dice la moda è il rosso.

Se disponiamo una sequenza ordinata di valori chiameremo <u>Mediana</u> il valore intermedio fra i due estremi. Siano a_1, a_2, a_i, a_n i valori, si hanno due casi; se n è dispari, <u>mediana</u> è il termine a_i ove $i = \frac{n+1}{2}$. Se invece "n" è pari, <u>mediana</u> è un valore intermedio fra $i = \frac{n}{2}$ ed $i = \frac{n}{2}+1$.

Per i sistemi continui la mediana è quel valore che la somma delle frequenze minori o maggiori a quella della mediana sia: $50\% = \frac{1}{2}$.

La moda può non esistere, e se esiste può non essere unica.

Supponiamo di avere i seguenti dati: 4, 4.10, 4.2, 4.3, 4.5;

$m = 4,22$; $mg = 4,21653$; $ma = 4,21309$; Mediana $M_d = 4.2$;

$f_i = \frac{a_i}{\sum a_i}$ = frequenze del gruppo: $f_1 = 0,18957$; $f_2 = 0,19431$; $f_3 = 0,19905$;

$f_4 = 0,20379$; $f_5 = 0,21327$; Moda = $M_o = 0,21327$.

Scostamenti dalla media: $s_1 = -0,22$; $s_2 = -0,12$; $s_3 = -0,02$

$s_4 = +0,08$; $s_5 = +0,28$.

Scarto medio quadratico

Consideriamo "n" valori: $a_1, a_2, \dots a_n$ di cui si è fatta la media aritmetica $m = \bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} a_i$, I valori possono essere i risultati delle misure di una stessa grandezza con strumenti dello stesso grado di precisione, oppure con lo stesso strumento in tempi diversi. Il valore medio $m = \bar{a}$, sarà il più probabile valore della misura della grandezza. Gli scarti dalla media: $s_i = (a_i - \bar{a})$ ci forniscono già una visione della precisione delle misure; anzi, se l'insieme degli scarti si aggira intorno a certi ordini di grandezza, mentre uno di essi è notevolmente maggiore, si presume che la misura che ha portato questo scarto eccezionale sia affetta da un errore grossolano accidentale e pertanto non si debba tener conto di tale misura. Per es. le misure siano: 10,20, 10,22,

ogni misura. Per es. le misure siano: 10,20 , 10,22 ,

10,18 , 10,19 , 10,20 , 8,80. avremo: $\bar{a} = 9,965$

$s_1 = +0,235$, $s_2 = +0,255$, $s_3 = +0,215$, $s_4 = +0,325$, $s_5 = +0,235$, $s_6 = -1,165$.

Lo scarto s_6 ci avverte di scartare la misura $a_6 = 8,80$

avremo: $\bar{\bar{a}} = 10,198$ ed i nuovi scarti saranno: $s_1 = +0,002$,

$s_2 = +0,022$, $s_3 = -0,018$, $s_4 = -0,008$, $s_5 = +0,002$.

Si noti come sono molto più piccoli dei precedenti.

strumenti più precisi, od operatori più capaci, avranno scarti minori.

Lo stesso dicansi di "u" tiratori, ciascuno dei quali tira "n" colpi ad un bersaglio. Le distanze dei colpi dal centro del bersaglio possiamo considerarli "scarti". La visione dei bersagli perforati dai colpi può fornire una serie di informazioni. Se lo scostamento è casuale, gli scarti devono essere simmetrici o quasi rispetto al centro. Se sono tutti pressoché addensati in una zona, l'errore non sarebbe più casuale, ma sistematico. Un errore sistematico può dipendere da un difetto dello strumento, oppure da un difetto del tiratore, ma, una volta individuata la causa, l'errore sistematico può essere eliminato.

Lo "scarto" può riguardarsi anche sotto altri aspetti; per esempio se in un certo periodo

aspetti; per esempio se in un certo periodo in una certa zona, consideriamo l'altezza degli uomini alla visita di leva e ne facciamo la media, gli scarti dalla media, non possono essere considerati come "errori". Ma anche qui possiamo trovare scarti eccezionali in più o in meno rispetto alla media, ed il loro studio è proprio della Statistica.

Però non possiamo fare la media aritmetica degli scarti ottenuti da una media aritmetica perché risulta zero. Infatti, siano $a_1, a_2, \ldots a_n$ i dati

$$s_1 + s_2 + \cdots s_n = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - (n\bar{a}) = n\bar{a} - n\bar{a} = 0$$

Vi sono vari modi di calcolare uno scarto medio:

1) Se prendiamo il valore assoluto degli scarti;

l'espressione:

$$|\delta| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |a_i - \bar{a}|$$

è detta: "deviazione media"

La deviazione media può essere calcolata con la stessa formula ove al posto di $\bar{a} = m$, poniamo: $\bar{a} = m_g$, oppure: $\bar{a} = m_a$, ecc.)

---

2) Se facciamo i quadrati degli scarti e li sommiamo:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^{n} s_i^2$$

L'espressione:

$$(\delta)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (a_i - \bar{a})^2$$

$$\ldots \frac{1}{n} \sum_{i=1} \ldots$$

è detta in alcuni testi italiani:

"Dispersione" o "Varianza"

mentre l'espressione:

$$\overline{(\sigma)}^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2$$

è detta "Varianza" nei testi di lingua inglese

La loro radice quadrata è detta:

$$\varepsilon_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2}{(n)}}$$

"scarto medio quadratico" od "Errore medio"

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2}{(n-1)}}$$

"deviazione standard" od "Errore medio a posteriori"

$$\varepsilon_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2}{(n-1)(n)}}$$

"Errore probabile"

Su queste "dizioni" torneremo precisandole nel trattare la statistica.

La "deviazione standard" è importantissima e si trova spesso preprogrammata nelle calcolatrici elettroniche portatili.

Facciamo un esempio:

Dalle misure: 10,20 ; 10,22 ; 10,18 ; 10,19 ; 10,20

dalle misure: [illegible]

media $\bar{a} = 10,198$ abbiamo gli scarti $s_1 = +0,002$

$s_2 = +0,022$; $s_3 = -0,018$; $s_4 = -0,008$; $s_5 = +0,002$.

$$\sum_{i=1}^{5} s_i^2 = 0,00088 \quad ; \quad \frac{1}{5}\sum_{1}^{5} s_i^2 = \underline{0,000176} = \underline{\text{dispersione}}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{1}^{5} s_i^2 = \underline{0,00022} = \underline{\text{varianza}} .$$

$$\varepsilon_m = \sqrt{0,000176} = \underline{0,0132665} = \underline{\text{Errore medio}} .$$

$$s = \sqrt{0,00022} = \underline{0,0148324} = \underline{\text{Errore medio a posteriori}} .$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\frac{0,00088}{(4)(5)}} = \underline{0,006633} = \underline{\text{Errore probabile}} .$$

Cenni sui minimi quadrati

Il metodo dei minimi quadrati. (che è fondamentale principio della teoria degli errori) Consiste in un procedimento matematico di successive approssimazioni che, partendo dalla media delle misure effettuate, o dei valori osservati, (casualmente diversi), rende minima la somma dei quadrati degli scarti.

Le successive approssimazioni consistono nella correzione della media, eliminando quei valori, che, attraverso gli scarti, si discostano troppo dalla media e sono da considerarsi anomali. (come noi abbiamo scartato 8,8 dalla media nell'esempio fatto).

Si può dimostrare che il procedimento tende ad individuare il più probabile valore della grandezza misurata; (utilissimo in topografia e

[illegible], ([illegible]
nelle esperienze della fisica e della chimica).

Il metodo si utilizza anche per trovare fra le funzioni di un certo tipo quella che più si approssima alla funzione incognita di cui conosciamo solo alcuni valori.

Calcolo combinatorio

Consideriamo "n" oggetti (per ora tutti diversi fra loro), per esempio le lettere dell'alfabeto, e consideriamo un contenitore, (per ora lineare) che possa contenere solo "K" degli "n" oggetti. (Essendo il contenitore lineare, gli oggetti saranno affiancati l'uno all'altro). Per esempio, se gli oggetti sono le lettere dell'alfabeto, il contenitore permette di scrivere parole di K lettere. La capacità del contenitore si chiama: "Classe".

Permutazioni

Supponiamo di aver disposto nel nostro contenitore di classe 4, le lettere che formano la parola:

R	O	M	A

, abbiamo: $K=4$.

Permutare le lettere, (gli elementi od oggetti) significa scambiarle di posto. Vale la seguente regola:

"Presa come fondamentale una qualsiasi configurazione (Permutazione) degli oggetti (lettere) che riterremo positiva, scambiare due oggetti significa fare una permutazione; ad ogni permutazione si cambia segno, da positiva a negativa e viceversa." Abbiamo così una classificazione delle permutazioni. Diremo permutazione "Pari" quella permutazione (configurazione) che

abbiamo ottenuto da un numero di scambi pari, (e sarà positiva). Diremo permutazione di classe dispari quella ottenuta con un numero dispari di scambi, (e sarà negativa). Ordinariamente si prende come fondamentale quella permutazione (configurazione) ove gli indici si susseguono nell'ordine naturale dei numeri: $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$.

Si noti l'ambiguità del linguaggio; si usa la parola: "permutazione" in due diversi significati:

1) Come l'atto di scambiare la posizione di due elementi

2) Come la configurazione di una determinata sequenza degli oggetti.

A noi interessa calcolare il numero delle permutazioni tutte diverse fra loro che si possono ottenere con "n" oggetti (nel contenitore di classe n). Tale insieme di permutazioni si indica con P_n.

un solo oggetto: P_1; | A | una sola permutazione

un solo oggetto : P_1 ; | A | una sola permutazione

due oggetti : P_2 ; | M | A | / | A | M | } due permutazioni

tre oggetti : P_3 ;

O	M	A	+
O	A	M	−
A	O	M	+
A	M	O	−
M	A	O	+
M	O	A	−

} sei permutazioni

Si noti che, se gli oggetti sono "n", gli spazi che delimitano gli oggetti fra loro sono: $(n-1)$ e gli spazi iniziale e finale sono due che delimitano la permutazione, perciò: $(n-1)+2=(n+1)$. Quindi se conosciamo il numero di permutazioni diverse di "n" oggetti, un nuovo oggetto può essere posto in ciascuna permutazione in $(n+1)$ posizioni diverse; perciò:

$$P_{n+1} = (n+1)P_n$$

$$P_1 = 1 \quad ; \quad P_2 = 2P_1 = 2 \quad ; \quad P_3 = 3P_2 = 6 \quad \ldots\ldots$$

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots n = n! \quad \text{(enne fattoriale)}$$

$$P_n = n!$$

(vedasi parte I)

La formula vale solo se gli oggetti non si ripetono. Per gli oggetti che si ripetono, per esempio le lettere della parola: MAMMA sono 5 perciò (se diverse) sarebbero: $5! = 120$ ma, "M", si ripete 3 volte ed occorre dividere per $3! = 6$; "A", si ripete due volte ed occorre dividere per $2! = 2$; perciò le permu

tazioni diverse saranno: $\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$.

Attenzione, viene convenuto che: $0! = 1$ (che poi sarebbe un contenitore vuoto, ma nel caso delle permutazioni sarebbe di classe zero).

Nel caso della parola: ROMA $n = 4$; $4! = 24$ si hanno 24 permutazioni (anagrammi) diverse, si

noti che la sequenza delle permutazioni puó essere diversa a seconda dei criteri con i quali si effettuano le permutazioni, ma non variano le permutazioni di classe pari e quelle di classe dispari.
Facciamo le 24 permutazioni della parola ROMA affiancando quelle di 1, 2, 3, 4; e tenendo separate quelle di classe pari da quelle di classe dispari.

	classe pari (+)	classe dispari (–)	
1234	R O M A	R O A M	1243
1342	R M A O	R M O A	1324
1423	R A O M	R A M O	1432
2143	O R A M	O R M A	2134
23 1.4	O M R A	O M A R	2341
2431	O A M R	O A R M	2413
3 124	M R O A	M R A O	3 142
3241	M O A R	M O R A	3214
34 12	M A R O	M A O R	34 21
4132	A R M O	A R O M	4123
4 2 1 3	A O R M	A O M R	4 2 3 1

4213	A O R M	A O M R	4231
4321	A M O R	A M R O	4312

I prodotti degli elementi per risolvere un determinante sono tali che se i primi indici dei fattori formano la permutazione fondamentale : 1,2,3 ... m ; i secondi indici formano tutte le permutazioni possibili e sono da prendersi come positivi quelli che formano permutazioni di classe pari, e negativi quelli che formano

disposizioni di classe dispari. Per esempio in un determi=
nante di ordine 3 avremo: fondamentale 1, 2, 3.

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

$$+ (1\ 2\ 3) - (1\ 3\ 2) + (2\ 3\ 1) - (2\ 1\ 3) + (3\ 1\ 2) - (3\ 2\ 1)$$

Permutazioni con elementi ripetuti servono per fare gli Anagrammi. Se fra gli "n" elementi ve ne sono "i" uguali fra loro; "j" uguali fra loro; "K" uguali fra loro abbiamo:

$$ {}_{i,j,k}P_n = \frac{n!}{i! \cdot j! \cdot k!} $$

DISPOSIZIONI

Consideriamo le disposizioni semplici di "n" elementi di classe K, cioè presi K a K ogni volta diversi. Si indica con "$D_{n,k}$".
Se, $K = n$ abbiamo già visto che: $D_{n,n} = P_n$ si

hanno le permutazioni.

Supponiamo di aver preso i primi "K" degli "n" elementi ed avremo ottenuto: K! disposizioni, ora però occorrerà cambiare almeno un elemento per ottenere altre K! disposizioni; gli scambi possibili fra i "K" elementi della classe e gli (n-K) elementi residui

equivalgono alle permutazioni degli "n" elementi ove ve ne siano "K" uguali fra loro ed "(n-K)" uguali fra loro, cioè saranno: $\frac{n!}{K!(n-K)!}$, ma ad ogni scambio corrisponde $K!$ disposizioni, perciò: $K!\frac{n!}{K!(n-K)!}$

$$D_{n,K} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-K)(n-K+1)\cdots(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-K)}$$

$$\boxed{D_{n,K} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-K+1)}$$

$$\hat{1} \quad \hat{2} \quad \hat{3} \quad \ldots \quad \hat{K}$$

"Le disposizioni semplici di "n" elementi di classe "K" è il prodotto di tanti fattori decrescenti, a partire da "n", quanto indica la classe K" $(K \leq n)$.

Per esempio le disposizioni di 10 elementi di classe 3, saranno tre fattori decrescenti a partire da 10.

$$D_{10,3} = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$$

Ogni "disposizione" differisce dall'altra o <u>per posizione</u> degli elementi, <u>o per qualità</u>

per posizione degli elementi, o per qualità degli elementi; mentre le "permutazioni" erano sempre gli stessi elementi che differivano per posizione.

Le disposizioni con ripetizione ove: $K \gtreqless n$ si indicano: $D'_{n,k} = n^k$ per esempio $D_{3,2} = 3^2 = 9$ (aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc) ove a, b, c = elementi.

Combinazioni

Degli "n" elementi presi K a K, vogliamo ora considerare le "classi" (i gruppi di K elementi) che differiscono solo per qualitá degli elementi indipendentemente dalla posizione che occupano. Diremo quindi: "Combinazione di "n" elementi di classe "K"" (che indicheremo con: $\binom{n}{K}$) ogni gruppo di K elementi che abbia almeno un elemento diverso.

Per ottenere il numero delle combinazioni di "n" elementi di classe "K" basterá dividere il numero delle disposizioni $D_{n,K}$ per le permutazioni della classe: P_K. cioè:

$$\binom{n}{K} = \frac{D_{n,K}}{P_K}$$

$$\binom{n}{K} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-K+1)}{}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

ed anche:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(espressione già trovata).

da questa possiamo dedurre che:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Questa uguaglianza è utilizzabile per snellire i calcoli. Per esempio: $\binom{80}{78} = \binom{80}{2} = \frac{80 \cdot 79}{2} = 3160$ anziché 78 fattori al numeratore divisi per 78! — Sarà utile scegliere il minore fra k ed $(n-k)$ per il calcolo. Se a, b, c, d sono i 4 elementi e noi vogliamo le combinazioni di classe 3, cioè $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$ avremo: abc, abd, acd, bcd.

Supponiamo ora di togliere un elemento degli "n" elementi, per esempio: "a", notiamo che se cancelliamo tale elemento dalle combinazioni scritte si rileva che:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Ma lo stesso discorso può essere fatto su $\binom{n-1}{k-1}$ e così via otteniamo:

$$(n) = (n-1) + (n-2) + (n-3) \quad (n-k) +$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-2} + \cdots \binom{n-k}{1} + 1$$

Consideriamo ora una importante applica= zione del calcolo combinatorio alla espres= sione delle potenze dei binomi, per de= terminarne i coefficienti.

Coefficienti binomiali

Consideriamo: $(a+b)^n = \underset{1}{(a+b)}\underset{2}{(a+b)}\underset{3}{(a+b)} \cdots \underset{n}{(a+b)}$

sviluppando si ha:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$
$$(a+b)^2 = 1\,a^2 + 2ab + 1\,b^2$$
$$(a+b)^3 = 1\,a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\,b^3$$
$$(a+b)^4 = 1\,a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\,b^4$$
$$(a+b)^5 = 1\,a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5$$

La tabella dei coefficienti binomiali, che in Italia è generalmente chiamata: "Triangolo di Tartaglia" (n. a Brescia nel 1506, m. a Venezia 1557), in Francia e in qualche testo americano è detta: "triangolo di Pascal" (1623-1662). I tedeschi l'attribuiscono a Stifel (1487-1559). Questo quadro si ritrova in testi molto più antichi e qualcuno lo fa risalire ad Euclide.

Riportiamo la tabella

$\binom{n}{0}$

$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Si costruisce facilmente ad=
dizionando due valori affian=
cati del rigo precedente e
riportando l'importo
sotto il secondo
addendo

Binomio di Newton

La tabella triangolare dei coefficienti binomiali, presenta, se riguardata per colonne, le combinazioni semplici di "n" elementi di classe k ove $n = \binom{n}{1}$ è la seconda colonna. La prima colonna di sole unità è da riguardare come $\binom{n}{0}$, quindi la colonna (k+1) rappresenta $\binom{n}{k}$. Per esempio: $\binom{8}{4} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 70$ è anche il coefficiente di a^4b^4 nello sviluppo di $(a+b)^8$.

L'importanza della tabella è evidente. Essa confrontata con lo sviluppo delle potenze di binomi consente di sintetizzare il risultato in una formula detta <u>binomio di Newton</u>:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ricordiamo la convenzione: $\binom{n}{0} = 1$; $0! = 1$;

Si noti come la simmetria della tabella evidenzi

Si noti come la simmetria della tabella evidenzi che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

La formula del binomio di Newton che abbiamo scritto sopra e un caso particolare di una formula più generale detta Polinomio di Leibniz

Polinomio di Leibniz

Sia $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_m)^n$ la potenza di un polinomio.

Poniamo, nella formula detta binomio di Newton:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $a = a_1$; $b = a_2$; ed

avremo:

$$(a_1 + a_2)^n = \sum_{i_1+i_2=n} \left(\frac{n!}{i_1! \cdot i_2!}\right) a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2}$$

ove il simbolo: $\sum_{i_1+i_2=n}$ significa che la somma è estesa a tutti i valori non negativi, interi, degli indici i_1 ed i_2 (zero compreso) che verifichino: $i_1 + i_2 = n$.

Per esempio per $n = 5$ tali valori sono:

$i_1 =$	0	1	2	3	4	5
$i_2 =$	5	4	3	2	1	0
$(i_1 + i_2) =$	5	5	5	5	5	5

La formula generalizzata detta <u>Polinomio di Leibniz</u> risulta:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m)^n = \sum_{(i_1+i_2+\cdots+i_m)=n} \frac{n!}{(i_1!)(i_2!)(i_3!)\cdots(i_m!)} a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} \cdots a_m^{i_m}$$

Per esempio: $(i_1+i_2+i_3)=3$ è risolta da: $(3,0,0)(0,3,0)(0,0,3)(2,1,0)(2,0,1)(1,2,0)(0,2,1)(1,0,2)(0,1,2)(1,1,1)$

sostituendo:

$$(a_1+a_2+a_3)^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 3a_1^2a_2 + 3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2 + 3a_2^2a_3 + 3a_1a_3^2 + 3a_2a_3^2 + 6a_1a_2a_3 .$$

I Coefficienti delle equazioni di grado "n"

Siano: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$; le radici reali o complesse di una equazione di grado "n"; cioé $(x_1 = \alpha_1)$; $(x_2 = \alpha_2)$; $(x_3 = \alpha_3)$; . . . ; $(x_n = \alpha_n)$. Se queste uguaglianze sono valide, resta valida l'espressione:

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots\ldots (x - \alpha_n) = 0$$

in quanto basta sostituirvi una radice per soddisfare l'uguaglianza.

Eseguiamo i prodotti; per: $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, . .

equazioni di 2° grado: $x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + (\alpha_1 \alpha_2) = 0$

equaz. di 3° grado: $x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3)x - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 0$

equaz. di 4° grado: $x^4 - \left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i\right) x^3 + \left(\sum_{\binom{4}{2}} \Pi_{\binom{4}{2}}^{\alpha}\right) x^2 - \left(\sum_{\binom{4}{3}} \Pi_{\binom{4}{3}}^{\alpha}\right) x + \left(\sum_{\binom{4}{4}} \Pi \alpha\right) = 0$

ove: $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \sum_{\binom{4}{1}} \Pi_{\binom{4}{1}}^{\alpha}$ $(\Pi = \text{prodotti})$

$$\sum_{\binom{4}{2}} \Pi_{\binom{4}{2}}^{\alpha} = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4)$$

(Che é la somma dei prodotti che ha per fattori le combinazioni di 4 elementi di classe 2)

combinazioni di 4 elementi di classe 2)

$$\sum_{\binom{4}{3}} \prod_{\binom{4}{3}}^{\alpha} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)$$

(Che la somma dei prodotti espressi dalle combinazioni di 4 elementi di classe 3)

$$\sum_{\binom{4}{4}} \prod_{\binom{4}{4}}^{\alpha} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$$

(In questo caso si ha un solo prodotto delle radici.)

Tenuto conto che i segni sono alterni e che il primo coefficiente (cioè quello di x^n) è sempre +1 (o può essere ridotto a +1 dividendo l'uguaglianza) Una equazione di grado "n" espressa in funzione delle sue radici può sintetizzarsi

$$\sum_{i=0}^{i=n} \left(\sum_{\binom{n}{i}} \prod \alpha_{\binom{n}{i}} \right) X^{n-1} (-1)^{2n-i}$$

Intendendo per: $\left(\sum_{\binom{n}{i}} \prod \alpha_{\binom{n}{i}} \right)$ la somma di tutte le combinazioni di prodotti di n radici di classe i.

per n=2 ; $i = 0$; $\binom{n}{0} = 1$; $(1) X^{2-0} (-1)^{4-0} = +X^2$

$i = 1$; $\binom{n}{1} = 1; \alpha_1; \alpha_2$; $(\alpha_1 + \alpha_2) X^{2-1} (-1)^{4-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2) X$

$(\alpha_1 \alpha_2) X^{2-2}; (-1)^{4-2} = +(\alpha_1 \alpha_2)$

$i = 2 \; ; \; \binom{n}{2} = 1 \; ; \; \alpha_1 \alpha_2 \; ; \quad (\alpha_1 \alpha_2) x^{2-2} \; ; \; (-1)^{4-2} = \; +(\alpha_1 \alpha_2)$

per $\underline{n = 3}$

$$i = 0 \quad \rightarrow \quad x^3$$

$$i = 1 \quad \rightarrow \quad -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) x^2$$

$$i = 2 \quad \rightarrow \quad +(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3) x$$

$$i = 3 \quad \rightarrow \quad -(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$$

etc.

Combinazioni con ripetizione

Si abbiano "n" elementi tutti diversi fra loro che peró, all'atto della combinazione di classe K, uno stesso elemento puó essere ripetuto fino a K volte. Cioè una combinazione puó essere costituita da uno stesso elemento ripetuto K volte. È evidente che per fare quella combinazione è come se disponessimo di un numero di elementi aumentato di (K-1) di quell'elemento (una volta è già negli n elementi); cioè occorre disporre di (n+K-1) elementi considerati diversi.

Se indichiamo con $C'_{n,K}$ il numero di combinazioni con ripetizione di n elementi di classe K avremo che:

$$C'_{n,K} = \binom{n+K-1}{K}$$

Facciamo un esempio: $C'_{3,2} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$

aa bb cc

aa bb cc

ab bc

ac

Attenzione, nelle combinazioni con ripetizione la classe può essere maggiore del numero degli elementi; cioè $K \gtreqless n$.

per esempio: $C'_{3,4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$

$$C'_{3,4} = \left\{ \begin{matrix} aaaa, & aaab, & aaac, & aabb, & aabc \\ bbbb, & bbba, & bbbc, & bbcc, & bbac \\ cccc, & cccb, & ccca, & ccaa, & ccab \end{matrix} \right\}$$

Data la correlazione fra le combinazioni con ripetizione e le combinazioni semplici: $\left[C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}\right]$, la tabella dei coefficienti binomiali (Triangolo di Tartaglia) che per colonne fornisce $\binom{n}{k}$, può utilizzarsi per costruire una tabella delle combinazioni con ripetizione; ma questa tabella può essere più facilmente costruita se si osserva che <u>ogni valore è la somma del precedente di riga e di colonna</u>.

$C'_{n,k}$ = Combinazioni con ripetizione

n \ k	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	10	15	21	28	36	45	55

3	6	10	15	21	28	36	45	55
4	10	20	35	56	84	120	165	220
5	15	35	70	126	210	330	495	715
6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11.440
9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24.310

Il calcolo delle probabilitá

Vi sono due aspetti sul calcolo delle probabilitá; una probabilitá "a posteriori" determinabile statisticamente in base al rapporto del numero dei casi in cui si é verificato un certo evento ed il numero delle osservazioni effettuate.

Una probabilitá: "a priori" determinabile in base al rapporto fra il numero dei casi favorevoli ad un certo evento, ed il numero dei casi possibili per quello stesso evento.

La probabilitá quindi essendo, in ogni caso, espressa da un rapporto in cui il numeratore non puó superare il denominatore, é un numero compreso fra zero ed uno; e puó essere espresso in percentuale.

La certezza (favorevole) (abbastanza difficile a raggiungere) é $= 1 = 100\%$

L'incertezza $= \frac{1}{2} = 50\%$

La certezza. $= 0 = 0\%$
(sfavorevole)

Al concetto di "*probabilità*", si abbina il concetto di "*frequenza*"; *a posteriori*, possiamo dire che: "*tanto più un evento è frequente, tanto più è probabile*".

A priori, possiamo dire che: "*tanto più è probabile un evento, tanto più dovrà essere frequente*"

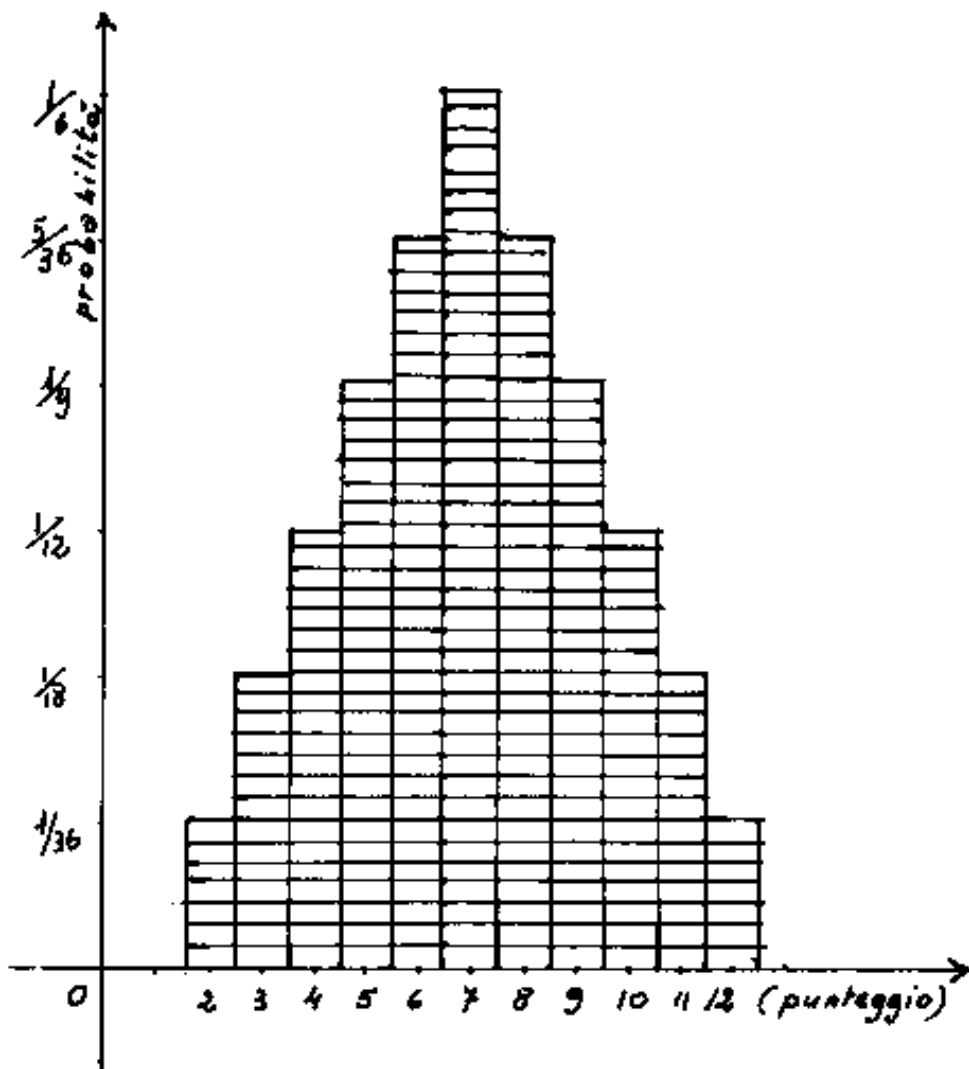
È appena il caso di accennare che la parola "*frequente*" non deve intendersi che l'evento si verificherà ad intervalli regolari, anzi, è estremamente improbabile che ciò si verifichi. Si può dire che la frequenza si avvicina alla probabilità quanto più numerose sono le prove effettuate. (Legge dei grandi numeri). *Facciamo un esperimento:*

Si abbiano due dadi da gioco, non truccati, e con le facce segnate da 1 a 6, le combinazioni possibili sono che a ciascuna faccia di un dado si abbini tutte quelle dell'altro, cioè abbiamo $6 \times 6 = 36$, casi possibili ad ogni lancio di dadi. ($D'_{6,2} = 6^2 = 36$).

Vediamo ora i casi favorevoli a ciascun punteggio:

$2 = (1+1)$ casi favorevoli: | 1 probab. $1/36$

3	= (1+2) ; (2+1)	2	" $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
4	= (1+3) ; (2+2) ; (3+1)	3	" $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
5	= (1+4) ; (2+3) ; (3+2) ; (4+1)	4	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
6	= (1+5) ; (2+4) ; (3+3) ; (2+4) ; (1+5)	5	$\frac{5}{36}$
7	= (1+6) ; (2+5) ; (3+4) ; (4+3) ; (5+2) ; (6+1)	6	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
8	= (2+6) ; (3+5) ; (4+4) ; (5+3) ; (6+2)	5	$\frac{5}{36}$
9	= (3+6) ; (4+5) ; (5+4) ; (6+3)	4	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
10	= (4+6) ; (5+5) ; (6+4)	3	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
11	= (5+6) ; (6+5)	2	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
12	= (6+6)	1	$\frac{1}{36} = \frac{1}{36}$

Se facciamo un grafico, riportando in ascisse i punteggi, ed in ordinate le probabilitá della loro uscita; (ampliata nel grafico) avremo un diagramma a colonne del tipo di quello appresso riportato

Se disegnato il grafico, prendiamo due dadi e per ogni lancio coloriamo, (a partire dal basso) una casellina del punteggio effettuato, vedremo che, col crescere delle prove, ci avviciniamo, sempre di più allà configurazione del grafico.

In proporzione, perché le caselle possono essere molto più fitte e perché il grafico, in ordinate, può essere disegnato in scala doppia o multipla. (Conviene provare).

disegnato in scala doppia o multipla. (Conviene provare).

Legge del caso : "In una serie di prove ripetute un numero di volte molto grande, ogniuno degli eventi che all'atto di ciascuna prova possono presentarsi, si produce con una frequenza relativa, che è pressappoco uguale alla probabilità che l'evento ha all'atto di ogni prova, l'approssimazione cresce col numero delle prove".

Il giuoco del lotto

Ci domandiamo: "giocando su una sola ruota, qual'è la probabilitá di un primo estratto, di un estratto, di un ambo, di un terno, di una quaderna, di una quintina?"

I numeri sono 90, quelli estratti 5 quindi le cinquine possibili sono: $\binom{90}{5} = 43.949.268$

quindi la probabilitá di fare cinquina è $\frac{1}{43,949268}$

cioè: 2,275.. su 100 milioni. (piuttosto scarsa).

I casi favorevoli sono quelli che (estratti i numeri) rimangono di combinazioni possibili.

<u>per la quaderna</u>: $\binom{90-4}{5-4} = \binom{86}{1} = 86$ casi favorevoli

probabilitá: $\frac{86}{43.949268} = \frac{1}{511038}$.

<u>terno</u> $\binom{90-3}{5-3} = \binom{87}{2} = 3741$ casi favorevoli

probabilitá: $\frac{3741}{43.949.268} = \frac{1}{11748}$

<u>ambo</u> $\binom{90-2}{} = \binom{88}{} = 109736$ casi favorevoli

ambo $\binom{90-2}{5-2} = \binom{88}{3} = 109736$ casi favorevoli

probabilità: $\frac{109736}{43.949.268} = \frac{2}{801}$

estratto $\binom{90-1}{5-1} = \binom{89}{4} = 2441626$ casi favorevoli

probabilità: $\frac{2441626}{43.949.268} = \frac{1}{18} = \frac{5}{90}$

primo estratto probabilità: $\frac{1}{90}$

Legando la probabilità alla frequenza, registrando cioè i numeri usciti ed i "ritardatari" la probabilità varia.

Infatti esaminiamo il caso dell'estratto semplice: Se sappiamo che alla prima estrazione il nostro numero (con probabilità 1/90) non è uscito, per la seconda estrazione abbiamo la probabilità di 1/89; e così se sappiamo che alla seconda estrazione non è uscito, per la terza estrazione abbiamo la probabilità di $\frac{1}{88}$ e così via cioè la probabilità complessiva per 5 estrazioni diventa: $\frac{1}{90} + \frac{1}{89} + \frac{1}{88} + \frac{1}{87} + \frac{1}{86}$ cioè: $= \frac{1}{17,59545}$, che è una probabilità maggiore rispetto ad: $\frac{1}{18}$ calcolato col precedente metodo

Esistono statistiche che esprimono la frequenza media di un numero. Se passato quel certo numero di settimane, non è stato estratto, quel numero viene definito "ritardatario". Ordinariamente i "ritardatari" escono entro un numero limitato di settimane, perciò vi sono persone che li

[illegible] di settimane, perciò vi sono persone che li giocano puntando poste sempre più alte, (anche al raddoppio). Però se il numero è "anomalo", continua a non uscire e molta gente è arrivata a non poter continuare a puntare e quindi perdere somme anche notevoli, (oltre gli interessi sul capitale anticipato). Per esempio chi, giocando al raddoppio inizia con £ 1000, poi 2000, poi 4000 ... alla decima settimana la posta è £ 1.024.000;- e la

somma versata diventa £ 2.047.000,=. L'undicesima settima=
na dovrà versare £ 2.048.000,= e la somma totale versata
diventa 4.095.000,= ....

Vi sono anche serie geometriche con ragione mino=
re di 2; per esempio, per l'estratto semplice giocato
in ambata, se le poste sono i $\frac{10}{9}$ della precedente si
ha la vincita di 10 volte la prima puntata, in qua=
lunque settimana avvenga l'estrazione. (e si perdono gli inte=
ressi sul capitale anticipato). Se invece le poste sono i
$\frac{18}{17}$ della precedente, dopo 17,1 settimane la vincita
è nulla, cioè si riprende la somma spesa (al solito
perdendo gli interessi), continuando con questa
serie la vincita non compensa la somma spesa,
è una perdita sempre più grave.

Analogo discorso per terni, quaderne, ecc.
ove la probabilità di vincere un terno al lotto
è divenuta proverbiale

è divenuta proverbiale.

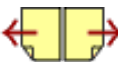
Eppure vi sono persone che giocano, ed anche qualcuna che vince; però per la legge dei grandi numeri, la frequenza e la probabilità ten=dono a coincidere e quindi non vi sarebbero né perdite, né vincite, complessivamente. Ma il gioco del lotto non è equo, quindi complessivamente è una tassa, volontariamente pagata dai giocatori.

Il totocalcio

Nella schedina di 13 caselle per colonna si dispongono tre simboli: 1, x, 2 cioè i casi possibili sono le disposizioni con ripetizione di tre elementi di classe 13.

$$\mathcal{D}'_{3,13} = 3^{13} = 1.594.323$$

cioè si avrebbe la probabilità di fare 13 6,27 su 10 milioni. $= \dfrac{1}{1.594.323}$.

Però subentrano altri fattori che possono influenzare la probabilità. Per esempio è statisticamente provato essere improbabile che la schedina presenti solo x, o solo 1, o solo 2; non solo, è anche provato che i 2 sono meno numerosi degli altri due segni, infine la conoscenza delle squadre può determinare partita per partita il grado di probabilità che si verifichi 1, x, 2.

Come si vede il calcolo delle probabili-

Come si vede il calcolo delle probabili=
tà necessita di essere ampliato, ma pri=
ma di fare ciò, cerchiamo di definire
quando un giuoco è equo, cioè quando
puntando una certa somma, la probabilitá
della vincita è legata al coefficiente moltipli=
catore della puntata in modo equo.

La speranza matematica

Dicesi speranza matematica il prodotto di una eventuale somma per la probabilità di ottenerla.

Dicesi "equo" un giuoco quando la "posta" equivale alla speranza matematica.

Se consideriamo le scommesse, le lotterie, il totocalcio, il giuoco del lotto, ecc. noteremo che in generale non sono "equi". Per esempio "Sperando di vincere £ 1.000.000= (un milione) al giuoco del lotto, con un terno secco, su una ruota la posta "equa" sarebbe:

$$£ \frac{1.000.000}{11748} = £ 85,12$$ "

Come si vede il giuoco del lotto non è equo, ma a tutto favore del gestore, anche tenendo conto delle spese di gestione.

Ma è anche da considerare "una speranza individuale" che spesso non coincide con la "speranza matematica". Per esempio l'individuo è portato a credere ad una pro=

babilità di vincita superiore a quella reale per la squa=
dra o per il campione di cui è tifoso, e pertanto é
disposto a spendere una "posta" superiore a quella
equa, perché la sua speranza di vincita è superio=
re alla speranza matematica. Ciò vale, non solo nei
giuochi, ma soprattutto in economia, ove investimenti
oculati tendono ad abbassare il rischio (saggio interesse.)

Probabilitá totali

Un evento puó presentarsi in due o piú modalitá diverse ed escludentesi.

La probabilitá totale è la somma delle probabilitá. Se l'evento è certo la somma delle probabilitá è uno. Facciamo un esempio:

In una urna vi sono "n" palle di cui: "b" = bianche; "r" = rosse; "m" = marroni e sia: $b + r + m = n$.

Estraendo una palla, la somma delle singole probabilitá è uno. $\frac{b}{n} + \frac{r}{n} + \frac{m}{n} = 1$

Ma noi vogliamo sapere qual'é la probabilitá di estrarre una palla non bianca.

L'evento puó presentarsi in due modalitá escludentesi: o palla rossa, o palla marrone, perció vale la somma delle probabilitá.

$$p = \left(\frac{r}{n} + \frac{m}{n}\right)$$

Numericamente se: $b = 10$; $r = 3$; $m = 7$; $n = 20$

<u>Numericamente</u> se: $b = 10$; $r = 3$; $m = 7$; $n = 20$

la probabilità di una palla non bianca è: $\frac{3}{20} + \frac{7}{20} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Probabilità Composte

Il verificarsi di un evento è condizionato dal verificarsi di altri eventi. Tale evento è detto: "Composto". Per esempio abbiasi quattro urne contenenti ciascuna l'alfabeto di 26 lettere, qual'è la probabilità di estrarre la stessa lettera da ciascuna urna? Oppure di estrarre lettere determinate per formare una parola e i suoi anagrammi (formati per esempio di quattro lettere)?

La probabilità di un evento composto è il prodotto delle probabilità

Nel nostro caso avremo:

$$\left(\frac{1}{26}\right)\cdot\left(\frac{1}{26}\right)\cdot\left(\frac{1}{26}\right)\left(\frac{1}{26}\right) = \frac{1}{456976}.$$

Ma noi vogliamo imporre una ulteriore con-

dizione, e cioè che l'estrazione delle lettere avvenga nell'ordine: R · O · M · A.
Poichè gli anagrammi della parola "ROMA" sono 24, se è verificata l'uscita delle 4 lettere, la probabilità è: $\left(\frac{1}{24}\right)\left(\frac{1}{456976}\right) = \frac{1}{10\,967424} =$ un caso su quasi 11 milioni.

Probabilità delle cause

La probabilità di un evento "C" è condizionata dalla probabilità che si sia verificato uno degli eventi B_1, B_2, B_i, B_r, fra loro escludentesi. Cioè il verificarsi dell'evento "C" implica che si sia verificato "precedentemente" uno degli eventi B_i.

Se consideriamo i "B_i" come "cause" del verificarsi di "C"; essendosi verificato C ci domandiamo: "quale B_j dei B_i ne è la causa?"

Ciascuno dei B_i avrà una sua propria probabilità di verificarsi e la indicheremo con $p(B_i)$, perciò il verificarsi di uno qualsiasi degli avvenimenti $B(i)$ (fra loro escludentesi) avrà la probabilità totale: $p(B) = \sum_{i=1}^{r} p(B_i)$.

Essendosi verificato "C", certamente si è verificato uno degli eventi B_i perciò, (a posterio

ri) diremmo:

$$p(B) = \sum_{i=1}^{r} p(B_i) = 1$$

Ma per ogni B_i esiste una probabilità che si verifichi C indicheremo con $p(B_i C)$ tale probabilità. In particolare se B_j "è la causa di C" La probabilità che essendosi verificato B_j si verifichi anche C la indicheremo con.

$p(B_j C)$; d'altra parte la probabilità che si verifichi B_j è $P(B_j)$, per cui la "probabilità composta" che C si verifichi per effetto di B_j sarà

$$P_{(B_j)}(C) = P(B_j) \cdot p(B_j C)$$

Se consideriamo che B_j è uno dei B_i avremo che la probabilità che si verifichi "C" sarà

$$p(C) = \sum_{i=1}^{r} P(B_i) \cdot p(B_i C)$$

Ma indichiamo ora la probabilità che es= essendosi verificato C ne sia la causa B_j con $p(C B_j)$

mentre $p(B_j C)$ è la probabilità che essendo= si verificato B_j si verifichi "C"

avremo quindi che la probabilità

che si verifichi C dipendente da B_j sarà

$$P\left(\frac{C}{B_j}\right) = P(C) \cdot P(C B_j) = P(B_j) \cdot p(B_j C)$$

da cui:

$$P_i(C B_j) = \frac{P(B_j) \cdot p_i(B_j C)}{P(C)}$$

cioè:

$$P(C B_j) = \frac{P(B_j) \cdot P(B_j C)}{\sum_{i=1}^{t} p(B_i) \cdot p(B_i C)}$$

formula di Bayes

Formula di Bayes

La formula di Bayes:

$$p(CB_j) = \frac{P(B_j) \cdot P(B_jC)}{\sum_{i=1}^{n} p(Bi) \cdot p(BiC)}$$

appare promettere assai più di quanto, in effetti, possa mantenere. Infatti, a priori, la probabilità $p(B_j)$, si conoscerebbe se sapessimo quale dei B_i è B_j.

Facciamo degli esempi:

Tre ditte diverse producono lo stesso articolo per lo stesso acquirente.

La prima ditta B_1 produce 100 articoli al giorno di cui 97 buoni e 3 difettosi (rilevato statisticamente).
La seconda ditta B_2 produce 350 articoli al giorno di cui 4% difettosi, cioè 14 difettosi e 336 buoni.
La terza ditta B_3 produce solo 50 articoli di cui nessuno è risultato difettoso.

nessuno è risultato difettoso.

I pezzi totali prodotti sono: 100 + 350 + 50 = 500

$p(B_1) = \frac{100}{500} = 0,2$

$p(B_2) = \frac{350}{500} = 0,7$

$p B_3 = \frac{50}{500} = 0,1$

L'evento c_1 = prodotto difettoso, presenta la probabilità: $p(c) = \frac{3 + 14 + 0}{500} = 0,034$

mentre <u>le probabilità condizionate sono:</u>

$$p(B_1C) = \frac{3}{100} = 0,03$$

$$p(B_2C) = \frac{14}{350} = 0,04$$

$$p(B_3C) = \frac{0}{50} = 0$$

Non conoscendo a priori "B_j" si calcola la formula di Bayes per ciascun B_i

$$\text{per: } j=1 \rightarrow p(CB_1) = \frac{(0,2)(0,03)}{0,034} = 0,18$$

$$\text{per } j=2 \rightarrow p(CB_2) = \frac{(0,7)(0,04)}{0,034} = 0,82$$

$$\text{per } j=3 \rightarrow p(CB_3) = \frac{(0,1)(0)}{0,034} = 0$$

1,00

Abbiasi 4 Urne B_i ciascuna delle quali contiene rispettivamente:

B_1 = 12 palle rosse 8 palle bianche 20

B_1 =	[illegible] palle rosse	[illegible] palle bianche	[illegible]
B_2 =	27 palle rosse	9 palle bianche	36
B_3 =	3 palle rosse	17 palle bianche	20
B_4 =	0	24 palle bianche	24
	42	58	100

Viene estratta una palla rossa (evento C) che probabilità abbiamo che sia stata estratta dall'urna B_j?

Supponiamo che statisticamente sia stata rilevata la frequenza con cui vengono fatte le estrazioni dalle singole urne, e sia 50% per B_1, 20% per B_2, 5% per B_3, 25% per B_4. Cioè si conosca: $p(B_1) = 0,5$

$$p(B_2) = 0,2$$

$$p(B_3) = 0,05$$

$$p(B_4) = 0,25$$

<u>Le probabilità condizionate</u> cioè la probabilità che l'estrazione da una determinata urna porti una palla rossa cioè:

$$p(B_1C) = 12/20 = 0,6$$

$$p(B_2C) = 27/36 = 0,75$$

$$p(B_3C) = 3/20 = 0,15$$

$$p(B_4C) = 0/24 = 0$$

ma abbiamo: per le probabilità composte:

$$p(CB_1) \cdot p(C) = p(B_1) \cdot p(B_1C) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$$

$$p(CB_1)\cdot p(C) = p(B_1)\cdot p(B_1C) = 0,5\times 0,6 = 0,3$$

$$p(CB_2)\cdot p(C) = p(B_2)\cdot p(B_2C) = 0,2\times 0,75 = 0,15$$

$$p(CB_3)\cdot p(C) = p(B_3)\, p(B_3C) = 0,05\times 0.15 = 0,0075$$

$$p(CB_4)\cdot p(C) = p(B_4)\, p(B_4C) = 0,25\times 0 = 0$$

e per le probabilità totali: $p(C) = \underline{\underline{0,4575}}$

Si noti che si hanno 42 palle rosse su 100 palle.

cioè se fossero tutte in una urna avremmo $p(c) = 0.42$.

mentre per la formula di Bayes abbiamo:

$$P(C B_i) = \frac{p(B_i) \cdot p(B_i C)}{p(C)} = \frac{p(B_i)\, p(B_i C)}{\sum_{i}^{k} P(B_i)\, p(B_i C)}$$

cioè

$$p(C B_1) = \frac{0,3}{0,4575} = 0,655737705$$

$$p(C B_2) = \frac{0,15}{0,4575} = 0,327868853$$

$$p(C B_3) = \frac{0,0075}{0,4575} = 0,0163934426$$

$$p(C B_4) = \frac{0}{0,4575} = 0$$

per le probabilità totali $= 1$ infatti è data per certa l'estrazione di una palla rossa.

La formula di Bayes sarebbe interessante in medicina, ove, diagnosticato una certa malattia, se ne potesse individuare la causa. Quale probabilità ha un certo soggetto di prendere una certa malattia? La risposta è difficilissima e spesso impossibile.

difficilissima e spesso impossibile.

Le variabili casuali o stocastiche

La parola "stocastico" deriva dal greco: "στοχάζομαι" = prendo di mira, cerco, congetturo, cerco di indovinare. In italiano la parola "stocastico/a" ha assunto il significato di "congetturale, probabilistico/a".

Sono variabili solo dipendenti dal caso.

Per quanta cura si ponga a prendere una misura, o per quanta cura si ponga a colpire un bersaglio lontano, ripetendo più volte la prova, si ottengono risultati che differiscono fra loro. Un buon operatore, con un buon strumento avrà scarti piccoli.

Sul modo di trattare le variabili casuali abbiamo già accennato al capitolo: "Scarto medio quadratico" ed al capitolo "Cenni sui minimi quadrati". Si hanno vari tipi di variabili casuali, per esempio le estrazioni al lotto su

casuali, per esempio le estrazioni del lotto su una determinata ruota; Probabilisticamente possiamo dire la ipotesi di uscita di un certo gruppo di numeri, ma non possiamo dire quando.

Anche i numeri casuali generati da un computer, "Random", sono variabili casuali, da cui le musiche dette stocastiche.

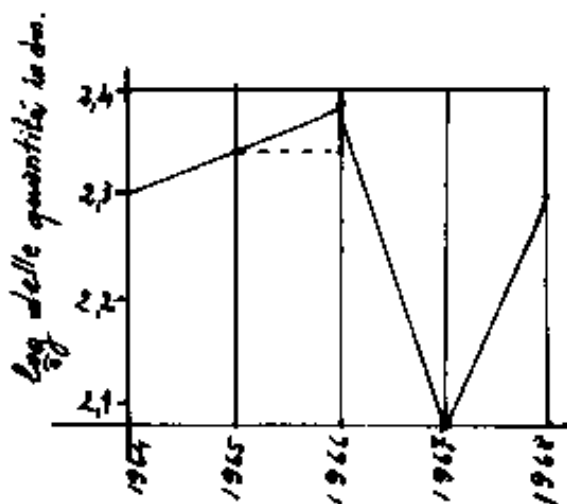
La statistica studia in particolare le variabili casuali, ed usa la parola "stocastica" come aggettivo qualificativo della "indipendenza" stocastica" fra variabili casuali. Si ha indipendenza stocastica quando due eventi casuali non si influenzano. Per esempio in una urna vi sono tre palle rosse e quattro bianche, l'evento: palla rossa, o palla bianca, in una primo estrazione, può "probabilisticamente" calcolarsi in 3/7 o in 4/7. Se non rimettiamo la palla estratta nell'urna, e supponiamo di aver estratto una palla rossa, le probabilità diventano: 2/6 e 4/6 cioè le due estrazioni consecutive non sono "stocasticamente indipendenti, mentre lo sono se rimettiamo la palla nell'urna e mescoliamo bene. Se si lancia due volte una moneta, nel gioco a testa o croce, i due lanci sono stocasticamente indipendenti.

due lanci sono stocasticamente indipendenti.

Si noti che i fenomeni osservati statisticamente possono riguardare "entità misurabili" come l'altezza di un certo numero di persone, ma possono riguardare anche "entità qualitativamente diverse" come il colore degli occhi o dei capelli. Tuttociò porta a considerare "la frequenza" con la quale il fenomeno si presenta.

Avremo: "frequenze relative", avremo: "distribuzioni di frequenza". Le distribuzioni di frequenza si prestano ad essere rappresentate graficamente. I diagrammi ad assi cartesiani variamente graduati per evidenziare (o contenere) variazioni o valori che graficamente potrebbero sfuggire. Facciamo alcuni esempi di rappresentazioni grafiche.

Il diagramma delle quantità annuali di pioggia caduta in Italia, riporta i valori annuali alla fine di ciascun anno e raccorda linearmente i valori. Se in ordinate poniamo i logaritmi delle quantità di pioggia, poiché: $\log(q_{1966}) - \log(q_{1965}) = \log\left(\frac{q_{1966}}{q_{1965}}\right) = \log\left(1 + \frac{q_{1966} - q_{1965}}{q_{1965}}\right)$

Le variazioni di ordinata

Le variazioni di ordinata nel secondo diagramma indicano il logaritmo del rapporto, cioè la variazione relativa.

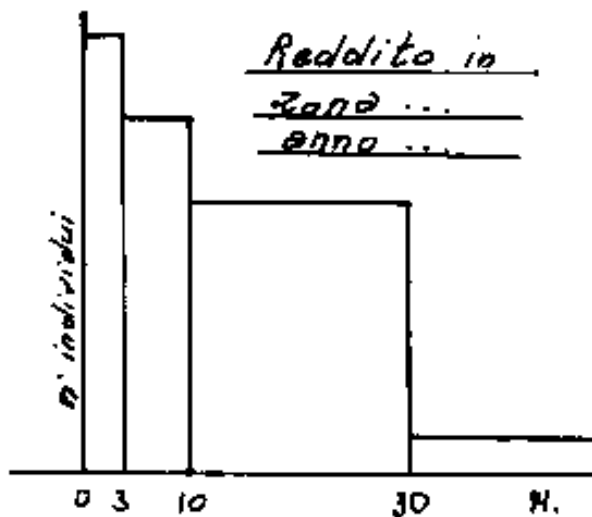
Altro tipo di rappresentazione sono gli "istogrammi" costituiti da rettangoli affiancati ove in ascisse si separano le classi di appartenenza ed in ordinate il numero di individui che rientra in tale classe.

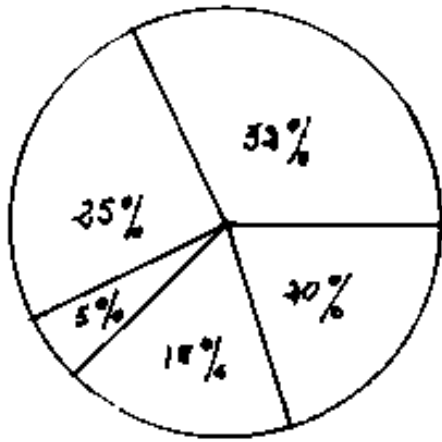
Per esempio suddividiamo gli individui in classi di reddito. Cioè da 0 a 3000.000,= la I classe; da 3000.000.- ad 10.000.000.- la II classe; da 10.000000 a 30.000 000 la III classe oltre 30 000 000 la IV classe.

È evidente che nel grafico deve essere indicato l'anno di riferimento e la zona, (regione, nazione ecc);

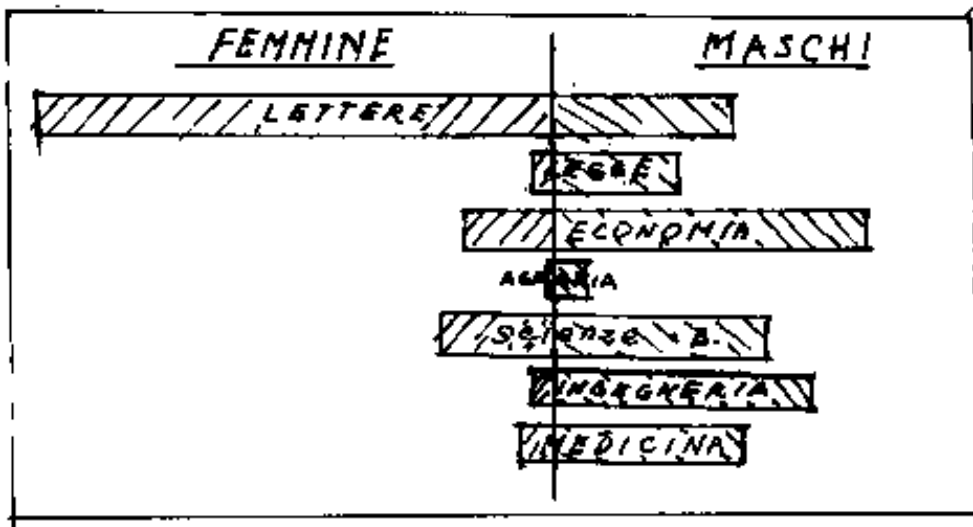
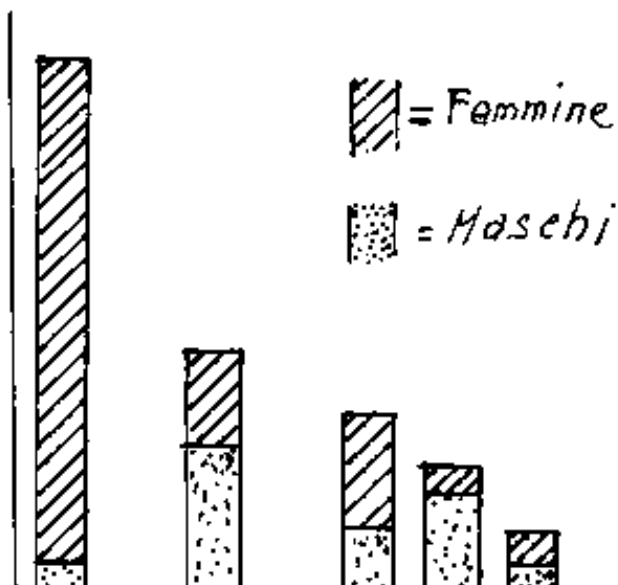
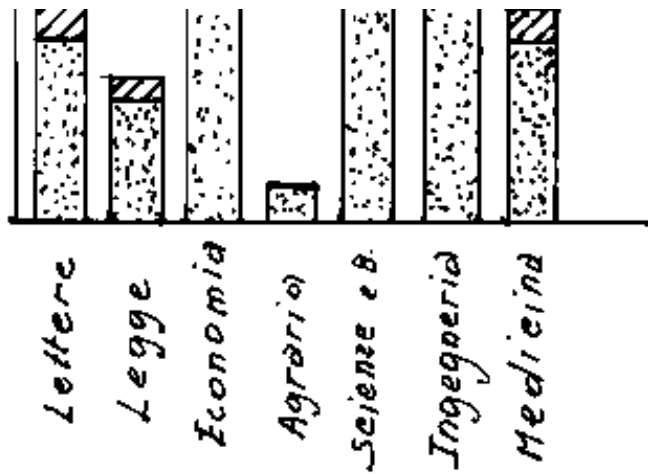
Reddito in
zona ...
anno ...

n° individui

0 3 10 30 M.

occorre anche precisare se reddito prodotto pro capite, o reddito disponibile pro capite. Per tener conto del diverso modo di interpretare il reddito di un capo famiglia con moglie e figli a carico.

Qualora invece si vogliano evidenziare le percentuali rispetto ad un totale noto, si usano grafici circolari detti anche "a torta" o grafici di composizione e comparazione. I settori circolari si possono colorare per evi=

denziare differenze qualitative.
per esempio il "colore politico".

Consideriamo infine le rappresentazioni grafiche costituite da rettangoli separati. Si ricorre a questa rappresentazione quando si vogliano comparare

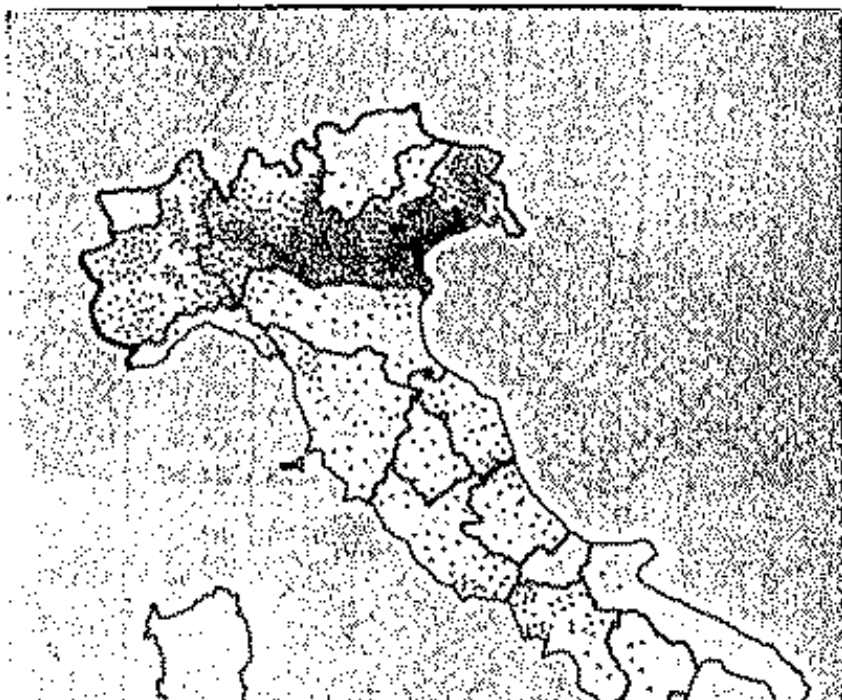
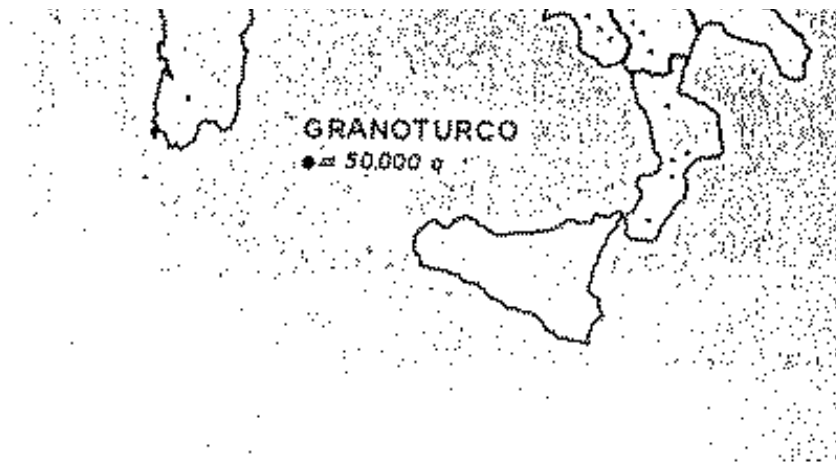
gruppi discreti non aventi una continuità spaziale o temporale; per esempio il numero degli studenti inscritti in un certo anno a varie facoltà universitarie, e possono distinguersi in maschi e femmine.

I rettangoli possono essere disposti in verticale, e per confrontare l'altezza complessiva, disporli a partire dalle ascisse, in tal caso il nostro diagramma diverrebbe come quello a fianco. La rappresentazione a rettangoli separati, si presta anche a rappresentare fenomeni per i quali sia necessario

i quali sia necessario utilizzare la diversa larghezza dei rettangoli come abbiamo fatto con gli istogrammi, ove però la larghezza dei rettangoli affiancati rappresenta l'ampiezza di un campo nel

continuo : (da ... a ...). Nei rettangoli separati la larghezza può essere un elemento, non consecutivo, ma indipendente. Per esempio in un ospedale si vuole evidenziare il costo del personale distinto per categoria. Porremo un rettangolo per ogni categoria, la larghezza del rettangolo rappresenta la paga mensile, l'altezza del rettangolo rappresenta il numero di individui di quella categoria; ovviamente l'area del rettangolo rappresenta la paga complessiva di quella categoria.

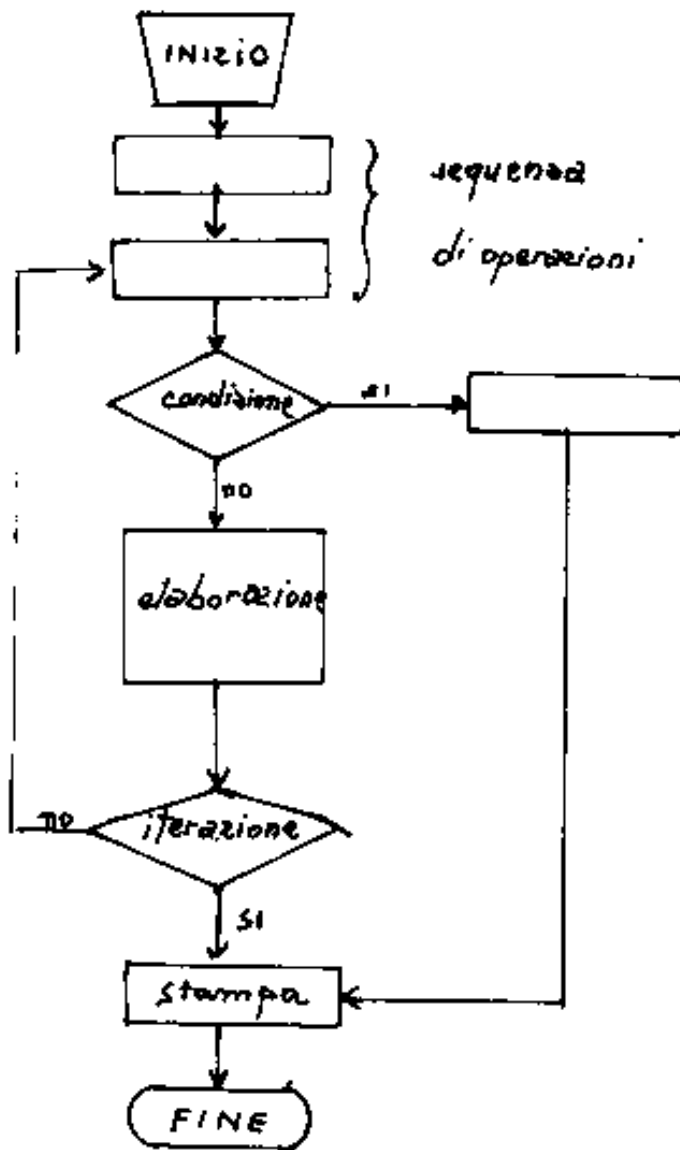
Il diagramma di cui sopra è fatto a puro titolo dimostrativo ed ovviamente non riflette nemmeno si approssima a situazioni di ospedali reali.

Quando un fenomeno in esame si voglia confrontare fra varie zone di un territorio, per la "distribuzione di frequenza si usano i "Cartogrammi". Cioè :

assunta come base la carta topografica o geografi-
ca del territorio in esame; si delimitano le zone
che interessa evidenziare, quindi se la distinzione
è puramente qualitativa si possono colorare le varie
zone con colori diversi. Se la distinzione è quan-
titativa si possono punteggiare o tratteggiare le varie
zone con densità diversa, ove il numero di punti o
di tratteggi per centimetro quadro rappresenta la quantità
di riferimento, oppure: ogni punto rappresenta il numero
di tonnellate di un certo prodotto. Per esempio, il gra-
fico a fianco (ri-
preso dall'Annuario
Statistico Italiano
per l'anno 1970)
rappresenta il
"cartogramma" delle
produzioni di gran-

GRANOTURCO
● = 50.000 q

turco in Italia.
Si noti come la densità dei punti evidenzia il fenomeno.
Per completare si citano anche gli "Organogrammi" Ove schematicamente sono rappresentate le varie fasi di una lavorazione o di un algoritmo.

Il più comune è forse il cosiddetto "diagramma a blocchi" (è un organigramma) che si usa per la programmazione di computer. Si riporta un esempio generico di un organigramma, che riflette in genere le presposizioni logiche. Lo schema è connesso al linguaggio utilizzato e soprattutto al problema da risolvere.

L'organigramma di un programma strutturato sarà la connessione di tanti sottoprogrammi, ciascuno dei quali avrà, a sua volta, il proprio organigramma per le operazioni da svolgere.

INIZIO
sequenza di operazioni
condizione
si
no
elaborazione
iterazione
no
si
stampa
FINE

le operazioni da svolgere.

Un'altro tipo di organigramma può essere lo schema di un circuito elettrico o elettronico, per esempio lo schema di un televisore. Si noti l'importanza della: "sequenza" della "intensità" e "frequenza" delle "grandezze" in gioco nel fenomeno.

Successioni numeriche

"Dicesi successione un insieme ordinato di infiniti elementi la cui sequenza è coordinata dall'insieme crescente di tutti i numeri naturali".

I singoli elementi si indicano con la lettera "a_n" alla quale è apposto un indice "n" costituito da un numero naturale che indica la posizione dell'elemento. Una successione sarà quindi:

$$a_1 \; , \; a_2 \; , \; a_3 \; , \dots a_k \; , \dots a_n$$

ove l'indice "k" od "h", vuol significare un generico elemento intermedio, mentre l'indice "n" indica l'ennesimo (o ultimo) elemento considerato.

Una successione si indica brevemente con l'elemento ennesimo in parentesi graffa: $\{a_n\}$.

La successione è determinata se è possibile esprimere il valore dell'elemento ennesimo (a_n) in funzione dell'indice "n". In questo caso è pos=

in funzione dell'indice "n". In questo caso è possibile scrivere tutti gli elementi della successione attribuendo ad "n", ordinatamente, i valori 1, 2, 3 .... dell'insieme dei numeri naturali. Ed è possibile scrivere il valore di un generico elemento "a_k" se conosciamo a quale numero intero corrisponde K.

Avvertiamo che un limitato numero di elementi noti di una successione, non è sufficiente per fornire la legge degli infiniti elementi della successione.

È possibile invece trovare <u>una</u> delle leggi di successione che verifichi gli elementi noti.

<u>alcuni esempi</u>

$1, 2, 3, 4 \ldots\ldots \{n\}$ successione dei numeri naturali

$2, 4, 6, 8 \ldots\ldots \{2n\}$ " " " pari

$1, 3, 5, 7 \ldots\ldots \{2n-1\}$ " " " dispari

Supponiamo, nelle successioni sopra scritte di voler escludere i primi K elementi; per $K=3$ avremo:

$$\{n+K\} = 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots \{n+3\}$$

$$\{2n+2K\} = 8, 10, 12, 14, \ldots\ldots \{2n+6\}$$

$$\{2(n+K)-1\} = 7, 9, 11, 13, \ldots \{2n+5\}$$

Consideriamo una successione che abbia costante la differenza di due termini consecutivi (vedi I Vol Progressione aritmetica), cioè: $(a_{K+1} - a_K = r)$, ove "r" è detta ragione della progressione aritmetica.

Affinché questa successione sia definita occorre un altro elemento oltre "r", per esempio il valore del primo elemento, o il valore di un generico elemento a_K, (con K noto). permetterà di risalire al valore del primo elemento : $\boxed{a_1 = a_K - (K-1)r}$ quindi,

possiamo scrivere il termine: $a_n = \{a_1 + (n-1)r\}$;
per esempio una successione che abbia per terzo elemento 14 e per ragione 4 avrà per primo elemento 6 e la successione sarà:

$$6,\ 10,\ 14,\ \ldots\ldots,\{2+4n\}$$

Consideriamo ora una successione che abbia costante il rapporto di due termini consecutivi (progressione geometrica v. Vol I); essendo: $a_n = a_1 q^{n-1}$ ove: $q = a_{K+1}/a_K$ = ragione della progressione geometrica. Per es. per $a_1 = 1$ e $q = 2$ si ha:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots\ldots\{2^{n-1}\}\ .$$

Se di una successione conosciamo il valore e la posizione di due termini: a_h ed a_K possiamo trovare infinite successioni diverse che coincidono in a_h ed a_K. Infatti: $r = \dfrac{a_K - a_h}{K-h}$; oppure: $q = (a_K/a_h)^{1/(K-h)}$ a seconda che si scelga essere una progressione aritmetica o geometrica. Ma possiamo

definire infinite leggi che legano gli elementi di una successione. (Per esempio che ogni termine sia la radice quadrata del precedente; ove dato a_1 è definito: $a_m = \left\{ a_1^{\left(\frac{1}{2^{(m-1)}}\right)} \right\} = \left\{ \sqrt[2^{(m-1)}]{a_1} \right\}$; oppure che: $a_K = (a_{K+1})^i$; ed occorrerà conoscere "i", ovvero: $(a_h)^{(i)^{(K-h)}} = a_K$; $i^{(K-h)} = \log|a_K| / \log|a_h|$; $i = (\log|a_K| / \log|a_h|)^{\frac{1}{(K-h)}}$.)

Dati tre elementi di una successione a_h, a_i, a_k; se: $\frac{a_k - a_i}{k-i} = \frac{a_i - a_h}{i-h} = r$ possiamo dire che a_h, a_i, a_k sono tre termini di una progressione aritmetica. Se: $(a_k/a_i)^{\frac{1}{k-i}} = (a_k/a_h)^{1/k-h} = q$; la successione è una progressione geometrica. Naturalmente ciò vale, ed a maggior ragione, se le relazioni verificano più termini noti.

Supponiamo di conoscere il quinto, il sesto, il settimo e l'ottavo elemento di una successione, per esempio: $a_5 = 13$, $a_6 = 16$, $a_7 = 19$, $a_8 = 22$ è facile riconoscere che è una progressione aritmetica con $r = 3$

$a_1 = (a_h - (h-1)r) = (a_5 - (4)3) = 13 - 12 = 1$ e la successione sarà:

sarà:	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25, ... $\{3n-2\}$
corrisponde	a_1,	a_2,	a_3,	a_4,	a_5,	a_6,	a_7,	a_8,	a_9, ... $\{a_1 + r(n-1)\}$

<u>Consideriamo ora una successione a segni</u>

alterni

Si hanno due casi: $a_1 > 0$; $a_1 < 0$

Per ottenere segni alterni basta moltiplicare per: $(-1)^{n-1}$ se $a_1 > 0$; oppure per: $(-1)^{n}$ se $a_1 < 0$.

Per esempio le tre successioni dei numeri naturali, numeri pari, e numeri dispari, a segni

alterni e col primo elemento positivo, si esprimono:

$+1, -2, +3, -4, +5, \ldots \{n(-1)^{n-1}\}$

$+2, -4, +6, -8, +10, \ldots \{2n(-1)^{n-1}\}$

$+1, -3, +5, -7, +9, \ldots \{(2n-1)(-1)^{n-1}\} =$

Si noti che la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente, ed ogni altra operazione diadica fra gli elementi omonimi di due successioni, produce una nuova successione espressa dalla stessa operazione sui due termini funzione di n.

Per esempio, se volessimo intervallare con zeri i numeri dispari, cioè se vogliamo il termine a_n di una successione del tipo: 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0 .....
Si nota che questa successione corrisponde alla successione naturale a cui sono tolti i numeri pari sostituendoli con elementi nulli. Notare anche che n rispetto ai numeri dispari vale metà.

n rispetto ai numeri dispari vale metà.

Consideriamo le due successioni:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{6}{2},\ \frac{7}{2},\ \ldots \left\{\frac{n}{2}\right\}$$

$$+\frac{1}{2},\ -\frac{2}{2},\ +\frac{3}{2},\ -\frac{4}{2},\ +\frac{5}{2},\ -\frac{6}{2},\ +\frac{7}{2},\ \ldots \left\{\frac{n}{2}(-1)^{n-1}\right\}$$

Sommando gli elementi omonimi abbiamo:

$$\boxed{1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ 7,\ \ldots \left\{\frac{n}{2}\left(1+(-1)^{n-1}\right)\right\}}$$

che è la successione richiesta. $= \left\{\frac{n}{2}\left(1-(-1)^{n}\right)\right\}$

se togliamo dalla successione dei numeri interi i numeri dispari nella loro posizione, cioè

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots \{n\}$$

$$1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ \ldots \left\{\frac{n}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}$$

sottraendo: $0,\ 2,\ 0,\ 4,\ 0,\ 6,\ \ldots \{n\} - \left\{\frac{n}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\} =$

$$\boxed{0,2,0,4,0,6,\ \ldots \left\{\frac{n}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right\}}$$

volendo iniziare con "2" si sostituisce ad n il valore $(n+1)$ e ricordando che $\left(+(-1)^{n+1}\right) = \left(-(-1)^n\right)$

$$\boxed{2,0,4,0,6,0,8\ \ldots \left\{\frac{n+1}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}}$$

se dividiamo per 2 queste successioni otteniamo:

$$\boxed{0,1,0,2,0,3,0,4\ \ldots \left\{\frac{n}{4}\left(1+(-1)^n\right)\right\}}$$

$$\boxed{1,0,2,0,3,0,4\ \ldots \left\{\frac{n+1}{4}\left(1-(-1)^n\right)\right\}}$$

sommando queste due successioni abbiamo:

$$\boxed{1,1,2,2,3,3,4,4\ \ldots \left\{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\left(1-(-1)^n\right)\right\}}$$

sottraendo dalla seconda la prima successione:

sottraendo dalla seconda la prima successione:

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots \left\{\frac{1}{4} - \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)(-1)^n\right\}$$

Quest'ultima successione, alcuni testi di analisi usano scriverla: $(1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots n, -n)$ ove "n" non ha più il significato di indice dell'elemento ennesimo, mediante il quale è possibile la determinazione algebrica $a_n = f(n)$.

Gli esempi fatti ci pongono la generalizzazione di vari problemi. Iniziamo sul come

intervallare con zeri una successione:

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots\ldots \{f(n)\}$$

sia la successione data. Moltiplicando per (1/2)n =(0,5)n cioè sostituendo ad "n" il valore (n/2) e dividendo per due gli elementi della successione si ha:

$$\frac{f(\frac{1}{2})}{2},\ \frac{f(1)}{2},\ \frac{f(1,5)}{2},\ \frac{f(2)}{2}\ \ldots\ldots \left\{\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{n}{2}\right)\right\}$$

alternando i segni:

$$\frac{-f(\frac{1}{2})}{2},\ \frac{+f(1)}{2},\ \frac{-f(1,5)}{2},\ \frac{+f(2)}{2}\ \ldots\ldots \left\{\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{n}{2}\right)\right)(-1)^n\right\}$$

Sommando:

$$\boxed{0,\ f(1),\ 0,\ f(2),\ 0\ \ldots \left\{\frac{f(\frac{n}{2})}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right\}}$$

posto $f_n = \frac{(n+1)}{2}$ e $(-1)^n = -(-1)^{n+1}$

$$\boxed{f(1),0,\ f(2),0,\ f(3),\ 0\ \ldots\ldots \left\{\frac{f(\frac{n+1}{2})}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}}$$

per esempio: un progressione geometrica

che abbia per primo termine 2 e ragione 2 cioè:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots\ \{2^n\}$$

intervallata con zeri diventa:

$$2,0,4,0,8,0,16,0\ \ldots\ \left\{2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1-(-1)^n\right)\right\}$$

oppure:

$$0,2,0,4,0,8,0,16\ \ldots\ \left\{2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(1+(-1)^n\right)\right\}$$

se vi sommiamo:

$$2,0,4,0,6,0,8,0,10,\ \ldots\ \left\{\frac{n+1}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}$$

otteniamo:

$$2,2,4,4,6,8,8,16,10,32,\ \left\{\frac{n+1}{2}\left(1-(-1)^n\right)+\frac{2^{n/2}}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right\}$$

Con ciò abbiamo intervallato ad una progressione aritmetica una progressione geometrica. (cioè il primo elemento è dell'aritmetica). Se invece intervallassimo la stessa progressione geometrica con la stessa progressione aritmetica. (cioè il primo elemento è della geometrica avremo):

$$2, 2, 4, 4, 8, 6, 16, 8, 32, 10, \ldots \left\{2^{\frac{n-1}{2}}\left(1-(-1)^n\right)+\frac{n}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right\}$$

Si noti che contando alternativamente gli elementi sono evidenti le due progressioni.

Con ciò abbiamo visto che per intervallare due successioni occorre prima intervallarle con zeri.

Un semplicissimo programma in Basic per stampare i primi K termini di una successione ove $\{a_n\} = \{f(n)\}$

```
10 For n = 1 to K
20 Print n, f(n)
30 Next
```

30 Next

40 End

permette di verificare la correttezza della formula $f(n) = \{a_n\}$.

Per fare la successione dei reciproci o inversi di un'altra successione, basta ricordare che:

$$(a_k)^{-1} = \frac{1}{a_k}$$

Per esempio ricordando come si è formata la

successione : $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots\ldots \left\{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}(1-(-1)^n)\right\}$

$$1, \frac{1}{1}, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \cdots \left\{\frac{1}{n}\left(1+(-1)^n\right)+\frac{(n+1)}{4}\left(1-(-1)^n\right)\right\}$$

Notare che per fare gli inversi o reciproci degli elementi si inverte solo il fattore rappresentativo della $f_{(n)}$ non il fattore : $(1+(-1)^n)$ che è fattore di posizione e fabbrica gli zeri. Questo fattore assu= me alternativamente il valore $0, 2, 0, 2$, mentre

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\ldots \left\{\frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right\}$$

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\ldots \left\{\frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}$$

queste successioni possono essere moltiplicate per $U_{(\frac{n}{2})}$ e per $V_{(\frac{n}{2})}$ ed avremo, sommando, l'in= tervallamento di $U_{(n)}$ in $V_{(n)}$. Se invece moltipli= chiamo per $U_{(\frac{n}{2})}$ e per $1/U_{(n/2)} = \left(U_{(n/2)}\right)^{-1}$ otteniamo la $U_{(n)}$ che intervalla gli elementi reciproci.

Altre successioni possono ottenersi elevando

Altre successioni possono ottenersi elevando $f(n)$ con esponenti in n per esempio $(f(n))^{\varphi(n)}$

Consideriamo le successioni:

$2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots \{1-(-1)^n\}$

$1, 3, 1, 3, 1, 3, \dots \{2+(-1)^n\}$

$2, 5, 8, 11, 14, \dots \{3n-1\}$

$0, 0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots \{\frac{n-1}{2}(1-(-1)^n)\}$

$2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, \ldots \left\{\frac{n+1}{2}(1-(-1)^n)\right\}$

$1, 0, 5, 0, 9, 0, 13, \ldots \left\{\frac{2n-1}{2}(1-(-1)^n)\right\}$

e pensiamo di porre l'espressione dell'elemento ennesimo "a_n" come esponente ad una espressione in "n". Per esempio prendiamo la prima successione ora scritta e poniamola in esponente ad n avremo: $1, 1, 9, 1, 25, 1, 49, 1, \ldots \{(n)^{(1-(-1)^n)}\}$ se vi poniamo come esponente la seconda otteniamo: $1, 8, 3, 64, 5, 216, 7, \ldots \{(n)^{(2+(-1)^n)}\}$

Se fosse data la sequenza di numeri:

$$1, 8, 3, 64, 5, 216, 7, \ldots$$

volendo trovare la legge che determina tale successione, la prima osservazione da fare è che i numeri dispari mantengono il loro posto perciò $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots \left\{\frac{n}{2}(1-(-1)^n)\right\}$ la restante successione è composta dei numeri pari sempre al loro posto ma gli elementi sono elevati

pari, sempre al loro posto, ma gli elementi sono elevati al cubo: $0, 8, 0, 64, 0, 216, 0, \ldots \left\{\left(\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+(-1)^n\right)\right)^3\right\}$

Sommando le due successioni:

$$1, 8, 3, 64, 5, 216, 7, \ldots \left\{\left(\frac{n}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right)^3 + \frac{n}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\}$$

che equivale all'espressione: $\left\{n^{\left(2+(-1)^n\right)}\right\}$,

molto più semplice. (Basterebbe pensare che la successione $1, 3, 1, 3, 1, 3 \ldots \{2+(-1)^n\}$ ordinatamente posta in esponente...)

ma, l'uguaglianza:

$$n^{(2+(-1)^n)} = (n^2)(n^{(-1)^n}) = \left\{\frac{n}{2}(1-(-1)^n) + \left(\frac{n}{2}(1+(-1)^n)\right)^3\right\}$$

Ci fa riflettere come esistano espressioni al=gebriche equivalenti (una molto più semplice dell'altra) e non trasmutabili l'una nell'altra coi comuni passaggi algebrici. Esiste cioè una superalgebra che permette di trasformare una espressione nell'altra, ove il simbolismo può esprimere due aspetti diversi della stessa cosa.

Cerchiamo inizialmente di capire l'espres=sione: $\{(a \pm b(-1)^n\}$ si hanno due casi:

$$(a-b),\ (a+b),\ (a-b),\ \dots \{a+b(-1)^n\}$$

$$(a+b),\ (a-b),\ (a+b)\ \dots \{a-b(-1)^n\}$$

ove sommando otteniamo:

$$2a,\ 2a,\ 2a\ \dots \{2a\}$$

Le due espressioni possono moltiplicare espressioni in n genericamente espresse da: $f_{(n)}$; avremo rela=

su n genericamente espresse da: $f(n)$; avremo relazioni che sommate darebbero: $(2a)\,f(n)$.

Molto importante invece il rapporto fra a e b.

per $(b = a)$ si ha: $0, 2a, 0, 2a, \ldots\ a\{1+(-1)^n\}$

oppure: $2a, 0, 2a, 0, \ldots\ a\{1-(-1)^n\}$

per $(a = 2b)$ $b, 3b, b, 3b \ldots b\{2+(-1)^n\}$

$3b, b, b, 3b \ldots b\{2-(-1)^n\}$.

Per $a = Kb$: $\{Kb \pm b(-1)^n\} = b\{K \pm (-1)^n\}$

$b(K-1)$, $b(K+1)$, $b(K-1)$, $\dots \{bK + b(-1)^n\}$

Se poniamo $a = 5$, $b = 4$ abbiamo

$1, 9, 1, 9, \dots \{5 + 4(-1)^n\}$

$9, -1, 9, -1, \dots \{4 - 5(-1)^n\}$

$-1, 9, -1, 9, \dots \{4 + 5(-1)^n\}$

Abbiamo insistito in successioni ove la variabile intera "n" figura solo come esponente di (-1) cioè $(-1)^n$ perché, (vedi vol I); $(-1)^{\frac{n}{2}}$ che fornisce le potenze del coefficiente immaginario "i", e da esso, i numeri complessi ed i vettori ci consente di gettare le basi della nostra "superalgebra".

Il nostro $(-1)^n$ alterna semplicemente il segno; $(-1)^{\frac{n}{2}}$ da la successione ricorrente ogni 4 elementi

$i, -1, -i, +1, i, -1, -i, +1, \dots \{(-1)^{\frac{n}{2}}\} = (i)^n$

$-i, +1, +i, -1, -i, +1, +i, -1, \dots \{-(-1)^{\frac{n}{2}}\} = -(i)^n$

$$-1,\ -i,\ +1,\ +i,\ -1,\ -i,\ +1,\ +i,\ \dots \quad \left\{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\right\} = \left\{i(-1)^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$1,\ i,\ -1,\ -i,\ +1,\ +i,\ -1,\ -i,\ \dots \quad \left\{-(-1)^{\frac{n+1}{2}}\right\}$$

Per far girare in senso opposto all'ultima successione: $-i,\ -1,\ +i,\ +1,\ -i,\ -1,\ +i,\ +1,\ \dots \quad \{(-i)^n\}$

$$1,\ -i,\ -1,\ i,\ 1,\ -i,\ -1,\ i\ \dots \quad \{(-i)^{n+3}\}$$

$$(-i)^{n+3} = (-1)^{(n+3)}\cdot(i)^{n+3} = +(-1)^n\cdot(-1)\ (i)^n\cdot(i)^3 = i\,(i)^n(-1)^n$$

quindi: $\{(-i)^{n+3}\} = \{i(-i)^n\}$

Abbiamo così la possibilità di successioni di numeri complessi alternati a reali. Per esempio: $\{a + b(-1)^{\frac{n}{2}}\} = \{a + b(i)^n\}$ rappresenta una successione ricorrente ogni quattro termini:

$$(a+ib),\ (a-b),\ (a-ib),\ (a+b)\ \ldots\ldots \{a + b(-1)^{\frac{n}{2}}\}$$

che batte i vertici di un rombo. Infatti ricordando la rappresentazione dei numeri complessi (v. I Vol) si ha la figura a fianco.

Cerchiamo ora di vedere cosa succede se poniamo come esponente le successioni trovate.

$$1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots \{\tfrac{n}{2}(1-(-1)^n)\}$$

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \{\tfrac{1}{2}(1+(-1)^n)\}$$

$$1, 1, 3, 1, 5, 1, 7, \ldots \{\tfrac{n}{2}(1-(-1)^n) + \tfrac{1}{2}(1+(-1)^n)\} = \{n^{[\frac{1}{2}(1-(-1)^n)]}\}$$

Infatti considerando in esponente ad n la successione: $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \{\tfrac{1}{2}(1-(-1)^n)\}$, essendo

sione : 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... $\{\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\}$, essendo $n^0=1$, ed $n^1=n$, resta verificata l'uguaglianza:

$$\left\{\frac{1}{2}\left[(n+1)-(n-1)(-1)^n\right]\right\} = \left\{n^{\left[\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\right]}\right\}$$

I legami algebrici dell'eguaglianza sono che entrambe le espressioni sono l'elemento ennesimo della stessa successione; il primo termine dell'ugua=glianza è una trasformazione algebrica della formula di cui sopra;

.

ma con gli ordinari passaggi algebrici non è possibile trasformare l'espressione al primo membro in quella al secondo membro o viceversa. La possibilità di considerare una espressione algebrica come una "successione" che può riguardarsi come formata in due diversi modi di cui uno con carattere esponenziale.

Abbiamo visto come $(-1)^{\frac{n}{2}}$, con "n" intero, produca la sequenza delle unità reali e immaginarie, positive e negative, e come: $(-1)^{\frac{n}{2}} = \left((-1)^{\frac{1}{2}}\right)^{n} = i^{n}$.
Estendendo il concetto: $(-1)^{\frac{m}{n}}$, avremo tante radici quant'è "n" (reali o complesse) e ciascuna di esse darà luogo ad una successione in m.

Ma, noi abbiamo imparato a calcolare le radici dell'unità o di un numero complesso (v. I Volume, formula di Moivre). Per fare un caso semplice: $\{a(1)^{\frac{n}{2}}\}$ equivale a due successioni distinte:

equivale a due successioni distinte.

$$a\ ,\ a\ ,\ a\ ,\quad \ldots\ldots \{a(1)^n\}$$

$$-a\ ,\ a\ ,\ -a\ ,\quad \ldots\ldots \{a(-1)^n\}$$

Siamo così entrati in esponenti razionali, vediamo com'è possibile esaminare valori nel continuo.

Funzioni e Successioni

Se nell'espressione di una successione $\{a_n\}$, poniamo $n=x$ ed attribuiamo ad x il succedersi di tutti i valori dei numeri da $-\infty$ a $+\infty$; abbiamo che la nostra successione, espressa da valori discontinui che si succedono in sequenza, ("n" è intero) e che possono riportarsi con punti nel piano (x,y), diventa una funzione; cioè la x anziché assumere i valori della serie naturale dei numeri, assumerà tutti i valori dei numeri reali. I punti discontinui del nostro grafico saranno raccordati dalla linea rappresentativa della funzione.

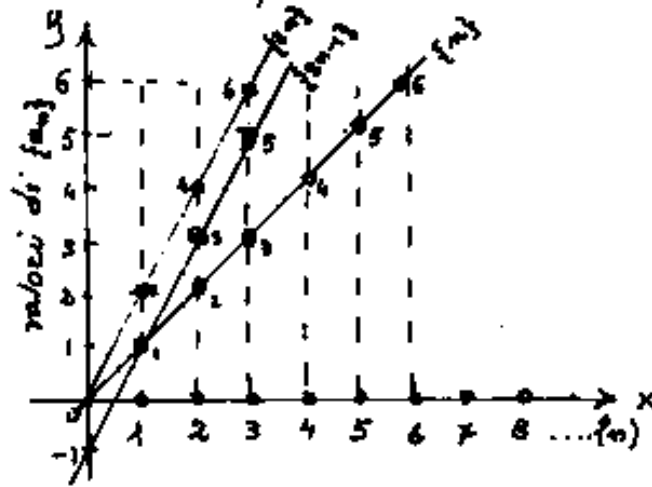
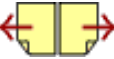
In altre parole, se in una funzione: $y=f(x)$ attribuiamo ad x, ordinatamente i soli valori dei numeri naturali (interi positivi), i valori della $y=f(x)$ sono i valori degli elementi della successione che ha per legge la $f(x)$, e la x diventa "indice"

che ha per legge la $f(x)$, e la x diventa "indice" dell'elemento. Esempi:

$y = 0$ = retta delle ascisse sulla quale i valori di $n = \text{int}(x) > 0$.

$y = x \rightarrow \{n\}$

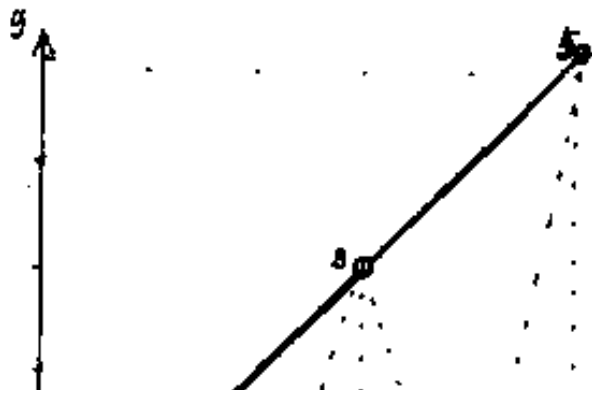
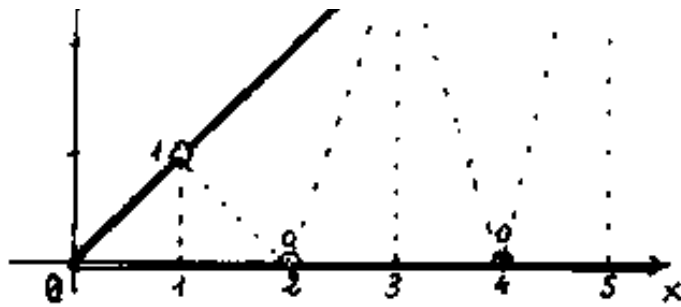
$y = 2x \rightarrow \{2n\}$

$y = (2x - 1) \rightarrow \{2n - 1\}$

Questa corrispondenza fra funzioni e successioni, ci fa riguardare una successione come i valori delle ordinate per le $x = \text{int}(x)$, nella sequenza dei numeri naturali e ci porta a confronti che possono permettere, in genere, di trovare "una legge" che verifichi gli elementi dati della successione.

Sappiamo, per esempio, che, dati 5 punti per essi passa una conica, ma la conica potrebbe essere un ellisse ed in tal caso la corrispondente successione risulterebbe limitata, come valori reali degli elementi.

Inversamente se dovessimo studiare la funzione:

$y = \frac{x}{2}\left(1-(-1)^x\right)$ corrispondente alla successione $\left\{\frac{n}{2}\left(1-(-1)^n\right)\right\} = 1,0,3,0,5,0...$

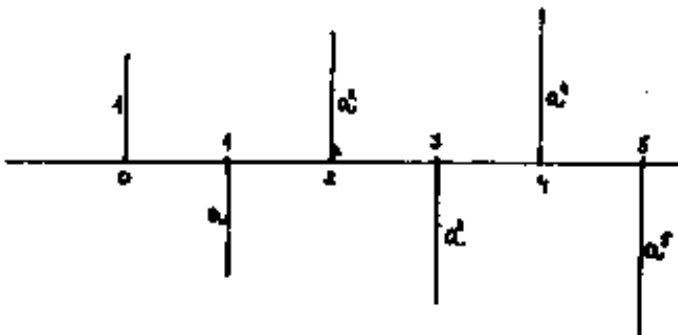
Facilmente disegnamo i punti della successione, ma la funzione che grafico ha? Cominciamo a considerare la x nel campo dei numeri razionali, cioè poniamo: $x = \frac{m}{n}$. Se n è pari nulla ci vieta di moltiplicare per 2 ambo i termini

tiplicare per 2 ambo i termini della frazione in tal modo anche il numeratore m diventa pari, (il valore della frazione non cambia), ed introduciamo radici reali.

Cioé: $(-1)^{\frac{1}{2}} = \pm i = (-1)^{\frac{2}{4}} = (1)^{\frac{1}{4}} = \begin{cases} (1)^{\frac{1}{4}} = \pm 1 \\ (-1)^{\frac{1}{2}} = \pm i \end{cases}$

Perciò la y si scinde in due linee: $y = x$ ed $y = 0$.

Le potenze con base negativa ed esponente continuo. possono riportarsi a $K(-1)^x$ con $-\infty \le x \le +\infty$. Noi limiteremo il nostro studio nel continuo con esponenti frazionari, avendo presente che anche i numeri irrazionali possono essere delimitati da frazioni il cui valore differisce dal valore del numero irrazionale meno di un ε piccolo a piacere

Gli attuali calcolatori segnalano errore se chiediamo potenze con base negativa, (non esistono i logaritmi di numeri negativi, poiché le basi dei logaritmi sono positive)

Il problema non è facile. Se riportiamo in ascisse gli esponenti ed in ordinate le potenze di una base negativa, possiamo tracciare subito le ordinate per esponenti interi, o per indici di radice dispari.

Consideriamo: $(-a)^{\frac{m}{n}}$. L'espressione è ambigua perché

[illegible] ambigua perché può scriversi in due diversi modi: $\sqrt[n]{(-a)^m}$ oppure $\left(\sqrt[n]{(-a)}\right)^m$ abbiamo le seguenti possibilità:

		I caso	II caso	
m = pari	n pari	due valori ±	immaginario (con n > m)	(riducibile)
	n dispari	un valore > 0	un valore > 0	
m = dispari	n pari	immaginario	immaginario	
	n dispari	un valore < 0	un valore < 0	

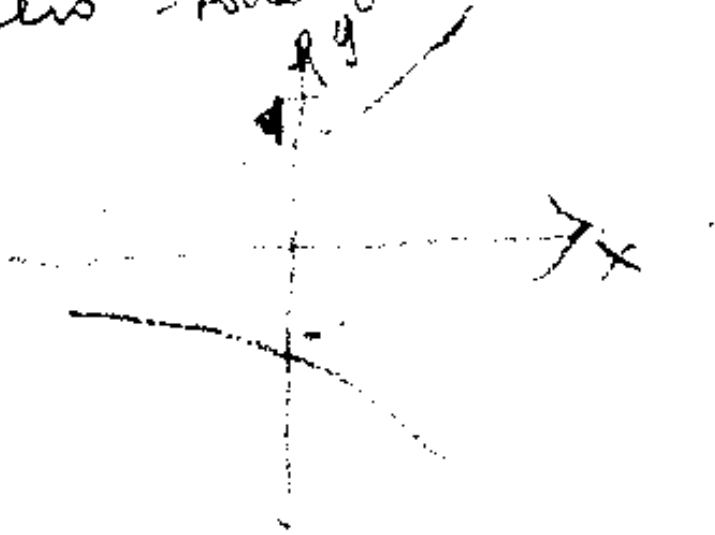
Sono molteplici le incongruenze che sorgono da questo problema. Il primo è la convenzione dei numeri negativi, di cui si è già esposto il principio critico ... (Se da un vaso che contiene 5 ... caramelle ne tolgo 7, .. ne rimangono −2)

Un'altra incongruenza è l'approssimazione nel calcolo delle potenze. Un numero razionale deve potersi esprimere come somma di un intero e di un numero frazionario. Ma la frazione data non è lecito ridurla ai minimi termini perché cambiano i valori. $a^{2,2} = a^{2+\frac{1}{5}} = (a^2) \cdot (a^{\frac{1}{5}})$

se scriviamo $(a^2)(a^{\frac{2}{10}})$, si ha l'ambiguità se fare prima la radice decima e poi il quadrato o viceversa.

Questo porta a considerare i numeri espressi con numeratore 1 cioè le frazioni continue.

Considerando $y = (-a)^x$ si ha l'apparenza di due curve esponenziali simmetriche, che

due curve esponenziali simmetriche, ma
però sono discontinue

Le Frazioni Continue

Ogni numero reale non intero, sarà intermedio a due numeri interi. Se α è tale numero, avremo: $(a_0) < \alpha < (a_0 + 1)$; ove "$a_0$" è il massimo intero contenuto in α.

Possiamo esprimere: $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$

ove: $\alpha_1 > 1$, cioè: $\frac{1}{\alpha_1}$ rapresenta la parte decimale di α.

Ma anche α_1 avrà un massimo intero a_1, ed una parte decimale $\frac{1}{\alpha_2}$. cioè:

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

sostituendo:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\alpha_2}}$$

ripetendo il discorso per $\alpha_2 = a_2 + \frac{1}{\alpha_3}$ ... ecc.

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ldots}}$$

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots}}}$$

Si verificano due casi:

1) Se α è razionale la frazione continua è limitata

2) Se α è irrazionale o trascendente la frazione continua è illimitata

Facciamo alcuni esempi:

— Si vuol sviluppare in frazione continua la frazione: $\frac{172}{97}$ (numero razionale). Utilizzando i successi resti della divisione si ha:

$$\frac{172}{97} = 1 + \frac{1}{\frac{97}{172-97}} = 1 + \frac{1}{97/75} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{75/22}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{22/9}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{9/4}}}} =$$

$$\boxed{\frac{172}{97} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}}}}$$

numero espresso in frazione continua.

— Se esprimiamo $\frac{172}{97}$ in numero decimale, troveremo:

$$\frac{172}{97} = 1,\overline{7731958762886597938144329896907216494845360824742}$$
$$\overline{268041237113402061855670103082783505154639175 25}\ldots$$

numero periodico, ove le cifre sopralineate indicano il

numero periodico, ove le cifre sopralineate indicano il periodo composto di 97 cifre.

Se trasformiamo in decimale il primo passaggio dello sviluppo in frazione continua si ha: $\frac{172}{97} = 1 + \frac{1}{1,29333\overline{3}}$ ove è periodica solo la cifra 3.

Data una frazione continua limitata è facile risalire alla frazione del numero razionale, basta iniziare dal basso: $\frac{1}{2+\frac{1}{4}} = \frac{4}{9}$

$\frac{1}{2+\frac{4}{9}} = \frac{9}{22}$; $\frac{1}{3 + 9/22} = \frac{22}{75}$; $\frac{1}{1+ 22/75} = \frac{75}{97}$; $1+\frac{75}{97} = \frac{172}{97}$.

Quindi un numero razionale darà luogo ad una frazione continua limitata.

$$\frac{m}{n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots a_K}}}$$

ove: $a_0, a_1, a_2 \dots a_K$ sono una successione limitata di numeri interi.

Se α è un numero irrazionale lo sviluppo in frazione continua è illimitato

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \alpha_K}}}$$

ove α_K non è intero anche al limite $K \to \infty$.

cioè: $\alpha_K = a_K + \frac{1}{\alpha_{K+1}}$ ... e così via.

Sviluppiamo in frazione continua $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale compreso fra 1 e 2

cioè: $1 < \sqrt{2} < 2$ ed anche: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

cioè: $1 < \sqrt{2} < 2$ ed anche: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

Se la parte intera di $\sqrt{2} = 1$, la parte decimale di $\sqrt{2}$ sarà: $(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$; perciò il primo passaggio sarà:

$$\boxed{\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

ma sostituendo questa espressione al denominatore:

ottenimo:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{\left(1 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + 1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

si nota che la $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_K = (\sqrt{2}+1)$ e che

$a_0 = 1$, mentre: $a_1 = a_2 = \dots a_K = 2$.

Infatti basta ripetere la sostituzione: $\sqrt{2} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$.

Perciò:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{(\sqrt{2}+1)}}}}$$

Evidente che <u>la frazione continua di $\sqrt{2}$</u> <u>è</u> <u>illimitata</u> e che il valore sarà tanto più approssimato quanti più termini di sviluppo si considera. Supponiamo di considerare così tanti termini di sviluppo che sia irrilevante per l'approssimazione considerare l'ultimo $\frac{1}{\sqrt{2}+1} \sim \frac{1}{2}$, avremo

per i decimali di $\sqrt{2}$ cioé $(\sqrt{2}-1) < \frac{1}{2}$ $(0,5)$ (eccesso)

$\frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} = 0,4$ (difetto) ; $\frac{1}{2+\frac{2}{5}} = \frac{5}{12} = 0,416\bar{6}$ (eccesso)

$\frac{1}{2+\frac{5}{12}} = \frac{12}{29} = 0,41379310 3..$ (difetto) $\frac{1}{2+\frac{12}{29}} = \frac{29}{70} = 0,4142857..$ (eccesso)

$\frac{1}{2+\frac{29}{70}} = \frac{70}{169} = 0,4142012$ a questo punto possiamo approssimare: $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ ma potremmo continuare per dare un numero maggiore di cifre decimali.

Nell'esempio di $\sqrt{2}$ si nota che approssimando per eccesso, (o per difetto) il termine: α_K (K-esimo) nel risalire dallo sviluppo i termini successivi sono via, via sempre più precisi ed alternano l'approssimazione per difetto all'approssimazione per eccesso, cioè costituiscono una successione convergente composta da due classi contigue i cui termini sono rispettivamente i termini di indice pari ed i termini di indice dispari della successione stessa; ove l'elemento separatore è $(\sqrt{2}-1)$.

$a_1 = 0,5$ $\qquad a_2 = 0,4$

$a_3 = 0,41\overline{6}$ $\qquad a_4 = 0,41379..$

$a_5 = 0,4142857$ $\qquad a_6 = 0,4142012$

$..(\sqrt{2}-1)..$

$0,414213562373....$

(Le due classi contigue che costituiscono la successione $\{a_i\}$)

Questo procedimento è estendibile ad altre radici (numeri irrazionali), per esempio: $\sqrt{5}$.

radici (numeri irrazionali), per esempio: $\sqrt{5}$.

Sappiamo che $2^2 = 4$ e che $3^2 = 9$ perciò

$2 < \sqrt{5} < 3$; la parte decimale di

$\sqrt{5}$ cioè: $(\sqrt{5} - 2) = \frac{1}{(\sqrt{5} + 2)}$ perciò:

$$\boxed{\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5} + 2}}$$

relazione fondamentale per l'iterazione delle sostituzioni.

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{\left(2 + \cfrac{1}{\sqrt{5}+2}\right) + 2}$$

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots (\sqrt{5}+2)}}}}$$

Se arrotondiamo a 4 l'ultimo $(\sqrt{5}+2)$ si ha che la parte decimale di $\sqrt{5}$ $(\sqrt{5}-2)$ è data da:

$a_1 = \frac{1}{4} = 0,25$ $\qquad$ $a_2 = \frac{4}{17} = 0,23529$

$a_3 = \frac{17}{72} = 0,236111$ $\qquad$ $a_4 = \frac{72}{305} = 0,2360654$

$a_5 = \frac{305}{1292} = 0,236068112$ $\qquad$ $a_6 = \frac{1292}{5473} = 0,236067970$

$$(\sqrt{5}-2) = 0,236067977\ldots$$

Si noti che l'espressione:

$$numero = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots}}}$$

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots a_m \ldots}}}$$

Permette la determinazione del numero quando si conosca la legge della sequenza $a_0, a_1 \ldots a_m \ldots$

Se la sequenza (che è una successione) è limitata si ha un numero razionale, se illimitata si ha un numero irrazionale o trascendente.

Indichiamo alcune sequenze.

$\sqrt{2} = [1; 2, 2, \bar{2}, \dots]$ ripete $\bar{2}$

$\sqrt{3} = [1; 1, 2, \overline{1, 2}, \dots]$ ripete $\overline{1, 2}$,

$\sqrt{5} = [2; 4, 4, \bar{4} \dots]$ ripete $\bar{4}$

$e = [2; 1, \underline{2}, 1, 1, \underline{4}, 1, 1, \underline{6}, 1, \dots] = [2; 1, 2\lambda, 1]$ (con $\lambda = 1, 2, 3 \dots$)

Per esempio volendo risalire ad un valore approssimato di e conoscendo lo sviluppo in frazione continua:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}$$

Ponendo = 1 l'ultimo di considerato si ha (limitiamoci ai valori sopra indicati): $6 + 1 = 7$; $1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$; $1 + \frac{7}{8} = \frac{15}{8}$

$4 + \frac{8}{15} = \frac{68}{15}$; $1 + \frac{15}{68} = \frac{83}{68}$; $1 + \frac{68}{83} = \frac{151}{83}$; $2 + \frac{83}{151} = \frac{385}{151}$

$1 + \frac{151}{385} = \frac{536}{385}$; $e \cong 2 + \frac{385}{536} \cong 2,71828\underline{3582}$

(approssimato in eccesso) $e = 2,718281828459045 \dots$

Per il calcolo delle radici quadrate suooe=

Per il calcolo delle radici quadrate suggeriamo un altro procedimento che chiameremo: "Regola delle frazioni successive". Esso da luogo a successioni convergenti i cui termini sono delle frazioni.

Regola delle frazioni successive

Sappiamo che una radice quadrata di un numero che non sia quadrato perfetto da luogo ad un numero irrazionale cioè ad un numero non esprimibile mediante una frazione. Ma è evidente che un numero limitato di cifre decimali può essere espresso da una frazione.

Consideriamo la successione: $\left\{ \frac{N_i}{D_i} \right\}$

N = numeratore ; D = denominatore.

La legge che lega due termini consecutivi della successione sia:

$$\frac{N_{(n+1)}}{D_{(n+1)}} = \frac{\lambda \cdot D_n + N_n}{D_n + N_n}$$

Una tale successione è convergente e converge a $\sqrt{\lambda}$ ove i singoli termini si alternano con approssimazione per difetto e per

alternano con approssimazione per difetto e per eccesso via via sempre più precisa al crescere dell' indice "i".

Diamo qualche esempio:

$$\sqrt{2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{N_n}{D_n} = \frac{2D_{n-1} + N_{n-1}}{D_{n-1} + N_{n-1}} \right) = 1,4142\,13562\,37309\,5048\,80\,16887\ldots$$

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \ldots$$

$$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_i$$

$$1,\ 1{,}5,\ 1{,}4,\ 1{,}41\underline{66},\ 1{,}41\underline{379}\ldots,\ 1{,}414\underline{285}\ldots,\ 1{,}4142\underline{0}\ldots,\ 1{,}41421\underline{5}\ldots,\ 1{,}414213\underline{1971}\ldots$$

Per $i = 30$ si hanno esatte 24 cifre. $a_{30} = \dfrac{367296043199}{259717522849}$

Data la natura della successione, al crescere di λ ben presto N_i e D_i divengono numeri molto grandi e la precisione è minore a parità di indice i

per $\lambda = 7$ ove $\sqrt{7} = 2,64575131$

$$a_1 \; , \; a_2 \; , \; a_3 \; , \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; a_{19} \; \ldots \; a_i$$

$$\frac{1}{1} \; , \; \frac{8}{2} \; , \; \frac{22}{10} \; , \; \frac{92}{32} \; , \; \ldots\ldots\ldots \; \frac{86042074112}{32520839168} \; \ldots$$

$$1 \; , \; 4 \; , \; 2,2 \; , \; 2,875 \; , \; \ldots\ldots\ldots \; 2,645751\,964379222$$

ove per avere 6 cifre decimali occorre arrivare ad a_{19}.

e solo ad a_{23} sarà esatta anche la 7ª cifra decimale che si stabilizza solo ad a_{25} ad a_{30} si hanno 10 cifre significative esatte (per $\lambda = 2$ erano 24 cifre esatte ad a_{30})

Quindi questa regola vale per numeri qualsiasi, ma è utile solo per numeri piccoli.

Se i numeri N_i e D_i non sono interi perché λ non è intero, si hanno vari casi. Consideriamo λ razionale, cioè: $\lambda = \frac{m}{n}$, $\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$

$$\frac{N_{n+1}}{D_{n+1}} = \frac{\left(\frac{m}{n}\right) D + N_n}{D_n + N_n}$$

Sia: $\lambda = \frac{1}{2}$ avremo: $\frac{1}{1}$, $\frac{1,5}{2}$, $\frac{2,5}{3,5}$, $\frac{4,25}{6}$, $\frac{7,25}{10,25}$,

$\frac{12,375}{17,50}$, ... = 1, 0,75, 0,7142857, 0,708$\overline{3}$, 0,7073170,

0,70714286, ... $\frac{21,125}{29,875}$ = 0,70711297 ; $\frac{36,0625}{51}$ = 0,70710784

$\left(\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,70710678\right)$; $\frac{61,5625}{87,0625}$ = 0,70710696 ;

Si noti l'oscillazione dei valori della successione intorno a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

La convergenza delle successioni

Dicesi convergente una successione quando il termine $\{a_n\}$ con $n \to \infty$, il valore di $a_n = a_\infty = L$ tende ad un valore finito L.

Definiamo la successione: $a_0 = 0$; $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.

(Ordinariamente il I° termine di una successione si indica con a_1 ma essendo nullo possiamo dire $a_0 = 0$)

Scrivendo i primi termini della successione si ha: 0, $\sqrt{6}$, $\sqrt{8,44949}$, $\sqrt{8,90680}$, ... $a_\infty = \sqrt{9}$

0, $2,44949$, $2,90680$, $2,98443$, ... $a_\infty = 3$

Si nota che la successione è crescente, ma si aggiunge a 6 un valore sempre < 3 per cui solo al limite $n \to \infty$ si ha $a_\infty = 3$. I pochi elementi calcolati evidenziano che la successione converge assai rapidamente ed è facile trovare un indice i tale che a_i differisca dal limite di un ε

minore di un ε "arbitrariamente piccolo.

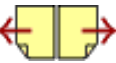
La successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}$ converge a zero

anche la $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \dots \frac{1}{n!}$ converge a zero

ed a maggior ragione.

La successione: $a_n = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ converge ad "e".

Abbiamo visto la convergenza delle successioni per

il calcolo delle radici quadrate, e delle ridotte

dello sviluppo in frazione continua di numeri irrazionali. Possiamo trovare molte successioni convergenti; si pensi ai limiti, per esempio:

$$\lim_{n \to \infty} \left(a_n = \left\{ \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} \right\} \right) = 1$$

diventa:

$$a_1 = 0,84147.. ; \quad a_2 = 0,95885.. ; \quad a_3 = 0,98158 ... ; \quad ..... \left\{ \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{1/n} \right\}$$

E' importante la convergenza delle successioni, perché, detta: "serie" la somma dei termini di una successione; e detta: "ridotta K" di una serie la somma dei primi K termini; avremo che, tutte le ridotte di un serie, con K variabile ordinatamente da 1 ad n, formano una successione, per cui la serie sarà convergente se, e solo se, lo sarà la successione delle sue ridotte.

Il criterio generale di convergenza di una successione può esprimersi:

Condizione necessaria e sufficiente perché una successione $\{a_n\}$ converga ad A è che scelto un numero positivo σ arbitrario, si possa determinare un corrispondente indice n_0 tale, che per tutti i valori di $n > n_0$ si abbia:

$$|A - a_n| < \sigma$$

Questa condizione esprime che da un certo in= dice n_0 in poi, i valori degli elementi della suc= cessioni sono interni all'intervallo: $(A-\sigma) < a_n < (A+\sigma)$ Ciò si riferisce a successioni di classi contigue, ma esisto= no anche successioni monotone per le quali i valori di a_n cadono nell'intervallo $(A-\sigma) < a_n < A$ se la successione è crescente; oppure $A < a_n < A+\sigma$ se la successione è decrescente. La successione $\{A-a_n\}$ è convergente a zero. Una successione si dice oscillante quando i termini si alterna= no (per segno o per valore diverso e rimane diverso al limite). Mentre una successione costituita dagli elementi alter= nati di classi contigue, per cui la successione è convergente all'elemento separatore delle classi e alternativamente si avvicina al limite una vol= ta con valori per difetto, una volta con valori per ecces= so. Una successione si dice regolare se con=

verge, oppure diverge a $+\infty$ oppure a $-\infty$.
Una successione non regolare si dice oscillante
Le successioni oscillanti non divergenti si dicono
indeterminate. Le successioni monotone, sono
regolari. La successione $a, \frac{1}{a}, a^2, \frac{1}{a^2} \ldots a^n, \frac{1}{a^n}$
è oscillante e indeterminata

La convergenza delle successioni è connessa al concetto di limite. La successione:

$$1^{\mu}, 2^{\mu}, \ldots\ldots \{n^{\mu}\}$$

per: $\mu > 0$ $\quad \lim_{n \to \infty} (n^{\mu}) = +\infty$ (divergente)

" $\mu = 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} (n^{\mu}) = 1$ (costante)

" $\mu < 0$ $\quad \lim_{n \to \infty} (n^{\mu}) = 0$ (convergente)

I termini di una progressione geometrica cioè la successione:

$$q^1, q^2, \ldots \{q^n\}$$

(per seguire la regola che n indica il termine ennesimo, abbiamo omesso: $q^0 = 1$.)

$\lim_{n \to \infty} \{q^n\}$:

- $(q > 1) = +\infty$ (divergente)
- $(q = 1) = +1$ (costante)
- $(q < 1) = 0$ (convergente)
- $(q = -1) = \langle \pm 1$ (oscillante indeterminata)

$(q=-1) = \{\pm 1$ (oscillante indeterminata)

$(q<(-1)) = \pm\infty$ (oscillante divergente)

la successione: $a, \frac{1}{a}, a^2, \frac{1}{a^2} \ldots a^n, \frac{1}{a^n}$

avrebbe come termine generico:

$$\left\{\left(n/2 + 1/4\left(1-(-1)^n\right)\right)^{\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)(-1)^n\right)}\right\}$$

per $n = 1,2,3,4,5,6$ si ha: $1, 1, 4, \frac{1}{4}, 27, \frac{1}{27}$.

Consideriamo le "ridotte" della serie:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$$

(detta serie armonica) ed indichiamo con H i termini della successione costituita da tali ridotte:

avremo: $H_1, H_2, H_3, \ldots\ldots H_K, \ldots\ldots H_n$. ove:

$$H_K = \sum_{i=1}^{i=K} \left(\frac{1}{i}\right)$$

e sia: $(m>1)$

$$\underbrace{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{m}\right)}_{H_m} + \left(+\underbrace{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \cdots + \frac{1}{2m}}_{H_{2m} - H_m}\right)}_{H_{2m}}$$

Il termine: $\frac{1}{2m}$ è minore dei termini precedenti, quindi la somma di m volte $\frac{1}{2m}$, cioè: $\left(\overset{1}{\frac{1}{2m}} + \overset{2}{\frac{1}{2m}} + \overset{3}{\frac{1}{2m}} + \cdots\overset{m}{\frac{1}{2m}}\right) = m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$ confrontata con $(H_{2m} - H_m)$ porta

$$(H_{2m} - H_m) > \frac{1}{2}$$

ed anche:

$$\boxed{H_{2m} > \left(H_m + \frac{1}{2}\right)}$$

Ciò vale indipendente da m, e via via raddoppian-

Ciò vale indipendentemente da m, e via via raggruppando i gruppi successivi avremo:

$$H_{2^2 m} > \left(H_{2m} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$H_{2^k m} > \left(H_{2^{k-1} m} + \frac{1}{2}\right)$$

Se via via, sostituiamo sommando gli $\left(\frac{1}{2}\right)$, (ne abbiamo 2K) $\left(\frac{1}{2}\right)(2K)$, perciò:

$$\boxed{H_{2^{K} m} > \left(H_m + K\right)}$$

ove l'indice "n" è posto in funzione di K

ma anche :

$$H_{2^{2k}_m} > K$$

quindi:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} H_n = +\infty}$$

Questa importante dimostrazione della divergenza della successione delle ridotte della serie armonica, dimostra la divergenza della serie stessa. $H_n = 1, + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$.
(vedere in seguito serie armonica).

Ricordiamo che: la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente dei limiti (allo stesso limite) equivale alla somma, la differenza, il prodotto, il quoziente delle espressioni che hanno generato i singoli limiti.
Perciò se le due successioni convergenti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono rispettivamente ad A e B avremo:

avremo:

$$\lim_{n \to \infty} \{a_n \pm b_n\} = A \pm B$$ (convergente)

$$\lim_{n \to \infty} \{(a_n) \cdot (b_n)\} = (A) \cdot (B)$$ (convergente)

$$\lim_{n \to \infty} \{(a_n) / (b_n)\} = (A) / (B)$$ (convergente per $B \neq 0$) (divergente per $B = 0$)

$$\lim_{n \to \infty} \{a_n^K\} = A^K$$ (convergente per K finito) (per $K < 0$, $A \neq 0$)

Il numero e

La successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ di cui abbiamo già calcolato i primi termini, (vol I capitolo Logaritmi). e_1 , e_2 , e_3 ...... $e_n = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

Se applicassimo direttamente il passaggio al limite avremmo: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty = (1+0)^\infty$ ... forma indeterminata.

Considerando invece la successione:

$$f_1 , f_2 , f_3 , \ldots f_n , \ldots \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

abbiamo che: $\frac{f_n}{f_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n =$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Big/ \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right) \Big/ \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n$$

$$\boxed{= \left(1+\frac{1}{n}\right) \Big/ \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}$$

essendo n intero in genere $n>1$; $0<\frac{1}{n^2-1}<1$

quindi: $$\boxed{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + n\left(\frac{1}{n^2-1}\right)}$$ (disuguaglianza già dimostrata)

ma: $\frac{n}{n^2-1} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ per cui

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right) \Big/ \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n < 1$ cioè: $f_n / f_{n-1} < 1$ $\boxed{f_n < f_{n-1}}$

Cioè <u>la successione $\{f_n\}$ è decrescente</u>

Poiché:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

e poiché la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ è <u>crescente</u> e, come dimostrato, la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è <u>decrescente</u>, le due successioni $\{f_n\}$ ed $\{e_n\}$ costituiscono due classi contigue aventi "e" come elemento separatore. $\{e_n\}$ si approssima per difetto, $\{f_n\}$ si approssima per eccesso:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$	$<$	e	$<$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$
1	2	$<$	e	$<$	4
2	2,25	$<$	e	$<$	3,38
3	2,37	$<$	e	$<$	3,16
4	2,44	$<$	e	$<$	3,05

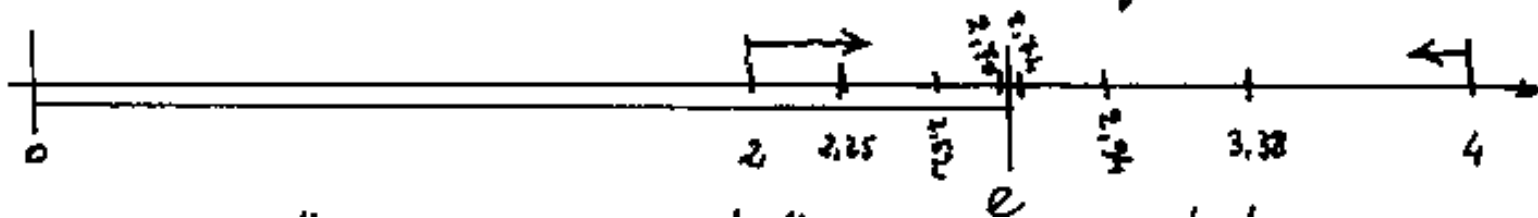
4	$2,44 < e < 3,05$
5	$2,49 < e < 2,99$
6	$2,52 < e < 2,94$
8	$2,57 < e < 2,89$
16	$2,64 < e < 2,80$
64	$2,70 < e < 2,74$
128	$2,7077 < e < 2,7289$
1000	$2,7169 < e < 2,7196$

Con ciò resta dimostrata l'esistenza di "e" come elemento separatore di classi contigue.

Data l'importanza di "e", (che gli ordinari metodi di passaggio al limite lasciavano indeterminato) si evidenzia l'importanza delle Successioni e della loro convergenza.

Che la grandezza "e" possa essere rappresentata con un <u>segmento finito</u>, avendo arbitrariamente fissato un segmento unitario, si rende evidente se pensiamo di riportare "e" su un'asse reale utilizzando le due classi contigue che lo definiscono:

0 2 2,25 3,38 4

e

Mentre "numericamente" è impossibile scrivere il valore esatto di "e", in quanto numero trascendente non è esprimibile né con una frazione avente numeratore e denominatore finiti; né con radici o esponenti frazionari di radicali o basi finite. Esiste un segmento che dà il valore esatto di "e". (La trascendenza di e fu dimostrata da Hermite)

Le Serie

Abbiamo già accennato alle serie, ed alla convergenza delle serie (V. anche Vol. I). Vogliamo ora dare dei criteri per decidere se una serie è convergente, divergente, oscillante, indeterminata.

Dicesi: "Serie" la somma dei termini di una successione.

Se la successione $\{a_n\}$ con n tendente all'infinito è crescente, la corrispondente serie è divergente; quindi affinché la serie sia convergente i termini debbono decrescere. Questa condizione è necessaria, ma non è sufficiente.

Un criterio per decidere se una serie converge, o diverge è il confronto con una serie di cui è nota la convergenza o meno. Quindi:

– Se la serie in esame è maggiorante di una serie divergente, (cioè se ordinatamente i termini della

serie divergente, (cioè se ordinatamente i termini della serie sono maggiori di quelli della serie di confronto) la serie è divergente.

– Se la serie in esame è minorante di una serie convergente, (cioè se ordinatamente i termini della serie sono minori di quelli della serie di confronto) la serie è convergente

La serie della progressione geometrica

Abbiamo già trattato la progressione geometrica (cfr. Vol I) definita dal rapporto costante di due termini consecutivi, detto ragione "q".

$$q = a_{k+1} / a_k$$

Se il primo termine è unitario ($a_1 = 1$), la serie della progressione geometrica può scriversi:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots\cdots + q^{n-1}$$

ove "n" è l'indice dei termini della successione.

Abbiamo già visto (Vol I), che la somma dei primi "n" termini di una progressione geometrica è espressa da:

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

(che rappresenta le ridotte della serie)

Qualora il primo termine sia diverso da uno $a_1 \neq 1$ vale per le ridotte la formula più generale:

$$S_n = \frac{(a_n \cdot q - a_1)}{(q - 1)}$$

che può ridursi:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Se facciamo tendere "n" all'infinito, si hanno i seguenti casi:

$+\infty > q > 1$ (Successione crescente) La serie è __divergente__ ($q^n = \infty$) (ed ha per somma $S_\infty = \infty$)

$q = +1$ (Successione costante) La serie è __divergente__ ($S_\infty = \infty$) (tutti i termini $= a_1$; $(S_n = n\, a_1)$)

$1 > q > 0$ (Successione decrescente) La serie è __convergente__ ed ha per somma $S_\infty = \dfrac{a_1}{(1-q)}$

$q = 0$ (Successione nulla dopo a_1) La serie è __inesistente__, si riduce al primo termine $a_1 = S_n = S_\infty$.

$0 > q > -1$ Questa serie può dividersi in due serie di ragione (q^2); $(1 > q^2 > 0)$;

due serie di ragione (q^2), ($q^2 < 1$),

quella a termini positivi con primo termine "a_1"; quella a termini negativi con primo termine: $a_1 \cdot q$. Per cui

$$S_\infty = a_1 \left[\left(\frac{1}{1-q^2} \right) - \left(\frac{|q|}{1-q^2} \right) \right] = a_1 \frac{1-|q|}{1-q^2} =$$

$= a_1 \frac{1}{1+|q|}$. Abbiamo posto il valore assoluto a q perché abbiamo evidenziato il segno ($-$). Col suo segno: $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$

cioè possiamo dire (in generale)

$-1 < q < 1$ La serie è convergente ed ha per somma $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$

facciamo degli esempi:

$(q = +\frac{1}{2})$: $a_1\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{2^{n-1}}\}$; $S_\infty = 2a_1$

$(q = -\frac{1}{2})$: $a_1\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\}$; $S_\infty = \frac{2a_1}{3}$

Si noti che le successioni dei termini delle ridotte, nei due casi sono: per $(q = +\frac{1}{2})$ la successione è convergente ed è crescente monotona. Mentre per $(q = -\frac{1}{2})$ la successione è convergente, oscillante per difetto e per eccesso al valore limite.

$q = -1$ La serie è oscillante e indeterminata (Successione a segni alternati ove $|a_n| = a_1 = \text{cost.}$) fra i due valori di $S_n = \langle {0 \atop a_1}$
La successione delle ridotte è: $a_1, 0, a_1, 0, \dots$

$-1 > q > -\infty$ La serie è indeterminata. Dividendola nelle due serie di ragione q^2 si ha che la prima diverge a $+\infty$, la seconda diverge a $-\infty$. La successione delle ridotte è oscillante indeterminata fra $+\infty$ e $-\infty$.

Questa serie è importante perché ha un preciso campo di convergenza in funzione di "q", che possiamo far variare per valori, prossimi quanto vogliamo, all'unità. Per esempio per $a_1 = 1$ e la ragione $q = \frac{9999}{10000}$ si ha: $S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{9999}{10000}} = 10.000$.
mentre per $q = 1$ questa serie è già divergente.
Si noti che:

$$S_\infty - q S_\infty = 1 \quad ; \quad q = \frac{S_\infty - 1}{S_\infty} = 1 - \frac{1}{S_\infty}$$

$$\boxed{q = 1 - \frac{1}{S_\infty}}$$

questa formula consente di determinare q per ottenere che la somma degli infiniti termini della progressione geometrica avente $a_1 = 1$ sia S_∞.
cioè il valore della serie geometrica.

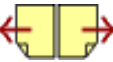
Tal volta è opportuno considerare "q" nella forma: $q = \frac{1}{(1+\varepsilon)}$, con $\varepsilon > 0$ e piccolo a piacere.

In questo caso $S_\infty = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{\cdot})} =$

$$1 - q \qquad 1 - \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)$$

$$\boxed{S_\infty = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \quad ; \quad \boxed{S_\infty = 1 + \frac{1}{\varepsilon}}$$

mentre: $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{(1+\varepsilon)^n - 1}{(\varepsilon)} \dfrac{(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^n} =$

$$\boxed{S_n = \left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

La serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} +$$

è divergente ed ha quindi: $S_\infty = \infty$

È una serie che diverge assai lentamente, incrementa di circa 2,3 ogni $10 \cdot n$ termini, cioè: posto $n = 10^k$ dimostreremo che: $\lim_{n \to \infty} \left(S_{10^{k+1}} - S_{10^k} \right) = \ln|10|$ e $\ln|10| = 2,302585093\ldots$

Riportiamo alcune ridotte:

$S_{10} = 2,928968$

$S_{100} = 5,187377$

$S_{1000} = 7,48547$

$S_{10.000} = 9,78760$

$S_{100.000} = 12,09015$

$S_{1000.000} = 14,39272$

(Per il calcolo delle ridotte e successive dimostrazioni vedi: Serie della costante di Eulero-Mascheroni)

E' molto importante trovare una serie che diverga il più lentamente possibile, perchè, può fare da paragone per definire divergenti le serie maggioranti ad essa.

Perciò la serie armonica è un'ottima serie di confronto: Serie maggioranti ad essa sono divergenti

Confrontiamo la serie armonica con la serie geometrica. Quest'ultima per $q=1$ è <u>divergente</u>, ed è <u>maggiorante</u> la serie armonica. Poiché per $|q|<1$ la serie geometrica è <u>convergente</u> $\left(S_\infty = \frac{1}{1-q}\right)$, essa necessariamente deve essere <u>minorante</u> la serie armonica. Poiché possiamo far variare q con continuità, cerchiamo un $q=(1-\varepsilon)$, vicinissimo ad 1, (con ε piccolo a piacere), anzi per agevolare il confronto poniamo:

$$\boxed{q=\frac{1}{(1+\varepsilon)}}$$

avremo: $S_\infty = \dfrac{1}{1-\frac{1}{(1+\varepsilon)}} =$

$$S_\infty = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-1} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} = \boxed{S_\infty = 1+\frac{1}{\varepsilon}}$$

Questa espressione del valore della serie geometrica ci dice che <u>l'inverso di ε è il valore della somma degli infiniti termini oltre il primo unitario.</u>

Confrontiamo le due serie:

$$\boxed{\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n-1}} \;=\; \frac{1}{n}}$$

$(1+\varepsilon)^{n-1} = n$; ed anche: $\boxed{(1+\varepsilon) = \sqrt[n-1]{n}}$ per esempio:

per $n = 10$ si ha: $\sqrt[9]{10} = (1+\varepsilon) \approx 1{,}29155\ldots$

" $n = 1000$ " $\sqrt[999]{1000} = (1+\varepsilon) = 1{,}006939\ldots$

" $n = 10000$ " $\sqrt[9999]{10.000} = (1+\varepsilon) = 1{,}000922\ldots$

" $n = 100.000$ " $\sqrt[99999]{100.000} = (1+\varepsilon) = 1{,}000115\ldots$

Quando q si avvicina ad 1 (ε piccolo), l'uguaglianza

dei due termini delle due serie avviene per n sempre più grande. Cioè la serie geometrica, inizialmente maggiorante la serie armonica, finisce per uguagliare i termini e poi diventa minorante.

Per esempio per: $q = \frac{1}{1,001}$

Serie geometrica $1 + \frac{1}{1,001} + \frac{1}{1,002} + \cdots\cdots + \frac{1}{91916,\ldots}$

Serie armonica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{10.000}$

$$\begin{cases} n = & 9124 & 9125 \\ \text{serie geometrica:} & + \frac{1}{9121,97} & + \frac{1}{9131,09} + \cdots \\ \text{serie armonica:} & + \frac{1}{9124} & + \frac{1}{9125} + \cdots \end{cases}$$

Il sorpasso avviene fra $n = 9124$ ed $n = 9125$ per il valore dei termini. Vediamo ora di confrontare l'accrescimento delle ridotte: Per la serie geometrica

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}}{1 - \frac{1}{1+\varepsilon}} = \frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon\,(1+\varepsilon)^{n-1}} = \frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}}$$

$$S_n = \frac{1}{\varepsilon} + 1 - \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}}$$

	Serie armonica	Serie geometrica
S_{10}	2,928968	9,955164
S_{100}	5,187377	95,212483
S_{1000}	7,48547	632,568620
S_{10000}	9,78760	1000,954327
$S_{100\,000}$	12,09015	1000,999999...
S_{∞}	∞	1001,=

Si nota come la serie armonica diverga lentissima=
mente, mentre la serie geometrica converge rapida=
mente, per S_{100000} differisce da S_∞ di $3,9146 \cdot (10)^{-44}$ cioè
vi sono 43 cifre decimali di tutti 9. Il sorpasso per le
ridotte dovrebbe avvenire per $n = (10^{4.34} \div 10^{4.35})$ e
cresce al diminuire di ε. Entrambe le serie sono
decrescenti (condizione necessaria, non sufficiente
affinché le serie siano convergenti), ma la serie armo=
nica è divergente, mentre la serie geometrica
è convergente, in quanto ha una velocità di
decrescimento maggiore di quella della serie
armonica. Tale velocità è funzione di ε, (e
non solo di ε, ma delle correlazioni che determinano
la serie). La velocità di decrescimento diventa zero
per $\varepsilon = 0$, e quindi per $\varepsilon = 0$ la serie geometrica
è tutta maggiorante la serie armonica ed è divergen=
te, mentre per ε comunque piccolo è convergente ed

re, mentre per ε comunque piccolo è convergente ed

$S_\infty = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$ (valida anche per $\varepsilon = 0$). Solo quando

$\varepsilon = 0$, $S_\infty = 1 + \frac{1}{0} = \infty$. Per ε piccolissimo $\simeq 0$

S_∞ = grandissimo, ma finito. Il sorpasso avviene per n

enormemente grande, ma avviene. (abbiamo visto n dell'

l'ordine di $10^{434} \div 10^{435}$ per $\varepsilon = 1/1000$). Inseguendo col pensiero

il termine di sorpasso all'impiccolire di ε si ha la sensazione

dell'immensità del campo numerico.

Se prendiamo i logaritmi naturali dell'uguaglianza: $(1+\varepsilon) = (n)^{\frac{1}{n-1}}$ si ha: $\ln(1+\varepsilon) = \frac{\ln(n)}{n-1} \to \varepsilon$

Al crescere di n, $\frac{\ln(n)}{n-1}$ si avvicina sempre più a quell'ε che verifica l'uguaglianza. $e^{\varepsilon} = (1+\varepsilon)$

$\varepsilon \ln(e) = \ln(1+\varepsilon) = \varepsilon$; $e = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ posto: $\varepsilon = \frac{1}{n}$ l'uguaglianza è vera al $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$; per $n = 100.000$

$\varepsilon = 0,000115137$ $\frac{\ln 100000}{99999} = 0,000115130$ differenza: $0,000000007$

per $\underline{\varepsilon = 0}$ serie geom. $= 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 + \ldots = \infty$

serie arm. $= 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} \ldots + 0 = \infty$

per $\varepsilon = \frac{1}{\infty}$ serie geom. $= 1 + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)} + \ldots + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty-1}} + \frac{1}{e} = \left(1+\frac{1}{1/\infty}\right)$

quindi la serie geometrica sarebbe maggiorante la serie armonica. Mentre per $\varepsilon = 0$ la serie geometrica è costante, per ε differenziale, limite tendente a zero la serie geometrica è decrescente, ha per ultimo termine $\frac{1}{e}$ ed è divergente.

Se prendiamo un ε maggiore (K volte tanto) $\varepsilon = \frac{K}{\infty}$

l'ultimo termine della serie impiccolirebbe ad $\frac{1}{e^k}$
Solo per $k \to \infty$ si avrebbe nullo l'ultimo termine (cioè uguale a quello della serie armonica), ma anche in questo caso la serie geometrica è maggiorante la serie armonica e perciò divergente.
Esiste un ε tale che dia il più grande dei numeri finiti che, essendo infinito, dà il termine di passaggio fra la convergenza e la divergenza della serie, ed è una grandezza differenziale.

Le ridotte ed il resto delle serie

Prima di procedere diamo alcune definizioni; Abbiamo definito: "ridotta di ordine n" la somma parziale dei primi n termini della serie e l'abbiamo indicata con S_n.

Definiamo "Resto di una serie" la somma parziale dei restanti termini da $(n+1)$ ad ∞. Indichiamo con R_n il resto della serie. $S_\infty = S_n + R_n$

$$R_n = S_\infty - S_n$$

ed anche:

$$S_n = S_\infty - R_n$$

Se la serie è divergente: $R_n = \infty$.

Il resto della serie è molto importante perché se un numero trascendente è definito da una serie, limitandoci a considerare i primi n termini cioè la ridotta S_n, il valore del Resto R_n ci dà l'errore che si commette.

ciò che si commette.

Per la serie geometrica: $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$

possiamo scrivere:

$$S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$$

cioè:

$$S_n = S_\infty - \frac{q^n}{1-q}$$

$$\boxed{R_n = \frac{q^n}{1-q}}$$

Criterio Generale di Convergenza delle serie

Consideriamo la somma parziale di p termini dopo la ridotta S_n, cioè: $S_{n+p} - S_n < \sigma$

L'espressione è la sintesi del teorema di Cauchy sulla convergenza delle serie.

D'altra parte: $S_\infty - S_n = R_n$

$$S_\infty - S_{n+p} = R_{n+p}$$

sottraendo: $(S_{n+p} - S_n) = (R_n - R_{n+p})$

e posto: $(R_n - R_{n+p}) = R_{n,p}$

cioè: $R_{n,p} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots\dots + a_{n+p}$

rappresenta la somma di p termini dopo l'ennesimo.

Possiamo ora enunciare il teorema: (Cauchy)

" Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie: $a_1 + a_2 + \dots + a_n +$, sia convergente è che, scelto un numero σ positivo arbitrario, si possa determinare un n_0 tale che per ogni

$n > n_0$, la somma di un numero qualunque di p termini consecutivi dopo l'ennesimo, (cioè $R_{n,p}$), sia in valore assoluto minore di σ"

$$|R_{n,p}| < \sigma$$

Per qualsiasi $n > n_0$ e per qualsiasi intero $p > 0$.

Serie assolutamente convergenti

Dicesi assolutamente convergente una serie che converge per i valori assoluti dei suoi termini.

Una serie assolutamente convergente è anche convergente. Non è detto però che una serie convergente lo sia anche assolutamente

Una serie convergente a termini tutti positivi è assolutamente convergente $\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \right)$

Identità di Brunacci-Abel

Consideriamo: una serie convergente:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ed una successione monotona e limitata, cioè convergente al limite L.

$$\boxed{\dot{\alpha}_1 \ , \ \dot{\alpha}_2 \ , \ \dot{\alpha}_3 \ , \ \ldots\ldots , \dot{\alpha}_n , \ldots}$$

ove: $(\dot{\alpha}_\infty = L)$

Eseguendo i prodotti termine a termine fra termini con lo stesso indice, si ottiene la serie:

$$\boxed{\dot{\alpha}_1 a_1 + \dot{\alpha}_2 a_2 + \dot{\alpha}_3 a_3 + \ldots\ldots + \dot{\alpha}_n a_n + \ldots}$$

<u>anch'essa convergente</u>.

Infatti:

Per la serie : $a_1 + a_2 + \dots + a_{K-1} + a_K + \dots + a_n + \dots$

si ha : $$R_{K-1} - R_K = a_K$$

Per la serie:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \dots + \alpha_{n+p} a_{n+p} + \dots$$

detto : $R'_{n,p} = \alpha_{n+1} a_{n+1} + \alpha_{n+2} a_{n+2} + \dots \alpha_{n+p} a_{n+p}$

cioè : $$R'_{n,p} = \sum_{K=n+1}^{K=n+p} \alpha_K a_K =$$

sostituendo a_K :

$$= R'_{n,p} = \sum_{K=n+1}^{K=n+p} \alpha_K (R_{K-1} - R_K) =$$

$$R'_{n,p} = \alpha_{n+1} \overbrace{(R_n - R_{n+1})}^{a_{n+1}} + \alpha_{n+2} \overbrace{(R_{n+1} - R_{n+2})}^{a_{n+2}} + \dots + \alpha_{n+p} \overbrace{(R_{n+p-1} - R_{n+p})}^{a_{n+p}} =$$

$$= \underline{\alpha_{n+1} R_n} + R_{n+1}(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}) + R_{n+2}(\alpha_{n+3} - \alpha_{n+2}) + \dots + R_{n+p}(\alpha_{n+p+1} - \alpha_{n+p}) - \underline{\alpha_{n+p+1} R_{n+p}} =$$

cioè :

$$R'_{n,p} = \sum_{K=n+1}^{K=n+p} R_K (\alpha_{K+1} - \alpha_K) + \alpha_{n+1} R_n - \alpha_{n+p+1} R_{n+p}$$

È questa <u>l'identità di Brunacci-Abel</u>

Ricordiamo che ogni : $|a_n| < L$, vogliamo

applicare il teorema di Cauchy $|R'_{n,p}| < \sigma$

A tal fine consideriamo non decrescente la successione α_n, cioè: $\alpha_{k+1} - \alpha_k \geq 0$ e ricerchiamo un indice n_0 tale che per ogni $n > n_0$ si abbia:

$$|R_n| < \frac{\sigma}{4L}$$

(Vedremo nella dimostrazione perché abbiamo diviso σ per $4L$.)

$$|R'_{n,p}| \leq \sum_{K=n+1}^{K=n+p} |R_K| \cdot |\alpha_{K+1} - \alpha_K| + |\alpha_{n+1}| \cdot |R_n| + |\alpha_{n+p+1}| \cdot |R_{n+p}|$$

Nell'identità di Brunacci-Abel abbiamo aggiunto anziché tolto l'ultimo termine ciò giustifica la disuguaglianza.

Tenendo presente che $|R_n|$ diminuisce al crescere di n e che $\frac{\sigma}{4L} > |R_n|$, a maggior ragione:

$$|R'_{n,p}| \leq \frac{\sigma}{4L} \sum_{K=n+1}^{K=n+p} (\alpha_{K+1} - \alpha_K) + |\alpha_{n+1}| \frac{\sigma}{4L} + |\alpha_{n+p+1}| \cdot \frac{\sigma}{4L}$$

Poiché la somma delle differenze equivale alla differenza complessiva cioè:

$$\sum_{K=n+1}^{K=n+p} (\alpha_{K+1} - \alpha_K) = (\alpha_{n+p+1} - \alpha_{n+1}) \leq |\alpha_{n+p+1}| + |\alpha_{n+1}| < 2L$$

Poiché, al solito, abbiamo aggiunto anziché togliere ... e poiché $\alpha_\infty = L$ è evidente che la somma di due α minori di α_∞, sarà minore di due L. Sostituendo, a maggior ragione avremo:

$$|R'_{n,p}| \leq \frac{\sigma}{4L} 2L + L\frac{\sigma}{4L} + L\frac{\sigma}{4L}$$

$$|R'_{n,p}| \leq 4L\left(\frac{\sigma}{4L}\right)$$

$$\left|R'_{n,p}\right| \leq \sigma$$

Che conferma essere convergente la serie:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots \alpha_n a_n$$

ed essendo: $(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+p+1}) < 2L$ per $n > n_0$ avremo:

$$\left|R'_{n,p}\right| < \sigma$$

Le serie a segni alternati

Una serie a segni alternativamente positivi e negativi, cioè del tipo

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n \ldots$$

Se decrescente, ed $a_n \to 0$ per $n \to \infty$, è convergente, la somma S_n, cioè le ridotte differiscono da S_∞ meno del valore assoluto $|a_{n+1}|$

Cerchiamo di dimostrarlo.

Consideriamo le somme di $2h$ termini e di $2h+1$ termini oltre il termine ennesimo:

$$\begin{cases} R_{n,2h} = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+2h-1} a_{n+2h} \\ R_{n,2h+1} = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+2h-1} a_{n+2h} + (-1)^{n+2h} a_{n+2h+1} \end{cases}$$

moltiplicando le due espressioni per $(-1)^n$ si ha:

$$\begin{cases} (R_{n,2h})(-1)^n = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots - a_{n+2h} \\ (R_{n,2h+1})(-1)^n = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots - a_{n+2h} + a_{n+2h+1}. \end{cases}$$

Se raggruppiamo le differenze di due termini consecu=

Se raggruppiamo le differenze di due termini consecutivi (positive, essendo decrescenti i termini) ed essendo positivo il termine a_{n+2h+1} in più nella seconda espressione, si può dire: $\boxed{(-1)^n (R_{n,p}) > 0}$ qualunque sia l'intero p.

Ma le differenze possono essere scritte:

$$\begin{cases} (-1)^n (R_{n,2h}) = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \dots - (a_{n+2h-2} - a_{n+2h-1}) - a_{n+2h} \\ (-1)^n (R_{n,2h+1}) = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \dots - (a_{n+2h-2} - a_{n+2h-1}) - (a_{n+2h} - a_{n+2h+1}) \end{cases}$$

Si noti che i termini a detrarre sono tutti positivi in entrambe le espressioni, perciò qualunque sia p (cioè per un numero pari o per un numero dispari di termini) avremo:

$$(-1)^n R_{n,p} < a_{n+1}$$

e per quanto sopra detto:

$$0 < (-1)(R_{n,p}) < a_{n+1}$$

ma: $\lim_{n \to \infty} (a_{n+1}) = 0$, per cui $|R_{n,p}| < \sigma$ tende a zero.

<u>cioè la serie è convergente</u>

ma:

$$R_{n,p} = S_{n+p} - S_n$$

se facciamo tendere p all'infinito:

$$0 < (-1)^n (S_\infty - S_n) < a_{n+1}$$

<u>resta dimostrata la seconda parte</u>

Quindi assumere la ridotta S_n al posto di S_∞

Quindi assumere la ridotta S_n al posto di S_∞ significa commettere un errore per difetto minore di a_{n+1}.

Diamo alcune applicazioni

La serie di Mengoli

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

È una serie convergente ed $S_\infty = 1$

Infatti:

$$\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Perciò la serie può essere scritta:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

ove si elidono tutti i termini salvo (1) e $\left(-\frac{1}{n+1}\right)$

ma: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n+1}\right)=0$ perciò la somma è 1

Si noti che la serie di Mengoli è la serie armonica moltiplicata per $\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Per la serie:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

operando come per la serie di Mengoli si ha:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

perciò può essere scritta:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right.$$

e la serie converge $S_\infty=\frac{1}{2}$

Anche la serie:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\,(n+2)}$$

può scomporsi:

$$\frac{1}{n\cdot(n+2)}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\frac{1}{2}$$

se poniamo: $n=(m-1)$

$$\frac{1}{n\,(n+2)}=\frac{1}{(m-1)(m+1)}=\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}\right)\frac{1}{2}$$

possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\cdots\right.$$

ove non si annullano i valori $\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}\right\}$ perciò

$$S_\infty=\frac{3}{4}$$

Questa serie può essere considerata la semidifferenza fra una serie armonica

semidifferenza fra una serie armonica completa a termini positivi ed una serie armonica a termini negativi mancante dei due primi termini:

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\dots+\frac{1}{n} \\ \qquad\quad -\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\dots\dots-\frac{1}{n+2} \end{array}\right\}=\frac{3}{4}$$

Consideriamo la serie:

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^{n-1}}$$

E' una serie geometrica di ragione $\frac{1}{x}$, convergente ad $S_\infty = \frac{x}{x-1}$.

esempi:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{2}{2-1} = 2$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{3}{3-2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Il valore della serie diminuisce al crescere della x e per $x \to \infty$, tutti i termini della serie diventano nulli, salvo il primo $= 1$. perciò per $x \to \infty$, la serie è convergente $S_\infty = 1$, ma anche $S_n = 1$ ed $R_n = 0$.

Questa stessa serie può essere a segni alternati:

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \cdots + \left(\frac{-1}{x}\right)^{n-1} \cdots$$

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \cdots + \left(\frac{-1}{x}\right)^{n-1} \cdots$$

abbiamo visto che anche con ragione negativa $\left(\frac{-1}{x}\right)$ la serie geometrica a segni alterni è convergente (Il segno (−) della ragione porta il segno (+) al denominatore di S_n)

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\right) = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}.$$

Consideriamo la serie armonica a segni alternati:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$$

Sono soddisfatte le condizioni espresse al paragrafo: "serie a segni alternati", perciò questa serie è convergente e le sue ridotte differiscono da S_∞ meno di $|a_{n+1}|$.

$$S_\infty = \ln|2|$$

$$S_{2n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} = \cdots$$

notare che per denominatori dispari si ha (+) e per denominatori pari si ha (-). perciò:

$$S_{2n} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

e moltiplicando il 2 in evidenza:

$$S_{2n} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}\right)$$

Se con H_n indichiamo le ridotte della serie armonica si ha:

$$S_{2n} = H_{2n} - H_n$$

Ma noi non sappiamo ancora calcolare le ridot-
te della serie armonica, perciò dobbiamo prima
trattare la serie della costante di Eulero-
-Mascheroni, ciò ne evidenzierà l'importanza.

La serie della costante di Eulero-Mascheroni

$$1 - \ln\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ln\frac{4}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}$$

Serie convergente che ha per somma la costante di Eulero-Mascheroni $= \gamma = S_\infty = 0,5772156649015\underline{3}3\ldots$

Anche questa serie è la differenza fra la serie armonica (divergente) e la serie $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ pure divergente.

Vediamo prima di tutto se rientra nelle condizioni poste per la convergenza delle serie a segni alternati.

1) I termini debbono decrescere in valore assoluto:

I termini della serie armonica sono decrescenti e poiché: $\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}$, la successione dei termini in valore assoluto è decrescente. Infatti sappiamo: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

sappiamo: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

prendendo i logaritmi:

$$(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

considerando separatamente le due disuguaglianze

$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$; $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

resta dimostrata la prima condizione e possiamo scrivere:

$$\boxed{\left(\frac{1}{n}\right) > \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > \left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

<u>Sequenza decrescente di tre termini generici consecutivi</u>

2) Il termine generale della serie si annulli per $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left|\frac{n+1}{n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\ln(1)=0$$

perciò la serie è convergente.

Indichiamo con γ la costante di Eulero-Mascheroni a cui converge la serie:

$$S_\infty=\gamma=1-\ln\frac{2}{1}+\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}+R_n$$

Ma per il teorema sulle serie a segni alternati deve essere: $R_n < \frac{1}{n+1}$, cioè, detto θ un numero minore di uno possiamo dire: $R_n=\theta_{2n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$

(l'indice $(2n+1)$ di θ è perché $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ è il $(2n+1)^{esimo}$ termine).

Raggruppiamo al solito i valori positivi e quelli negativi ed avremo:

$$\gamma=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n}\right)-\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\dots\cdot\frac{n+1}{n}\right)+\frac{\theta_{2n+1}}{n+1}$$

detta: $H_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n}\right)$

$$\gamma=H_n-\ln(n+1)+\frac{\theta_{2n+1}}{n+1}$$

aggiungendo e togliendo $\ln(n)$ e risolvendo rispetto

aggiungendo e togliendo $\ln(n)$ e risolvendo rispetto ad H_n si ha:

$$H_n = \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n) + \gamma - \frac{\theta_{n+1}}{n+1}$$

poniamo:

$$\rho_n = \ln\left(\frac{(n+1)}{(n)}\right) - \frac{\theta_{n+1}}{n+1}$$

avremo:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \rho_n$$

ove:

$$0 < \rho_n < \frac{1}{n}$$

Mediante il teorema sulle serie a segni alternati è stato possibile stabilire che esiste un valore finito γ (costante) a cui converge la serie: $(S_\infty = \gamma)$; ed è stato possibile affermare che $(S_\infty - S_n) = R_n < \frac{1}{n+1}$, quindi al posto degli infiniti termini: $\frac{1}{n+1} - \ln\left|\frac{n+2}{n+1}\right| + \frac{1}{n+2} - \ln\left|\frac{n+3}{n+2}\right| + \cdots$ abbiamo posto $R_n = \frac{\theta_{2n+1}}{n+1}$; per $n \to \infty$ si ha:

per $n \to \infty$; $\frac{\theta_{2n+1}}{n+1} \to 0$; ed anche $\ln\left|1+\frac{1}{n}\right| \to 0$;

per cui:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(H_n - \ln|n|\right)$$

Questa costante fu scoperta da Eulero (nel 1769); fu calcolata da Mascheroni (nel 1790) con 32 cifre decimali, però giuste solo le prime 19; Successivamente Gauss pubblicò il valore con 25 cifre esatte.

Il valore con 15 cifre decimali è $\gamma = 0.577\,215\,664\,901\,532$.

(alcuni testi arrotondano a 3 l'ultima cifra)

Questa costante è anche il valore di alcuni integrali de-

Questa costante è anche il valore di alcuni integrali definiti $-\int_0^{\infty} e^{-x} \ln|x|\, dx = \gamma$; $\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-x}dx = \gamma$;

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)dx = \gamma . ; \qquad ecc.$$

Tenuto conto che ρ_n diminuisce al crescere di n, la formula :

$$\boxed{H_n = \ln|n| + \gamma + \rho_n}$$

si presta bene al calcolo delle ridotte della serie armonica.

Torniamo alla serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

eravamo rimasti a:

$$S_{2n} = H_{2n} - H_n$$

Sostituendo le formule ora trovate:

$$S_{2n} = \left[\left(\ln|2n| + \gamma + \rho_{2n}\right) - \left(\ln|n| + \gamma + \rho_n\right)\right]$$

$$S_{2n} = \left[\ln|2n| - \ln|n| + \left(\rho_{2n} - \rho_n\right)\right]$$

ma: $\lim_{n \to \infty} \left(\rho_{2n} - \rho_n\right) = 0$ e: $\left(\ln|2n| - \ln|n|\right) = \left(\ln 2 + \ln|n| - \ln|n|\right)$

per cui:

$$S_\infty = \ln|2| = 0,693147181.$$

Dimostriamo ora, per la serie armonica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad ; \quad \lim_{k \to \infty}\left(H_{10^{k+1}} - H_{10^k}\right) = L = \ln 10$$

sostituendo le formule ora trovate:

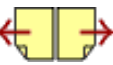
$$L = \left[\ln|10^{k+1}| + \gamma + \rho_{10^{k+1}}\right] - \left[\ln|10^k| + \gamma + \rho_{10^k}\right]$$

poiché: $\lim_{k \to \infty} \left(\int_{10^{k+1}} - \int_{10^k} \right) = 0$ e: $\ln|10^{k+1}| - \ln|10| =$

$= \left(\ln|10| + \ln|10^k| - \ln|10^k| \right) = \ln|10|$

$$\lim_{k \to \infty} \boxed{H_{10^{k+1}} - H_{10^k} = \ln|10|} = 2{,}302585093$$

Si può generalizzare:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(H_{kn} - H_n \right) = \ln|k|}$$

La generalizzazione è abbastanza importante perché, la forma indeterminata $\infty - \infty$, qualora le espressioni che al limite la determinano, possano esprimersi come: $(H_{kn} - H_n)$, (ove H, al solito, indica la ridotta della serie armonica), l'indeterminazione è immediatamene risolta: $(\ln(k))$.

La serie a termini positivi:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2}$$

formata dai quadrati dei termini della serie armonica, confrontata con la serie di Mengoli: $1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots\cdots + \frac{1}{(n-1)n}$ risulta minorante in tutti i termini salvo il primo,

per cui è convergente.

È possibile dimostrare che la somma:

$$S_\infty = \frac{\pi^2}{6}$$

mentre:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{12}$$

Serie di potenze dei numeri naturali

A termini positivi queste serie sono divergenti, e' però possibile calcolare le ridotte con una formula. Le serie sono del tipo:

$$1^{\mu}+2^{\mu}+3^{\mu}+\dots\dots n^{\mu}$$

Per trovare le formule delle ridotte ci si avvale dello sviluppo: $(n+1)^{\mu+1}=n^{\mu+1}+\binom{\mu+1}{1}n^{\mu}+\binom{\mu+1}{2}n^{\mu-1}+\dots\dots$ e delle formule precedenti: sostituendo $(n-1),(n-2)\dots\dots$

Esponente $\mu=1$

$$1+2+3+\dots\dots+n$$

$$(n+1)^2=n^2+2n+1$$

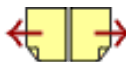
$$((n-1)+1)^2=n^2=(n-1)^2+2(n-1)+1$$

$$((n-2)+1)^2=(n-1)^2=(n-2)^2+2(n-2)+1$$

- -

$$(n-(n-1)+1)^2=2^2=1^2+2\cdot 1+1$$

sommando si elidono i termini del I e II membro

$$(n+1)^2=1+2S_{n'}+n$$

$$2S_{n'}=(n+1)^2-1-n$$

$$2S_{n'} = (n+1)^2 - 1 - n$$

$$S_{n'} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1 - n}{2}$$

$$\boxed{S_{n'} = n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Risultato che, per altra via, avevamo trovato per le progressioni aritmetiche (cfr I vol)

Esponente $\mu = 2$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$((n-1)+1)^3 = n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

$$((n-2)+1)^3 = (n-1)^3 = (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1$$

$$- -$$

$$(n-(n-1)+1)^3 = 2^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$$

Sommando ed elidendo:

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3S_{n^2} + 3S_{n} + n$$

$$S_{n^2} = \frac{(n+1)^3 - 1 - 3S_{n^1} - n}{3}$$

$$S_{n^2} = \frac{(n+1)(n+1)^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)}{3}$$

$$S_{n^2} = \frac{(n+1)(n^2 + 2n + 1 - \frac{3}{2}n - 1)}{3}$$

$$S_{n^2} = \frac{1}{3}(n+1)(n)\left(\frac{2n+1}{2}\right)$$

$$S_{n^2} = \frac{1}{3}(n+1)(n)\left(\frac{2n+1}{2}\right)$$

$$\boxed{S_{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots\cdots + n^2}$$

per esempio per $n = 10$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 5 \cdot 11 \cdot 7 = 385$$

1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385 = somma progressiva.

Criteri di convergenza

Questi criteri si applicano a serie a termini positivi.
Abbiamo già visto il criterio del confronto
(Serie maggiorante una serie divergente è divergente
Serie minorante una serie convergente è convergente)
Abbiamo visto il criterio generale di convergenza
(teorema di Cauchy) vediamo altri criteri:

Criterio del rapporto:

se: $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1$ → la serie è convergente (criterio di D'Alembert)

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) > 1$ → " " è divergente

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = 1$ → non possiamo dire niente

---

Criterio della radice

se: $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{a_n} \right) < 1$ → la serie è convergente

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{a_n} \right) > 1$$ → " " é <u>divergente</u>

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{a_n} \right) = 1$$ → <u>non possiamo dire niente</u>

ed avremo:

1 ———————— $(n+1)^0 = 1$

1 1 ———————— $(n+1)^1 = S_{n^0} = n$

1 2 1 ———————— $(n+1)^2 = 1 + 2S_{n^1} + S_{n^0} =$

1 3 3 1 ———————— $(n+1)^3 = 1 + 3S_{n^2} + 3S_{n^1} + S_{n^0}$

1 4 6 4 1 ———————— $(n+1)^4 = 1 + 4S_{n^3} + 6S_{n^2} + 4S_{n^1} + S_{n^0}$

1 5 10 10 5 1 ———————— $(n+1)^5 = \ldots$

1 6 15 20 15 6 1 ———————— $(n+1)^6 = \ldots$

1 7 21 35 35 21 7 1 ———————— $(n+1)^7 = \ldots$

1 8 28 56 70 56 28 8 1 ———————— $(n+1)^8 = \ldots$

1 9 36 84 126 84 36 9 1 $(n+1)^9 = \ldots$

Quindi: $S_{n^0} = n$.

$$S_{n^1} = \frac{(n+1)^2 - n - 1}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} = 1+2+3+\ldots n$$

$$S_{n^2} = \frac{(n+1)^3 - 3S_{n^1} - S_{n^0} - 1}{3} = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = 1^2+2^2+3^2+\ldots n^2$$

$$S_{n^3} = \frac{(n+1)^4 - 6S_{n^2} - 4S_{n^1} - S_{n^0} - 1}{4} = \boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} = 1^3+2^3+3^3+\ldots n^3$$

$$\sim S_{n^4} = \frac{(n+1)^5 - 10 S_{n^3} - 10 S_{n^2} - 5 S_{n^1} - 1}{5} = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{5}} = 1^4+2^4+ \dots n^4$$

la formula generalizzata:

$$\boxed{\sim S_{n^\mu} = \frac{(n+1)^{\mu+1} - \binom{\mu+1}{2} S_{n^{\mu-1}} - \binom{\mu+1}{3} S_{n^{\mu-2}} - \dots - n - 1}{(\mu+1)}} = \sum_{k=1}^{k=n} k^\mu = 1^\mu + 2^\mu + \dots n^\mu$$

Criterio di Kummer

Sia: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ una serie a termini >0 cioè positivi e sia: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ una successione pure a termini positivi

Se da un certo indice in poi si ha:

$$\alpha_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha_{n+1} > K$$

(ove K è una costante positiva)

La serie è convergente

Se invece da un certo indice in poi si ha:

$$\alpha_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha_{n+1} \leq 0$$

e la serie:

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots \frac{1}{\alpha_n}$$

è divergente,

allora la serie in esame è divergente

criterio di Raabe

(è un caso particolare del criterio di Kummer)

se $\alpha_n = n$; $\alpha_{n+1} = (n+1)$ si ha:

$n\left(\frac{a_n}{\dots}\right) - (n+1) > K$ che può scriversi

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) - (n+1) > K$$ che può scriversi

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > (K+1)$$

$$\lim_{n \to \infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right] > K_t$$ se il limite esiste

ove K_t è una costante maggiore di 1, allora

<u>La serie è convergente</u>

La $\zeta_{(s)}$ di Riemann

Consideriamo la serie:

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^s}$$

costituita dalla serie armonica, i cui termini sono stati elevati alla essesima potenza.

Per $s=1$ si ha la serie armonica (divergente)

" $s<1$ maggiorante la serie armonica (divergente)

" $s>1$ la serie è convergente

Per dimostrarlo usiamo il criterio di Raabe

cioè: $\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right]>1$ sostituendo: $\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{(n+1)^s}{n^s}-1\right)\right]=$

$=\lim_{n\to\infty}\left[n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1\right]\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+1/n)^s-1}{1/n}\right]$. Nel I Volume abbiamo dimostrato (formula n°10) che $\lim_{a\to 0}\left(\frac{(1+a)^\mu-1}{a}\right)=\mu$,

perciò: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+1/n)^s-1}{1/n}\right]=s$ e per $s>1$ la serie è quindi convergente.

Abbiamo già indicato il caso particolare

Abbiamo già indicato il caso particolare di $s=2$ ove la somma è $\pi^2/6$, in generale per $s>1$ (qualsiasi) la somma è detta la $\zeta_{(1)}$ di Riemann.

Per $s=(1+\varepsilon)$ con $\varepsilon \to 0$ possiamo fare una discussione analoga a quella che abbiamo fatto nel confronto fra la serie geometrica e la serie armonica.

Prodotti infiniti

Consideriamo la serie: $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, e poniamo: $b_1 = e^{a_1}$; $b_2 = e^{a_2}$; .... $b_n = e^{a_n}$; se facciamo i prodotti: $(b_1)(b_2)(b_3)\cdots(b_n) = e^{a_1 + a_2 + \dots a_n}$ ed indichiamo con $\overline{\Pi}$ il simbolo del prodotto, Noi abbiamo sopralineato Π per distinguerlo da $\pi = 3,14159\dots$ Altri diversificano facendo le gambe più lunghe Π; noi riteniamo che sia meno equivocabile la sopralineatura. $\overline{\prod_{n=1}^{n=\infty}}(b_n)$, è quindi il prodotto di infiniti termini che sarà convergente o divergente se $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n$, è convergente o divergente. Se: $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n = L$, allora $\overline{\prod_{n=1}^{n=\infty}}(b_n) = B$ ove <u>"L" è il logaritmo di B</u> ed è detto: <u>Logaritmo di un prodotto infinito</u>.

Ordinariamente è definito: <u>prodotto infinito</u> la sequenza dei prodotti $(P_1 = (1+u_1))$; $P_2 = (1+u_1)(1+u_2)$; ....

$P_n = (1+u_1)(1+u_2) \cdots (1+u_n)$; (che sono l'analogo delle ridotte delle serie) con $n \to \infty$.

$$P_\infty = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1+u_n) = (1+u_1)(1+u_2)(1+u_3) \cdots \cdots (1+u_n)$$

ove: $(1+u_1)$; $(1+u_2)$; ... $(1+u_n)$ sono i fattori del prodotto infinito.

È bene precisare che il prodotto infinito è convergente quando è convergente in senso stretto. ed è divergente sia che $P_\infty = \pm\infty$, sia che $P_\infty = 0$.
Il prodotto infinito può essere zero sia che lo sia uno qualsiasi dei suoi termini, sia che lo diventi al limite infinito.

Criterio generale di convergenza

Condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto infinito: $P_\infty = \prod_{n=1}^{n=\infty}(1+u_n) = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$, nel quale nessun fattore sia nullo, sia convergente è che scelto un numero σ positivo arbitrario, si possa determinare un indice n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ e qualunque sia p, si abbia:

$$\boxed{|P_{n,p} - 1| < \sigma}$$

ove:

$$P_{n,p} = (1+u_n)(1+u_{n+1})\cdots(1+u_{n+p})$$

Si noti che ciò si verifica quando la $\{u_n\} > 0$ è convergente, ove $\lim_{n\to+\infty}\{u_n\} = 0$ per cui $(1+u_n) \Rightarrow 1$

convergenza, ove $\lim_{n \to \infty} \{u_n\} = 0$ per cui $(1 + u_n) \to 1$ e da un certo indice in poi i fattori sono pressoché unitari e quindi il prodotto di "p" termini è minore di un σ arbitrariamente piccolo.

Le serie doppie

Una serie si dice doppia quando i suoi termini sono ordinati secondo due successioni, e quindi sono affetti da due indici: $\{a_{r,s}\}$.

Evidente che le serie doppie richiamano un campo bidimensionale, analogo a quello delle matrici piane. (abbiamo aggiunto la parola "piane" alle matrici, per evidenziare che sia le matrici, sia le serie posso= no indicizzarsi in campi tridimensionali ... ennedimensionali)

Le serie doppie si presentano quindi nella forma:

$$
\begin{aligned}
& a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots\ldots a_{1n} + \cdots \\
+ \; & a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots\ldots a_{2n} + \cdots \\
+ \; & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{rs} + \ldots + \ldots \\
+ \; & a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \ldots\ldots a_{mn} + \cdots \\
+ \; & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Sinteticamente una serie doppia si simboleg=

Sinteticamente una serie doppia si simbolizza:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} a_{r,s} = \boxed{\sum_{r,s}^{1 \dots \infty} a_{r,s}} = S_\infty$$

Le ridotte, o somme parziali si indicano:

$$\boxed{S_{m,n} = \sum_{r}^{1 \dots m} \sum_{s}^{1 \dots n} a_{r,s}}$$

per la convergenza: $\boxed{|S - S_{m,n}| < \sigma}$

Proprietà delle serie

Premesso che dicesi proprietà associativa, in una sequenza di operazioni aritmetiche della stessa specie, il fatto di poter "associare" gruppi di operazioni senza che cambi il risultato. (Godono di questa proprietà la somma e la moltiplicazione) per es.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r + a_{r+1} + \dots + a_{n-1} + a_n = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots + (a_{n-1} + a_n)$$

$$(b_1)(b_2)(b_3) \cdot \dots \cdot (b_n) = [(b_1)(b_2)] \cdot [(b_3)(b_4)(b_5)] \cdot \dots \cdot [(b_{n-1})(b_n)]$$

I gruppi di associati sono del tutto arbitrari, i

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_5) + \dots + (a_3 + a_{n-1})$$

basta che i termini (addendi o fattori) siano tutti e solo quelli di partenza non ripetuti.

Dicesi proprietà distributiva della moltiplicazione e divisione, rispetto alla somma e sottrazione; o della potenza e radice, rispetto alla moltiplicazione e divisione; il fatto che il fattore moltiplicativo, o il divisore di una somma o sottrazione o mista, possa

... di una somma o sottrazione è mista, posso

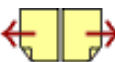
moltiplicare la somma (o sottrazione) nel suo insieme

o distribuisca il prodotto sui singoli addendi

$$a(b+c-d) = ab+ac-ad$$

$$(b+c-d):a = b/a + c/a - d/a$$

$$(a \cdot b)^{m/n} = (a^{m/n})(b)^{m/n}$$

$$(a:b)^{m/n} = (a^{m/n}) / (b)^{m/n}$$

Dicesi proprietà commutativa della somma e della moltiplicazione, il fatto di poter scambiare gli addendi, o i fattori senza che cambi il risultato. (Il cambio di posto è arbitrario)

$$a + b + c + d = b + d + a + c$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = b \cdot d \cdot a \cdot c$$

Se ad una serie aggiungiamo o togliamo un numero finito di termini il carattere della serie non cambia; se convergente cambia il risultato di S_∞.

Le serie regolari (cioè non oscillanti) godono della proprietà associativa.

Le serie regolari non godono della proprietà dissociativa infatti la serie: $(1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1)$ converge a zero

la $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1}$ è oscillante indeterminata

---

Se una serie convergente gode della proprietà commutativa, cioè non muti valore qualunque sia la legge che regola la sequenza dei suoi termini, allora è detta incondizionatamente convergente

---

Una serie a termini positivi (o negativi) converge o diverge sempre incondizionatamente. (godono della proprietà commutativa)

Se una serie contiene infiniti termini positivi ed infiniti termini negativi, può scindersi in due serie: una a termini tutti positivi, l'altra a termini tutti negativi. (siano $\{p\} > 0$; $\{q\} < 0$;)

Se queste due serie sono convergenti (si è visto che lo sono anche incondizionatamente) anche la serie data (somma di queste due) è convergente ed incondizionatamente, (gode cioè la proprietà commutativa e associativa)

Se una di queste due serie è divergente lo è anche la serie data ed è incondizionatamente divergente (gode cioè delle proprietà commutativa e associativa)

Se entrambe le serie sono divergenti (una

Se entrambe le serie sono divergenti (una a $+\infty$, l'altra a $-\infty$; si può cambiare l'ordine dei termini in modo che la serie data diverga a $+\infty$ oppure a $-\infty$, e se: $\lim_{n\to\infty}(p_n) = 0$; $\lim_{n\to\infty}(q_n = 0)$

Nella serie data si può cambiare l'ordine dei termini in modo che converga ad un valore prefissato.

$(\infty - \infty) = K$ (Teorema di Riemann-Dini)

Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie sia incondizionatamente convergente è che sia assolutamente convergente

(Teorema di Dirichlet)

Facciamo un esempio:

la serie: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

abbiamo già visto che converge a $\ln(2)$, mentre la serie composta dai valori assoluti dei suoi termini è la serie armonica notoriamente divergente cioè la serie proposta non è assolutamente convergente e quindi è:

Condizionatamente convergente

Notiamo che le due serie:

$$\left\{ \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \right.$$

$$\left\{ (-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\right) \right.$$

sono minoranti la serie armonica;, per il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = 1$$

non possiamo dire nulla, eppure <u>le due serie sono entrambe divergenti</u>, essendo divergente la somma dei loro valori assoluti. se una sola fosse divergente non sarebbe convergente la serie a segni alternati. — (Vale il teorema di Riemann-Dini)

Operazioni aritmetiche fra serie

Somma e differenza.

Date due serie: $A = \sum_{1}^{\infty} (a_n)$ e $B = \sum_{1}^{\infty} (b_n)$; se sono entrambi convergenti, la serie somma $\sum_{1}^{\infty} (a_n + b_n)$ è pure convergente ad $(A + B)$, analogamente è convergente la serie differenza $\sum_{1}^{n} (a_n - b_n) = A - B$.

Ciò vale anche per le ridotte $S_n = (A_n + B_n)$; $S_n = (A_n - B_n)$.

Se una sola delle due serie è divergente anche la serie somma (o differenza) è divergente.

Se sono entrambi divergenti (stesso segno), la serie somma è divergente. La serie differenza, è convergente se ricorrono le condizioni esposte per serie a segni alterni applicate alla serie costituita dagli elementi delle due serie alternati con segno opposto.

La serie differenza è composta dalla differenza di due elementi aventi lo stesso indice, quindi non è pensabile un diverso ordine degli elementi, per appli=

pensabile un diverso ordine degli elementi, per appli-
care i teoremi sulla convergenza condizionata.

Prodotto di due serie (secondo Cauchy)

Cauchy definì prodotto di due serie la serie:

$$(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \cdots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} \cdots a_n b_1)$$

Come si vede ogni termine è la somma di tanti prodotti quant'è l'indice del termine, e i prodotti sono formati da due fattori, uno per ciascuna delle due serie, ed aventi indici tali che la somma degli indici dei due fattori superi di uno l'indice della serie prodotto. Per esempio il quarto termine della serie prodotto, avrà quattro addendi prodotto di due termini ove la somma degli indici deve fare $(4+1=5)$; il termine è: $(a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1)$.

Si può dimostrare il teorema.

Se le due serie $\sum_1^\infty a_n$ e $\sum_1^\infty b_n$ sono convergenti ad A e B e convergono assolutamente, anche la serie prodotto converge assolutamente ed ha per somma il

prodotto A·B delle serie date.

Ciò giustifica l'artificiosa determinazione dei termini affinché la serie converga al prodotto dei valori cui convergono le serie date.

Costruendo il prodotto con le serie esponenziali $\sum_1^\infty \frac{x_1^n}{n!} = e^{x_1} = S_{x_1}$ e $\sum_1^\infty \frac{x_2^n}{n!} = e^{x_2} = S_{x_2}$ avremmo: $S_{(x_1+x_2)} = S_{(x_1)} \cdot S_{(x_2)}$.

Serie a termini complessi

Abbiamo già accennato alle successioni a termini complessi, per le serie a termini complessi valgono le stesse definizioni date per le serie a termini reali. Poiché la somma di due o più numeri complessi è un numero complesso che ha per parte reale la somma delle parti reali, e per parte immaginaria la somma delle parti immaginarie, si ha:

La serie:

$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \dots\dots + (a_n + ib_n) + \dots$ è convergente

se lo sono le serie:

$(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots)$ e: $(b_1 + b_2 + \dots\dots + b_n + \dots)$

Condizione necessaria e sufficiente perché una serie a termini complessi sia convergente, è che siano convergenti le due serie formate una dalle parti reali, e l'altra dai coefficienti delle parti immaginarie.

immaginarie.

Se la serie dei moduli di una serie a termini complessi è convergente, lo è anche la serie data. (ma in generale non inversamente)

$\sqrt{a_1^2+b_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2} + \sqrt{a_3^2+b_3^2} + \dots + \sqrt{a_n^2+b_n^2} + \dots$ se converge

convergono anche le due serie minoranti: $(|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|)$; $(|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|)$

e quindi converge la serie data: $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \dots + (a_n + ib_n) + \dots$

Se diciamo assolutamente convergente, una serie a termini complessi, quando converge la serie dei suoi moduli, resta valido anche per le serie a termini complessi, il teorema già visto per le serie a termini reali:

Se una serie è assolutamente convergente, essa è anche convergente. (In generale non inversamente)

Una serie a termini complessi si dice: incondizionatamente convergente, quando alterando, con legge qualsiasi, l'ordine dei suoi termini, essa resta convergente allo stesso valore. (Vale il teorema di Dirichlet).

Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie sia incondizionatamente convergente, è che essa sia assolutamente convergente.

Ad esempio: indicando genericamente con

z un numero reale o complesso $z = (a + ib)$ ove b può essere nullo, la serie esponenziale $\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ è incondizionatamente convergente essendo lo la serie dei suoi moduli; per la serie esponenziale a termini reali abbiamo già visto che $\sum \frac{x^n}{n!}$ è assolutamente e incondizionatamente convergente.

Continuitá e discontinuitá di funzioni

Abbiamo giá accennato al capitolo: funzioni e successioni al concetto di continuitá; vogliamo ora precisare meglio. Nel I vol. al capitolo "limiti a destra, limiti a sinistra" abbiamo evidenziato la discontinuitá di $e^{\frac{1}{x}}$ nel punto $x=0$.

Ancora nel primo volume abbiamo considerato punti di discontinuitá nell'intervallo a,b per calcolare integrali impropri.

Cerchiamo prima di tutto di definire una funzione continua nell'insieme I di punti P.

La funzione sia: $u=f(P)$; sia P_0 un punto limite (o di accumulazione) dell'insieme I. «Dicesi punto limite o di accumulazione, ogni punto, contenuto o no nell'insieme, quando è centro di ogni dominio circolare che contiene una infinitá di punti distinti dell'insieme» (Il raggio r del dominio è piccolo a piacere)

Diciamo che la $u = f(P)$ è continua nel punto P_0 di I, se per ogni σ positivo arbitrario è possibile determinare un corrispondente numero positivo δ tale che per tutti i punti P dell'insieme I appartenenti al dominio circolare di centro P_0 e raggio δ, si abbia:

$$\left| f(P) - f(P_0) \right| < \sigma$$

Queste definizioni riportate da testi di analisi matematica, esprimono che la $f(P_0)$ e la f dei punti adiacenti P_0, differisce, in valore assoluto, di entità indefinitamente piccole e che i punti P sono indefinitamente vicini (accosti) a P_0. Altri testi parlano di uguaglianza del limite destro e limite sinistro di una $f(x)$.

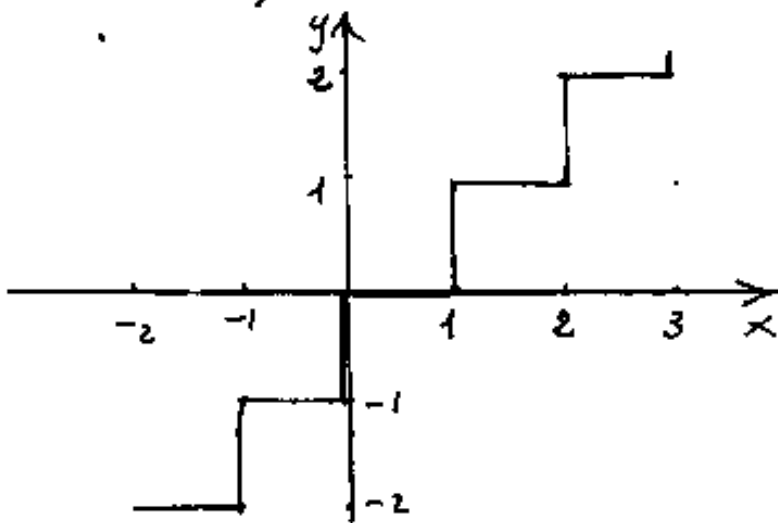
Noi proponiamo il dubbio: "Che differenza passa fra una $f(P)$ che in P_0 presenta un taglio privo di spessore ed una $f(P)$ che in P_0 è veramente continua senza tagli?" Se in P_0 v'è un taglio la $f(P_0)$ non esiste pur esistendo i suoi limiti destro e sinistro. Quindi la dizione di continuità (che noi abbiamo ripreso dal testo del Sansone) è più corretta di quella del limite destro e sinistro. Tal volta nel definire una funzione oltre a dare una espressione algebrica $f(x)$, si precisa che nel punto: $x=0$ oppure nel punto $x=m$, la $f(x)$ vale K. Il limite

destro e sinistro della f(x) (nel punto prefissato) può essere uguale a K possono essere diversi entrambi da K o uno solo di essi e la funzione sarà continua o discontinua, o continua da una sola parte destra o sinistra del punto.

Il punto che separa due insiemi si dice <u>di frontiera</u>

Discontinuità

Diremo che una funzione $f(x)$ ha una discontinuità di prima specie nel punto: $x = a$, quando il limite sinistro $\left(\lim_{x \to a-0} (f(x))\right)$ ed il limite destro $\left(\lim_{x \to a+0} (f(x))\right)$, esistono e sono diversi. Si dice: salto della funzione la differenza: $\lim_{x \to a+0} (f(x)) - \lim_{x \to a-0} (f(x))$.

Per esempio: $f(x) = \text{int}(x)$ (cioè massimo intero contenuto in x).

Come si vede dalla figura, si ha una discontinuità per ogni intero x

$0 < x < 1 \quad f(x) = 0$

$1 < x < 2 \quad f(x) = 1$

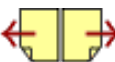
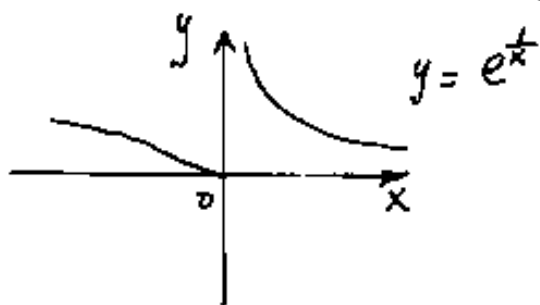
$2 < x < 3 \quad f(x) = 2$

In questo caso il salto della funzione è = uno.

Diremo che una funzione $f(x)$ ha una discontinuità di seconda specie nel punto $x = a$, quando

tinuità di seconda specie nel punto $x = a$, quando non esiste almeno uno dei due limiti: $\lim_{x \to a-0} (f(x))$; $\lim_{x \to a+0} (f(x))$

Per esempio consideriamo la funzione: $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-a}\right)$

Per $x = a$ abbiamo $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{0}\right) = \operatorname{sen}(\infty)$, che sappiamo non esiste perchè assume infinite volte tutti i valori fra +1 e -1. Quindi questa funzione ha in a una discontinuità di seconda specie.

Il limite non esiste anche se la $f(x) \to \infty$. Cioè per esempio: $tang(x)$ presenta discontinuità di seconda specie nei punti: $x = \frac{\pi}{2} + K\pi$.

la $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ha una discontinuità di seconda specie nel punto $x = 0$.

Dicesi discontinuità di terza specie o discontinuità che può togliersi in un punto $x = a$ di una funzione $f(x)$, quando sono uguali i limiti destro e sinistro in a: $\lim_{x \to a+0} (f(x)) = \lim_{x \to a-0} (f(x))$, ma: $f(a)$ è diversa da tali limiti o addirittura non esiste.

Si toglie la discontinuità cambiando o fissando a priori il valore della funzione nel punto $x = a$.

Per esempio: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ presenta un punto di discontinuità apparente per $x=2$.

avremo infatti: $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = 4$, mentre $f(2) = \frac{0}{0}$ forma indeterminata, se applichiamo l'Hospital $f(2) = 4$. (avremmo potuto dividere: $\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = (x+2)$)

definiamo:
$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) & \text{per } x \neq 2 \\ f(x) = 4 & \text{per } x = 2 \end{cases}$$
(ci è una continua)

Postulato della continuità di R. DedeKind

I postulati della geometria furono divisi in cinque gruppi da D. Hilbert individuati da una lettera e precisamente:

A - postulati di appartenenza

B - postulati di ordinamento

C - postulati di congruenza

D - postulati di parallelismo

E - postulati di continuità

Il postulato di DedeKind esprime:

E. "Due gruppi separati (qualunque) di punti di una retta ammettono un elemento di separazione"

K. Weistrass esprime:

E. "Ogni successione ordinata di punti di un segmento, $A_1, A_2, \dots A_n$; possiede un punto limite

questa proposizione è una conseguenza del postulato

questa proposizione è una conseguenza del postulato di Dedekind.

Se si hanno due classi contigue i cui valori sono riportati con segmenti su una retta orientata;

"Esiste uno ed uno solo segmento l, maggiore di tutti i segmenti h' e minore di tutti i segmenti h""

È questo un corollario del postulato di Dedekind.

Ad ogni grandezza numerica puó essere associa=
to un segmento; l'insieme dei numeri razionali con=
tiene gli elementi delle classi contigue, ma non
contiene l'elemento separatore che è un nume=
ro irrazionale o trascendente; quindi l'insieme
dei numeri razionali è discontinuo. Se ri=
portiamo sull'asse dei numeri reali (continuo), i
soli numeri razionali, si verificherebbero quegli
elementi di separazione in generale previsti dal
postulato di DedeKind.

Si noti che in eccesso o in difetto all'elemento se=
paratore di classi contigue, possiamo avvicinarci con
numeri razionali a meno di un ε piccolo a piacere.
Cioè il limite a destra ed il limite a sinistra del
segmento che determina l'elemento separatore. E
nel passaggio al limite i due valori saranno uguali, ed

uguali all'elemento separatore, che però, può non esserci.
È il caso del nostro "taglio" privo di spessore è il caso di una retta che contenga solo numeri razionali.

Il campo dei numeri reali è continuo, il campo dei numeri razionali è discontinuo.

Si possono avere Serie convergenti a qualsiasi numero reale.

Serie a termini variabili

I termini di una serie siano costituiti da funzioni diverse di una stessa variabile (x).

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Per ogni (x) definita (reale o complessa) si ha una serie che può essere convergente o divergente o oscillante.

Supponiamo che esista un insieme di valori di x, cioè: $x_1, x_2, \dots x_m$, per i quali la serie è convergente. Se l'insieme è continuo avremmo un grafico continuo di $S_\infty(x)$.

Diremo che la serie è uniformemente convergente nell'insieme I, se per ogni σ positivo arbitrario è possibile determinare un corrispondente indice n_0 tale che per $n > n_0$, il resto della serie $R_n(x)$ sia in valore assoluto minore di σ, per tutti i valori x dell'insieme I.

Tutti i valori x dell'insieme I.

Sia:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots\cdots + u_n(x) + \cdots$$

una serie uniformemente convergente in I.

e sia:

$$\lambda_1(x_1),\ \lambda_2(x),\ \cdots\cdots\ \lambda_n(x), \ldots$$

Una successione di funzioni complessivamente

limitata in I, cioè qualunque sia l'indice n e qualunque sia il punto x (valore x) dell'insieme I si abbia:

$$|\lambda_n(x)| < L$$

(ove L è un numero positivo).

Allora anche la serie:

$$u_1(x)\cdot\lambda_1(x) + u_2(x)\cdot\lambda_2(x) + \cdots\cdots + u_n(x)\lambda_n(x) + \cdots$$

è uniformemente convergente nell'insieme I.

(Cfr. identità di Brunacci - Abel)

Ad esempio:

La serie: $$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} +$$

converge uniformemente in ogni insieme limitato

Sia C un insieme di valori o punti di un campo complesso, e sia ρ il modulo tale che:

$$|x| \leq \rho \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{\rho^n}{n!}$$

$$\ldots \le \left| \frac{\ldots}{n!} \right| \le \frac{\ldots}{n!}$$

la serie a termini positivi:

$$1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \cdots$$

è convergente qualunque sia ρ

(Cfr. Serie a termini complessi)

Serie di potenze

$$a_0 + a_1 \cdot Z + a_2 Z^2 + \dots\dots + a_n Z^n + \dots$$

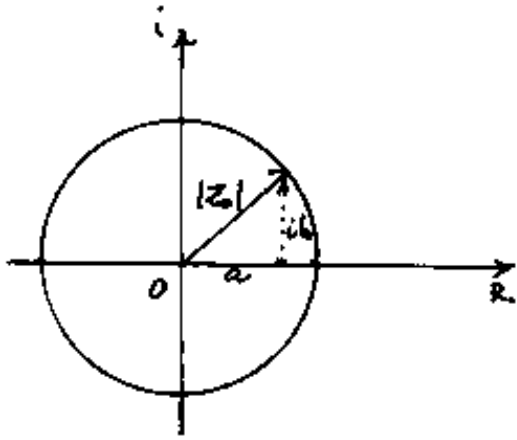
ove: $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ sono costanti reali o complesse assegnate è pure assegnata la legge del loro succedersi. La Z è una variabile reale o complessa.

- Si noti che l'indice dei termini inizia con zero, cioè: $a_n Z^n$ è il termine $(n+1)^{esimo}$.

- Si noti che le ridotte della serie di potenze rappresentano polinomi reali o complessi del grado della ridotta.

- Se la serie converge per il valore $Z_0 \neq 0$, essa converge anche per qualsiasi $Z < |Z_0|$.

- Se consideriamo il piano complesso avente in ascis=

se l'asse reale, ed in ordinate l'asse immaginario

<u>Se la serie converge per $z_0 \neq 0$ converge anche in tutti i punti interni al cerchio con centro nell'origine e raggio uguale a $|z_0|$.</u>

Inversamente: Se la serie non converge per $z_0 \neq 0$, essa non converge per tutti i punti esterni al cerchio nell'origine e raggio $= |z_0|$.

– Per $z_0 = 0$ la serie è certamente convergente al valore a_0, (tutti gli altri termini sono nulli).

– Qualora i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ siano i reciproci dei fattoriali dei numeri naturali, la serie:

$$1 + \frac{Z^1}{1!} + \frac{Z^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{Z^n}{n!} + \cdots \qquad = (e^z)$$

converge per ogni valore Z comunque grande purché finito

Infine vi sono delle serie di potenze che convergono solo per alcuni valori di Z e non convergono per altri. (Ad esempio la serie geometrica, che abbiamo già trattato, ove: $(a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n)$ che converge per $Z < 1$.)

Se $Z = (a + ib)$, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |Z|$ = modulo di Z

si abbia una serie che converge fino ad un modulo massimo che indichiamo R. Abbiamo già visto che <u>la serie è convergente per ogni z di modulo inferiore ad R</u>, <u>e non è convergente per z di modulo superiore ad R</u>. Da ciò nasce il concetto del cerchio di convergenza.

Il cerchio di convergenza.

Se una serie di potenze converge per qualche valore di $z \neq 0$, e non converge per qualsiasi valore di z, esiste un numero positivo $R \neq 0$, (massimo modulo di convergenza), tale la serie data è convergente ed assolutamente convergente, entro qualsiasi cerchio con centro nell'origine e raggio minore di R; non è convergente per valori di z di modulo maggiore di R (cioè esterni al cerchio di raggio R).

Il cerchio di raggio R è detto Cerchio di convergenza della serie data ed R è il raggio di convergenza

- Nulla si può dire per i punti sulla circonferenza di raggio R.

-- Se la serie converge solo per $z=0$; R è nullo.

-- Se la serie converge per ogni valore di z; R è infinito.

-- Se la serie: $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n$ ha raggio $R = \infty$, la funzione

– Se la serie: $\sum_{n=0} u_n z$ ha raggio $r=\infty$, la funzione $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ si chiama: trascendente intera.

Sappiamo infatti che i numeri trascendenti possono essere dati con le serie, ad ogni valore di z corrisponde un valore della serie.

Criteri per determinare il raggio di convergenza.

Il criterio più generale è dato dal teorema di Cauchy-Hadamard.

"Data la serie di potenze:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

ove i coefficienti a_n sono reali o complessi:

Se: $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ la serie converge solo per $z = 0$

Se $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ la serie converge (e assolutamente) in ogni punto z del piano complesso

Se $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R$ la serie ha "R" per raggio di convergenza.

Un'altro criterio sufficiente per la determinazione del raggio di convergenza (Cfr. S. Sansone) può esprimersi: Se nella serie $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \dots$ il modulo $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ per $n \to \infty$, ha un limite determinato e finito, diverso da zero, questo limite è il raggio di convergenza. cioè: $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \neq 0$.

$n \to \infty \left| a_{n+1} \right|$

come si vede entrambi i criteri si basano sul criterio della radice e sul criterio del rapporto per la convergenza delle serie ove però i termini sono costituiti dai coefficienti.

Derivazione della serie di potenze

Abbiamo visto che la serie di potenze può ri-guardarsi come una funzione, in campo reale o complesso, se convergente, rappresenta numeri anche trascendenti; se per ogni valore di z, $f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n$, è convergente in tutto il campo, $f(z)$ è detta trascendente intera. Per es. $\left(f(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \ldots + \frac{1}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!}z^n\right)$

Noi cerchiamo ora la derivata:

$$\frac{d f(z)}{d z} = \frac{d\left(\sum^{\infty} a_n z^n\right)}{dz}$$

che può essere effettuata termine a termine:

$$\frac{d}{dz}\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n\right) = \left(a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + n a_n z^{n-1}\right) =$$

$$\boxed{\frac{d(f(z))}{d(z)} = \frac{d\left(\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n\right)}{d(z)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} n a_n z^{n-1}}$$

(è ancora una serie di potenze)

(Si noti che, nella derivata, l'indice "n" è del termine ennesimo, cioè n comincia con 1 non con zero).

Particolare importante è che la derivata di una serie di potenze, è una serie di potenze che ha lo stesso

serie di potenze, è una serie di potenze che ha lo stesso cerchio di convergenza.

Sia infatti: $|z_0| < |z_1| <$ R = raggio di convergenza, posto $\frac{|z_0|}{|z_1|} = q < 1$ avremo: $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z_0|^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z_1|^{n-1}\left(\frac{|z_0|}{|z_1|}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z_1|^{n-1} q^{n-1}$, ma $\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$ è una serie geometrica convergente per $q < 1$, e questi termini moltiplicati per la serie convergente $|a_n||z_1|^{n-1}$, danno una serie convergente. (Se $z_1 > R$ la serie diverge).

Sviluppo accorciato di Taylor

Abbiamo riguardato la serie di potenze co=me una funzione; ora facciamo il passaggio inverso, cioè, data una funzione, come sia pos=sibile trovare la corrispondente serie di potenze.

Nota una funzione: $f(x)$ finita e continua in un intervallo A,B di ampiezza $h = \Delta x$, (ed in esso derivabile fi=no alle derivate di ordine n), fissato un punto $x_0 = x_A$ la formula del valor medio (v. Vol. I) o degli accresci=menti finiti esprime il valore della funzione per l'ascissa variata da (x) a (x_0+h)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,f'(x_0+\theta h)$$

L'incremento subito dalla funzione è espresso dal prodotto dell'incremento finito $h = \Delta x$ del=la variabile per la derivata della funzione in un punto intermedio fra x_0 ed (x_0+h) da

in un punto intermedio fra x_0 ed (x_0+h) dato da: $x_c = (x_0+\theta h)$ con: $0 \leq \theta \leq 1$. Sappiamo che esiste almeno un punto x_c, cioè almeno un θ che lo definisce. Sarebbe comodo sapere il valore (o i valori) di θ, purtroppo θ non è definito, sappiamo solo che il suo valore (o i suoi valori) sono compresi fra zero ed uno.

Ma se consideriamo che anche <u>l'incremento finito della funzione</u>: $\left[\Delta f_{(x)} = h f'(x_0 + \theta h)\right]$ è una funzione, e come tale derivabile e quindi anche su di essa si può applicare la formula <u>del valor medio</u> (o degli accrescimenti finiti), ove ponendo $\theta = \theta_1$ (come fosse noto) e: "$\theta_1 h$" il nuovo incremento di variabile, si ha:

$$h\left[f'(x_0 + \theta_1 h)\right] = h\left[f'(x_0) + (\theta_1 h) f''(x_0 + \theta(\theta_1 h))\right]$$

Ma il secondo membro è ancora una funzione, ove ponendo: $\theta\theta_1 = \theta_2$, applicando di nuovo la formula avremo una $f'''(\cdots)$ e ripetendo iterativamente abbiamo:

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \theta_1 h^2 f''(x_0) + \theta_2 h^3 f'''(x_0) + \cdots + \theta_{n-1} h^n f^n(x_0 + \theta_{n-1} h)}$$

Ricordiamo la formula di Cauchy generalizzata (v. Vol. I) ove abbiamo posto θ in relazione al grado della derivata; e ricordando che ci siamo proposti di <u>sviluppare in serie di potenze</u>, una generica: $f(x_0+h)$, poniamo: (V. Vol. I) la $f_{(x_0+h)} = \varphi_{(x_0+h)} \dfrac{f^n_{(x_0+\theta_n h)}}{\varphi^n_{(x_0+\theta_n h)}}$,

con : $\varphi(x) = (x-x_0)^n$, $\varphi'(x) = n(x-x_0)^{n-1}$; $\varphi''(x) = n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$ .... $\boxed{\varphi^n_{(x)} = n!}$ (ove φ^n è derivata ennesima), sostituendo abbiamo la formula generalizzata di Lagrange (V. Vol I)

$$\boxed{f(x_0+h) = \frac{h^n}{n!} f^n(x_0+\theta_n h)}$$

nell'ipotesi che la $f(x)$ sia nulla insieme a ~~tutte~~ le sue derivate per $x = x_0$

Ripetendo il discorso delle reiterate sostituzioni notiamo che: $\theta_{n-1} = \frac{1}{n!}$, tenendo conto della formula di Lagrange, perciò abbiamo:

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots\dots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0) + R_c}$$

Formula che è detta: <u>Sviluppo accorciato di Taylor.</u>

(È appena il caso di accennare che: h^n è una potenza, mentre $f^n(x_0)$ è una derivata ennesima). Il termine "R_c" è il <u>resto della serie</u> detto anche <u>termine complementare</u>:

nella forma di Lagrange: $R_c = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$

nella forma di Cauchy: $R_c = \frac{h^{n+1}}{n!} f^{n+1}(x_0+\theta h)$

in generale nella forma di Schlömilch e Roche: $R_c = \frac{h^{(n+1)}(1-\theta)^{n-s+1}}{n!\,s} f^{n+1}(x_0+\theta h)$.

I θ che compaiono nelle tre formule sono diversi fra loro,

e quindi rifletterebbero punti diversi dell'intervallo h, però essendo uguali gli R_c, si trova il compenso nei coefficienti.

Se poniamo: $(x_0 = 0)$; $(h = x)$ si ha la formula di Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + R_n$$

Il termine complementare P_n per un teorema di Peano può assumere la forma: $P_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}_{(x_0+\varepsilon)}$ detta termine complementare di Peano, ove ε è una funzione di h tale che: $\left(\lim_{h \to 0} (\varepsilon) = 0 \right)$.

La formula di MacLaurin è importantissima per lo sviluppo in serie delle funzioni; Se essa è valida, una qualsiasi $f(x)$ che, per ogni x determinato, assuma un valore reale (finito), il suo sviluppo sarà una serie necessariamente convergente a quel valore finito, quindi $\lim_{n \to \infty} (P_n) = 0$.

Alcune applicazioni

1) Serie esponenziale:

$$f(x) = e^x \; ; \quad f^{(n+1)}(x) = e^x \; ; \quad f(0) = 1 \; ; \quad f^{n}(0) = 1$$

sostituendo:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} +$$

con: $(n = 0, 1, 2, \ldots \infty)$

per $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!} + \dots$$

le ridotte sono:

$1,\ 2,\ 2{,}5,\ 2{,}66\bar{6},\ 2{,}7083\bar{3},\ 2{,}7166\bar{6},\ 2{,}71805\bar{5},\ 2{,}71825397, \dots$

come si vede, già alla ridotta di ordine 8, il cui ultimo addendo è: $\frac{1}{7!}$, sono già valide le prime quattro cifre decimali.

2) Serie del seno circolare

$f_{(x)} = \sin(x)$; $f'_{(x)} = \cos(x)$; $f''_{(x)} = -\sin(x)$; $f'''_{(x)} = -\cos(x)$

$f^{IV}_{(x)} = \sin(x)$; le derivate si ripetono ciclicamente, con ordine 4. $f_{(0)} = 0$; $f'_{(0)} = 1$; $f''_{(0)} = 0$; $f'''_{(0)} = -1$; ....

$f^{2n-1}_{(0)} = (-1)^{n-1}$; $f^{2n}_{(0)} = 0$; quindi: (con $n = 1, 2, \dots \infty$)

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Questa serie converge assai rapidamente: per $x = \pi/6$

$\pi/6 = 0,523598776$

$-(\pi/6)^3/3! = -0,023924596$

$\simeq 0,499674180$ (appross. per difetto)

$+(\pi/6)^5/5! = +0,000327953$

$0,500002133$ (appross. per eccesso 5 cifre esatte)

I primi tre termini della serie danno già 5 cifre esatte.

---

3) Serie del coseno circolare

$f_{(x)} = \cos(x)$; $f'_{(x)} = -\sin(x)$; $f''_{(x)} = -\cos(x)$; $f'''_{(x)} = \sin(x)$

$f(0) = 1 \quad ; \quad f'(0) = 0 \quad ; \quad f''(0) = -1 \quad ; \quad f'''(0) = 0$

anche in questa serie si ha una variazione ciclica: $(n = 1 \div \infty)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{(2n-2)}}{(2n-2)!}$$

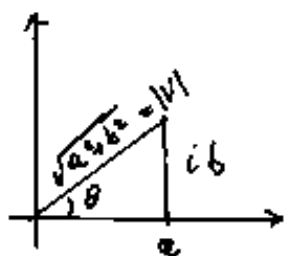
Come regola mnemonica si suol dire che la serie sin(x) è dispari, mentre la serie Cos(x) è pari (a segni alterni).

4) Serie esponenziale ad esponente immaginario

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \dots$$

Si noti che questa serie rappresenta la somma delle due precedenti serie di cui sen(x) è moltiplicata per i cioè:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\text{sen}(x)$$

Questa relazione è importantissima per i numeri immaginari complessi di cui conosciamo la

$\vec{V} = (a + ib)$ forma binomia

essendo: $|V| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = |V| \cos\theta$

$b = |V| \,\text{sen}(\theta)$; sostituendo:

$\vec{V} = |V| (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ forma trigonometrica

$\vec{V} = |V| e^{i\theta}$ forma esponenziale (sopra dimostrata)

5) Serie esponenziale ad esponente immaginario negativo

avremo che cambiano solo i segni:

$$e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \dots$$

Sommando e sottraendo le due espressioni si ha:

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x)$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin(x)$$

formule fondamentali della trigonometria complessa di Eulero.

6) Serie esponenziale ad esponente negativo

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

confrontando questa serie con la serie esponenziale.

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \frac{x^n}{n!}$$

si hanno le serie iperboliche, infatti:

7) Serie del coseno iperbolico (catenaria)

per semisomma delle serie di cui sopra:

$$\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right) = \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \left(\frac{x^{2n}}{n!}\right)$$

8) Serie del seno iperbolico

per semidifferenza:

$$\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = \operatorname{senh}(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \left(\frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)!}\right)$$

si notino le analogie col seno e coseno circolare.

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{i}\operatorname{senh}(ix) \; ; \qquad \cos(x) = \cosh(ix)$$

sommando:

sommando:

$$\operatorname{senh}(x) + \cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

cioè:

$$\boxed{\operatorname{senh}(x) + \cosh(x) = e^x}$$

espressione fondamentale in trigonometria iperbolica

$$\boxed{\cosh(x) - \operatorname{senh}(x) = e^{-x}}$$

moltiplicando termine a termine: $(e^x)(e^{-x}) = 1$

$$\boxed{\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1}$$ fondamentale.

Serie esponenziale: a^x

$f_{(x)} = a^x$; $f'_{(x)} = \ln|a| \cdot a^x$; $f''_{(x)} = (\ln|a|)^2 a^x$; ....

$f(0) = 1$; $f'_{(0)} = (\ln|a|)$; $f''_{(0)} = (\ln|a|)^2$; ....

$$a^x = 1 + \frac{(x \ln|a|)}{1!} + \frac{(x \ln|a|)^2}{2!} + \frac{(x \ln|a|)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x \ln|a|)^n}{n!}$$

si noti che è la generalizzazione di e^x, infatti: $(\ln|e| = 1)$

Serie logaritmica

La serie logaritmica porta qualche complicazione ad applicare direttamente la formula di Mac Laurin, infatti se: $f(x) = \ln|x|$; $f(0) = -\infty$. Occorre quindi non far passare per zero la x. Considereremo quindi la funzione: $\boxed{f(x) = \ln(x+1)}$; $f'(x) = (x+1)^{-1}$; $f''(x) = (-1)(x+1)^{-2}$; $f'''(x) = 2!(x+1)^{-3}$; .... ; $f^{n}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(x+1)^{-n}$; ...

per lo sviluppo di MacLaurin: si nota: $\frac{x^n f^n(0)}{n!} = \frac{x^n (-1)^{n-1} (n-1)! (1)}{n\,(n-1)!}$

$$① \quad \ln|1+x| = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Il raggio di convergenza di questa serie è dato da: $R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{1}{n} \right| = 1$

Ciò vuol dire che questa serie può essere utilizzata solo per: $-1 < X < +1$, cioè si possono calcolare solo i logaritmi fra $(1-1)=0$ ed $(1+1)=2$ cioè fra zero e due (per valori superiori diverge).

---

ponendo ora: $f(x) = \ln|(1-x)|$ e confrontando:

$$\ln|(1+x)| = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$\ln|(1-x)| = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n}$$

sottraendo membro a membro:

(2) $$\ln\left|\frac{(1+x)}{(1-x)}\right| = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \right)$$

vale per $-1 < x < 1$ cioè permette di calcolare i logaritmi dei numeri da zero ad ∞ $\left(x = \frac{N+1}{N-1}\right)$.

Poniamo ora:

$$\frac{(1+x)}{(1-x)} = \frac{(a+h)}{a}$$

ricaviamo x:

$$a + ax = a + h - ax - xh\ ; \quad x = \frac{h}{(2a+h)}$$

quindi: $\ln\left|\frac{(1+x)}{(1-x)}\right| = \ln\left|\frac{a+h}{a}\right| = \ln|(a+h)| - \ln|a|$

$\therefore \ln|(a+h)| = \ln|a| + \ln\left|\frac{(1+x)}{(1-x)}\right|$; sostituendo x:

(3) $$\ln|(a+h)| = \ln|a| + \frac{2h}{(2a+h)}\left\{1 + \frac{h^2}{3(2a+h)^2} + \frac{h^4}{5(2a+h)^4} \cdots\right.$$

nel caso particolare di $h=1$:

(4) $$\ln|(a+1)| = \ln|a| + \frac{2}{(2a+1)}\left\{1 + \frac{1}{3(2a+1)^2} + \frac{1}{5(2a+1)^4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2a+1)^{2n-2}}\right.$$

noto il logaritmo di un numero "a", si può calcolare il logaritmo di $(a+1)$. $\ln|(a+1)| = \ln|a| + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)(2a+1)^{2n-1}}\right)$.

Serie binomiale

Abbiamo già trattato il binomio di Newton, ove:

$$(a+b)^n = \sum_{K=0}^{K=n} \binom{n}{K} a^{n-K} b^K = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots$$

Consideriamo la funzione:

$$\boxed{f_{(x)} = (1+x)^m} \qquad (\text{con } m = \text{reale})$$

abbiamo:

$$f'_{(x)} = m(1+x)^{m-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}_{(x)} = [m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)](1+x)^{m-n}$$

perciò applicando MacLaurin.

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots}$$

Naturalmente occorre essere sicuri che, al limite, il termine complementare sia nullo $\left(\lim_{n\to\infty}(P_n) = 0\right)$.

I) Consideriamo: "m" = intero positivo

In questo caso: $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} = \binom{m}{n}$ = (combinazio=
ne di m elementi di classe n)

ne di m elementi di classe n)

Le ridotte della serie di ordine: $n=m$, sono lo sviluppo del binomio di Newton, ove per $n>m$ $\binom{m}{n}=0$ ed anche, per $n>m$, le $f^{(n)}_{(x)}=0$, infatti: $f^{(n)}_{(x)} = n!;(1+x)^{m-m} = 1 \cdot n! =$ costante, l'ulteriore derivata: $f^{(n+1)}_{(n)}=0$. Quindi sono nulli gli ulteriori termini della serie.

Nella:

$$\ln\left|\frac{n+1}{n-1}\right| = 2\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^5} + \dots\right.$$

poniamo:

$$\boxed{\frac{n+1}{n-1} = x} \quad \supset \quad n+1 = nx - x \quad \text{da cui:}$$

$(x+1) = n(x-1)$ cioè: $\boxed{\frac{1}{n} = \frac{(x-1)}{(x+1)}}$

si ha:

$$⑧ \quad \boxed{\ln|x| = 2\left[\frac{(x-1)}{(x+1)} + \frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7 + \dots\right]}$$

formula valida per $\boxed{x > 0}$

Nella formula:

$$\ln|(1-x)| = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \frac{x^n}{n}\right)$$

poniamo: $\left(x = \frac{u-1}{u}\right)$; $\ln|(1-x)| = \ln\left|\left(\frac{\cancel{u}-\cancel{u}+1}{u}\right)\right|$

$\ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\ln|u| = -(\dots$ e togliendo il segno $(-)$

$$⑨ \quad \boxed{\ln|u| = \left(\frac{u-1}{u}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u-1}{u}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u}\right)^3 + \dots}$$

questa formula vale per $\boxed{u > \frac{1}{2}}$ infatti per $u = \frac{1}{2}$

questa formula vale per $\boxed{u > \frac{1}{2}}$ infatti per $u = \frac{1}{2}$

si ha: $\left(\frac{u-1}{u}\right) = \left(1 - \frac{1}{u}\right) = \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = (1-2) = (-1)$ si ha:

$$\ln\left|\frac{1}{2}\right| = -\ln|2| = -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)$$

serie armonica a segni alternati che abbiamo già dimostrato

essere convergente: $(S_\infty = \ln 2)$ (pag 113), ma se $u = \frac{1}{K}$ con $K > 2$

si ha: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{u-1}{u}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}|1-K|^n\right) = \infty$ quindi

per $K > 2$ la serie diverge. (Vedasi serie a segni alternati)

II) Se "m" non è intero positivo, non si può più parlare di binomio di Newton; interessa invece sapere a quali condizioni lo sviluppo in serie di MacLaurin porta ad una serie convergente.

Calcoliamo il raggio di convergenza: $R_c = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} : \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1} \right| = \boxed{R_c = 1}$$

il che implica: $\boxed{-1 < x < +1}$, è possibile dimostrare che, in questo intervallo, $\lim_{n\to\infty}(P_n) = 0$, cioè che è nullo il limite del termine complementare (Cfr. G. Sansone "Lezioni di Analisi Matematica" Vol I, pag 288.) Quindi per "m" reale qualsiasi ed: $(-1 < x < 1)$ vale lo sviluppo in serie di MacLaurin (serie binomiale).

III Se "m" è intero negativo

$$(1+x)^{-m} = \frac{1}{(1+x)^m} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^m = f(x) =$$

Si è ricondotto la formula ad "m" positivo:

$$f(0) = 1 \; ; \; f' = m\left(\frac{1}{1+x}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right) =$$

$$= -m\left(\frac{1}{1+x}\right)^{m+1} \; ; \text{ove } f'(0) = -m(1) \; ; \; f''(0) = m(m+1)(1) \; ;$$

le derivate sono a segni alternati. Se $x > 0$; $\lim_{m \to \infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^m = 0$;

La serie (vedi pag 104) risulterebbe convergente.

Calcolo delle radici ennesime

Nella serie binomiale scritta nella forma:

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots \binom{m}{n}x^n + \cdots$$

per "m" frazionario positivo: $0 < m < 1$; i simboli: $\binom{m}{n}$ non hanno il significato di m elementi di classe n, né tantomeno lo sviluppo di calcolo è il numero di combinazioni. Vediamo come risulta lo sviluppo di calcolo: per $m = \frac{1}{2}$

$$\binom{m}{1} = \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2};$$

$$\binom{m}{2} = \binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = \frac{-1}{(2)(4)}$$

$$\binom{m}{3} = \binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{(1)\cdot(2)\cdot(3)} = \frac{+3}{(2)(4)(6)}$$

in generale:

$$\binom{m}{n} = \binom{1/2}{n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-3)}{(2)(4)(6)\cdots(2n)}$$

Se chiamiamo: "Semifattoriale" (v. vol. I) il prodotto di tutti i numeri fino ad N, della stessa parità di N; e

di tutti i numeri fino ad N, della stessa parità di N, e si indica con N!! (si legge semifattoriale N) avremo:

$$\binom{1/2}{n} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

perciò:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1!!}{4!!}x^2 + \frac{3!!}{6!!}x^3 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n$$

Vale per: $-1 < x < 1$ come già dimostrato al II) pag. prec.

Però lo sviluppo in serie per radici emmesime, può estendersi anche a numeri $N > 1$; infatti per $\sqrt[m]{N}$ si cerca di scomporre: $N = a^m + R$, (con a abbastanza grande) avremo: $N = a^m\left(1 + \frac{R}{a^m}\right)$, ove:

$\frac{R}{a^m} = x < 1$; $\boxed{\sqrt[m]{N} = a\sqrt[m]{1 + \frac{R}{a^m}}}$

La serie per il calcolo delle radici converge tanto più rapidamente, quanto è più piccolo x; se $x = 0$, il primo termine della serie è già esatto.

per $x = 0,4$ (intermedio fra zero ed 1) si ha:

$\sqrt{1+0,4} = \sqrt{1,4} = 1,183215957\ldots$ applicando la serie

$1 + \frac{0,4}{2} = 1 + 0,2 = \underline{\underline{1,2}}$ (al secondo termine)

$1,2 - \frac{1}{4!!}(0,4)^2 = 1,2 - \frac{4\cdot 4}{100\cdot 2\cdot 4} = 1,2 - 0,02 = \underline{\underline{1,18}}$ (al terzo termine)

$1,18 + \frac{3!!}{6!!}(0,4)^3 = 1,18 + \frac{3\cdot 4\cdot 4\cdot 4}{1000\cdot 2\cdot 4\cdot 6} = 1,18 + 0,004 = \underline{\underline{1,184}}$ (al IV termine)

$1,184 - \frac{5!!}{8!!}(0,4)^4 = 1,18 - \frac{3\cdot 5\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}{10000\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} = 1,184 - 0,001 = 1,183$. (al V termine)

....

Come si vede le ridotte della serie formano due classi contigue che si approssimano per difetto e per eccesso al valore cercato che è l'elemento separato

per eccesso al valore cercato che è l'elemento separatore delle due classi contigue.

Se avessimo preso: $\sqrt{1+0,004} = \sqrt{1,004} = 1,001998004$

$1 + \frac{0,004}{2} = 1,002$ sarebbe già un'ottima approssimazione al secondo termine della serie, da cui la regola che, per x piccolissimo: $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2}$ (in eccesso)

Serie di arcsen (x)

$f(x) = \text{arcsen}(x)$; $f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$;

per la serie binomiale:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1}x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^4 - \binom{-\frac{1}{2}}{3}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^{2n} + \dots$$

quindi considerando le derivate successive:

$$\boxed{\text{arcsen}(x) = x + \frac{1}{2!!}\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!}\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}}$$

vale per: $x < 1$.

Come per la serie logaritmica, anche qui dobbiamo considerare la limitazione: $-1 < \text{sen}\,\alpha < +1$ cioè: $\boxed{-1 < X < +1}$

mentre: $\boxed{-\frac{\pi}{2} < \text{arcsen}(x) < +\frac{\pi}{2}}$ e che la serie è convergente per $\boxed{x < 1}$.

(Non sono reali valori del seno maggiori di 1)

Essendo: $\text{sen}(30°) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, posto $x = \frac{1}{2}$, potremo calcolare $\pi/6$:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1!!}{2!!}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{3!!}{4!!}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2^5}\right) + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)\left(\frac{1}{2^{(2n+1)}}\right)$$

Questa serie converge assai lentamente e non è quindi conveniente per calcolare con buona approssimazione il valore di π.

Serie di arccos(x)

Ricordando che: $\cos(x) = \operatorname{sen}(90° - x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(x) \quad (\text{vale per } |x|<1)$$

$$\boxed{\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2!!\cdot 3} + \frac{3!!\cdot x^5}{4!!\cdot 5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)} + \right)}$$

Serie di arctong(x) o Serie Ciclometrica

(calcolo di π)

$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ (anche questa serie vale per $|x|\leq 1$).

cioè: $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}(x) < +\frac{\pi}{4}$

$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)} = (1+x^2)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -2$

Applicando Mac Laurin:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)} +$$

ove per $x = 1$:

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)}$$

anche questa serie, per il calcolo di π converge troppo lentamente.

La serie dell'arctg(x) $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ fu ottenuta quasi contemporaneamente da: F. Gregory (1638-1675), e da G.W. Leibniz (1646-1716); la più importante deduzione per il calcolo di π è dovuta a J. Machin, ed è riferita da W. Jones (1675-1749) nel "Synopsis palmariorum matheseos," Londini 1706, p. 263. La formula di Machin è:

$$\frac{\pi}{4} = 4\, \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$$

da cui:

$$\pi = 16\left(\frac{1}{1\cdot 5^1} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \dots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \dots\right)$$

Questa espressione è ancor-oggi utilizzata per il calcolo di π mediante personal-computer.

Anche Eulero (1707-1783), dalla serie arctg(x) dedusse:

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \mathrm{artg}\,\frac{1}{3}$$

Newton (1642-1727) invece utilizzó la serie arcsen(x) per il calcolo di π ed ottenne:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \cdots \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\cdot(2n+1)}$$

oppure:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{3}{5\cdot 2^4} + \frac{5}{7\cdot 2^{11}} + \frac{5\cdot 7}{9\cdot 2^{14}} + \cdots$$

che convergono lentamente.

Cerchiamo di capire come Eulero e Machin poterono trasformare la serie arctg(x) nella somma o nella differenza di due serie, più rapidamente convergenti. Poniamo: $\alpha = \operatorname{arctg}(x)$ $x = \operatorname{tg}(\alpha)$

e ricordiamo che:

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_1)\operatorname{tg}(\alpha_2)} = \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) = \boxed{\operatorname{arctg}(x_1) + \operatorname{arctg}(x_2) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2}\right)}$$

Machin pose: $(x_1) = (x_2) = \frac{1}{5}$

$$2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1/5 + 1/5}{1 - 1/25}\right) =$$

$$= \boxed{2 \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \operatorname{arctg}(5/12)}$$

$$4 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) = \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + \operatorname{arctg}\frac{5}{12} = \operatorname{arctg}\left(\frac{5/12 + 5/12}{1 - \frac{25}{144}}\right) =$$

$$= \boxed{4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) = \operatorname{arctg}(120/119)}$$

ma volendo $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{120}{119}\right) - \operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}}\right) =$$

$$= arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$

quindi:

$$arctg(1) = arctg\left(\frac{120}{119}\right) - arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$

e sostituendo si ha la formula di Machin:

$$\pi = 4\left(4\, arctg\left(\frac{1}{5}\right) - arctg\left(\frac{1}{239}\right)\right)$$

Piú facilmente si ricava la formula di Eulero

$$\mathrm{arctg}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \mathrm{arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}\right)$$

$$= \mathrm{arctg}\left(\frac{5/6}{5/6}\right) = \mathrm{arctg}(1)$$

da cui:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \mathrm{arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right)}$$

Il procedimento che abbiamo esposto per la formula di J. Machin può essere spinto ulteriormente suddividendo i due termini di arctg. ed i nuovi arctg possono ancora essere suddivisi ottenendo serie che convergono più velocemente, ma divengono più laboriosi i calcoli.

Un'altra formula ricavata da Eulero per il calcolo di $\frac{\pi}{4}$ è:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 5\cdot\mathrm{arctg}\left(\tfrac{1}{9}\right) + 2\,\mathrm{arctg}\left(3/79\right)}$$

Ma anche attualmente si è preferito la formula di Machin esprimibile:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\right)\left(\frac{4}{5^{(2n+1)}} - \frac{1}{239^{(2n+1)}}\right)$$

L'importanza dello studio delle serie è data dal fatto che le serie permettono la definizione ed il calcolo di quella classe di numeri detti trascendenti. Non solo, ma anche il succedersi delle cifre di un numero periodico è esprimibile (come abbiamo visto) in serie di potenze del 10. Quindi la nostra numerazione decimale, in notazione algebrica diventa una serie, finita o infinita di termini. Per esempio:

$1243,25.. = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}..$

$\frac{1}{3} = 3,3\bar{3} = 3(10^0 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots 10^{-n})$ con $n \to \infty$

Se riuscissimo a trasformare le serie in modo che ciascun termine corrisponda alla cifra decimale di quella posizione, in altre parole se riuscissimo a trasformare le serie tutte in serie di potenze (del 10 od anche di un'altra base di numerazione) avremmo finalmente risolto l'annoso

problema dei numeri trascendenti. A titolo di esempio riportiamo una sintesi della storia del calcolo di π.

Il calcolo di π

Fin dai tempi più antichi, il calcolo di π ha impegnato gli studiosi. Il problema era: "la rettificazione della circonferenza" o "la quadratura del cerchio":

"Qual è 'l geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige",...

...... (Dante - Divina Commedia - Paradiso - canto XXXIII - versi 133-135).

Archimede (287-212 a.C.) col metodo dei poligoni inscritti e circoscritti alla circonferenza, usando poligoni con 96 lati, delimitò il valore di π, fra $3+\frac{10}{71}$ e $3+\frac{1}{7}$ cioè: $\left(3+\frac{10}{71}\right) < \pi < \left(3+\frac{1}{7}\right)$ in cifre decimali:

$$3{,}14084507\ldots < 3{,}1415926535\ldots < 3{,}142857143 .$$

Il valore: $\left(3+\frac{1}{7}\right) = 22/7$, ove: $\frac{\pi}{2} \simeq 11/7$ è stato praticamente usato dagli Architetti fin quasi ai giorni nostri.

nostri.

Successivamente Tolomeo (150 d.C.) calcolò: $\pi \simeq 3,1416$, e risulterebbe il valore più preciso calcolato in antico. Nel (III sec d.C), Pappo e Diofanto, matematici Alessandrini, trattarono l'argomento; Pappo riferì la dimostrazione di Dinostrato (335 a.C.) sulla curva quadratrice che porta il suo nome. Diofanto che può definirsi un iniziatore della teoria dei numeri concepì come "numero" i "frazionari" ed i "relativi", trattò

i numeri poligonali. Il calcolo di π si avvaleva di nuovi metodi: "Metodo delle aree"; Il metodo degli isoperimetri (applicato anche da Pappo); La spirale di Archimede; Il metodo degli equivalenti; la curva Cissoide di Diocle (II sec a.C), la concoide di Nicomede (III-II sec. a.C), le lunule di Ippocrate (V sec a.C), la quadratrice di Dinostrato (IV sec a.c); la proprietà dei numeri trattata da Nicomaco di Gerasa (II-I sec a.C); dimostrano la continuità dell'interesse al problema che perdurerà fino a circa il V sec d.C. Poi, salvo alcuni matematici arabi del VII-VIII sec d.C. la speculazione matematica perde interesse. Leonardo Fibonacci, pisano (1170-1250), introduce in Italia l'algebra e l'aritmetica arabo-indiana, inizialmente usata per conteggi commerciali, ma l'uso della cifra "zero", con la notazione decimale. conquistò l'Europa: Il "Liber abbaci" del

le, conquistò l'Europa; Il Liber abbaci del Fibonacci è la base della nostra aritmetica. Nel 1225 scrisse anche il "Liber quadratorum". In toscana, di matematici, si trova Pier della Francesca da Borgo S. Sepolcro (Arezzo), (1416-1492) pittore e matematico scrisse sulla

prospettiva ed un'opera: "Libellus de quinque corporibus regolaribus" in cui usa la sezione aurea. Luca Pacioli pure di Borgo S. Sepolcro (1445-1515), amico di Leonardo da Vinci (1452-1519) scrisse il "De Divina Proporzione" con le illustrazioni disegnate da Leonardo. In questa opera a pagina LXXVII espone il calcolo delle piramidi a base tonda (coni). Considera un cono retto con diametro di base 7 ed altezza dieci ed esprime: "Haremo per la fuperficie dela bafa $.38.\frac{1}{2}.$ qual multiplicato ...." Da ciò risulta evidente che al tempo di Luca Pacioli, si prendeva $\pi = 22/7$ infatti: $r^2\pi = 7/2 \cdot 7/2 \cdot 22/7 =$ $= 3.\frac{1}{2}$ per $11 = 38\frac{1}{2}$ che per 10 farà 385 e diviso per 3 darà il volume: $128.\frac{1}{3}$ (Si noti la parte decimale espressa in frazione).

Finché non si usarono le serie:

Finchè non si usarono le serie :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots \quad \text{(Gregory, 1671)}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \quad \text{(Eulero 1736)}$$

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right) \quad \text{(Machin 1706)}$$

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^5}\right) \quad \text{(Sharp, 1717)},$$

non si avanzò nel calcolo di π.

Riassumendo:

(≃ 250 a.C)	Archimede	$\pi \simeq 3 + \frac{1}{7}$	(metodo dei poligoni)
(150 d.C)	Tolomeo	$\pi \simeq 3,1416$	" "
(1579)	Viète	calcola π con 10 cifre decimali	" "
(1593)	Romanus	" " 16 " "	" "
(1610)	Ceulen	" " 33 " "	" "
(1621)	Snell	" " 35 " "	(poligoni con 2^{30} lati)
(1699)	Sharp	" " 72 " "	(mediante serie)
(1706)	Machin	" " 101 " "	" "
(1794)	Vega	" " 137 " "	
(1844)	Dase	" " 201 " "	
(1853)	Rutherford	" " 441 " "	
(1873)	Stanks	" " 707 (solo 527 giuste)	

La ricerca di un maggior numero di cifre era dovuta alla speranza di trovare una periodicità od una legge che definisse il susseguirsi delle cifre. Ma nel 1882 F. Lindemann dimostrò che π è un <u>numero trascen=</u>

F. Lindemann dimostrò che π è un <u>numero trascendente</u> e decadde il movente principale della ricerca. (Già Lambert (1728-1777) aveva dimostrato: "π è <u>irrazionale</u>")

L'avvento dei computer, i quali, opportunamente programmati, possono fare calcoli velocissimi, ma possono anche dare risposte logiche, su gruppi, insiemi, o frequenze di cifre, ha portato un rinnovato interesse al pro=

blema. Nel 1949 in America, col la calcolatrice ENIAC furono calcolate 2036 cifre in 70 ore di lavoro.

1954 calcolatrice NORC → 3093 cifre in 13 minuti!

1959 " IBM-704 → 10 000 cifre 1 ora e 40 minuti.

oggi con un modesto personal computer si calcolano centinaia di cifre in pochi secondi e 10000 cifre in 5 ore. (Cfr. Frattali Flib di Silvana Bettelli e Romolo Biolchini, ed Zanichelli 1989)

(Cfr. rivista "Mathematics of Computation" l'articolo: di D. Shanks e J. W. Wrench Jr "Calculation of π to 100.000 - Decimals" (Gennaio 1962))

La possibilità di selezionare la frequenza delle cifre, ha portato ad una nuova denominazione di insiemi numerici e precisamente i numeri NORMALI. Un numero normale è definito dal fatto che ciascuna delle 10 cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; compare in media una volta su dieci; ciascuna coppia come 27 o 99 compare in media una volta su 100; ciascuna tripletta: 116, 270, 121

ecc compare in media una volta su mille : .... e così via.

I numeri <u>normali</u> furono introdotti dal matemati_
co francese Émile Borel. Un suo contemporaneo
olandese L.E.J. Brouwer, si pose il problema se
mai, nell'espressione decimale di π figurano
mille zeri consecutivi. (Problema ancor'oggi non risolto).

Lo studio dei numeri, che, via via nel tempo si è sviluppato, ha portato prima, per i numeri non esprimibili mediante frazioni, alla denominazione di numeri irrazionali, e quando anche le potenze di questi numeri non sono razionali, si hanno i numeri trascendenti. Il primo numero trascendente fu scoperto da J. Liouville nel 1851, ed è dato dalla serie:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{1\cdot 2}}+\frac{1}{10^{1\cdot 2\cdot 3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{10^{n!}}$$

È evidente che nel numero di Liouville si può determinare una zona ove vi siano certe quantità di zeri consecutivi, o più di esse. In forma decimale il numero è 0,110001 000 000 000 000 000 001 00...

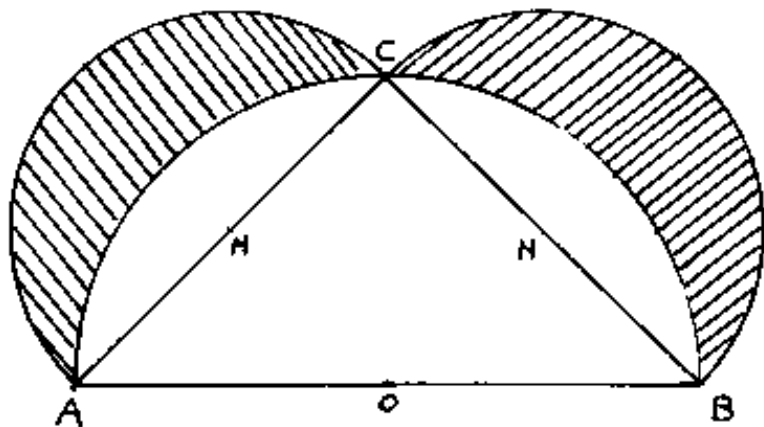
(Esattamente cinque zeri consecutivi è impossibile fra due cifre 1, ma fra zeri 0, zero ed uno è possibile).

Per concludere sui numeri trascendenti consideria-

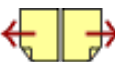
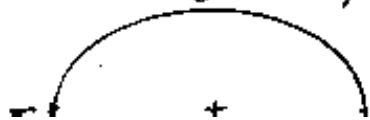
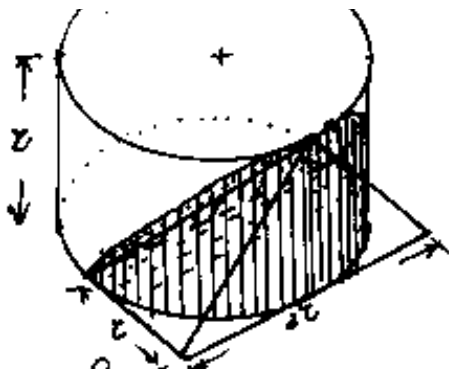
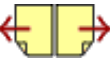
mo i coseni degli angoli del triangolo formato dal lato e dalle diagonali dell'ettagono ove $\alpha = \frac{\pi}{7}$; $\beta = 2\alpha = \frac{2\pi}{7}$; $\gamma = 2\beta = 4\alpha = \frac{4\pi}{7}$; $\alpha + \beta + \gamma = \pi\left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}\right) = \pi$

$\cos\alpha = 0,9009688679024191$; $\cos\beta = 0,6234898018587335$; $\cos\gamma = -0,2225209339563144$. Ebbene: $(\cos\alpha)(\cos\beta)(\cos\gamma) = -\frac{1}{8}$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{10}{8}$; $\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma = \frac{1}{2}$. Come si vede da numeri trascendenti è possibile avere dei razionali.

Le lunule di Ippocrate

Tracciato il triangolo rettango isoscele: ACB, inscritto in una semi=circonferenza, si trac=cino anche le semi=circonferenze esterne al triangolo ed aventi per diametro i cateti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, Le tre semicirconferenze delimitano due lunule, Se ℓ è la lunghezza di un cateto ed $\ell\sqrt{2} = \overline{AB}$ L'area di una lunula sarà: $A = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\pi - \left(\frac{1}{4}\left(\frac{AB}{2}\right)^2\pi - \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2\right)$

$$A = \frac{\ell^2}{8}\pi - \left(\frac{\overline{AB}^2}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) = \frac{\ell^2}{8}\pi - \left(\frac{2\ell^2}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) = \frac{\ell^2}{4}$$

e l'area delle due lunule $= \frac{\ell^2}{2}$ equivalente al triangolo ACB (indipendente da π). Ciò elude π, ma non risolve il problema della quadratura del cerchio.

Analogo il problema della sezione di un cilindro sezionato con un piano passante per

[...] passante per un diametro di base ed inclinato sulla base di $45° = \pi/4$, è possibile dimostrare che il solido tratteggiato in figura ha per volume: $V = \frac{2}{3} r^3$, equivalente alla piramide a base rettangolare $r \times 2r$ ed altezza pari ad r. (Tuttociò indipendente da π)

Cenni di storia delle serie

Il primo a fare uso di serie fu Archimede, il quale, per calcolare l'area della parabola (Τετραγωνισμὸς παραβολῆς) usò la serie:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots$$

che noi definiremmo una somma di termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$, il cui valore: $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}=a_1\frac{1-q^n}{1-q}=1\cdot\frac{1-1/4^n}{3/4}$; ed $S_\infty=a_1\frac{1}{1-q}=\frac{4}{3}$.

Passeranno molti secoli, prima di ritrovare l'uso delle serie. Nel 1650 fu P. Mengoli per primo a riconoscere la divergenza della serie armonica. G.W. Leibniz, nel 1682 mise in evidenza l'esistenza di serie non assolutamente convergenti con la serie: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\pi/4$. A.L. Cauchy, nel

suo: "Cours d'Analise de L'Écol Polyt." ("Analyse algébrique") Paris 1821; tratta le serie anche a termini complessi, e porta il suo nome il criterio generale di convergenza. Tratta le serie doppie e sono sue molte definizioni attuali.

Integrazione per serie

Data una funzione $y = f(x)$ integrabile in un intervallo a,b, ove l'integrale ha un valore finito, tuttavia non esprimibile con una formula in termini finiti. In altre parole, coi metodi di integrazione che conosciamo, non riusciamo a risolvere l'integrale. (Per esempio: $\int \frac{e^x}{x} dx$).

In questi casi la f(x) si sviluppa in serie i cui singoli termini sono integrabili.

Si abbia quindi la serie in x:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$ (convergente in a,b)

Si può dimostrare che:

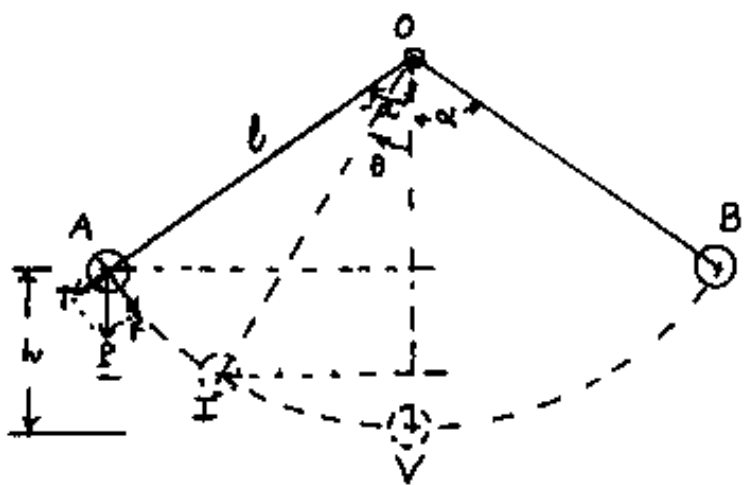
$$\int_a^x S(x)\,dx = \int_a^x u_1(x)\,dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^x u_n(x)\,dx + \cdot$$

Per esempio:

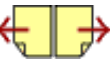
$$\int_a^x \frac{e^x}{x} dx = \int_a^x \frac{1}{x} dx + \int_a^x dx + \int_a^x \frac{x}{2!} dx + \cdots + \int_a^x \frac{x^n}{(n+1)!} dx +$$

$$\int_a^x \frac{e^x}{x}dx = \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \sum^{n=\infty}\left(\frac{x^n - a^n}{n!\,n}\right)$$

A questo tipo di integrale si riduce anche l'integrale: $\int_b^x \frac{dx}{\ln(x)}$ infatti sostituendo $x = e^t$; $t = \ln(x)$;
$a = \ln|b|$; $dx = de^t = e^t dt$; $\int_b^x \frac{dx}{\ln x} = \int_{\ln b}^{e^t} \frac{e^t dt}{t}$.

Il problema del pendolo

Si abbia un pendolo di lunghezza "l", fissato in O che oscilla, senza attriti da A a B, compiendo un angolo 2α, per ogni oscillazione semplice. (Si dice oscillazione completa quando da A il pendolo torna in A)

Consideriamo il pendolo in A al tempo t, e consideriamo: $-\alpha$ = l'angolo $V\hat{O}A$; $+\alpha$ = l'angolo $V\hat{O}B$; sia g l'accelerazione di gravità; avremo che la "forza peso" $P = mg$ può scomporsi in due direzioni ed avremo la forza T, che tende il filo del pendolo, e la forza F, tangenziale forza motrice. Il punto A abbia quota "h" rispetto a V; Cioè il lavoro disponibile = (energia potenziale), sarà $\mathcal{L}_0 = Ph = mgh$ ove: $h = l - l\cos\alpha$; $\boxed{h = l(1 - \cos\alpha)}$

In un punto I, intermedio fra A e V, il peso P avrà compiuto il lavoro $L_I = mgl(\cos\theta - \cos\alpha)$, ove $l(\cos\theta - \cos\alpha)$ rappresenta la perdita di quota che è proporzionale alla perdita di energia potenziale. Questo quoto di energia potenziale si è trasformato in energia cinetica: $E_c = \frac{1}{2} m V^2$, ove V è la velocità tangenziale, o periferica, avente la direzione della forza F. (motrice).

la F sarà nulla quando la massa pendolare è in V, ove, tutta l'energia potenziale si sarà trasformata in cinetica, la velocità avrà raggiunto il massimo, ed il moto continuerà per la legge d'inerzia, essendo nulla la forza motrice. Per questo l'espressione: $\frac{1}{2}mV^2$ <u>è detta forza viva</u>. (molto meglio chiamarla energia cinetica)

La velocità periferica: $V = \omega \ell$, ove ω è la velocita angolare: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ avendo scelto θ come variabile oscillante da $-\alpha$ a $+\alpha$ e viceversa.

per cui:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = \boxed{m\ell g\left(\cos\theta - \cos\alpha\right) = \mathcal{L}_i}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\alpha\right) \; ; \quad \cos\theta = \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) ; \; \cos\alpha = \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 = \frac{\ell}{2g}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$\boxed{\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}} \; \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}}$$

Se indichiamo con T_1 il tempo impiegato per compiere una oscillazione completa (da $-\alpha$ [illegible]) [illegible]

una oscillazione semplice (da $-\alpha$ a $+\alpha$) e con $T = 2T_1$ <u>il periodo</u> o tempo impiegato a compiere una oscillazione completa, cioè se indichiamo <u>con f = frequenza</u> = ogni quante unità di tempo il pendolo si ripresenta in A, avremo:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

(la frequenza è l'inverso del Periodo)

Dall'espressione: $\frac{dt}{d\theta}$ calcoliamo il periodo T.

$$T = \int_0^T dt = 2\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}$$

<u>operiamo un cambiamento di variabile:</u>

Consideriamo α come una costante e poniamo:

$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = K$ e poniamo: $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = K \operatorname{sen}\varphi$

deriviamo per trovare $d\theta$:

$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = K\cos\varphi\, d\varphi$ da cui: $d\theta = \frac{2K\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\theta/2} =$

$d\theta = \frac{2K\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{2K\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\, d\varphi$; sostituendo:

si ha: $T = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int\left(\frac{2K\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{K^2-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right)d\varphi$

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

$-\frac{\pi}{2}$

Per i limiti di integrazione abbiamo attribuito a φ la massima elongazione, cioè $\operatorname{sen}\varphi = -1$; $\operatorname{sen}\varphi = +1$; (a filo teso per il pendolo). Si può anche scrivere:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}} + \int_{0}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right].$$

I due integrali sono identici se consideriamo una $\varphi_1 = -\varphi$

perciò:

$$\boxed{T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2 sen^2\varphi}}}$$

ove:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2 sen^2\varphi}}$$

è un integrale ellittico di prima specie nella sua forma canonica.

Per risolvere un integrale ellittico occorre fare lo sviluppo in serie, avremo:

Sviluppo in serie

degli integrali ellittici di prima specie

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2 sen^2\varphi}} = \int_0^{\varphi}\left[1-K^2 sen^2\varphi\right]^{-\frac{1}{2}} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\varphi} \left[1 + \frac{1}{2} K^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} K^4 \operatorname{sen}^4\varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} K^6 \operatorname{sen}^6\varphi + \cdots \right] d\varphi$$

gli integrali dei singoli elementi della serie sappiamo calcolarli; per esempio:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1!!}{2!!} \right)^2 K^2 + \left(\frac{3!!}{4!!} \right)^2 K^4 + \left(\frac{5!!}{6!!} \right)^2 K^6 + \cdots\cdots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 K^{2n} \right]$$

Nel pendolo se consideriamo α piccolo, allora $K = \operatorname{sen}\alpha$ sarà piccolissimo, cosicché, in prima approssimazione, possiamo trascurare i termini in potenze di K. Quindi per le piccole oscillazioni il periodo sarà:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{cioè:} \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

valida per oscillazioni complete; mentre:

$$\boxed{T_s = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$ vale per oscillazioni semplici.

Posto $T_s = 1$sec. possiamo ricavare $l = \frac{g}{\pi^2}$ =

$l = \frac{9{,}81\,(m/sec^2)}{9{,}8696} = cm\ 99{,}396$ (lunghezza del pendolo che "batte il secondo").

Se invece dalla stessa formula ricaviamo g

$g = l\,\frac{\pi^2}{T_s^2}$ possiamo misurare l'accelerazione di gravità. Per esempio: avendo un pendolo lungo

1 metro: $g \simeq \frac{9,8696}{T_1^2}$, si misura il periodo T_1 di una oscillazione semplice, o meglio si misura il tempo impiegato per compiere N oscillazioni $T_1 = \frac{t}{N}$ per esempio 10 oscillazioni semplici in 10,2 sec. avremo $T_1 = \frac{10,2}{10} = 1,02$; $T_1^2 = 1,0404$; $g = \frac{9,8696}{1,0404} = 9,486$ m/sec² $\simeq 0,97$ l'accelerazione di gravità terrestre.

Sviluppo in serie dell'integrale ellittico di secondo specie

L'integrale ellittico di seconda specie, è riducibile alla forma:

$$E_2(\varphi, K) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - K^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\; d\varphi$$

Sviluppando in serie l'integrando, si ha:

$$\left[1 - K^2 \operatorname{sen}^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2} K^2 \operatorname{sen}^2\varphi - \frac{1!!}{4!!} K^4 \operatorname{sen}^4\varphi - \frac{3!!}{6!!} K^6 \operatorname{sen}^6\varphi - \dots\right);$$

$$E_2(\varphi, K) = \varphi - \frac{1}{2} K^2 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi - \frac{1!!}{4!!} K^4 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^4\varphi\, d\varphi - \frac{3!!}{6!!} K^6 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^6\varphi\, d\varphi - \dots$$

Gli integrali li sappiamo calcolare:

$$\int \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi + c$$

$$\int \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi = \frac{-\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \varphi}{2} + c$$

$$\int \operatorname{sen}^4\varphi\, d\varphi = \frac{3}{8}x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + c$$

- - - - - -

Da ciò è possibile calcolare gli integrali ellittici al variare di K e di φ.

ellittici al variare di K e di φ.

Posto $K = \operatorname{sen}\theta$, diamo una tabella degli integrali ellittici utile per i calcoli:

Tabella degli integrali ellittici

$(\theta = \arcsin K)$

	$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2 \sin^2\varphi}}$				$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-K^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$			
φ \ θ	30	45	60	90	30	45	60	90
1	0.0175	0.0175	0.0175	0.0175	0.0175	0.0175	0.0175	0.0175
5	0.0873	0.0873	0.0873	0.0874	0.0872	0.0872	0.0872	0.0872
10	0.1748	0.1750	0.1752	0.1754	0.1743	0.1741	0.1739	0.1736
15	0.2625	0.2633	0.2641	0.2648	0.2611	0.2603	0.2596	0.2588
20	0.3508	0.3526	0.3545	0.3564	0.3473	0.3456	0.3438	0.3420
25	0.4397	0.4433	0.4470	0.4509	0.4330	0.4296	0.4261	0.4226
30	0.5294	0.5356	0.5422	0.5493	0.5179	0.5120	0.5061	0.5000
35	0.6200	0.6300	0.6408	0.6528	0.6019	0.5928	0.5833	0.5736
40	0.7116	0.7267	0.7436	0.7629	0.6851	0.6715	0.6575	0.6428
45	0.8044	0.8260	0.8512	0.8814	0.7672	0.7482	0.7282	0.7071
50	0.8982	0.9283	0.9647	1.0107	0.8483	0.8227	0.7954	0.7660
55	0.9933	1.0337	1.0848	1.1542	0.9284	0.8949	0.8588	0.8192

55	0.9993	1.0357	1.0848	1.1942	0.9264	0.8949	0.8386	0.8192
60	1.0896	1.1424	1.2125	1.3170	1.0076	0.9650	0.9184	0.8660
65	1.1869	1.2545	1.3489	1.5065	1.0858	1.0329	0.9743	0.9063
70	1.2853	1.3697	1.4944	1.7354	1.1632	1.0990	1.0266	0.9397
75	1.3846	1.4879	1.6492	2.0276	1.2399	1.1635	1.0759	0.9659
80	1.4846	1.6085	1.8125	2.4362	1.3161	1.2266	1.1225	0.9848
85	1.5850	1.7308	1.9826	3.1313	1.3919	1.2889	1.1673	0.9962
90	1.6858	1.8541	2.1565	——	1.4675	1.3506	1.2111	1.0000

I numeri immaginari complessi

Abbiamo già introdotto, nel primo volume il concetto di numero complesso e immaginario complesso, in particolare l'operatore immaginario i.

Vogliamo ora estendere quei concetti limitandoci alla geometria piana: (sistemi piani di vettori). Il calcolo vettoriale sarà sviluppato dopo aver trattato la geometria nello spazio tridimensionale.

Abbiamo visto che tutti i numeri reali sono rappresentabili sull'asse reale; qualunque sia il punto fissato come origine, e qualunque sia la grandezza-modulo assunto come unità. (L'unità del segmento può essere 1 millimetro, come 1 Kilometro, o addirittura un anno luce ≅ 9461 miliardi di Km.). Ci domandiamo: "cosa cambia al variare del modulo unitario?" Prima di tutto occorre osservare che il dimensionamento del modulo unitario è

relativo ad unità di misura convenzionali utili per definire la scala grafica di un disegno, ciò permette di ingrandire particolari minuti, o fare riduzioni per avere una visione generale dell'insieme (Prendere un anno luce come modulo, significa distinguere alla distanza di poco meno di 1 mm. frazioni dell'ordine di 10^{-19}. Se invece come modulo prendiamo 1 mm., alla distanza di un millimetro si distinguono i numeri interi.)

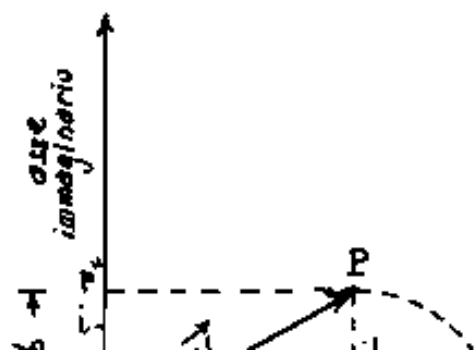
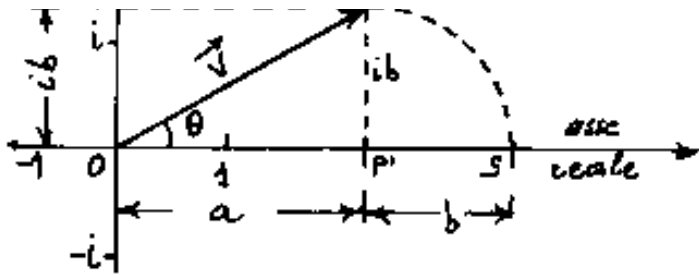
E' rilevante che, qualunque sia il modulo unitario scelto, esso rappresenti lo stesso infinito numero di punti; e che infiniti anni luce o infiniti millimetri portino a quello stesso infinito (indefinito) che esula dal nostro campo dimensionale. Così come un segmento è composto degli stessi infinito punti della retta; e la retta dello stesso infinito numero di segmenti. Questo tende a dimostrare come non sia diverso ∞^n da ∞; come: $1^n = 1$, come: $0^n = 0$.

La disputa dei matematici è interessante (vedi Vol. I).

Torniamo ai numeri immaginari complessi.

Se ad ogni punto dell'asse reale si fa corrispondere un numero reale, un punto P del piano cosa rappresenta? Se "a" e "b" sono due numeri reali, i segmenti che li rappresentano possono disegnarsi consecutivi sull'asse reale in modo che $\overline{OS} = a + b$.

asse immaginario

P

Moltiplichiamo "b" per "i"; o meglio applichiamo l'operatore "i" al segmento "b", esso ruoterà di $\pi/2 = 90°$ e l'estremo "S" si porterà in "P". Se partendo da "O" supponiamo di camminare sull'asse reale, quando arriviamo in "P'" avremo percorso il segmento $\overline{OP'} = +a$, e se continuiamo sulla stessa retta, quando arriviamo in "S"

avremo percorso il segmento $\overline{OS} = \overline{OP'} + \overline{P'S} = ^+(a+b)$ numero reale. Se invece arrivati in P' percorriamo il segmento $\overline{P'P} = +ib$ arriveremo in P; complessivamente dall'origine abbiamo raggiunto la distanza $\vec{OP}$, <u>in direzione da O a P</u>; $\overline{OP} = \sqrt{a^2+b^2}$; mentre: $\theta = \text{arctg}(b/a)$.;

In effetti noi abbiamo percorso i segmenti $(a+ib)$ che rappresentano un numero immaginario complesso di modulo: $\sqrt{a^2+b^2}$ ed argomento θ.

E' qui importante rilevare che percorrendo l'asse reale si considerano segmenti rappresentativi di quantitá numeriche qualificate ed affette dal segno + (piú) o −(meno) a seconda che il verso di percorrenza sia concorde od opposto al verso dell'asse reale.

Percorrendo invece segmenti determinanti numeri immaginari complessi, non solo si hanno intensitá rappresentate dai moduli ed affette da segno dipendente dal verso di percorrenza, ma queste quan-

[illegible]

tità sono anche caratterizzate dalla direzione determinata dall'angolo θ. Chiameremo quindi "scalari" quelle grandezze dimensionali definite solo dalla quantità qualificata affetta da segno: (come i volumi: $\pm N\,m^3$ o lavoro o energia: $\pm N$ KWh).
Chiameremo invece vettoriali quelle grandezze

che per essere definite necessitano anche della direzione, oltre ché della quantità qualificata affetta dal segno (per esempio: le velocità (N m/sec in direzione Nord.; la pressione; i campi magnetici, i campi elettrici, ecc.). In sintesi, nel campo dei numeri relativi, un numero reale è uno scalare, un numero immaginario complesso è un vettore.

$\vec{V}$ = simbolo della grandezza vettoriale

$|V| = \sqrt{a^2+b^2}$ = modulo scalare del vettore

$\theta = \operatorname{arctg}(b/a)$ = argomento del vettore

notiamo che:

$$\left.\begin{aligned} a &= |V| \cos(\theta) \\ b &= |V| \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}\right\} = \text{le componenti del vettore piano}$$

Però meglio chiamare vettori le grandezze che tratteremo in campo tridimensionale, e denominare queste grandezze: Numeri Complessi che indicheremo col

simbolo Z e talvolta con $\vec{V}$ Essi possono rappresentarsi

$\vec{V} = (P - O)$ = forma geometrica del vettore

$Z = (a + ib)$ = " binomia

$Z = |Z| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ = forma trigonometrica

$Z = |Z| (e^{i\theta})$ = forma esponenziale.

(abbiamo già dimostrato che $e^{i\theta} = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Si osservi che $Z = (a+ib)$ equivale al <u>segmento orientato</u> uscente dall'origine degli assi. Se chiamiamo "x" l'asse reale, ed "y" l'asse immaginario, "a" è l'ascissa "x", mentre "b" è l'ordinata y del punto: $P \equiv (a, b)$.

L'insieme di tutte le coppie ordinate di $x \in X$, ed $y \in Y$, (il simbolo $\in$ si legge: "appartenente ad:") dicesi <u>Prodotto Cartesiano</u> e rappresenta tutti i punti del piano x, y. A ciascuno di essi è connesso un numero; reale se il punto giace sulla x, immaginario puro se giace sulla y, ed immaginario complesso per tutti i restanti punti del piano. Vi è quindi un parallelo fra le coordinate cartesiane e l'espressione binomia complessa.

Operazioni sui numeri complessi

<u>Somma</u>: $(a+ib)+(c+id) = ((a+c)+i(b+d))$

<u>Differenza</u>: $(a+ib)-(c+id) = ((a-c)+i(b-d))$

<u>prodotto</u>: $(a+ib)(c+id) = ac+ibc+iad-bd$

$$= ((ac-bd)+i(bc+ad))$$

[illegible]

Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha come parte reale la differenza fra il prodotto delle parti reali ed il prodotto dei coefficienti immaginari, e per coefficiente immaginario la somma dei prodotti fra la parte reale dell'uno ed il coefficiente immaginario dell'altro scambievolmente.

Quoziente: $\frac{(a+ib)}{(c+id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)-i(ad-bc)}{(c^2+d^2)}$

$$\boxed{\frac{(a+ib)}{(c+id)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+b^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+b^2}\right)}$$

Due numeri complessi si dicono Coniugati quando hanno uguali le parti reali ed opposti i coefficienti immaginari. Per esempio: $(a+ib)$ ed $(a-ib)$ per essi è reale sia la somma, sia il prodotto infatti: $(a+ib)+(a-ib) = 2a$.

$(a+ib)\cdot(a-ib) = a^2+b^2 = (|V|)^2$.

reciproco: $\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{(a+ib)}\frac{(a-ib)}{(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

$$\boxed{\frac{1}{(a+ib)} = \frac{a}{(|V|)^2} - i\frac{b}{(|V|)^2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{(a-ib)} = \frac{a}{(|V|)^2} + i\frac{b}{(|V|)^2}}$$

quadrato: $(a+ib)^2 = (a^2-b^2) + i(2ab)$

Queste operazioni possono essere eseguite anche se i numeri complessi sono espressi in forma diversa: .

$$|U|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \pm |V|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) = (|U|\cos\alpha \pm |V|\,\text{sen}\,\beta) + i(|U|\,\text{sen}\,\alpha \pm |V|\,\text{sen}\,\beta)$$

$$|U|e^{i\alpha} \pm |V|e^{i\beta}$$ (non è sviluppabile in questa forma)

$$|U|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)\cdot|V|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) = |U||V|\left[(\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta) + i(\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\alpha\cos\beta)\right]$$

$$= |U|\cdot|V|\left[(\cos(\alpha+\beta) + i\,(\text{sen}(\alpha+\beta))\right]$$

$$\boxed{(|U|e^{i\alpha})(|V|e^{i\beta}) = |U||V|e^{i(\alpha+\beta)}}$$

si noti la sintesi della forma esponenziale:

$$|U|e^{i\alpha}/|V|e^{i\beta} = \frac{|U|}{|V|}e^{i(\alpha-\beta)}$$

da questa:

$$\frac{|U|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}{|V|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)} = \frac{|U|}{|V|}\left(\cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta)\right)$$

$$\frac{1}{|V|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)} = \frac{1}{|V|}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$\frac{1}{|V|e^{i\theta}} = \frac{1}{|V|}e^{-i\theta}$$

Potenza di un numero complesso

Conviene ovviamente usare la forma esponenziale:

$$\left(|V|e^{i\theta}\right)^n = |V|^n \cdot e^{in\theta}$$

$$(a+ib)^n = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{in\,\text{arctg}(b/a)}$$

$$\left[|V|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)\right]^n = |V|^n\left(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)\right)$$

La potenza di un numero complesso è un numero complesso che ha per modulo la potenza del modulo, e per argomento, tante volte l'argomento quant'è l'esponente.

Questa regola è valida anche per esponenti frazionari (razionali) cioè per le radici.

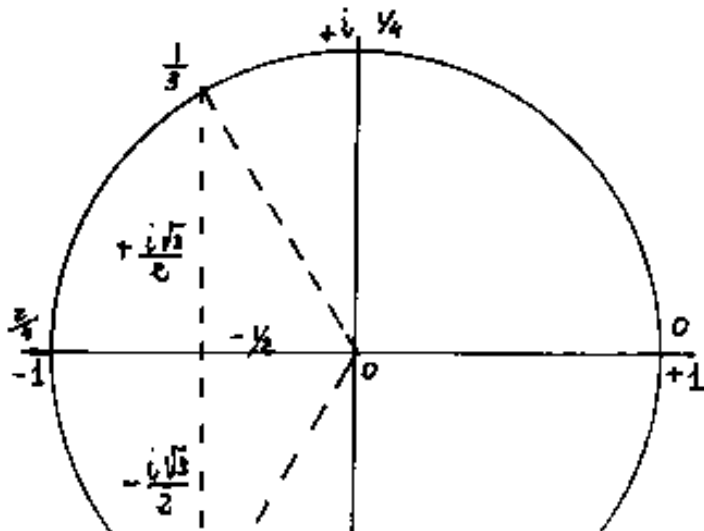
Formula di Moivre

Sia $|Z|$ il modulo di un numero immaginario complesso, l'espressione:

$$\left[|Z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\right]^{m/n} = |Z|^{m/n}\cdot\left(\cos\left(\frac{m\theta}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\theta}{n}\right)\right)$$

è detta formula di Moivre ed è usata per il calcolo delle radici ennesime di un numero complesso. In particolare per la radice quadrata:

$$\sqrt{|Z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)} = \sqrt{|Z|}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right)$$

Le radici ennesime dell'unità

Si traccia, al centro assi, un cerchio di raggio unitario. Si divide la circonferenza in tante parti quante l'indice di radice. questi punti espressi in

$-\frac{\sqrt{\ }}{2}$

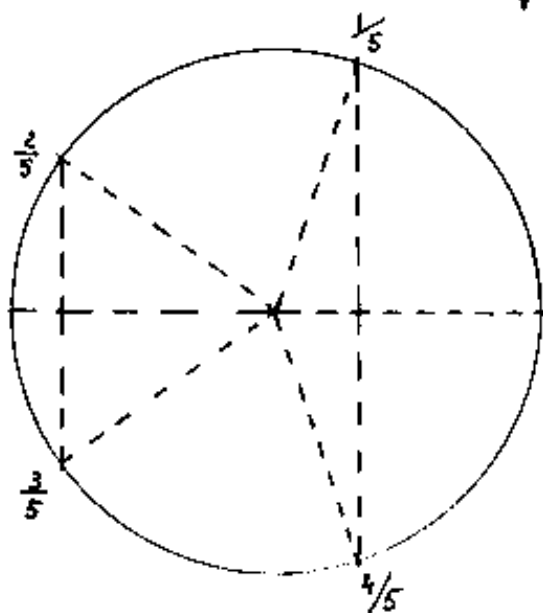
$2/3$

$-i$ $3/4$

dice, questi punti espressi in numeri complessi sono le radici dell'unità il cui modulo: |1| non varia con l'indice di radice.

$$\sqrt{1} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \quad ; \quad \sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad ; \quad \sqrt[4]{1} = \begin{cases} +1 \\ +i \\ -1 \\ -i \end{cases}$$

Disponendo di tavole trigonometriche la formula di Moivre è di grande ausilio per le espressioni bi=

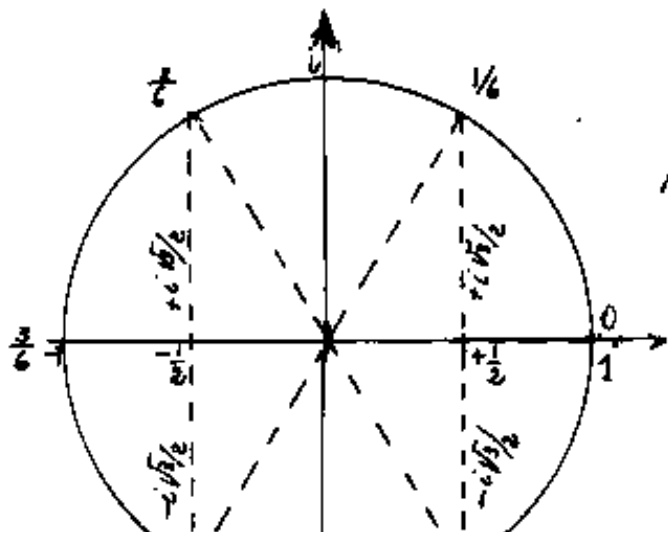
nomie per esempio: $(1)^{1/5}$ avremo: $\frac{360°}{5} = 72°$; o.
$72° \times 1 = 72°$; $72° \times 2 = 144°$; $72° \times 3 = 216°$; $72° \times 4 = 288°$

$\sqrt[5]{1} = \cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0) = 1$ (radice reale)

$= \cos(72°) + i\,\mathrm{sen}(72°) = +0.30902 + i\,(0{,}95106)$

$= \cos(144°) + i\,\mathrm{sen}(144°) = -0{,}80902 + i\,(0{,}58779)$

$= \cos(216°) + i\,\mathrm{sen}(216°) = -0{,}80902 - i\,(0{,}58779)$

$= \cos(288°) + i\,\mathrm{sen}(288°) = +0{,}30902 - i\,(0{,}95106)$

Il procedimento puó essere esteso ad indici di radice piú grandi in particolare se l'indice è n; $\frac{2\pi}{m}$ deve essere moltiplicato per ($m = 1, 2, 3, \ldots n-1$) mentre per la prima radice l'angolo é $0 = 2\pi$.

Per la radice sesta dell'unitá si possono scrivere i suoi valori direttamente.

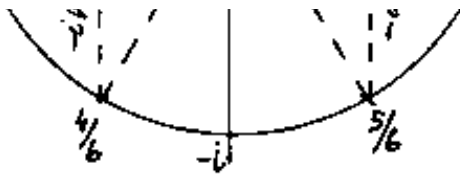
$\sqrt[6]{1} = +1$

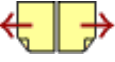
$= +\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= -1$

$4/6$ $-i$ $5/6$

$= -1$

$= -\frac{1}{2} - i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= +\frac{1}{2} - i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}$

I sistemi di riferimento

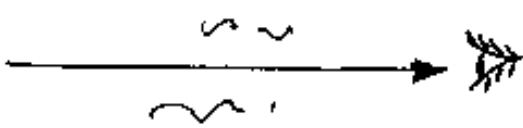
Fissare un punto nello spazio, significa riferire la sua posizione a qualcosa di immutabile. Consideriamo un osservatore ed un punto nello spazio, uniamo idealmente questo punto con la pupilla dell'osservatore e supponiamo di conoscerne la distanza $\overline{OP}$, cio' consente di determinare la posizione di tutti i punti sulla retta $\overline{OP}$ assumendo come unità positiva la distanza $\overrightarrow{OP}$ nel verso da O a P. e negative le distanze misurate in verso opposto. In questo caso ad ogni numero reale relativo corrisponde un punto su $\overrightarrow{OP}$. — Supponiamo ora di conoscere un secondo punto Q; resta determinato il piano POQ e quindi la perpendicolare a tale piano. Ma affinché Q sia veramente determinato occorre conoscere, non solo la distanza $\overline{OQ}$, ma anche l'angolo $P\hat{O}Q$, e se tale angolo è alla destra o alla sinistra dell'osservatore che guarda P. A ciò è connesso il verso della

servatore che guarda P. A ciò è connesso il verso della verticale per "O" al piano. Supponiamo di aver tracciato su un foglio una retta orientata $\overrightarrow{Ox}$, (con x variabile); una retta $\overrightarrow{Oy}$ può orientarsi in due modi diversi, cioè in modo che la retta $\overrightarrow{Ox}$ ruoti anti=orario per sovrapporsi ad $\overrightarrow{Oy}$ con versi concordanti; oppure ruoti orario. (è il verso di ruotazione dell'ope=

ratore "i") Quindi per determinare un punto nel piano, avremo la sequenza di due numeri: $A \equiv (x_A, y_A)$. ed anche: $\overrightarrow{OA} = X_A + i\,y_A$.

Al parallelo fra la forma binomia di un numero complesso e le coordinate cartesiane ortogonali, corrisponde il parallelo fra la forma esponenziale, dello stesso numero complesso, e le coordinate polari.

Il modulo $|\overline{OA}| = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ e l'argomento: $\theta_A = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_A}{x_A}\right)$ $\left(\overrightarrow{OA} = |\overline{OA}|\, e^{i\theta_A}\right)$; Possono univocamente determinare tutti i punti del piano.

Ma l'uomo non dispone di una "direzione" privilegiata sulla quale diporre il suo "asse reale", le cose quindi si complicano quando dal sistema piano si passa al sistema tridimensionale, o addirittura ennedimensionale. Assunta una direzione (arbitraria) e su una retta, orientata in tale direzione, fissiamo un punto origine (arbitrario); supponiamo che questa retta sia l'asse di ro=

tazione del suo intorno; l'intorno puó ruotare in due versi opposti, per distinguerli ci si avvale del verso della retta orientata. (Due persone che si trovano da bande opposte ad una vetrata trasparente, ed una traccia sul vetro una circonferenza muovendosi in verso orario, cioè come lui vede muovere le lancette dell'orologio, l'altra persona vedrá trac-

ciare la circonferenza in verso antiorario, cioè opposto a come vede muovere le lancette dell'orologio. Del resto se l'orologio fosse trasparente, visto dal di sotto, vedremmo muovere le lancette in verso opposto.

Questa semplice relatività dell'osservatore, ha portato ad una non ammirevole confusione in vari testi di meccanica razionale, di analisi, di geometria, ed altri.

— Se abbiamo per asse di rotazione, una retta orientata, noi dobbiamo guardare la rotazione del suo intorno ponendo l'occhio dalla parte della punta della freccia che indica il verso della retta, e guardandolo verso la coda, se vediamo l'intorno della retta muoversi come le lancette dell'orologio, cioè come chi legge vede questo verso di rotazione: , diremo il moto Orario. Se invece vediamo l'intorno della retta muoversi: , diremo

il moto <u>antiorario</u>.

Anche questa è <u>una convenzione</u>, ed è generalmente accettata. Con molta umiltà dobbiamo riconoscere che l'uomo per definire per quale verso ruota un corpo deve: fissare un verso arbitrario all'asse di rotazione, ed una posizione (arbitrariamente convenuta) per l'osservatore, non basta! Deve paragonarlo ad un movimento che si ritiene noto!

Cerchiamo di capire meglio questo argomento fondamentale, facendone un po' di storia, al fine di evitare perplessità a chi legga testi di anni passati.

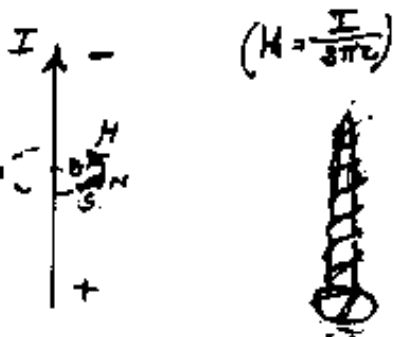
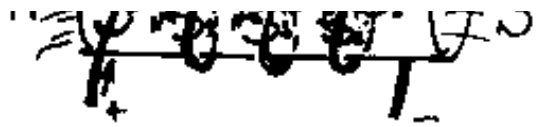
Consideriamo un uomo, in piedi, al centro di un grande orologio orizzontale; egli vede apparire le lancette dell'orologio alla sua sinistra e le vede dirigersi verso la sua destra. Cosí come un uomo nell'emisfero nord della terra, che guardi verso sud, vede "sorgere" il sole e le stelle alla sua sinistra e li vede dirigersi e tramontare alla sua destra. Un tale moto fu chiamato: sinistrorso perché "sorto" a sinistra o anche destrogiro perché gira verso destra. I latini usavano il verbo: orior per sorgere; Ovidio, nei Tristia: ... "Lucifer ortus erat" = "La stella Venere era sorta". Da ciò la convenzione di chiamare: destrorso o sinistrorso un vento che proveniva da destra o da sinistra. Si aveva cioè, per le ruotazioni: orario = destrogiro = sinistrorso; o, antiorario = sinistrogiro = destrorso. Purtroppo alcuni fecero confu=

sione credendo: sinistrorso = sinistrogiro = antiorario. Sorsero dispute e vennero "i dotti" i quali, senza tener conto che le denominazioni sono solo "convenzioni", fecero notare che la desinenza "orso" non deriva da "orior", ma da "adversus" che significa: "rivolto verso" e quindi: sinistrorso = sinistrogiro !!... Se avessero letto i classici avrebbero notato che i due termini erano usati come opposti. (Forse erano dotti solo in latino). Cfr. Levi-Civita-Amaldi, compendio di Meccanica Razionale - Zanichelli - Bologna - 1965 parte II pag. 5 (nota).

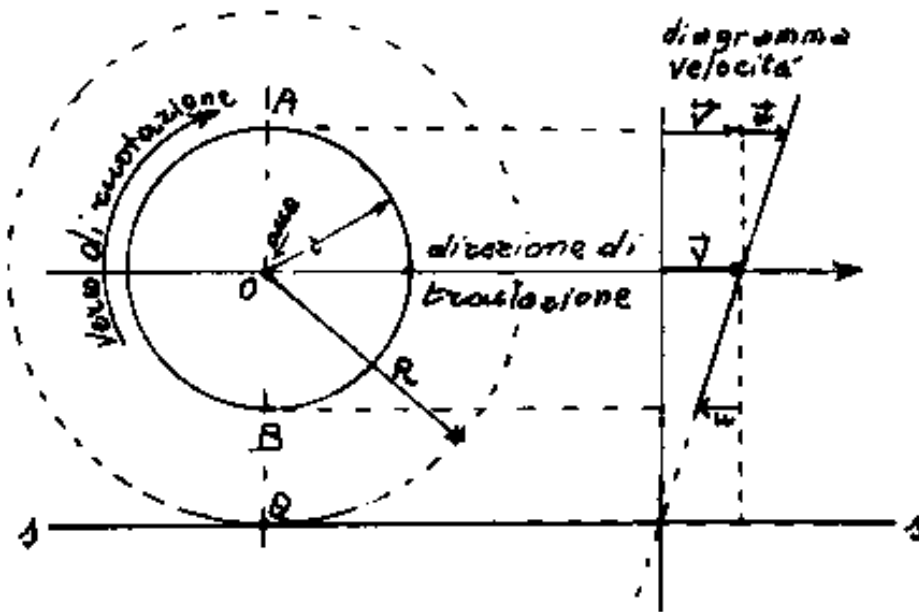
Lasciamo perdere le discussioni fra scienziati.

Noi consideriamo una particella infinitesima, (non un punto) che si muova di moto comunque complesso, essa, istante per istante avrà una traslazione secondo una retta orientata (tangente alla traettoria) ed una ruotazione intorno ad un asse, pure orientato, per definire il verso di rotazione.
In generale la retta e l'asse di rotazione non sono coincidenti, inoltre variano istante per istante. Se fossero coincidenti e non mutassero direzione, si avrebbe il moto della vite nella madrevite (il dado) che può essere "destrogira" (come le viti di uso comune, dette appunto destrogire) oppure sinistrogira (come certe viti autobloccanti). Supponiamo di avere un bullone con dado a vite destrogira, e di volerlo avvitare nel bullone, a noi osservatori appare come se la mano destra e la mano sinistra si muovano

di verso opposto, peró se prendiamo un orologio a lancette, sia la mano destra che la mano si= nistra, a cui si rivolge l'orologio, operano un mo vimento orario tendente ad anticipare la posizio ne delle lancette e ciò perchè l'orologio una volta è affacciato alla mano destra e l'altra volta è affacciato alla mano sinistra.

La vite destrogira si allontana dall'osservatore che la vede muovere con rotazione oraria, e si avvicina all'osservatore che la vede muovere con rotazione antioraria. Ricordiamo l'esperienza di Oersted, e la legge di Biot e Savart: "Una corrente elettrica, in un conduttore rettilineo, considerata nel verso "convenzionale" dal polo positivo al polo negativo, genera un campo magnetico che ruota intorno al conduttore, "convenendo" che il verso del campo magnetico sia dal polo sud, al polo nord; avremo che i due moti: quello di traslazione della corrente I, e quello di ruotazione del campo magnetico H corrispondono complessivamente al moto di avvitamento della vite destrogira. Con ciò appare chiaro da quale parte sarà il Nord del

$\left(H = \frac{I}{2\pi r}\right)$

ro da quale parte sará il Nord della calamita ottenuta da un avvolgimento a solenoide, di un conduttore di corrente, attorno ad un nucleo ferromagnetico. (v. figura).

Si noti che il verso di avvitamento o svitamento, fra vite e madrevite, è un movimento mutuo, e pertanto indipendente dall'osservatore e dal sistema di riferimento.

Vediamo ora il caso che la retta orientata del moto di traslazione della nostra particella e l'asse di rotazione della particella stessa siano perpendicolari; e che la retta e l'asse si incontrino in un punto interno di un corpo di dimensioni finite, ove si trova la nostra particella infinitesima. Per semplicità consideriamo sferico il corpo.

I punti sull'asse di rotazione sono affetti solo da moto traslatorio (non hanno velocità periferiche di direzione diversa) e sia $\vec{V}$ questa velocità media. Però ad un punto come A occorre aggiungere la velocità di traslazione $u = \omega r$ ove "r" è la distanza da O ed ω la velocità angolare; mentre al punto B, tale velocità va tolta. Se facciamo il diagramma delle velocità nella direzione di traslazione notiamo che esiste un

tá nella direzione di traslazione, notiamo che esiste un punto Q la cui velocitá é istantaneamente nulla, cioé é come se la sfera di diametro: $\overline{AB} = 2t$ fosse concentrica e solidale con una sfera di raggio $\overline{OQ} = R$ che rotola senza strisciare sulla retta ss. Cioé la normale per Q alla ss, è un'asse di rotazione istantaneo con velocitá angolare $\omega_Q = V/R = \omega$. (cioè la velocitá angolare è invariante con gli assi)

Se la direzione di traslazione, e la direzione di ruotazione (possiamo dire "direzione di rotazione" perché l'asse di rotazione può spostarsi parallelamente a se stesso, e deve essere orientato per decidere il verso di rotazione, noi abbiamo convenuto per direzione di rotazione la direzione di avanzamento o avvitamento della vite destrogira), formano un angolo qualsiasi diverso da zero e da $\pi/2$, si può sempre scomporre la direzione di rotazione in due direzioni, una parallela ed una perpendicolare alla direzione di traslazione. Se θ è l'angolo delle due direzioni ed ω la velocità angolare

$\omega_t = \omega \cos\theta$ = moto di avvitamento

$\omega_n = \omega \operatorname{sen}\theta$ = moto di rotolamento.

Se scomponiamo la velocità $\vec{V}$ in direzione normale e parallela alla direzione di rotazione avremo

$\vec{V}_t = \vec{V}\cos\theta$ = avanzamento dell'avvitamento

$\vec{V}_n = \vec{V}\operatorname{sen}\theta$ = avanzamento del rotolamento

$v_m = V \operatorname{sen} \vartheta$ = avanzamento del rotolamento

Fra gli infiniti assi paralleli alla direzione di rotolamento, si è dimostrato che vi è un asse per il quale $\vec{V}_m$ è zero (o minimo) questo asse è detto asse di Mozzi. Le direzioni di traslazione e di rotazione determinano una giacitura di piani paralleli cioè una terza direzione normale alle altre due.

Se con "r" indichiamo la retta del moto di traslazione

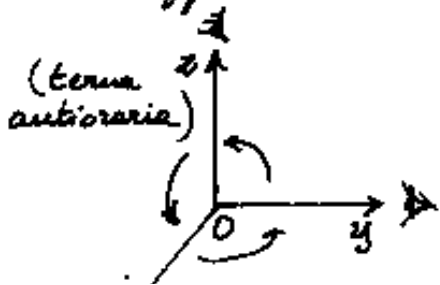
con n la normale ad essa

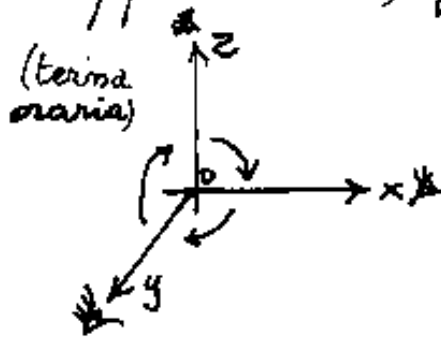
con t la normale al piano r, n.

Supponiamo che r ed n si incontrino in c e per c tracciamo t. Sia "O" il punto di t in cui é nulla la traslazione. Il punto "O" sara' fisso, e possiamo introdurre la geometria come: "Una meccanica senza tempo tinta.

Terne destrogire e terne sinistrogire

Nei testi di meccanica razionale, si tiene a porre in evidenza la differenza fra una terna cosiddetta oraria o destrogira ed una terna antioraria o sinistrogira; pero' difficilmente specificano la posizione dell'osservatore.

(terna antioraria) z O y

Data la terna Oxyz con la precisa sequenza: prima "x", poi "y", poi "z" é detta antioraria o sinistrogira se guardan

antioraria o sinistrogira se guardando dalla punta della "z" verso x y, vediamo la x ruotare antiorario per sovrapporsi ad "y"; guardando dalla punta delle "x" vediamo y ruotare antiorario per sovrapporsi a "z"; guardando da y vediamo z ruotare antiorario per tornare ad x. Viceversa si vedono moti orari di x per andare su y di y su z e di z su x per terne orarie.

(terna oraria)

La direzione

Noi utilizzeremo la nostra terna: oxyz, detta antioraria o sinistro gira, nata dal parallelismo con la terna: c r n t, ove i moti apparenti dipendenti dalla posizione dell'osservatore non hanno influenza perché nata su definizioni di moto indipendenti dall'osservatore (vedi pag. prec.).

In particolare quando diciamo "direzione: x" intendiamo l'insieme di tutte le rette parallele ed equiverse all'asse X. Analogamente per la "direzione: y", "direzione z", e qualunque altra "direzione n".

Non ha senso dire: "un punto all'infinito", (anche se sarebbe comodo pensarlo come determinante una direzione). Consideriamo due punti diversi A e B in campo finito, dai quali si collimi in direzione di un terzo punto C sull'asse del segmento $\overline{AB}$. Il segmento $\overline{AB}$ finito, può essere anche molto grande, ma

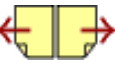
fisso e determinato. Facciamo allontanare "C" (sull'asse) perpendicolarmente, dalla base $\overline{AB}$, via, via che "C" si allontana, l'angolo $A\hat{C}B$ è sempre più piccolo; sia $A\hat{C}B = \varepsilon$, avremo che per distanze molto grandi: $R\varepsilon \cong \overline{AB}$ cioè $\varepsilon \cong \frac{\overline{AB}}{R}$ ed anche: $\lim_{R \to \infty} \left(\frac{\overline{AB}}{R} \right) = 0$ per cui al limite: $\varepsilon \to 0$ e le rette $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ tendono ad essere parallele.

Cioè "la direzione" (verso $C \to \infty$) è la stessa, se presa da due punti distinti in campo finito.

Facciamo ora il discorso inverso: sia C un punto fisso e determinato in campo finito, ed $\overline{AB}$ una base molto grande, sul cui asse giace C. Facendo questa volta allontanare la base e misuriamo da C l'angolo $A\hat{C}B$; anche in questo caso per distanze $R \to \infty$ avremo: $\varepsilon \to 0$, cioè i punti A e B si vedono sovrapposti, ma la base $\overline{AB}$ (molto grande) è tutt'altro che un punto. Perciò all'infinito quello che concepiremmo come un punto può, nelle nostre dimensioni, essere anche una grandezza finita molto grande. Attenzione, con la base AB indefinitamente lontana, non cambia direzione il passare da $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{CB}$.

Cioè il concetto di limite implica due aspetti (due facce): al di qua, ed al di là del limite, prossimi quanto si vuole. Il limite è come il punto, la retta, il

piano, non esiste in se, lo poniamo noi; ed è utilissimo, il porlo infatti: con n comunque indefinitamente grande, ma finito: $3\sum 10^{-n} < \frac{1}{3}$ (al comunque grande si può sempre aggiungere 1) Invece: $\lim_{n\to\infty}\left(3\sum_{0}^{n}10^{-n}\right) = \frac{1}{3}$.

Non è vero che facendo: 0,3333333..... si raggiunge $\frac{1}{3}$, ci avviciniamo ad $\frac{1}{3}$. Solo idealizzando l'esistenza del limite, si può raggiungere.

Torniamo alla nostra "direzione" che può essere variata di un angolo piccolo a piacere, e grande (non a piacere), al massimo di $\alpha < 360° = 2\pi$. Si noti che una variazione di direzione avviene sempre su uno degli infiniti piani del fascio che ha per asse comune la direzione di partenza. Non basta un solo angolo per definirla; con un solo angolo le infinite direzioni variate con quell'angolo, formerebbero la superficie laterale di un cono avente per asse la direzione base. Per fissare il semipiano occorre anche definire se l'angolo ruota a "destra" o a sinistra del semipiano base. Il problema è analogo a quello di definire un punto sulla superficie sferica: occorre precisare il piano equatoriale, ed il semipiano del meridiano origine, occorre fissare la direzione nord-sud per la latitudine ed Est-owest per la longitudine. La direzione base nel caso delle coordinate geografiche sareb-

ne base nel caso delle coordinate geografiche sareb-
be sul raggio che uscendo dal centro della terra si di-
rige verso il punto comune fra il meridiano di Greenwich e
l'equatore, punto che si trova nel golfo di Guinea. Se diamo
le coordinate di Firenze: lat. 43°46' Nord, long. 11°15' Est., la varia-
zione fra la direzione base e la direzione: centro-terra-
-Firenze è 45°20' ma questo angolo non individua

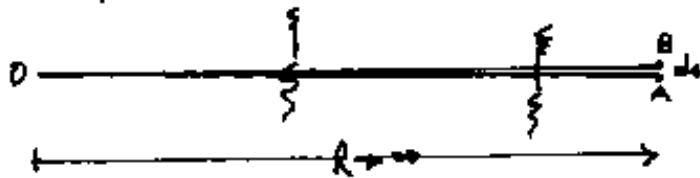
solo Firenze, ma tutti i punti che il cono, con vertice al centro della terra, intercetta sul globo. Partendo da Firenze passerebbe per le Azzorre, attraverso il Brasile, l'oceano Atlantico, la Somalia, l'Arabia Saudita, la Grecia, per tornare a Firenze.

Quindi una variazione di direzione è anche un angolo piano, ma non solo l'ampiezza di tale angolo, ma anche la posizione del semipiano, o del piano se aggiungiamo il verso della variazione. Tre assi coordinati, ovvero tre direzioni coordinate, risolvono il problema. Noi considereremo quindi un "qualsiasi punto "O" in campo finito come "centro" del nostro sistema di riferimento. Da questo punto irraggiano le infinite semirette nelle infinite "direzioni". Le supponiamo come gli infiniti raggi R di una sfera di centro O, sfera che va crescendo fino al limite

del finito ove a ciascun punto della sua superficie corrisponde una direzione da O.

Ci domandiamo se la variazione di direzione sulla superficie sferica indefinitamente grande non può essere né maggiore, né minore di "ds" (differenziale di misura lineare) ove si ha: $\lim_{R \to \infty} \left(\frac{ds}{R} \right) = d\theta$ (differenziale di misura angolare). Cioè se "ds" lo consideriamo la più

piccola dimensione lineare, alla sua rottura permane
la più piccola variazione angolare di direzione.

Questo concetto lo vediamo meglio se dal centro "O" si fanno
uscire <u>due raggi</u> indefinitamente grandi aventi al loro estre=
mo il differenziale ds delimitato ai suoi estremi da
due punti distinti A e B. In ogni altra sezione con
$R < R \to \infty$ (R tendente all'∞ non ha ancora passa=
to il limite) i due raggi non sono più distanziati da un mi=
cro-segmento, sono coincidenti, cioè sovrapposti, ma dif=
ferenziati per il diverso orientamento (direzione) se uno
è in direzione s l'altro è in direzione $s+ds$. Quindi due
raggi sovrapposti possono differire di un $d\theta$; è quanto
avviene collimando da C la (molto grande) base $\overline{AB}$
quando questa ha passato il limite: $(R=\infty)$.

I cultori dell'ordine dei differenziali direbbero
che $d\theta$ è infinitesimo di ordine superiore a ds,

[illegible]

in quanto a livello ds/n esiste ancora dθ. Si deve

però notare che per un ds rettilineo bastano due punti

mentre per un "dα" curvilineo occorrono tre punti almeno.

ove "ds" sarebbe la corda di "dα" sotteso a "dθ."

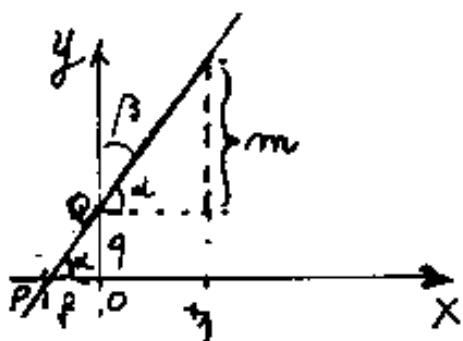
Possiamo ora trattare la geometria analitica.

La geometria analitica.
(del piano)

Nel I volume abbiamo già introdotto vari concetti, per comodità riscriviamo le relazioni note e le completiamo.

Rappresentazione di un punto:

$$P \equiv (x_P ; y_P).$$

Equazioni della retta r.

$$\boxed{y = mx + q}$$ forma esplicita

ove: $m = tg(\alpha)$ = coefficiente angolare.

q = coefficiente di traslazione lineare.

Per disegnarla si riporta "q" su y, poi, con ascissa = 1, il punto di ordinata: (q+m) - la retta è l'unione dei due punti.

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$ forma implicita

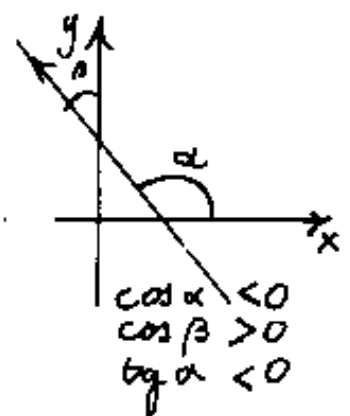
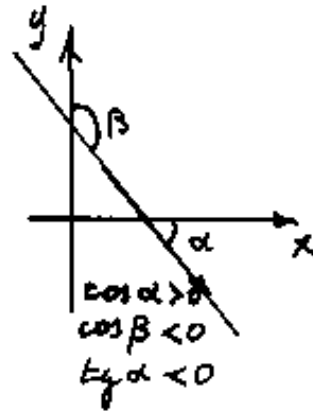
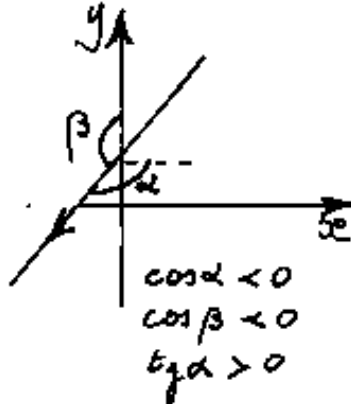
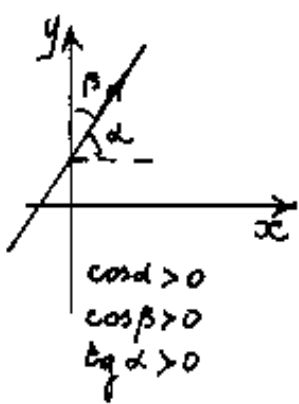
è sempre bene trasformarla in forma implicita ponen

do: $m = -\frac{a}{b}$; $q = -\frac{c}{b}$. Si noti che essendo $m = tg(\alpha)$ necessariamente a e b sono proporzionali a sen α e cosα ed hanno segno opposto. Poniamo: $a = {}^{+}K \operatorname{sen}\alpha$; $b = {}^{-}K \cos\alpha$, avremo che: $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{K^2(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)} = K$; per cui dividendo l'espressione per $\sqrt{a^2+b^2}$; essendo $q = \frac{c}{-b} = -\frac{c}{b}$ cioè

$\frac{c}{K} = q\cos(\alpha) = \delta$ = distanza della retta dall'origine.

cioè: $$\cos\beta(x) - \cos(\alpha)y + \delta = 0$$

Nell'espressione ora scritta, $\cos\beta$ e $\cos\alpha$ sono i coseni direttori della retta nel piano. Però occorre fare molta attenzione ai segni, poiché il coseno è positivo nel I e IV quadrante, mentre il seno è positivo nel I e II, la tangente è positiva nel I e III. D'altra parte l'intera equazione può sempre moltiplicarsi per (-1). Si hanno i seguenti casi di rette orientate:

$\cos\alpha > 0$	$\cos\alpha < 0$	$\cos\alpha > 0$	$\cos\alpha < 0$
$\cos\beta > 0$	$\cos\beta < 0$	$\cos\beta < 0$	$\cos\beta > 0$
$tg\,\alpha > 0$	$tg\,\alpha > 0$	$tg\,\alpha < 0$	$tg\,\alpha < 0$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

forma segmentaria

Di facile costruzione, essendo noti i punti di intersezione con gli assi: (q su y); (p su x) (col loro segno).

Per trasformarla in esplicita: $(m = -q/p)$; $(q = q)$.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

forma parametrica

Per esempio supponiamo di prendere come parametro t, le lunghezze della retta a partire da un suo punto $P \equiv (x_P; y_P)$,

avremo:

$$\begin{cases} x = t\cos\alpha + x_P \\ y = t\,\mathrm{sen}\,\alpha + y_P. \end{cases}$$

$$(y - y_A) = m(x - x_A)$$

equazione della retta passante per il punto: $A \equiv (x_A, y_A)$ ed avente il coefficiente angolare "m" ; $q = (y_A - m x_A)$. Ad ogni valore di "m", si ha una retta per A, perciò può considerarsi l'equazione di una stella piana di rette con centro in A.

$$\frac{(y - y_A)}{(x - x_A)} = \frac{(y_B - y_A)}{x_B - x_A}$$

equazione della retta passante per due punti noti: $A \equiv (x_A, y_A)$ e $B \equiv (x_B, y_B)$.

ove: $m = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)$; $q = y_A - x_A\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)$.

condizione di parallelismo (fra rette)

è di avere lo stesso coefficiente angolare "m".

condizione di perpendicolarità (fra rette)

è che abbiano coefficienti angolari l'uno l'inverso opposto dell'altro: $\left(m_1 = \frac{-1}{m_2}\right)$.

$$(y - y_A) = \frac{-1}{m}(x - x_A)$$

equazione della retta per A e perpendicolare alle rette di coefficiente angolare "m"

coefficiente angolare "m"

Coordinate del punto B di intersezione della retta di eq. $y = mx + q$ e la sua perpendicolare passante per A

$$x_B = \left(\frac{m}{m^2+1}\right)\left(y_A + \frac{x_A}{m} - q\right)$$

$$y_B = \left(\frac{m}{m^2+1}\right)\left(m\,y_A + x_A + \frac{q}{m}\right)$$

distanza fra i due punti: A e B (o del punto A dalla retta $y=mx+q$ di cui sopra.)

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

La distanza fra i due punti A e B; ricordando che:

$$m = tang(\alpha)$$

e che:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \qquad sen(\alpha) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

se "m" è il coeff. angolare della retta $\overline{AB}$ si ha:

$$|\overline{AB}| = |(x_B - x_A)(\sqrt{1+m^2})|$$

$$|\overline{AB}| = |(y_B - y_A)\left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\right)|$$

equazioni della distanza fra due punti A e B su una retta di coeff. angolare "m"

(se sostituissimo: $m = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)$ otterremmo: $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$)

Se "m" è il coeff. angolare della retta per B ed "$-\frac{1}{m}$" il coeff. angolare della perpendicolare $\overline{AB}$, si ha:

$$|\overline{AB}| = |(x_B - x_A)\left(\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\right)|$$

$$|\overline{AB}| = |(y_B - y_A)(\sqrt{m^2+1})|$$

equazioni della distanza del punto A dalla retta intercettata in B dalla perpendicolare per A ed avente per equazione: $\frac{y - y_B}{x - x_B} = m$

In generale:

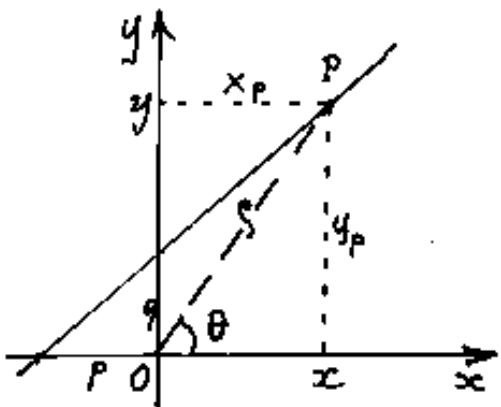
$$\delta = \left| \frac{y_A - m x_A - q}{\sqrt{m^2 + 1}} \right|$$

equazione della distanza di un punto $A \equiv (x_A, y_A)$ dalla retta di equazione: $y = mx + q$

Coordinate polari

Rappresentazione di un punto: $P \equiv (\rho, \theta)$

ove: "ρ" = modulo e "θ" = argomento o anomalia

Equazione della retta in coordinate polari

Notiamo che per passare da coordinate cartesiane a coordinate polari basta sostituire:

$$x = \rho \cos\theta \quad ; \quad y = \rho \,\text{sen}\,\theta$$

Per la sostituzione inversa: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

avremo:

in coordinate cartesiane: ; in coordinate polari

$$y = mx + q \quad \Rightarrow \quad \rho \,\text{sen}\,\theta = m \cdot \rho \cos\theta + q$$

$$\rho = \frac{q}{\text{sen}\,\theta - m\cos\theta}$$

$$ax + by + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a\rho \,\text{sen}\,\theta + b\rho\cos\theta + c = 0$$

$$\rho = \frac{-c}{a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta}$$

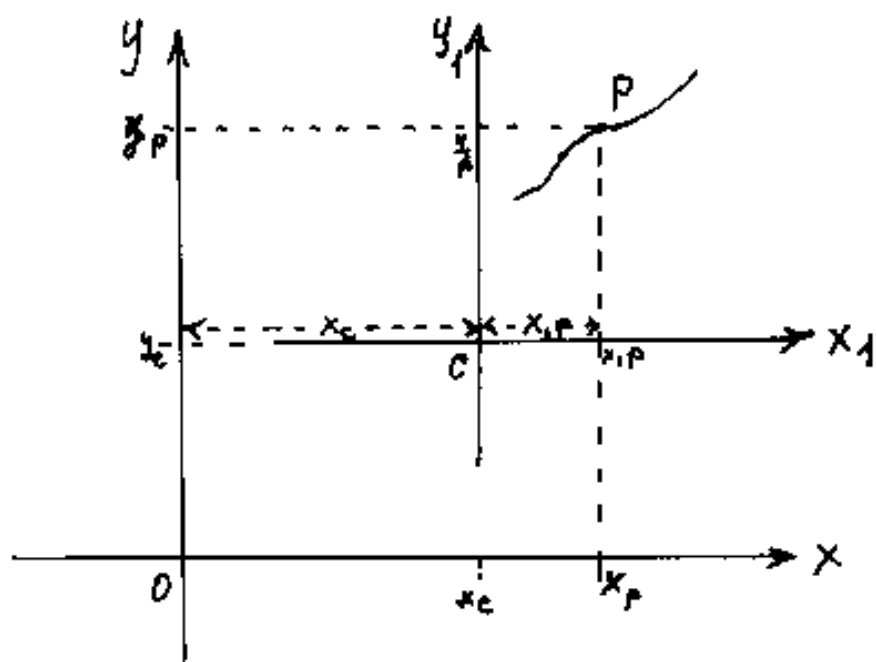
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho \operatorname{sen}\theta}{p} + \frac{\rho\cos\theta}{q} = 1$$

$$\rho = \frac{qp}{q\operatorname{sen}\theta + p\cos\theta}$$

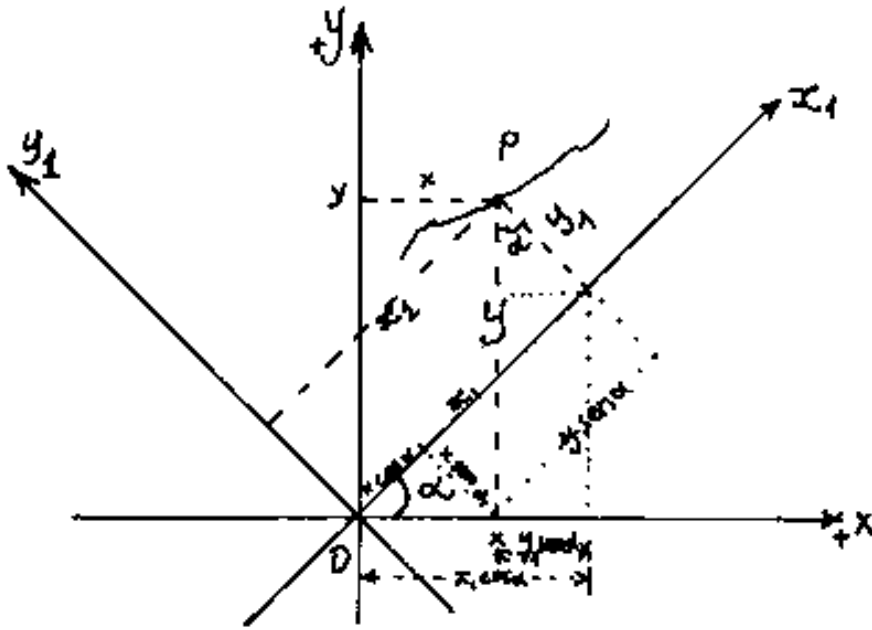
$$m(x - x_p) = (y - y_p) \quad \Rightarrow \quad m(\rho\operatorname{sen}\theta - x_p) = (\rho\cos\theta - y_p)$$

$$\rho = \frac{m x_p - y_p}{m\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$$

Traslazione di assi

L'argomento è già stato esposto nel primo volume (vedi eq. del cerchio e della parabola), In generale consideriamo due sistemi di assi paralleli: Oxy ed Cx_1y_1, ove nel sistema Oxy il punto: $C \equiv (X_c ; Y_c)$ mentre nel sistema: Cx_1y_1 il punto C ha $x_{1c}=0$; $y_{1c}=0$ mentre il punto "O" avrà: $X_{1(O)} = -X_c$; $Y_{1(O)} = -Y_c$.

Data la posizione di un generico punto P del piano, riferita al sistema Cx_1y_1, e vogliamo riferire tale posizione al sistema Oxy, avremo: $X_p = (X_c + X_{1P})$; $Y_p = (Y_c + Y_{1P})$; se le coordinate x_1 ed y_1 sono correlate da una funzione: $y_1 = f(x_1)$,

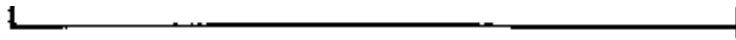
essendo: $y_1 = (y - y_e)$; $x_1 = (x - x_c)$ avremo: $(y - y_e) = f_1(x - x_c)$

Se invece abbiamo correlate le coordinate x, y $y = f(x)$ e vogliamo riferire la curva al sistema cx_1y_1 avremo $(y + y_e) = f(x + x_e)$

Ruotazione di assi

Dato il sistema di assi oxy, ruotiamolo, intorno ad O dell'angolo α (assunto positivo il verso di rotazione del semiasse +x per sovrapporsi al semiasse +y) e chiamiamo ox_1y_1 il sistema ruotato. Considerato un punto P del piano riferito nel sistema oxy, avremo:

$$\begin{cases} x_1 = x\cdot\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha \\ y_1 = y\cdot\cos\alpha - x\cdot\text{sen}\,\alpha \end{cases}$$

inversamente:

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\,\text{sen}\,\alpha \\ y = x_1\,\text{sen}\,\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}$$

Questa seconda espressione si puo' ottenere dalla precedente scambiando $x\,y$ con $x_1 y_1$ ed (α) con $(-\alpha)$, infatti $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$; $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Se: $y = f(x)$ avremo: $(x_1 \operatorname{sen}\alpha + y_1 \cos\alpha) = f(x_1 \cos\alpha - y_1 \operatorname{sen}\alpha)$.

In generale da una forma esplicita si passa ad una forma implicita.

Equazione della retta tangente ad una curva piana.

Sia $y = f(x)$ l'espressione di una linea piana, avremo, punto per punto, $y' = f'(x) = \tan(\alpha) = m$ = coefficiente angolare della retta tangente.

Sia quindi "T" un punto della linea: $y_T = f(x_T)$; $y'_T = f'(x_T)$; l'equazione della retta tangente in T sarà:

$$\frac{y - f(x_T)}{x - (x_T)} = f'(x_T)$$

Supponiamo ora di voler tracciare le tangenti ad una linea piana da un punto "Q" esterno alla linea.

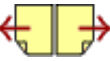
L'equazione di tutte le rette passanti per "Q" è:

$$\frac{y - y_Q}{x - x_Q} = m$$ od anche: $$y = mx - mx_Q + y_Q$$

facendo sistema con: $y = f(x)$, otteniamo le coordinate dei punti comuni alla retta per Q ed alla curva, in funzione di "m"; discutendo le risoluzioni si trova per quali

Valori di "m" le rette sono: <u>esterne</u>, <u>tangenti</u>, o <u>tagliano</u> la curva.

~ Si può anche ragionare diversamente, ponendo in incognita le coordinate del punto di tangenza T.: $f'_{(x_T)} = \frac{f_{(x_T)} - y_Q}{x_T - x_Q}$, risolvendo rispetto a (x_T) possiamo scrivere l'equazione della retta tangente:

$$y = f'_{(x_T)}\, x - f'_{(x_T)}\, x_Q + y_Q \,.$$

Equazione della tangente e della normale ad una curva.

Sia $y=f(x)$ l'equazione della curva, $y'=f'(x)=tg(\alpha)=$"m", è il coeff. angolare della retta tangente in (x), per cui l'equazione della retta tangente sarà: $\frac{(y-f(x_T))}{((x)-(x_T))}=f'(x_T)$;

ove: (x_T) = ascissa del punto di tangenza; ed anche:

$$y=f'(x_T)\cdot x+(f(x_T)-f'(x_T)\cdot x_T$$ <u>equaz. della tangente in forma esplicita</u>

$$\frac{x}{-(f(x_T)-f'(x_T)\cdot x_T)/f'(x_T)}+\frac{y}{(f(x_T)-f'(x_T)\cdot x_T)}=1$$ <u>equaz. della tangente in forma segmentaria.</u>

ove: $q=(f(x_T)-f'(x_T)\cdot x_T)$; $p=-q/f'(x_T)$ sono i segmenti intercettati dalla retta tangente sugli assi.

Sappiamo che l'equazione della normale ad una retta, ha per coefficiente angolare: $\frac{-1}{m}$; perciò l'equazione della normale per "T" alla curva = (alla tangente), sarà:

$$\frac{(y-f(x_T))}{(x-x_T)}=\frac{-1}{f'(x_T)}$$; ed anche:

<u>Equaz. della normale per T</u>

$$y = \frac{-x}{f'(x_T)} + \left(f(x_T) + \frac{x_T}{f'(x_T)}\right)$$

Equaz. della normale per T in forma esplicita

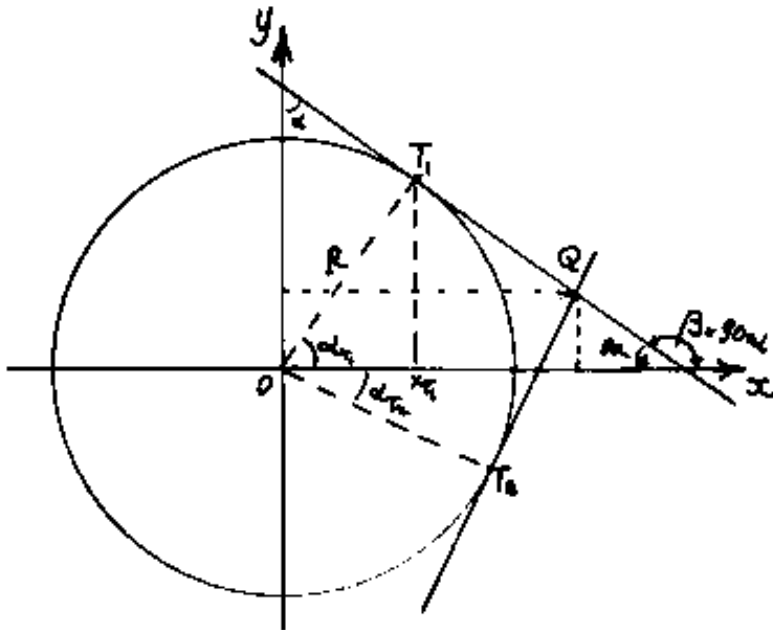
$$\frac{x}{\left(f'(x_T)\,f(x_T) + x_T\right)} + \frac{y}{\left(f(x_T) + x_T/f'(x_T)\right)} = 1$$

Equaz. della normale per T in forma segmentaria

ove: $p = \left(f(x_T)\,f'(x_T) + x_T\right)$, $q = \left(f(x_T) + x_T/f'(x_T)\right)$ sono i segmenti intercettati sugli assi dalla normale per T.

Equazioni delle rette tangenti al cerchio

Sia : $y = f(x) = \sqrt{R^2 - X^2}$; $f'(x) = \dfrac{-X}{\sqrt{R^2 - X^2}}$

Se è noto il punto T di tangenza. (essendo nota l'equazione basta un solo elemento per determinare T; per es. X_T oppure y_T, o α_T)

Noto X_T:

$$y = \left(\frac{-X_T}{\sqrt{R^2 - X_T^2}}\right) X + \frac{X_T^2}{\sqrt{R^2 - X_T^2}} + \sqrt{R^2 - X_T^2}$$

$$y = \left(\frac{-X_T}{\sqrt{R^2 - X_T^2}}\right) X + \left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2 - X_T^2}}\right)$$

ed anche:

$$y = \frac{-X_T}{y_T} X + \frac{R^2}{y_T}$$

Dividendo ambo i termini delle frazioni per R si ha:

$$y = \frac{-X_T/R}{\sqrt{1 - (X_T/R)^2}} X + \frac{R}{\sqrt{1 - (X_T/R)^2}}$$; ma $X_T/R = \cos(\alpha)$ per cui:

se noto è α_T si ha:

$$y = \frac{-\cos\alpha_T X + R}{\operatorname{sen}\alpha_T}$$

equaz. della tangente nel punto (R, α_T)

Se è noto il punto Q esterno al cerchio e da $Q \equiv (x_Q, y_Q)$, vogliamo tracciare le tangenti, si può operare in più modi; e cioè; nel modo classico: <u>La tangente deve passare per Q</u> : $y = mx - mx_Q + y_Q$ <u>ma deve anche passare per T</u> : $\sqrt{R^2 - x_T^2} = m x_T - (m x_Q - y_Q)$.

risolviamo rispetto ad x_T:

$$m^2 x_T^2 - 2m(m x_Q - y_Q) x_T + (m x_Q - y_Q)^2 = R^2 - x_T^2$$

$$(m^2+1) x_T^2 - 2m(m x_Q - y_Q) x_T + [(m x_Q - y_Q)^2 - R^2] = 0$$

$$x_T = \frac{m(m x_Q - y_Q) \pm \sqrt{m^2(m x_Q - y_Q)^2 - (m^2+1)[(m x_Q - y_Q)^2 - R^2]}}{m^2+1}$$

se $\Delta > 0$ si hanno due risoluzioni, cioè la retta per Q taglia il cerchio.

$\Delta < 0$ Non si hanno punti comuni fra retta e cerchio, cioè la retta per Q è esterna

$\Delta = 0$ Si ha una sola radice cioè un solo punto comune, la retta per Q è tangente

Quindi dobbiamo uguagliare a zero il discriminante:

semplificando: $-(m x_Q - y_Q)^2 + m^2 R^2 + R^2 = 0$

cioè : $-m^2 x_Q^2 + 2m x_Q y_Q - y_Q^2 + m^2 R^2 + R^2 = 0$

$$\boxed{(x_Q^2 - R^2) m^2 - 2(x_Q y_Q) m - (R^2 - y_Q^2) = 0}$$

$$m = \frac{(x_Q y_Q) \pm \sqrt{x_Q^2 y_Q^2 + (x_Q^2 - R^2)(R^2 - y_Q^2)}}{x_Q^2 - R^2}$$

condizione di realtà: $\Delta > 0$

$$x_Q^2 y_Q^2 + x_Q^2 R^2 - R^4 - x_Q^2 y_Q^2 + R^2 y_Q^2 > 0$$

cioè:

$$\boxed{x_Q^2 + y_Q^2 > R^2}$$

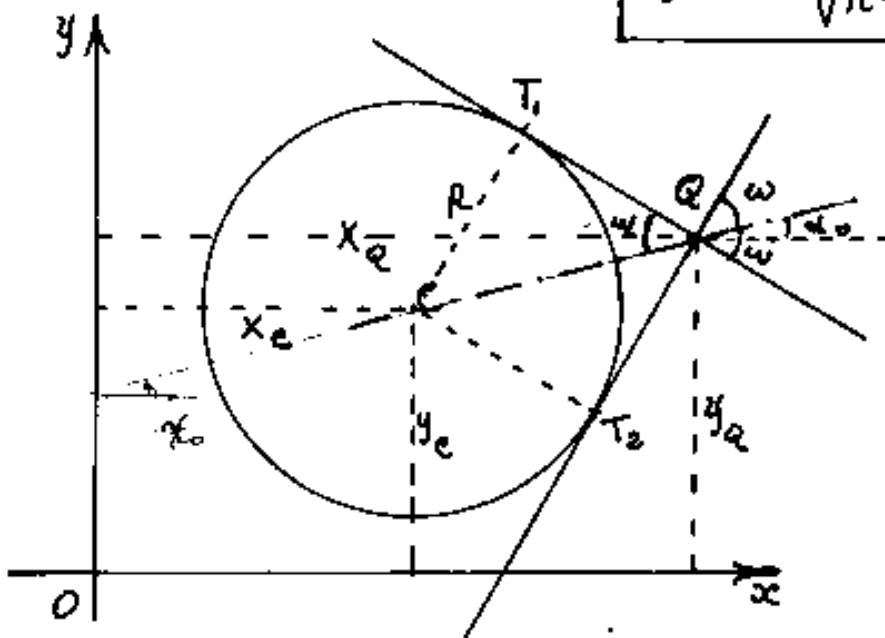
(che Q sia esterno al cerchio)

avremo due radici di m, e l'equazione delle due rette tangenti sarà:

$$m = \frac{x_Q y_Q \pm R\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2 - R^2}}{(x_Q^2 - R^2)} = \frac{y - y_Q}{x - x_Q}$$

rette tangenti al cerchio non al centro

Sia: $$y = \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2} + y_c$$ l'equazione de cerchio, ove: x_c, y_c sono le coordinate del suo centro.

$$y' = \frac{-(x - x_c)}{\sqrt{R^2 - (x - x_c)^2}}$$

Se è noto il punto di tangenza: T

basta l'ascissa: (X_T),

$y_T = \sqrt{R^2 - (x_T - x_c)^2} + y_c$;

avremo:

$$\frac{(y - y_T)}{(X - X_T)} = \frac{-(x_T - x_c)}{\sqrt{R^2 - (x_T - x_c)^2}}$$

da cui, ponendo: $R^2 = (x_T - x_c)^2 + (y_T - y_c)^2$ si ha:

$$y = \left(\frac{-(X_T - X_c)}{(y_T - y_c)}\right)X + \left(\frac{(X_T - X_c)}{(y_T - y_c)}\right)X_T + y_T$$

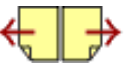
equazione della retta tangente in T.

Si noti che, mentre la derivata y' è affetta

dal denominatore dipendente dalla radice quadrata

dal doppio segno dipendente dalla radice quadrata al denominatore, (cioè per ogni x_T (validi) si hanno due rette tangenti); ponendo l'equazione in funzione di x_T ed y_T, sparisce l'ambiguità del doppio segno.

Infatti il coefficiente angolare è >0 quando: $(x_T > x_c)$ ed $(y_T < y_c)$; oppure: $(x_T < x_c)$ ed $(y_T > y_c)$.

Inversamente: $(m<0)$ se $(x_T > x_c)$ ed $(y_T > y_c)$ oppure: $(x_T < x_c)$ ed $(y_T < y_c)$.

L'equazione precedente poteva essere scritta direttamente, ricordando la condizione di perpendicolarità $(m; -\frac{1}{m})$, applicata alla retta per "T" col coefficiente angolare della perpendicolare al raggio $\overline{CT}$; cioè:

$$\frac{y - y_T}{x - x_T} = \frac{-(x_T - x_C)}{(y_T - y_C)}$$

<u>Tangenti al cerchio dal punto Q esterno al cerchio stesso.</u>

L'equazione di tutte le rette passanti per "Q" definita ciascuna dal proprio coeff. angolare m, è: $\frac{y - y_Q}{x - x_Q} = m_{(v)}$ ove: <u>$m_{(v)}$ è una variabile</u>

Se indichiamo con m_o il coefficiente angolare della retta $\overline{QC}$ avremo: $\overline{QC} = \sqrt{(x_C - x_Q)^2 + (y_C - y_Q)^2}$

$(y_C - y_Q)$

$$\boxed{\frac{(y_c - y_Q)}{(x_c - x_Q)} = m_0} = \underline{\tan g\, \alpha_0}$$

$$\overline{QT_1} = \overline{QT_2} = \sqrt{(x_c - x_Q)^2 + (y_c - y_Q)^2 - R^2} \; ;$$

posto: $\boxed{\tan g\, \omega = R/\overline{QT}}$ con $|\omega|$ = angolo delle rette tangenti con $\overline{QC}$. cioè: $\boxed{\tan g(\alpha_0 \pm \omega) = \frac{m_0 \pm R/\overline{QT}}{1 \mp \frac{m_0 R}{\overline{QT}}}}$

L'espressione $tg(\alpha_0 \pm \omega)$ rappresenta i due coeff. angolari delle rette per Q, tangenti al cerchio. Cioè:

$$\frac{(y - y_Q)}{(x - x_Q)} = \frac{(m_0 \pm R/\overline{QT})}{(1 \mp R m_0/\overline{QT})}$$

ed anche:

$$\boxed{\frac{(y - y_Q)}{(X - X_Q)} = \frac{(m_0 \overline{QT} \pm R)}{(\overline{QT} \mp m_0 R)}}$$

<u>è l'equazione delle rette tangenti al cerchio e passanti per Q</u>

Ore sostituendo i valori si ha:

$$\boxed{\frac{(y - y_Q)}{(X - X_Q)} = \frac{(y_c - y_Q)\sqrt{(x_c - x_Q)^2 + (y_c - y_Q)^2} \pm R(x_c - x_Q)}{(x_c - x_Q)\sqrt{(x_c - x_Q)^2 + (y_c - y_Q)^2} \mp R(y_c - y_Q)}}$$

l'equazione in funzione degli elementi dati; però è preferibile usare l'espressione precedente, e meglio ancora:

$$\boxed{\frac{y - y_Q}{X - X_Q} = tg(\alpha_0 \pm \omega)}$$

Rette bisettrici

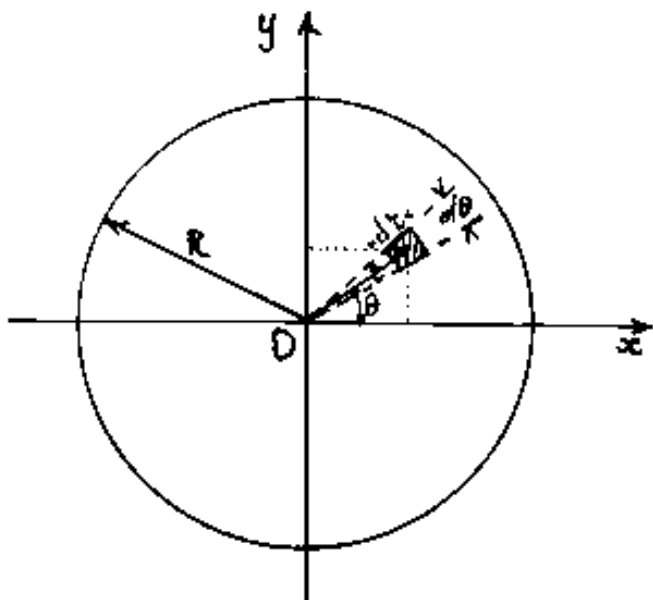
(luogo dei punti equidistanti dalle due rette r; s)

$$\delta = \left| \frac{y - m_r x - q_r}{\sqrt{m_r^2 + 1}} \right| = \pm \left| \frac{y - m_s x - q_s}{\sqrt{m_s^2 + 1}} \right|$$

cioè:

$$\boxed{\frac{y - m_r x - q_r}{\left|\sqrt{m_r^2 + 1}\right|} = \pm \frac{y - m_s x - q_s}{\left|\sqrt{m_s^2 + 1}\right|}}$$

Il calcolo di aree con integrali doppi

Consideriamo un cerchio di raggio R e centro "O", ciascun punto del cerchio è individuabile in coordinate polari da un raggio "r" variabile da 0 ad R e da un angolo θ variabile da 0 a 2π (espresso in radianti).

Generiamo un'area elementare all'intorno di un punto, considerando un angolo infinitesimo $d\theta$ all'intorno di θ, che moltiplicato per "r", darà un segmento infinitesimo: $da = r\,d\theta$ perpendicolare al raggio, che a sua volta moltiplicato per l'incremento del raggio "dr" darà l'area infinitesima: $dA = r\,d\theta\,dr$.

Avendo due differenziali occorre duplicare l'integrale:

$$\int_A dA = \iint da \cdot dr = \iint (r\,d\theta)\,dr$$

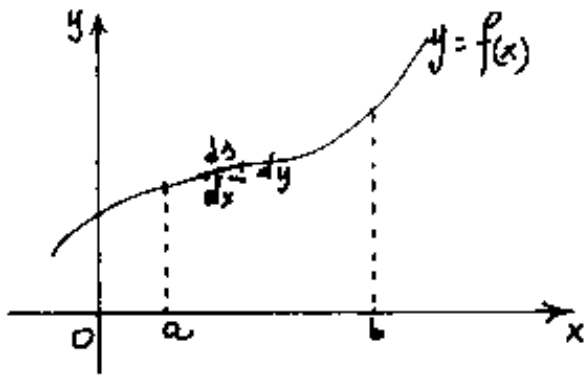
e ponendo i limiti di integrazione separando le espressioni dei rispettivi differenziali: $A = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta$

$$A = \left[r^2/2\right]_0^R \cdot \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi$$

$$\boxed{A = R^2\pi}$$

Non sempre un integrale doppio è così semplice, una tratta=zione completa si trova nel III° Vol: "integrali doppi di campo".

Rettificazione di curve piane

Una funzione: $y=f(x)$ puó pensarsi come una linea costituita da tratti rettilinei infinitamente piccoli uno adiacente all'altro.

Consideriamo "ds" il piú piccolo tratto rettilineo di una $y=f(x)$ comunque curvilinea.

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo infinitesimo: dx, dy, ds ; avremo:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ma: $dy = f'_{(x)} \cdot dx$ perció:

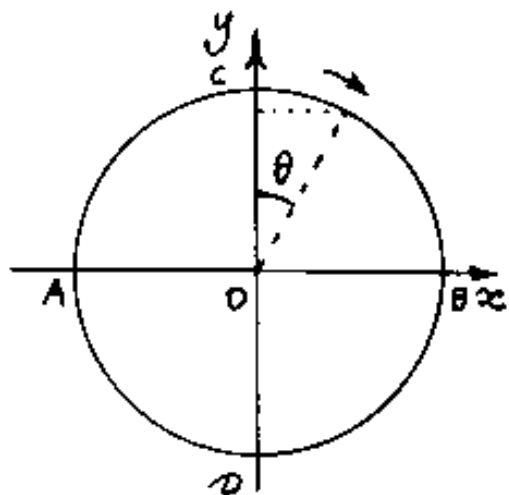
$$ds = \left(\sqrt{(f'_{(x)})^2 + 1}\right) dx$$

e la lunghezza: "s" del tratto di curva fra le ascisse "a" e "b" sará:

$$s = \int_a^b \left(\sqrt{(f'_{(x)})^2 + 1}\right) dx$$

Formula valida in generale, però l'integrale tal volta è un integrale ellittico, (per esempio per ret=tificare l'ellisse, da cui il nome) in tal caso si ricor=re alle tabelle di conti fatti, che abbiamo già espo=sto nelle pagine precedenti.

Rettificazione della circonferenza.

Dall'equazione della circonferenza al centro assi ricaviamo: "dy"

$$f(x) = y = \sqrt{R^2 - x^2} \; ; \quad \boxed{dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}}$$

da cui:

$$ds = \left(\sqrt{\frac{x^2}{(R^2 - x^2)} + 1}\right) dx$$

$$\boxed{ds = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx}$$

ed anche: $\boxed{s = \int \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx}$ occorre in questo inte=grale avere un po' di attenzione nel mettere i limiti di integrazione, anche perché ad ogni x corri=spondono due valori di y. Considerando i valori posi=tivi della radice, si ha, per f(x) il semiarco superiore, ed essendo negativa la derivata si ha il primo quadrante di arco per x>0. Se prendiamo l'origine della semicurva

positiva in A avremo:(x = −R); se prendiamo l'origine del quadrante positivo in C (x = 0) e la rotazione sull'arco è oraria al crescere di x. Trasformiamo l'integrale:

$$1 = R\int_a^b \frac{d\left(\frac{x}{R}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = \left[\text{arcsen}\left(\frac{x}{R}\right)\right]_a^b$$; per x = 0 ; $\text{arcsen}\left(\frac{x}{R}\right) = 0$

per $x = \pm R$; $\text{arcsen}\left(\frac{x}{R}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$; quindi l'arco in rad $\left(\frac{x}{R}\right) = \theta$ (ove θ è disegnato in figura). Vediamo alcuni intervalli di

integrazione:

$$I = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = R\int_0^1 \frac{d\left(\frac{x}{R}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = R\left[\arcsen\left(\frac{x}{R}\right)\right]_0^1 = R\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}(2R\pi)$$

$$I = \int_{-R}^{+R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = R\int_{-1}^{+1} \frac{d\left(\frac{x}{R}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = R\left[\arcsen\left(\frac{x}{R}\right)\right]_{-1}^{+1} = R\pi = \frac{1}{2}(2R\pi)$$

$$I = \int_0^{R/2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = R\int_0^{1/2} \frac{d\left(\frac{x}{R}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)}} = R\left[\arcsen\left(\frac{x}{R}\right)\right]_0^{1/2} = R\frac{\pi}{6} = \frac{1}{12}(2R\pi)$$

Tutto questo per richiamare l'attenzione a non mettere, senza riflettere, l'origine degli archi in B con l'ordinaria ruotazione antioraria.

Rettificazione della catenaria

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right); \quad y' = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$dy = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

$$(dy)^2 = \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)(dx)^2$$

$$ds = \left(\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}\right) dx = \left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) d(x)\right)$$

$$s = a\int^{(x/a)} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right) = \left[a\,\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{(x/a)}$$

$$s = a \int_0 \cosh\left(\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right) = \left[a\, \text{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0$$

$$\boxed{s = a\, \text{senh}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

ma: $a\, \text{senh}\left(\frac{x}{a}\right) = \sqrt{\left(a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2 - a^2} = \sqrt{y^2 - a^2}$

$$\boxed{s = \sqrt{y^2 - a^2}}$$

cio' consente una facile risoluzione grafica, (vedi figura), della $= a\, \text{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$ (Area $OVAX_A = s \cdot a$).

La curvatura ed il raggio di curvatura delle curve piane

Tutte le curve, salvo la circonferenza, hanno curvatura variabile. La parabola, la catenaria, l'iperbole, hanno maggior curvatura nel vertice.

Dicesi "curvatura" il rapporto fra la variazione angolare di direzione $d\alpha$ e la variazione lineare di spostamento ds; cioé $\frac{d\alpha}{ds}$; poiché $ds = R\,d\alpha$, ove R è il raggio di curvatura si suol dire che la curvatura e' l'inverso del Raggio essendo: $\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$.

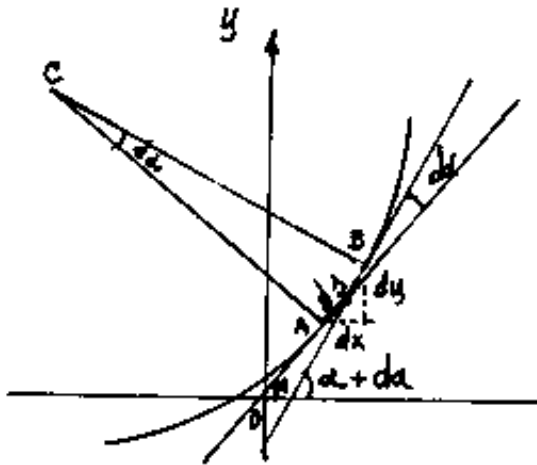
Peró questa dizione è inesatta infatti l'inverso del raggio è, dimensionalmente, l'inverso di una lunghezza; mentre la curvatura è: radianti / lunghezza. (che significato avrebbe esprimere il raggio in "cm." o in "Km". se non fosse connesso alla variazione angolare? Due profili stradali hanno, uno una svolta a 90° gradi,

uno una svolta di appena 10 gradi, cioè l'arco raccorda 170°; affinché le due curvature siano uguali

$$\frac{90^\circ}{R_1} = \frac{\pi/2}{R_1} = \frac{10^\circ}{R_2} = \frac{\pi/18}{R_2} \quad \text{cioè: } \frac{R_2}{R_1} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

Il che vuol dire che, per la curva a 90° occorre un raggio R nove volte maggiore di quello necessario ad una deviazione di 10°. (Abbiamo già evidenziato come l'intero dimensionamento fatto dalla fisica deve essere riveduto.)

Dicesi raggio di curvatura, in un punto di una linea curva, "Il raggio del cerchio osculatore della curva in quel punto." Il cerchio osculatore di una curva ha in comune con la curva almeno un "ds", mentre un cerchio tangente ha un solo punto in comune con la curva stessa. Si dice: "osculatore" perché combacia con la Curva. (Dal latino: osculor, osculatus sum, āri = = baciare).

Calcolo del raggio di curvatura

Consideriamo un tratto infinitesimo di curva e sia "ds" (che disegnamo molto ingrandito), e siano "A" e "B" gli estremi di "ds"; $\widehat{AB}$ = "ds"

$$f'(x_A) = tg(\alpha)\ ;\ f'(x_B) = tg(\alpha + d\alpha)$$

Da A e B possiamo tracciare le normali alla curva, che sono normali anche alle rispettive tangenti. Queste

sono normali anche alle rispettive tangenti. Queste normali si incontrano in C che sarà il centro del cerchio osculatore di raggio $\overline{CA} = \overline{CB}$. L'angolo $\widehat{ACB}$ sarà tanto minore (o maggiore), quanto minore (o maggiore) è la curvatura, lo indicheremo con "$d\alpha$". Chiameremo perciò: "curvatura" il rapporto $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$; $(ds = R\, d\alpha)$.

$\frac{dy}{dx} = \tan g(\alpha)$; differenziando otteniamo:

$$\frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,d\alpha$$

ma, sappiamo che: $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\alpha}$ per cui sostituendo:

$$\frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^2} = \frac{ds^2}{dx^2}\,d\alpha$$

dividendo per $|ds^3|$ si ha:

$$\frac{d^2y\,dx - dy\,dx^2}{ds^3} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$$

ed ancora:

$$\boxed{d^2y = y''\,dx^2}$$

Attenzione: <u>avendo assunto la x come variabile indipendente i "dx" sono costanti, per cui: $d(dx) = d^2(x) = 0$ (da distinguersi da $dx^2 = (dx)(dx) = (dx)^2$)</u>

perciò:

$$\frac{1}{R} = \frac{y''dx^2 \cdot dx - 0}{ds^3} = \frac{y''}{(ds/dx)^3}$$

Sappiamo che: (vedi rettificazione di curve piane): $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$

sostituendo si ha la <u>"curvatura"</u>:

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Il raggio del cerchio osculatore sarà

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Esempi:

Il cerchio osculatore nella parabola: $y = m x^2$

$$y' = 2mx \quad ; \quad y'' = 2m$$

$$R = \frac{\left(1 + (2mx)^2\right)^{3/2}}{(2m)}$$

ed essendo: $m = \left(\frac{1}{4a}\right)$

$$R = \frac{\left(1 + \frac{1}{(2a)^2} x^2\right)^{3/2}}{(1/2a)} = \frac{\left((2a)^2 + x^2\right)^{3/2} \left(\frac{1}{2a}\right)^3}{\left(\frac{1}{2a}\right)} =$$

$$R = \frac{\left((2a)^2 + x^2\right)^{3/2}}{(2a)^2}$$

Nel vertice della parabola: $x = 0$ per cui: $R = 2a$

Per $x = 2a$; $R = \frac{(2\sqrt{2})(2a)^3}{(2a)^2} =$ $R = 4a\sqrt{2}$

Il cerchio osculatore nella catenaria: $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

$$y' = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) \; ; \; y'' = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = y/a \; ;$$

$$R = \frac{\left(1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{3/2}}{\frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{a \cosh^3\left(\frac{x}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$\frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ $\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

$$R = a\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)$$

Nel vertice della catenaria : $x = 0$; $\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = 1$ $\boxed{R = a}$

ed anche : $R = a\left(\frac{y}{a}\right)^2$; $\boxed{aR = y^2}$ $\boxed{a : y = y : R}$

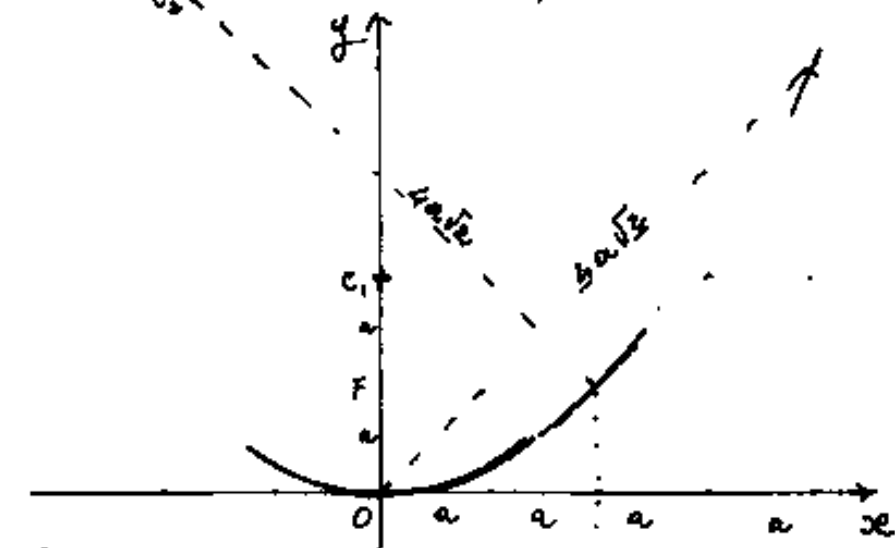
Nella catenaria, l'ordinata è media proporzionale fra il modulo "a" ed il raggio di curvatura

Il cerchio osculatore nella sinusoide : $y = sen(x)$

$y' = cos(x)$; $y'' = -sen(x) = -y$

$$R = \frac{(1 + cos^2(x))^{3/2}}{-sen(x)}$$

per: $x = \pi/2$; $cos(x) = 0$; $sen(x) = 1$ $R = -1$

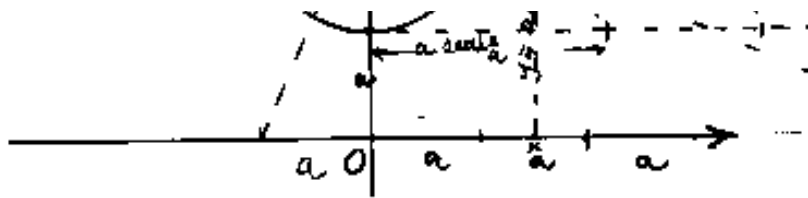
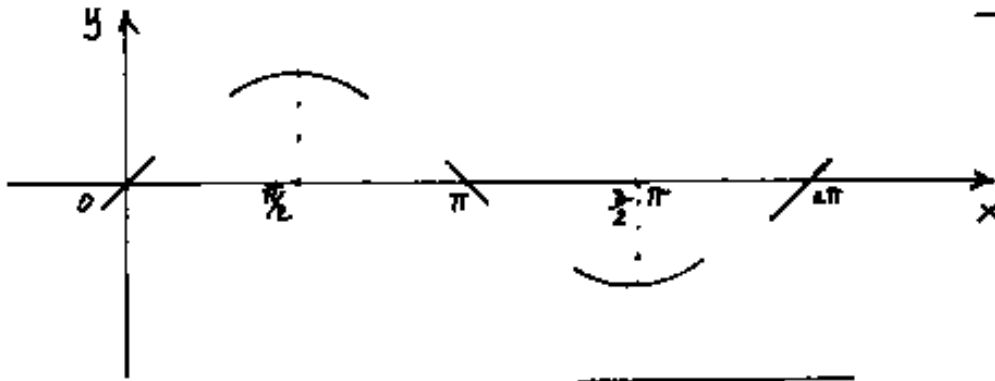
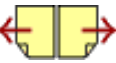
I raggi trovati consentono una veloce costruzione grafica approssimata.

Per la parabola:

$x = 0$ $R = 2a$

$x = 2a$; $y = a$; $y' = 1$; $R = 4a\sqrt{2}$

$x = 4a$; $y = 4a$; $y' = 2$

$R = 4\sqrt{5}\, a$.

Per la catenaria, sappiamo costruire: $a\, senh(\frac{x}{a})$ e quindi la pendenza (vedi verifica zione), conoscendo y che è

medio proporzionale fra R ed a si ha R ed il centro.

Per la sinusoide sapendo $y'_0 = y'_{2\pi} = +1$ $y'_\pi = -1$; $R = 1$

I centri di curvatura nel piano
(L'evoluta)

Sia $C \equiv (x_c ; y_c)$ il centro di curvatura di un generico punto di una funzione $y = f(x)$.

Qualunque sia la $y = f(x)$ abbiamo:

$$\frac{(y_c - y)}{(x_c - x)} = \frac{-1}{y'}$$

che esprime il coeff. angolare della normale alla curva nel punto: $(x ; y)$.

(Su tale normale alla curva e quindi alla sua tangente nel punto $(x;y)$; giace il centro $C \equiv (x_c - y_c)$, (infatti il raggio è sempre perpendicolare alla tangente.)

D'altra parte:

$$(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2 = R^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{(y'')^2}$$

Dalla precedente relazione si ricava: $(x_c - x)^2 = y'^2 (y_c - y)^2$

sostituendo in questa abbiamo:

$$(y'^2 + 1)(y_c - y)^2 = (1 + y'^2)(1 + y'^2)^2 / (y'')^2$$

quindi :

quindi :

$$y_c = y + \left(\frac{(1 + y'^2)}{y''}\right)$$

sostituendo nella prima relazione :

$$(1 + y'^2)/y'' = -(x_c - x)/y'$$

$$x_c = x - y'\left(\frac{(1 + y'^2)}{y''}\right)$$

si hanno così le coordinate del centro .

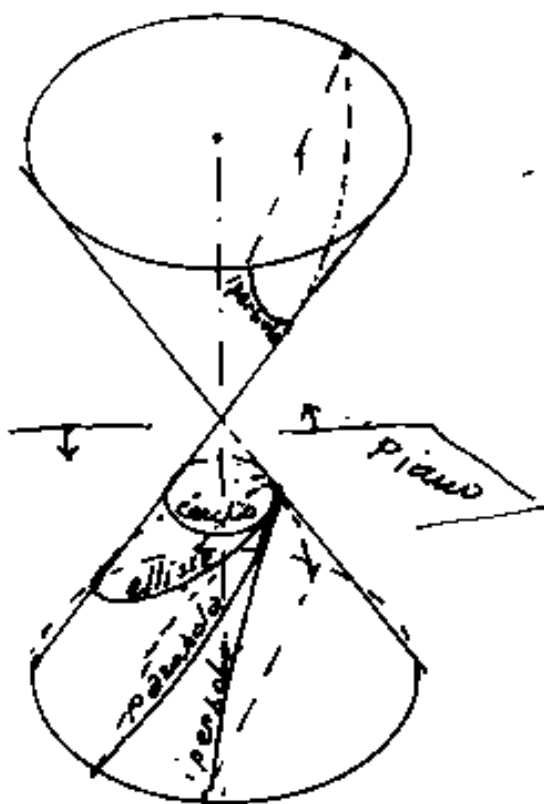
Si puó esprimere l'equazione dell'evoluta di una curva Γ, in forma parametrica in x; cioè ad ogni valore dell'ascissa x della curva Γ si hanno le coordinate x_c; y_c del centro del cerchio osulatore (o di curvatura) della curva Γ nel punto x; $f(x)$.

$$\begin{cases} x_c = x - f'_{(x)}\left(\dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}}\right) \\ y_c = f_{(x)} + \left(\dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}}\right) \end{cases}$$

Tal volta è possibile eliminare la x ed esprimere una correlazione in x_c; y_c, peró la linea che ne risulta pur essendo il luogo dei centri dei cerchi osculatori (o di curvatura) della curva Γ non precisa a quale punto di Γ si riferisce un generico punto del luogo dei centri. La funzione in x_c, y_c, si chiama: Evoluta della Γ. Inversamente se

$\mathcal{E}$ è l'evoluta, allora Γ è l'evolvente di $\mathcal{E}$.

LE CONICHE

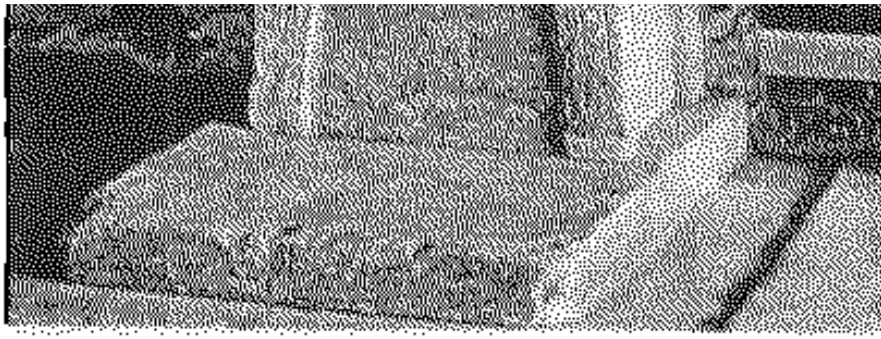
Consideriamo un cono retto sezionato da un piano, che, partendo dalla posizione perpendicolare all'asse del cono, (ove la sezione è un cerchio), "lascia" tale posizione inclinandosi rispetto a tale asse, (le sezioni ora sono ellissi), finché il piano diventa parallelo ad una generatrice del cono, cioè ne "eguaglia" l'inclinazione. (La sezione è una parabola), "Sorpassata" questa posizione continua la sua rotazione. (Le sezioni sono iperboli).

Apollonio Pergeo (3° sec a.C) fece un'ampia trattazione delle coniche, trovò la teoria della polarità, le relazioni fra i diametri coniugati, le relazioni focali ecc. Le

ni fra i diametri coniugati, le relazioni focali ecc. Le denominazioni derivano dal greco:

παραβάλλειν = eguagliare (parabola)
ἐλλείπειν = lasciare (ellisse)
ὑπερβάλλειν = sorpassare (iperbole)

L'inventore delle coniche è ritenuto Menecmo (350 a.C.), però già Archita da Taranto (430-365 a.C.) aveva trattato,

nel suo studio sui solidi, le sezioni di coni e cilindri. Però anche questi dati debbono essere rivisti, infatti le stupende curve scolpite nel trono di pie=tra del palazzo minoico di Cnosso (oltre 2000 a.C.) denunciano la conoscenza delle coniche, e della catenaria, come fune penteggiante fra due sostegni.

Se si pensa che an=che i Greci ritene=vano Minosse un mi=to. (Solo nel 1900 fu scoperto il palazzo di Cnosso, da un archeolo=go inglese), La presti=giosa cultura minoica era andata perduta fin da allora.

Degli otto libri di Apol-lonio, a noi in lingua greca sono pervenuti solo i primi 4, il 5, il 6, il 7 sono pervenuti in lingua Araba (tradotti in Latino da G.A. Borelli - Firenze - 1661) l'ottavo è perdu-to. Secondo un testo di Pappo, anche Euclide aveva trattato le coniche, ed Archimede le parabole.

Consideriamo il minore A_{33} del determinante delle coniche, cioè il minore ottenuto sopprimendo la riga e la colonna di "a_{33}":

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - 2a_{12})$$

avremo il seguente prospetto:

$A \neq 0$; (coniche non degeneri)
$A_{33} > 0$ caso ellittico $\begin{cases} Aa_{11} > 0 \text{ ed } (Aa_{22} > 0) & \text{ellisse immaginaria} \\ Aa_{11} < 0 \text{ ed } (Aa_{22} < 0) & \text{ellisse reale} \end{cases}$
$A_{33} < 0$ iperbole $\{(a_{11} + a_{22}) = 0 \rightarrow$ iperbole equilatera
$A_{33} = 0$ parabola

Dato un polinomio di 2° grado completo in x, y, (o incompleto) il prospetto permette subito di stabi=

(o incomplete) il prospetto permette subito di stabi=
lire se trattasi di un ellisse, un'iperbole od una pa=
rabola. Noi preferiamo ricavare diversamente
le formule, per apprezzare gli elementi di ciascuna curva,
che tratteremo separatamente.

Trattiamo le coniche, con i metodi della geometria analitica.

L'equazione completa, polinomio di 2° grado:

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

è una conica.

Si noti che se consideriamo l'equazione dimensionalmente, (per esempio: x ed y lunghezze, i coefficienti con indice 3 sono anch'essi lunghezze) l'indice dei coefficienti è collegato alle grandezze dimensionali cioè 1 con x; 2 con y; 3 con una lunghezza nota; in tal senso tutti i termini sono lunghezze al quadrato.

Il determinante (simmetrico):

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

è detto: determinante delle coniche

ove: $a_{ij} = a_{ji}$

cioè: $(a_{12} = a_{21})$; $(a_{13} = a_{31})$; $(a_{23} = a_{32})$

si noti che per $i \neq j$ a_{ij} figura duplicato nell'equazione perché andrebbe scritto $2a_{ij} = [(a_{ij}) + (a_{ji})]$.

ne perchè andrebbe scritto $2a_{ij} = [(a_{ij}) + (a_{ji})]$.

si ha:

$$A = \begin{cases} = 0 \longrightarrow \underline{\text{Conica degenere}} \\ \neq 0 \longrightarrow \underline{\text{Conica non degenere.}} \end{cases}$$

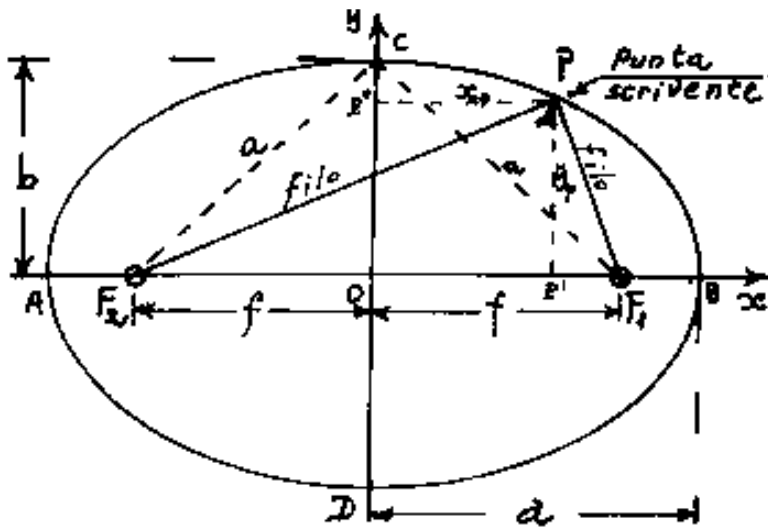
Cioè il determinante, consente subito di decidere se l'espressione algebrica è una conica non degenere, cioè non degenera in due rette.

L'Ellisse

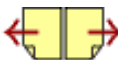
"Dicesi ellisse il luogo geometrico dei punti del piano, le cui distanze da due punti detti fuochi, hanno somma costante".

L'ellisse del giardiniere.

La definizione si presta ad un immediato tracciamento dell'ellisse, sulla carta o sul terreno. Dati due fuochi F_1 ed F_2, ed un filo flessibile ed inestendibile lungo $2a$, ($2a$ è la somma costante delle due distanze dai fuochi dei punti P dell'ellisse) cioè: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

Fissati (con due spilli sulla carta, o con due picchetti nel terreno) gli estremi del filo lungo "$2a$" nei fuochi F_1 ed F_2; (con "$2a$" $> \overline{F_1F_2}$), tenendo teso il filo con una punta scrivente o tracciante, si fa scorrere la punta lungo il filo ed essa traccerà un ellisse; infatti in ogni posizione si ha:

posizione si ha:

$$\overline{F_2P} + \overline{PF_1} = 2a$$

L'ellisse è detta del giardiniere perchè il metodo è usato per tracciare il profilo di aiuole, o di vasche ellittiche.

L'equazione dell'ellisse al centro

Dalla figura dell'ellisse del giardiniere si nota che, quando la punta scrivente è in A (oppure in B), il filo copre una volta il tratto $\overline{F_1F_2}$ e due volte $\overline{F_2A}$ (oppure $\overline{F_1B}$), ma essendo: $\overline{F_1B} = \overline{F_2A}$ ed $\overline{AB} = \overline{F_1F_2} + 2\overline{F_2A}$; il diametro $\overline{AB}$ è pari alla lunghezza del filo cioè: $\overline{AB} = 2a$, per cui il semidiametro $\overline{OA} = \overline{OB} = a$.

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono detti: diametri principali dell'ellisse; ed anche: assi dell'ellisse (essendo assi di simmetria).

Sia $b = \overline{OC} = \overline{OD}$ l'altro semidiametro e sia: $f = \overline{OF_1} = \overline{OF_2}$ la distanza focale; vale la legge pitagorica:

$$a^2 = b^2 + f^2$$

Per cui dati gli assi (a, b) dell'ellisse è possibile calcolare la distanza focale f e disegnare i punti F_1 ed F_2 facendo centro in C (oppure in D) con apertura di compasso pari ad "a"; le intersezioni dell'arco tracciato con $\overline{AB}$ sono i fuochi: F_1 ed F_2.

tracciato con $\overline{AB}$ sono i fuochi: F_1 ed F_2.

Il rapporto: f/a = "K" è detto <u>eccentricità dell'ellisse.</u> (Talvolta indicata con "e")

Dalla definizione dell'ellisse come luogo geometrico abbiamo:

$$\boxed{\overline{F_2P} + \overline{F_1P} = 2a} \quad (= \text{costante})$$

ma, (vedi figura)

$$\overline{F_2P} = \sqrt{\overline{F_2P'}^2 + y^2} = \sqrt{(f+x)^2 + y^2}$$

$$\overline{F_1P} = \sqrt{\overline{F_1P'}^2 + y^2} = \sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$

sostituendo:

$$\sqrt{(f+x)^2 + y^2} + \sqrt{(f-x)^2 + y^2} = 2a.$$

isolando una radice ed elevando a quadrato si ha:

$$(f+x)^2 + y^2 = (f-x)^2 + y^2 + (2a)^2 - 2(2a)\sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$

sviluppando i quadrati e semplificando:

$$4fx - 4a^2 = 4a\sqrt{(f-x)^2 + y^2}$$

$$f^2x^2 + a^4 - 2a^2fx = a^2(f^2 - 2fx + x^2 + y^2)$$

sostituendo: $f^2 = (a^2 - b^2)$:

$$a^2x^2 - b^2x^2 + a^4 = a^4 - a^2b^2 + a^2x^2 + a^2y^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

dividendo per a^2b^2:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

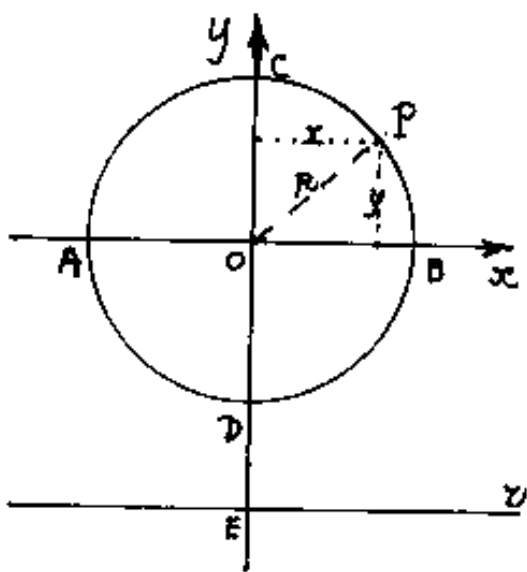
che l'equazione dell'ellisse al centro assi

che l'equazione dell'ellisse al centro assi

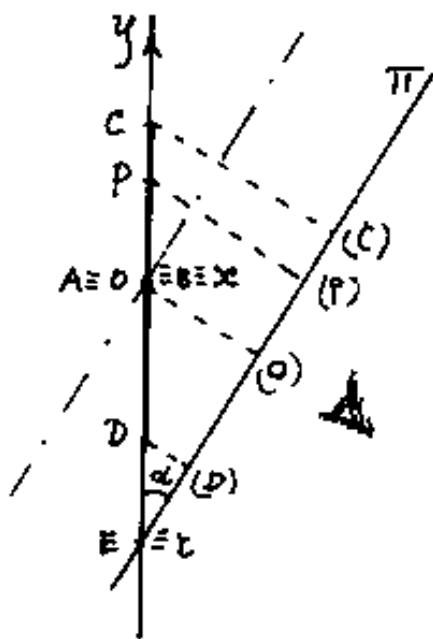
Si puo' scrivere :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Che pitagoricamente significa : distanza unitaria dal centro assi dei punti le cui coordinate sono misurate con modulo "a" in ascisse, e con modulo "b" in ordinate.

L'ellisse come proiezione di un cerchio.

L'equazione del cerchio al centro assi è: $x^2 + y^2 = R^2$, che può scriversi:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

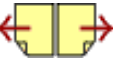
cioè il cerchio è un particolare ellisse ove: $a = b = R$.

Consideriamo un piano π inclinato di α rispetto al piano xy ed avente in comune con esso la retta r. Proiettiamo il cerchio ortogonalmente su π, (In figura i piani xy e π sono visti di profilo) ed indichiamo in parentesi le proiezioni. Le ascisse, cioè i segmenti in x, si proiettano in vera grandezza: $(x) = x$); mentre i segmenti in y si proiettano ...

ti in y si proiettano accorciati (scorcio), cioè: $(y) = y \cdot \cos\alpha$; $y = \frac{(y)}{\cos\alpha}$,

sostituendo nell' equazione del cerchio

$$\frac{(x)^2}{(R^2)} + \frac{(y)^2}{(R^2\cos^2\alpha)} = 1$$

che è l'equazione di un ellisse di semidiametri:

$b = R\cos(\alpha)$; $a = R$

Costruzioni grafiche dell'ellisse

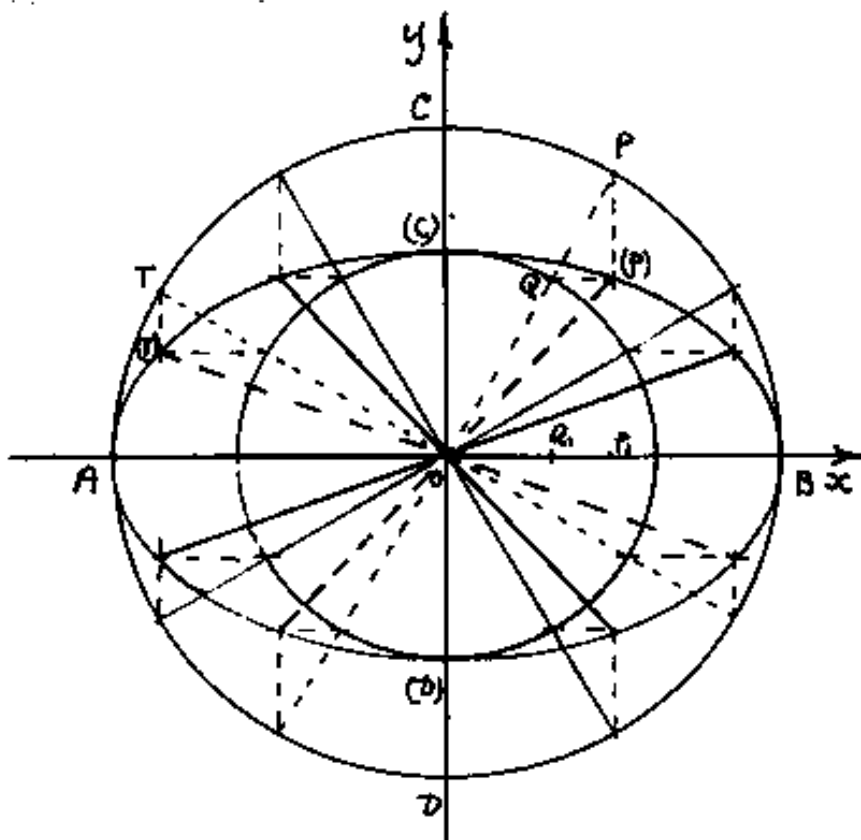
Se guardiamo perpendicolarmente al piano π, il cerchio che ruota intorno all'asse x (vedi paragrafo e figura precedenti); Se pensiamo inizialmente il piano xy del del cerchio parallelo a π, noi vedremo il cerchio come in figura. Via, Via che il cerchio ruota intorno ad x, i punti della circonferenza li vedremo spostarsi lungo segmenti perpendicolari ad x, mentre i punti dell'asse x (parallelo a π) rimangono fermi. Se fissiamo il semiasse minore dell'ellisse in $\overline{O(C)} = \overline{O(D)}$, e prendiamo un punto P qualsiasi sulla circonferenza, anche P nella ruotazione si muoverà perpendicolarmente ad x; e la retta $\overline{CP}$ che incontra in H l'asse x, a ruotazione avvenuta, diverrà $\overline{(C)H}$ ad incontrandi in

a ruotazione avvenuta diverrà $\overline{(C)H}$ ed incontrerò in (P) la perpendicolare ad x da P.

Ad ogni punto P della circonferenza corrisponde un punto H sulla x ottenuto per intersezione con la retta $\overline{CP}$ e conoscendo (C) si unisce con H determinando P.

Ripetendo la costruzione si può tracciare l'ellisse punto per punto.

II^ Costruzione grafica.

Osserviamo come nella precedente costruzione, i segmenti paralleli ad x, si proiettano su π mantenendosi paralleli e di lunghezza invariata (uguali ascisse dei punti ruotati); mentre i segmenti perpendicolari ad x (le ordinate dei punti), si proiettano su π tutti accorciati nella stessa proporzione (coeff. di propor. $= \cos(\alpha)$)

Se, dati i due semidiametri dell'ellisse, cioè: $\overline{O(C)} = \overline{O(D)}$ ed $\overline{OA} = \overline{OB}$, tracciamo due circonferenze concentriche di raggio: $\overline{OA}$ e di raggio: $\overline{O(C)}$, e tracciamo un generico raggio $\overline{OP}$ che incontrerà la circonferenza di raggio $\overline{O(C)}$ in Q,

notiamo che: $\cos(\alpha) = \dfrac{\overline{O(C)}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{(P)P_1}}{\overline{PP_1}} = \dfrac{QQ_1}{PP_1}$ cioè: $\boxed{\overline{(P)P_1} = \overline{QQ_1}}$

[illegible] $\cos(\alpha) = \frac{[illegible]}{\overline{OC}} = \frac{[illegible]}{\overline{OP}} = \frac{[illegible]}{\overline{PP_1}} = \frac{[illegible]}{\overline{PP_1}}$ [illegible]

<u>cioè le ordinate dei punti dell'ellisse ($\overline{P_1(P)}$) sono le ordinate sulla circonferenza minore per lo stesso semidiametro.</u> Basterà quindi da Q tracciare la parallela ad x fino ad incontrare la parallela ad y da P per ottenere un punto (P) dell'ellisse.

Si noti che diametri originariamente perpendicolari sulle circonferenze ($\overline{OP}$ con $\overline{OT}$ ecc), nell'ellisse sono detti: <u>diametri coniugati</u>.

Equazioni dell'ellisse in coordinate polari

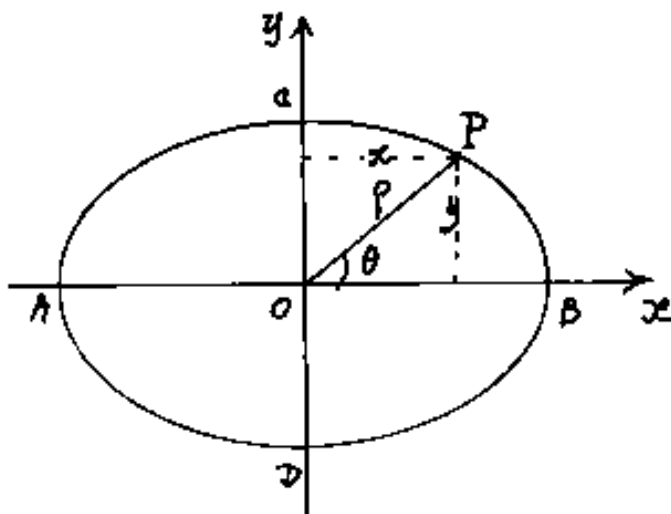
Sia: ρ = modulo ; θ = argomento ; $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$

sostituendo nella: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

abbiamo:

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\rho^2\,\text{sen}^2\theta}{b^2} = 1$$

esplicitiamo ρ

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$$

equazione in coordinate polari dell'ellisse di assi a,b.

È importante l'equazione nella forma:

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\text{sen}^2\theta}{b^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

$$a^2\,\text{sen}^2\theta + b^2(1-\text{sen}^2\theta) = \left(\frac{ab}{\rho}\right)^2 \quad ; \quad a^2(1-\cos^2\theta) + b^2\cos^2\theta = \left(\frac{ab}{\rho}\right)^2$$

$$(a^2-b^2)\,\text{sen}^2\theta = \frac{b^2}{\rho^2}(a^2-\rho^2) \quad ; \quad -(a^2-b^2)\cos^2\theta = \frac{a^2}{\rho^2}(b^2-\rho^2)$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho c}\sqrt{a^2-\rho^2}$$

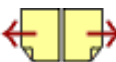
Equazioni in coordinate polari risolte rispetto a funzio

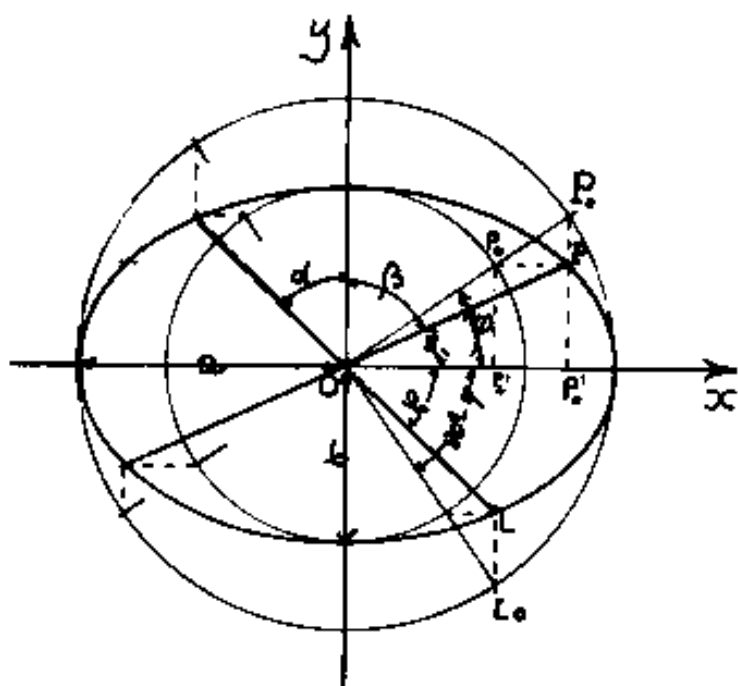
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho f}\sqrt{a^2-\rho^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho f}\sqrt{\rho^2-b^2}$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2-b^2}}$$

lari risolte rispetto a funzioni di θ. Da queste equazioni è possibile rilevare i limiti di ρ:

$$b \leq \rho \leq a$$

I diametri coniugati dell'ellisse.

Diconsi diametri coniugati nell'ellisse, quei diametri che nel cerchio originario erano perpendicolari.

Sia φ l'angolo che un raggio generico del cerchio forma con l'asse maggiore (asse x) dell'ellisse, e $(90°-\varphi)$ l'angolo che il raggio perpendicolare forma con lo stesso asse. Siano φ_1 e φ_2 gli angoli che i corrispondenti semidiametri dell'ellisse formano con lo stesso asse x, e siano α e β gli angoli, che i diametri coniugati dell'ellisse, formano con l'asse minore.

Noti: a e b, raggi dei cerchi e semidiametri principali dell'ellisse:

$\overline{P_0P_0'} = a \operatorname{sen}\varphi$; $\overline{PP_0'} = \overline{P_1P_1'} = b \operatorname{sen}\varphi$; $\overline{OP_0'} = a\cos\varphi$ quindi:

$\overline{OP} = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}$; $\overline{OL} = \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$ sono

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \quad ; \quad \overline{OL} = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$$

sono <u>l'ampiezza dei semidiametri coniugati dell'ellisse in funzione del l'angolo φ formato dal raggio del cerchio originario.</u>

Quadrando e sommando si ha:

$$\boxed{\overline{OP}^2 + \overline{OL}^2 = a^2 + b^2}$$

importante legge Pitagorica: "<u>La somma dei quadrati dei diametri coniugati dell'ellisse è costante</u>"

Si noti che anche i diametri principali (a, b) sono diametri coniugati, sono l'unica coppia che mantiene la perpendicolarità dei raggi del cerchio originario.

$a^2+b^2=d^2$ "d" è la semidiagonale del rettangolo circoscritto all'ellisse, ed è la costante ipotenusa dei diametri coniugati presi come cateti

Dalla figura si ha:

$$\tan(\varphi_1)=\frac{b\,\mathrm{sen}\,\varphi}{a\cos\varphi}=\frac{b}{a}\tan(\varphi)\;;\quad \tan(\varphi_2)=\frac{b(\mathrm{sen}(90°-\varphi))}{a(\cos(90°-\varphi))}=\frac{b}{a}\,\frac{1}{\tan(\varphi)}$$

moltiplicando le due espressioni:

$$\tan(\varphi_1)\cdot\tan(\varphi_2)=\frac{b^2}{a^2}$$

Equazione dei diametri coniugati dell'ellisse con angoli misurati da bande opposte dell'asse maggiore

poiché $\alpha=(90°-\varphi_2)$; $\beta=(90°-\varphi_1)$ si ha:

$$\tan(\alpha)\tan(\beta)=\frac{a^2}{b^2}$$

Equazione dei diametri coniugati dell'ellisse con

Equazione dei diametri coniugati dell'ellisse con angoli misurati da bande opposte dell'asse minore.

Indichiamo ora $\rho_1 = \overline{OP}$; $\rho_2 = \overline{OL}$ i due semidiametri coniugati dell'ellisse che formano gli angoli φ_1 ed φ_2 con l'asse maggiore; tenendo conto delle relazioni di cui sopra, calcoliamo le funzioni di φ_1 e di φ_2 e della loro somma $(\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2))$.

$$\boxed{\rho_1^2+\rho_2^2 = a^2+b^2}$$

Dalla figura si ha:

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{b \operatorname{sen}\varphi}{\rho_1} \quad ; \quad \cos\varphi_1 = \frac{a\cos\varphi}{\rho_1}$$

$$\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{b\cos\varphi}{\rho_2} \quad ; \quad \cos\varphi_2 = \frac{a \operatorname{sen}\varphi}{\rho_2}$$

$$\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = \operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2$$

$$\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{ab \operatorname{sen}^2\varphi}{\rho_1\rho_2} + \frac{ab\cos^2\varphi}{\rho_1\rho_2}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{ab}{\rho_1\rho_2}}$$

Notate che $(\varphi_1+\varphi_2)$ è l'angolo acuto formato dai semidiametri coniugati dell'ellisse (Gli altri due semidiametri formano l'angolo $(\alpha+\beta)$ che risulta sempre un angolo ottuso); ma: $\boxed{\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$ Perciò se costruiamo un parallelogramma avente per lati adiacenti i semidiametri coniugati e per angoli $(\varphi_1+\varphi_2)$ ed $(\alpha+\beta)$

L'area di tale parallelogramma sarà:

$$A = \int_1 \int_2 \text{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) = \int_1 \int_2 \text{sen}(\alpha + \beta) = ab$$

$$\boxed{A = ab}$$

L'area è costante ed è pari ad un quarto dell'area del rettangolo circoscritto all'ellisse.

Se nel cerchio originario dell'ellisse tracciamo le corde perpendicolari ad un diametro, queste sono da esso bisecate e sono parallele alle tangenti al cerchio nei punti estremi del diametro stesso.

Da ciò si deducono altre proprietà dei diametri coniugati dell'ellisse:

1) Le rette tangenti all'ellisse nei punti estremi di un diametro, sono parallele al diametro coniugato.

2) In un ellisse un diametro biseca le corde parallele al suo coniugato.

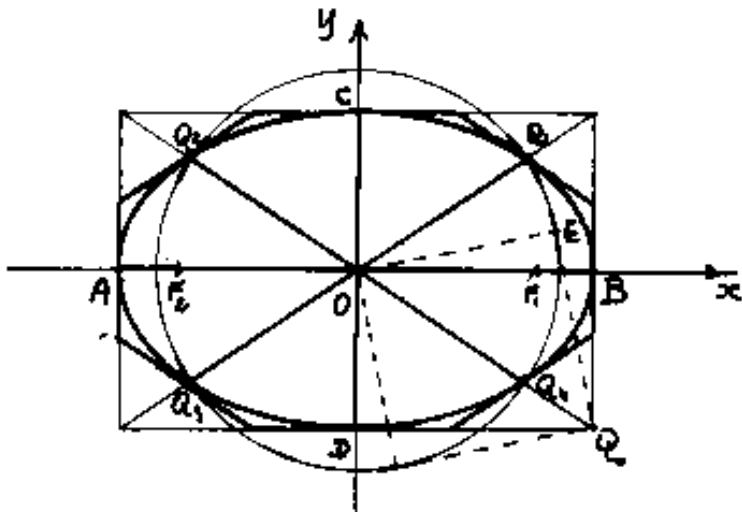
3) I soli diametri che dal cerchio proiettato sull'ellisse, permangono perpendicolari sono i diametri principali.

4) I diametri coniugati dell'ellisse sono di diversa lunghezza, salvo quelli che nel cerchio erano a 45° con gli assi, anche nell'ellisse formano angoli uguali ; $(\varphi_1 = \varphi_2)$; $(\alpha = \beta)$; perciò: $tg^2\alpha = \frac{a^2}{b^2}$ cioè: $\tan(\alpha) = a/b$, cioè i diametri coniugati che nel cerchio originario formavano angoli a 45° con gli assi, nell'ellisse giacciono sulle diagonali del rettangolo che

nell'ellisse giacciono sulle diagonali del rettangolo che lo circoscrive. E poiché: $(\rho_1^2+\rho_2^2)=(a^2+b^2)$; $\rho_d=\rho_1=\rho_2$ ed anche: $(a^2+b^2)=d^2$ (semidiagonale del rettangolo)^2; si ha: $2\rho_d^2=d^2$, cioè:

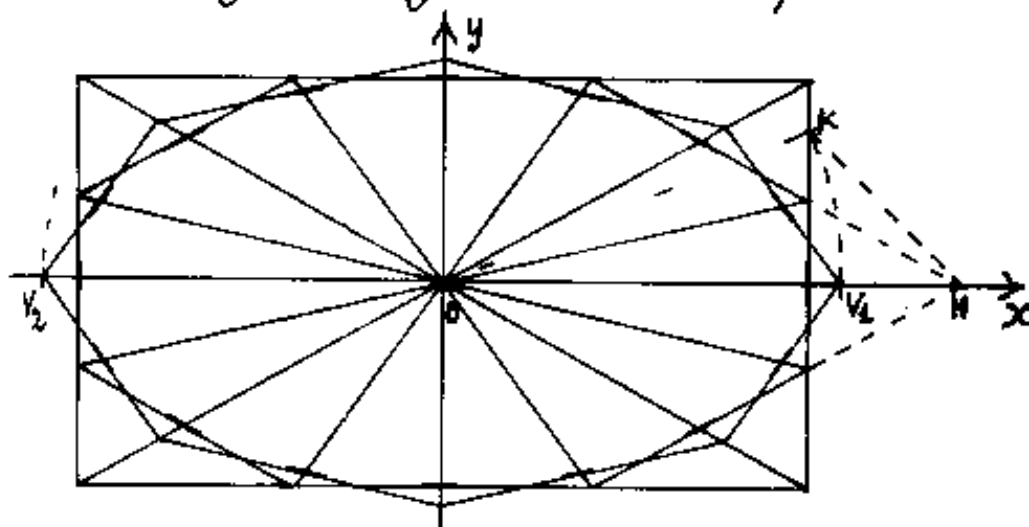
$$\rho_d = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

5) L'ampiezza dei diametri coniugati che giacciono sulle semidiagonali del rettangolo circoscritto all'ellisse è pari all'ampiezza delle semidiagonali stesse divise per $\sqrt{2}$.

Si può anche dire: "Il lato del quadrato, che ha per diagonale la semidiagonale del rettangolo circoscoscritto all'ellisse, è l'ampiezza dei semidiametri coniugati che giacciono sulle semidiagonali stesse.

Ciò implica una facile costruzione grafica per ottenere i punti dell'ellisse sulle diagonali del rettangolo ad esso circoscritto.

Basta costruire su una semidiagonale come $\overline{OQ_0}$ il quadrato di lato $\overline{OQ_0}/\sqrt{2} = \overline{OE}$ e riportarlo in $\overline{OQ_1}, \overline{OQ_2}, \overline{OQ_3}, \overline{OQ_4}$. Così oltre i punti: A, B, C, D, dell'ellisse si hanno i punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. E' anche opportuno ricordare che le tangenti in Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sono parallele alle diagonali. Ciò delinea anche meglio l'ellisse. Questa costruzione è complementare a quella che faremo utilizzando i raggi di curvatura. L'ottagono che ora circoscrive l'ellisse è la proiezio

tura. L'ottagono che ora circoscrive l'ellisse è la proiezio=
ne dell'ottagono regolare che circoscrive il cerchio origine.
Volendo incrementare i punti di tangenza con l'el=
lisse possiamo proiettare il poligono a 16 lati che
circoscrive il cerchio origine. A tal fine basterà
proiettare un'altro ottagono regolare che circo=
scrive il cerchio origine, avente però i vertici su

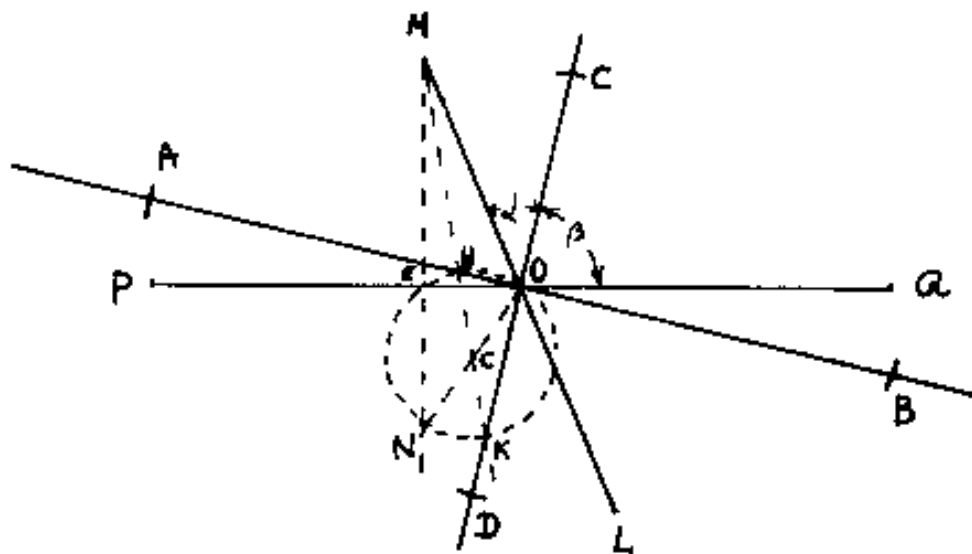
gli assi x ed y. Interessano in particolare i due vertici V_1 e V_2 sull'asse x, perché coincidono con la loro proiezione. Se prolunghiamo i lati obliqui della proiezione dell'ottagono già tracciato fino ad incontrare l'asse x nei punti H_1 ed H_2 comuni ai prolungamenti dei lati obliqui del primo ottagono circoscritto al cerchio origine. Quindi se da H tracciamo rette a 45° sull'asse x fino ad incontrare in K i lati verticali del rettangolo che circoscrive l'ellisse, il segmento $\overline{OK}$ è, in vera grandezza, la semidiagonale dell'ottagono regolare, che riportiamo sull'asse x in V_1 e V_2.

Dai V le parallele alle diagonali minori della proiezione dell'ottagono, fino ad incontrare le dia=

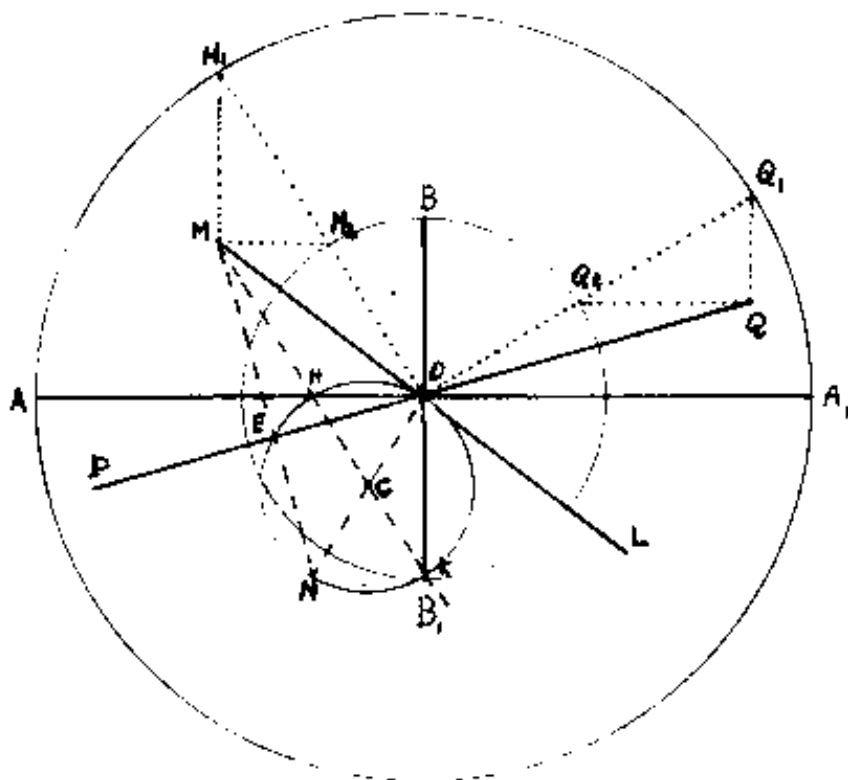
... una=

gonali del rettangolo; e da questi punti le parallele (op=
portune) alle diagonali maggiori, fino all'incontro con
l'asse y. Abbiamo così disegnato la proiezione del secondo
ottagono e possiamo tratteggiare l'ellisse agli estremi dei
diametri coniugati. Per raccordare due tratti basta trova=
re il punto comune alle due normali, correggendo il raggio medio.

Dati due diametri coniugati disegnare i diametri principali

Dei diametri coniugati sappiamo che è costante la somma dei quadrati: $\rho_1^2+\rho_2^2=a^2+b^2$; sappiamo che è costante l'area del parallelogramma da essi costituito; $\rho_1\rho_2 \operatorname{sen}(\alpha+\beta)=ab$; sappiamo l'equazione: $tg\alpha \cdot tg\beta=\frac{a^2}{b^2}$; sappiamo che "a" è massimo, e "b" è minimo.

Siano dati i diametri coniugati $\overline{PQ}$ ed $\overline{ML}$ di centro "O". Da un estremo del diametro coniugato minore, (dal punto M) tracciamo la perpendicolare al diametro maggiore e su di essa riportiamo il semidiametro maggiore e sia N il punto definito. ($\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{MN}$). Unito N con O

(centro assi) si traccia il cerchio di diametro: $\overline{NO}$, si unisce M col centro "C" e si prolunga determinando i punti di intersezione "H e K" che uniti con "O" danno le direzioni dei diametri principali, mentre i segmenti: $\overline{MH}$ ed $\overline{MK}$ sono le ampiezze dei semidiametri principali dell'ellisse. È possibile così disegnare i punti A, B, C, D ove $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono i diametri richiesti.

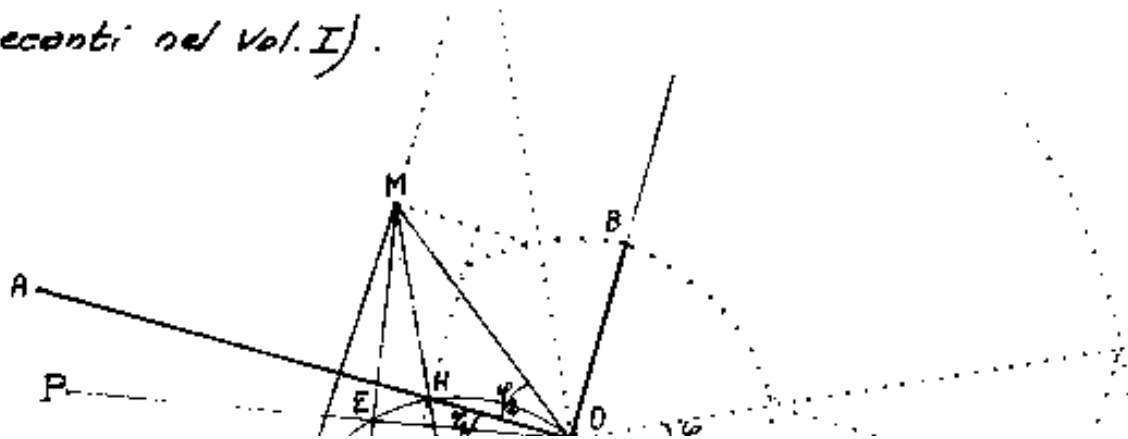
Si possono fare varie dimostrazioni della costruzione ora effettuata; nell'enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, ed. Hoepli, volume II, parte 2ª, pag. 102, viene riportata la seguente dimostrazione (con simboli diversi): "Infatti se conduciamo da O la parallela e la perpendicolare ad MHK e per M e Q le parallele ad OH ed OK, si ha: $\overline{OM_1} = \overline{KM}$, $\overline{OM_2} = \overline{HM}$, cioè M_1 appartiene al circolo di centro O e raggio $a = \overline{MK}$ ed il punto M_2 appartiene al circolo di centro "o" e raggio $b = \overline{MH}$. Lo stesso può dirsi per i punti Q_1 e Q_2 rispettivamente. Se ne conclude che se si considera l'ellisse di semiassi "a" e "b" sulle

rette OH ed OK, rispettivamente, in essa ML e PQ sono due diametri coniugati, perche' corrispondono ai due diametri ortogonali dei circoli considerati."

Un'altra dimostrazione puó farsi in base ad elementi di geometria proiettiva che peró non abbiamo ancora trattato. Noi preferiamo avvalerci del teorema delle seconti.

L'ellisse ed il teorema delle secanti

Nelle matematiche applicate troveremo spesso problemi di fisica in cui, valori caratteristici oscillano fra un massimo ed un minimo. Tali valori vengono spesso rappresentati coi semidiametri di un ellisse che variano appunto da un massimo: "a" ad un minimo: "b". (Ellisse d'inerzia, ellisse di elasticità, ellisse delle tensioni, ecc che nello spazio tridimensionale divengono ellissoidi).

A noi interessa confrontare i segmenti di secante da un punto esterno ad una circonferenza, con i semidiametri coniugati di un ellisse. (vedi teorema delle secanti nel Vol. I).

Sia M un punto esterno al cerchio di centro C, da M tracciamo la tangente MT, la secante generica MEN,

la secante passante per il centro C e sia MHCK, si potrebbe chiamare "secante principale" perché su di essa si misurano i segmenti: massimo = $\overline{MK}$ = "a", minimo = $\overline{MH}$ = "b".

Se da N tracciamo il diametro NCO, è possibile tracciare anche la secante $MOLM_1$, dipendente dalla secante MEN. (arbitraria).

Per il teorema della tangente e della secante si ha:

$$\overline{MT}^2 = (\overline{ME})(\overline{MN}) = (\overline{MK})(\overline{MH}) = (\overline{MO})(\overline{ML})$$

Si unisca ora OE, OH, OK, e poniamo:

$$E\hat{O}H = \varphi_1 \quad ; \quad H\hat{O}M = \varphi_2 \quad ; \quad \text{per cui: } E\hat{O}M = (\varphi_1 + \varphi_2)$$

Se indichiamo con $\rho_1 = \overline{MN}$ e $\rho_2 = \overline{MO}$ avremo $\overline{ME} = \rho_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)$

sostituendo:

$$\overline{MT}^2 = \rho_1 \rho_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) = ab = \rho_2 (\overline{ML})$$

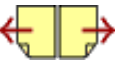
L'uguaglianza centrale è la relazione dei diametri coniugati ρ_1 e ρ_2 formanti l'angolo acuto $(\varphi_1 + \varphi_2)$ nell'ellisse di diametri principali "a" e "b"

ai diametri principali a e b

$\overline{MT}$ è medio geometrico di ab cioè: $\overline{MT} = \sqrt{ab}$ (lato del quadrato equivalente al rettangolo ab).

Se calcoliamo il seno dell'angolo formato dalle diagonali del rettangolo che circoscrive l'ellisse si ha:

$\operatorname{sen} 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$; ma: $\left(\frac{b}{d}\right) = \operatorname{sen} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$; $\left(\frac{a}{d}\right) = \cos \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$; perciò

$\operatorname{sen} 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = 2\left(\frac{b}{d}\right)\left(\frac{a}{d}\right) = 2\frac{ab}{d^2}$ e poiché i semidiametri

coniugati che giacciono sulle diagonali del rettangolo circoscritto all'ellisse li abbiamo indicati con ρ_d, avremo:

$$\rho_d^2 \operatorname{sen} 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \rho_d^2 \, 2\frac{ab}{d^2} = ab = \overline{MT}^2 \quad ; \quad (\rho_d = d/\sqrt{2})$$

$$\overline{MT} = \rho_d \sqrt{\operatorname{sen} 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)} = \rho_d \frac{1}{d}\sqrt{2ab} = \sqrt{ab}$$

Quindi le tangenti al cerchio nel teorema delle secanti e delle tangenti sono connesse ai diametri coniugati dell'ellisse, che giacciono sulle diagonali del rettangolo ad esso circoscritto; e che nel cerchio originario formavano angoli di $\pm 45°$ con l'asse x.

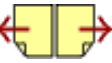
Tracciamo ora la parallela e la perpendicolare da "O" alla secante principale MHCK ed indichiamo con φ l'angolo $M\hat{K}B$, avremo che $A\hat{H}M = (90° - \varphi)$.

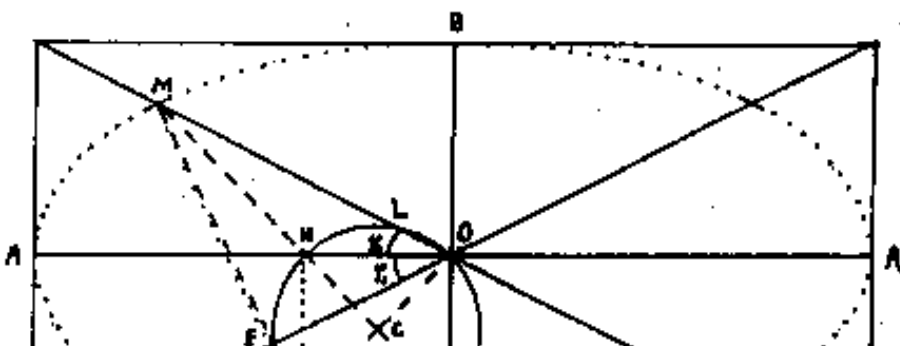
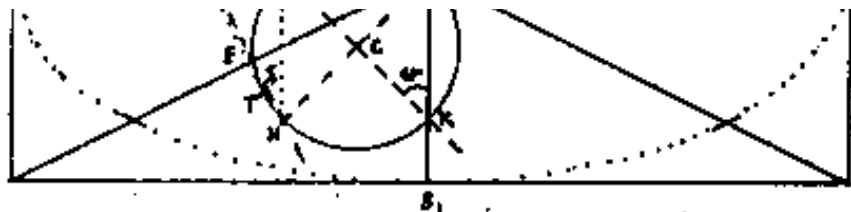
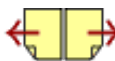
$(\overline{MH})\cos\varphi = (\overline{MO})\operatorname{sen}\varphi_2$ cioè: $b\cos\varphi = \rho_2 \operatorname{sen}\varphi_2$

$(\overline{MH})\operatorname{sen}\varphi = (\overline{MN})\operatorname{sen}\varphi_1$ $b\operatorname{sen}\varphi = \rho_1 \operatorname{sen}\varphi_1$

$(\overline{MK})\operatorname{sen}\varphi = (\overline{MO})\cos\varphi_2$ $a\operatorname{sen}\varphi = \rho_2 \cos\varphi_2$

$(\overline{MK})\cos\varphi = (\overline{MN})\cos\varphi_1$ $\qquad\qquad a\cos\varphi = \rho_1\cos\varphi_1$

Queste correlazioni angolari erano già state calcolate nella costruzione dell'ellisse e dimostrano che ai diametri coniugati dati corrispondono i diametri pricipali costruiti. Resta da dimostrare $(\overline{MO})(\overline{ML})$, unito $\overline{NL}$ con $N\hat{L}M = \frac{\pi}{2}$ ed $M\hat{N}L = (\varphi_1+\varphi_1)$ avremo: $(\overline{MO})(\overline{ML}) = \rho_1\rho_2 \operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_1)$ cioè la secante MOL dipendente da MEN, è correlata a diametri coniugati simmetrici.

Invertiamo il discorso; e sia dato un ellisse e i suoi diametri principali, ad ogni punto M dell'ellisse corrisponde l'estremo di un semidiametro e se da M tracciamo la parallela al semidiametro del cerchio originario, questa formerà l'angolo φ col semiasse minore o maggiore a seconda che $\overline{OM}$ è un semidiametro minore o maggiore dell'ellisse. Su questa retta possiamo fissare C ove "C" è il centro del cerchio: $\overline{MC} = \left(\frac{a+b}{2}\right)$; di raggio $\left(\frac{a-b}{2}\right)$ ciò consente di tracciare il diametro coniugato.
Si nota che ad ogni punto dell'ellisse corrisponde un cerchio ove le secanti da tale punto sono connesse ai diametri coniugati dell'ellisse.

Consideriamo perciò qualche caso particolare, per esempio scegliendo M su $\int_d$. (Interessante notare che il segmento $\overline{MN}$ non è la tangente, e che L dal IV quadrante è passata al II.

te è passata a l'II. Quindi facendo variare il semidiametro coniugato del caso precedente a questo, per continuità deve esistere un cerchio per il quale "L" coincide con "O".)

I Raggi di curvatura dell'ellisse

Scriviamo l'equazione cartesiana dell'ellisse in forma esplicita:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

derivando:

$$y' = \frac{-b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

derivando di nuovo: $y'' = -\frac{b}{a}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2 - x^2}\right) = \frac{-b}{a}\left(\frac{a^2 - x^2 + x^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}\right)$

$$y'' = \frac{-ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

essendo:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)^{3/2}}{\frac{-ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}}$$

si ha:

$$R = \frac{\left[a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2\right]^{3/2}}{a^3(-ab)}$$

raggio di curvatura dell'ellisse nel punto generico di ascissa x

ed anche:

$$R = \frac{\left[a^2 - \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)x^2\right]^{3/2}}{-(ab)}$$ " "

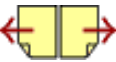
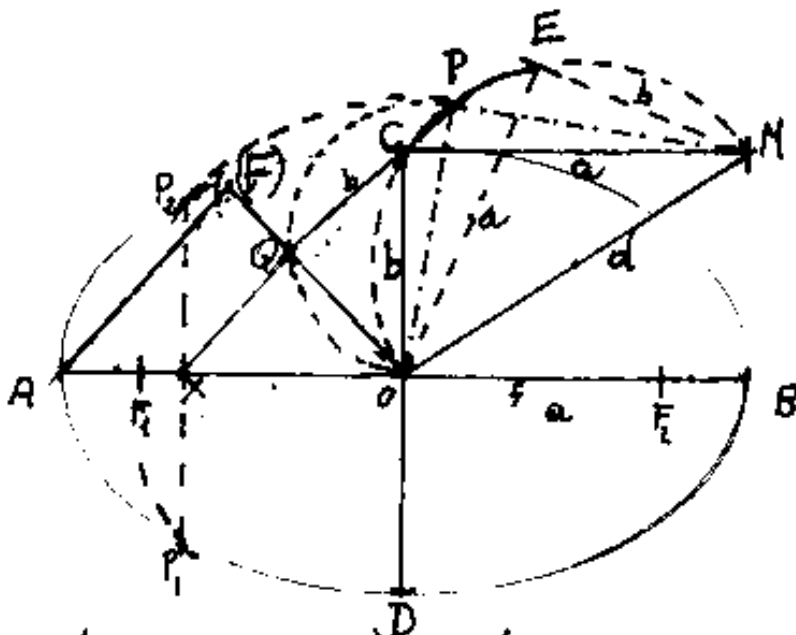
" $$R = \frac{(a^4 - f^2x^2)^{3/2}}{-(a^4b)}$$ " "

Nei vertici dell'ellisse abbiamo: $x = 0$ ed $x = \pm a$

per $x = 0$: $R_{x=0} = \dfrac{a^6}{-a^4 b}$;

$$\boxed{R_b = \frac{-a^2}{b}}$$ = raggio agli estremi dell'asse "b"

per $x = a$: $\left(R_{x=a} = \dfrac{a^3 b^3}{-a^4 b} \right)$

$$\boxed{R_a = \frac{-b^2}{a}}$$ raggio agli estremi dell'asse "a"

Se l'ellisse non è stato disegnato, ma si conoscono i semidiametri principali: "a" e "b"; e conoscendo l'ampiezza di un generico semidiametro, si vuol conoscere l'ampiezza del suo coniugato, ci si avvale della legge pitagorica: $\rho_i^2 + \rho_c^2 = a^2 + b^2 = d^2$; ove "d" = semidiagonale del rettangolo circoscritto all'ellisse. L'arco di circonferenza $\overset{\frown}{PE}$ di diametro "d", delimitato dai vertici retti dei due triangoli di cateti "a","b"; e "b","a"; è il luogo di tutti i vertici retti dei triangoli di ipotenusa "d" ed hanno per cateti i diametri coniugati di questo ellisse.

Sia: $\overline{OC} = \overline{EM} = b$

sia: $\overline{OE} = \overline{CM} = a$

$\overline{OM} = d$; Se $\overline{PM}$ è l'ampiezza di un semidiametro $\overline{OP}$ è l'ampiezza del suo coniugato.

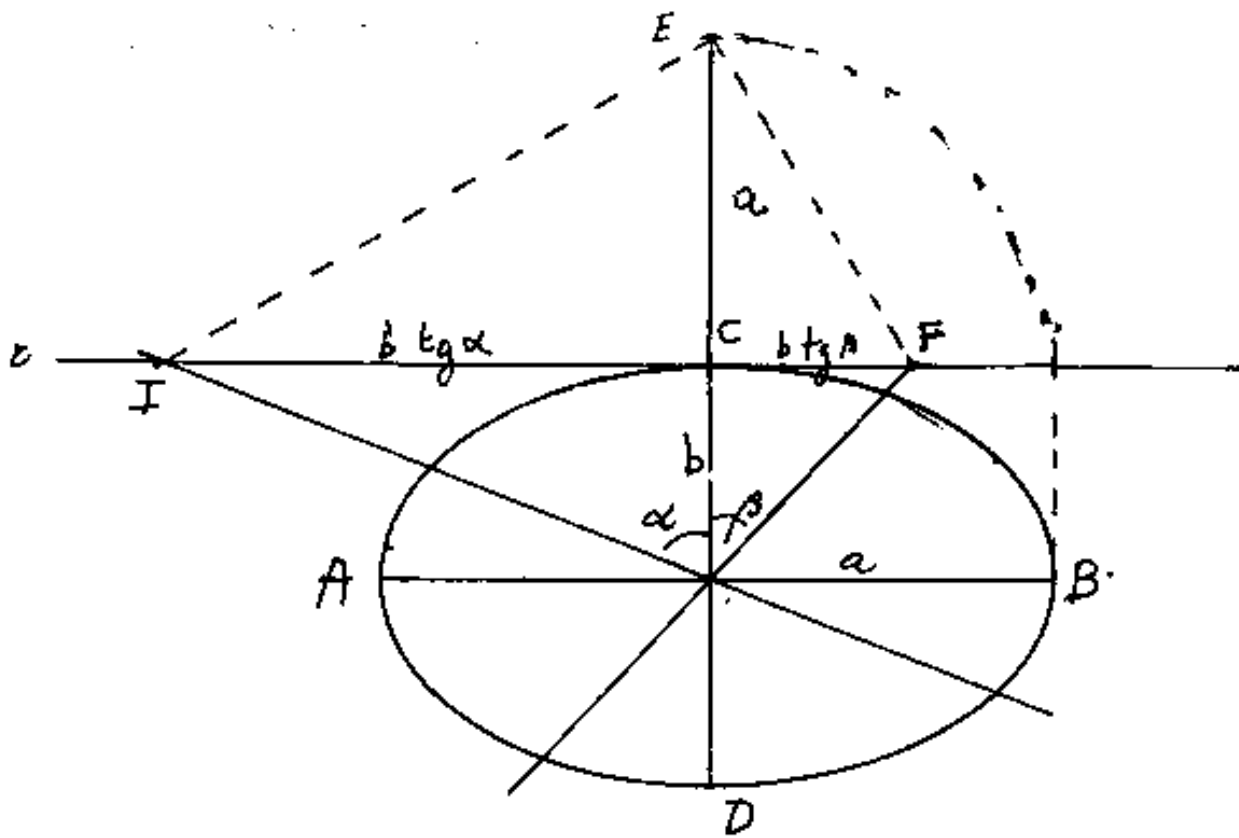
Qualora si voglia la posizione di un semidiametro di ampiez

Qualora si voglia la posizione di un semidiametro di ampiezza nota (per es $\overline{OP}$), si traccia una semicirconferenza su $\overline{OP}$, da P si riporta: $b = \overline{PQ}$; unito OQ, vi si riporta $\overline{OF_1} = \rho = \overline{O(F)}$, unito A con (F). da Q la parallela ad A(F) trova x, da x la normale ad AB e con centro O e raggio $\overline{OP}$ si trovano i punti P_1 e P_2 dell'ellisse.

$$\overline{OX} = \frac{a}{\rho}\sqrt{\rho^2 - b^2}$$

ove: ρ = ampiezza del semidiametro.

Costruzione grafica del diametro coniugato

Dato l'ellisse di diametri $2a = AB$; $2b = CD$; si disegna la retta r per C parallela ad AB e perpendicolarmente da C si riporta in $\overline{CE}$ il segmento "a".

Tracciato ora un qualsiasi diametro che incontra in I la retta r e forma con $\overline{CD}$ l'angolo α, cosicché $\overline{IC} = b\tan\alpha$. Unito I con E e da E la perpendicolare ad $\overline{IE}$ fino ad

incontrare in F la r, per F passa il dia=
metro coniugato, infatti $\overline{CF} = b \cdot \tan\beta$., e
$b\tan(\alpha) \cdot b\tan(\beta) = b^2 \tan\alpha \cdot \tan\beta = a^2$.

cioè: $tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{a^2}{b^2}$

equazione dei diametri coniugati.

Le relazioni trovate ci consentono di disegnare il semidiametro coniugato in un dato ellisse.

1) Tracciando la parallela per il centro alle tangenti l'ellisse alle estremità del diametro.

2) Unendo il centro O col punto medio di una corda parallela al diametro dato.

3) avvalendoci della formula: $\left(tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2 = \frac{b^2}{a^2}\right)$ o dell'analoga $\left(tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{a^2}{b^2}\right)$, si disegna da banda opposta dell'asse maggiore l'angolo $\varphi_2 = arctg\left[\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{tg\varphi_1}\right]$, (noto φ_1), (se noto β si disegna α da banda opposta dell'asse minore.

4) Utilizzando la formula pitagorica: $\left(\rho_1^2 + \rho_2^2 = a^2 + b^2 = d^2\right)$, la semicirconferenza di diametro d è luogo dei vertici retti nei triangoli rettangoli ove ρ_1 e ρ_2 sono cateti. Si noti che qualsiasi ρ deve: $\boxed{b < \rho < a}$.

5) Se nota l'ascissa o l'ordinata degli estremi di un diametro si possono determinare l'ascissa o

di un diametro si possono determinare l'ascissa -

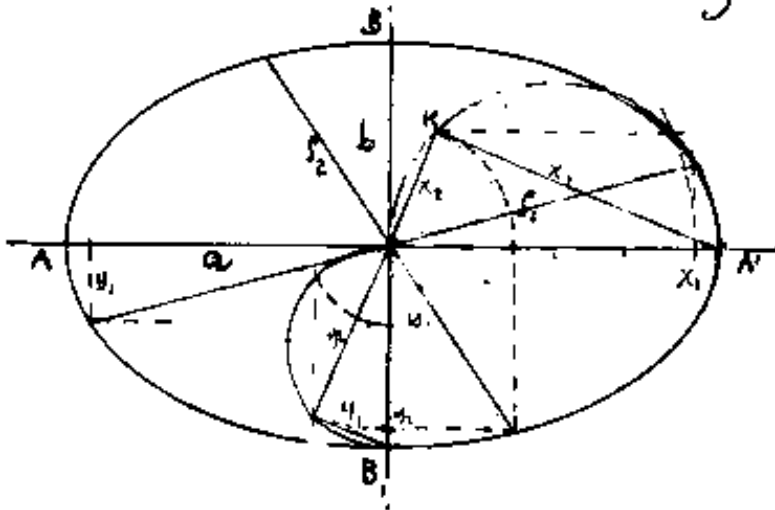
l'ordinata del suo coniugato; utilizzando le relazioni:

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 \qquad y_1^2 + y_2^2 = b^2$$

Solo i diametri principali formano angoli retti gli altri diametri coniugati non formano mai angoli retti. Può sorgere il problema: "dati due diametri di un ellisse formanti angoli retti, trovare i diametri principali se essi non lo sono. (Vedi più avanti)

L'importante formula, ora trovata, che lega le ascisse di due diametri coniugati, al semiasse maggiore dell'ellisse, indipendentemente dal semiasse minore:

$$X_2 = \sqrt{a^2 - X_1^2}$$

ammette una facile costruzione grafica delle ascisse dei diametri coniugati: basta tracciare un semicerchio di diametro "a", ad ogni punto del semicerchio corrispondono due cateti di valore uguale alle ascisse di due diametri coniugati. Se ad x_1 ed x_2 sostituiamo: $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$, cioè: $x^2 = \left(a^2 - \frac{a^2y^2}{b^2}\right)$, avremo: $\sqrt{a^2 - \frac{a^2y_2^2}{b^2}} = \sqrt{a^2 - \left(a^2 - \frac{a^2y_1^2}{b^2}\right)}$

$$y_1 = \sqrt{b^2 - y_2^2}$$

Attenzione! Mentre la x è esplicitata in x_2, la y è esplicitata in y_1. (Vale l'analoga costruzione grafica, ma non lega: (x_1, y_1); (x_2, y_2) che determinerebbero gli estre

ma non lega: (x_1, y_1) ; (x_2, y_2), che determinerebbero gli estremi di due diametri coniugati)

Le relazioni pitagoriche possono scriversi

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = a^2} \quad ; \quad \boxed{y_1^2 + y_2^2 = b^2}$$

ed essendo: $x_1^2 + y_1^2 = \rho_1^2$; $x_2^2 + y_2^2 = \rho_2^2$; sommando le prime membro a membro: $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = \boxed{a^2 + b^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2}$

Dall'equazione dell'ellisse: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ si possono ricavare le coordinate polari:

$$\rho^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + x^2 = \frac{b^2a^2 - b^2x^2 + a^2x^2}{a^2} = \frac{b^2a^2 + f^2x^2}{a^2}$$

$$\rho = \frac{1}{a}\sqrt{b^2a^2 + f^2x^2} \qquad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}\right)$$

ove "ρ" è l'ampiezza del semidiametro; (generico)

"θ" = "φ" è l'angolo che "ρ" forma con le ascisse.

Supponiamo questo sia "ρ_1; φ_1" e cerchiamo il suo coniugato "ρ_2"; φ_2 avremo: $(\operatorname{tang}\varphi_1)(\operatorname{tang}\varphi_2) = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2}{x_1^2} - 1}\right)\left(\operatorname{tang}\varphi_2\right) = \frac{b^2}{a^2}$

cioè:

$$\operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{b}{a}\left(\frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}}\right)$$

ed essendo: $\rho_2 = \frac{ab}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta_2 + b^2\cos^2\theta_2}}$

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi_2}} = \left(\frac{b\,x_1}{a\sqrt{a^2 - x_1^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2x_1^2}{a^2(a^2 - x_1^2)}}}\right) =$$

$$\operatorname{sen}\varphi_2 = \left(\frac{b\,x_1}{a\sqrt{a^2 - x_1^2}}\right)\frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^4 - a^2x_1^2 + b^2x_1^2}} = \boxed{\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{b\,x_1}{\sqrt{a^4 - f^2x_1^2}}}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{\ldots}\right) + 1}} = \frac{a\sqrt{a^2 - x_1^2}}{\sqrt{a^4 - a^2x_1^2 + b^2x_1^2}} = \boxed{\cos\varphi_2 = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^4 - f^2x^2}}}$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2-x_1^2}\right)+1}} = \frac{\ldots}{\sqrt{a^4-a^2x_1^2+b^2x_1^2}} = \boxed{\cos\varphi_2 = \frac{\ldots}{\sqrt{a^4-f^2x_1^2}}}$$

Si noti che i valori di $\text{sen}\,\varphi_2$, $\cos\cdot\varphi_2$, $\text{tag}\,\varphi_2$ e ρ_2 sono stati ricavati in funzione di X_1 ascissa di ρ_1 diversa, (salvo $\rho_{45°}$) da x_2, ascissa di ρ_2.

$$\text{tag}(\varphi_2) = \frac{b\,x_1}{a\sqrt{a^2-x_1^2}} = \frac{b\sqrt{a^2-x_2}}{a\quad X_2} \supset \frac{1}{\left(\frac{a}{x_1}\right)^2-1} = \frac{\left(\frac{a}{x_2}\right)^2-1}{1}$$

$$\left(\frac{a}{x_2}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{a}{x_1}\right)^2-1}+1 = \frac{(a/x_1)^2}{(a/x_1)^2-1} \Rightarrow \frac{1}{1-\left(\frac{x_1}{a}\right)^2} \supset, \left(\frac{X_2}{a}\right)^2 = 1-\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \rightarrow \boxed{X_2 = \sqrt{a^2-x_1^2}}$$

Altre forme dell'espressione di R.

essendo: $\frac{a^4 y^2}{b^2} = (a^2 - x^2)$

$$R = \frac{(a^4 y^4 / b^4 + b^2 x^2)^{3/2}}{-a^4 b} =$$

$$R = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}{-a^4 b^4} = R = \frac{\left[\left(\frac{a}{b} y\right)^2 + \left(\frac{b}{a} x\right)^2\right]^{3/2}}{-ab}$$

In coordinate polari:

$$R = \rho^3 \frac{(a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^{3/2}}{a^4 b^4}$$

$$R = \rho^3 \frac{\left[\left(\frac{a \sin\theta}{b}\right)^2 + \left(\frac{b \cos\theta}{a}\right)^2\right]^{3/2}}{ab}$$

Notiamo che per $x = f$ si ha:

1) L'ordinata nei fuochi dell'ellisse: $y_f = \frac{b^2}{a} = R_a$

2) Che il raggio di curvatura nei punti di ascissa: $x = f$

$$R_f = \frac{(a^4 - f^4)^{3/2}}{-a^4 b} = \frac{-b^2}{a}\left(\frac{a^2 + f^2}{a^2}\right)^{3/2}$$

$-a^2b$ $\qquad a(a^2)$

$$\boxed{R_\rho = -R_a\left(1+\left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{R_\rho = -R_a\left(1+\rho_3^2\right)^{3/2}}$$

Questi elementi sono utili per una costruzione grafica dell'ellisse.

Indice Enciclopedico Indice Pag. 260

Costruzione grafica utilizzando i raggi di curvatura dell'ellisse

Sono dati i diametri principali 2a e 2b.
Le formule dei raggi di curvatura nei vertici dell'ellisse possono scriversi:

$$-R_b : a = a : b$$

$$-R_a : b = b : a$$

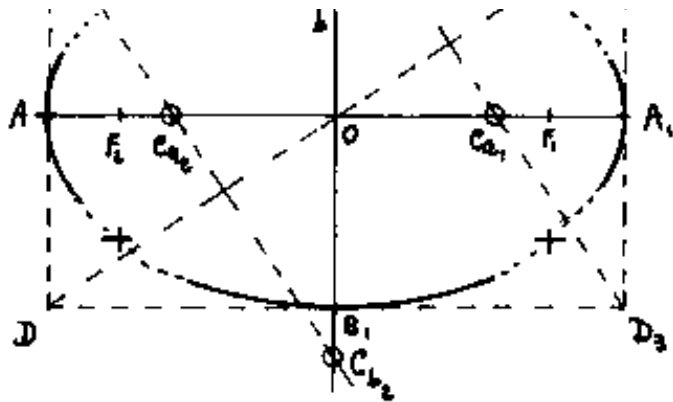
cioè:

$$-R_b \cdot b = a^2 \quad ; \quad -R_a \cdot a = b^2$$

E' evidente che possiamo utilizzare la costruzione grafica dedotta dal secondo teorema di Euclide.

Disegnati gli assi dell'ellisse, costruiamo il rettangolo circoscritto all'ellisse i cui lati saranno: 2a, 2b.
Da due vertici opposti del rettangolo tracciamo le perpendicolari all'altra diagonale, queste incontreranno gli assi nei centri dei cerchi osculatori dei vertici: C_{a_1}, C_{a_2}, C_{b_1}, C_{b_2}.

D_2 C_{b_1} B a D_1 b

[illegible] $C_{a_1}, C_{a_2}, C_{b_1}, C_{b_2}$.

si noti che i triangoli: $C_{b_2}B_1D_3$ e D_1BO sono simili per cui vale la prima proporzione scritta.

Anche il triangolo: $C_{a_1}A_1D_3$ è simile, per cui vale la seconda proporzione.

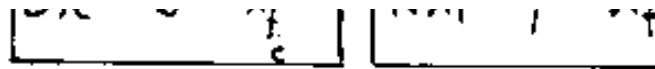
Si noti anche che i cerchi osculatori in B, B_1 sono

esterni all'ellisse, mentre i cerchi osculatori in A ed A_1 sono interni all'ellisse. Nella costruzione possiamo utilizzare solo una piccola parte dei cerchi osculatori, (sono esatti solo per un differenziale ds) cioè finchè non superano la tolleranza grafica. Possiamo però costruire esatte le ordinate sui fuochi che sono pari ad R_a: $\boxed{y_f = b^2/a}$.

Abbiamo già detto che questa costruzione è complementare a quella degli ottagoni circoscritti, nel senso che i "tratti" di ellisse allora disegnati possono essere raccordati, o ampliati coi cerchi osculatori.

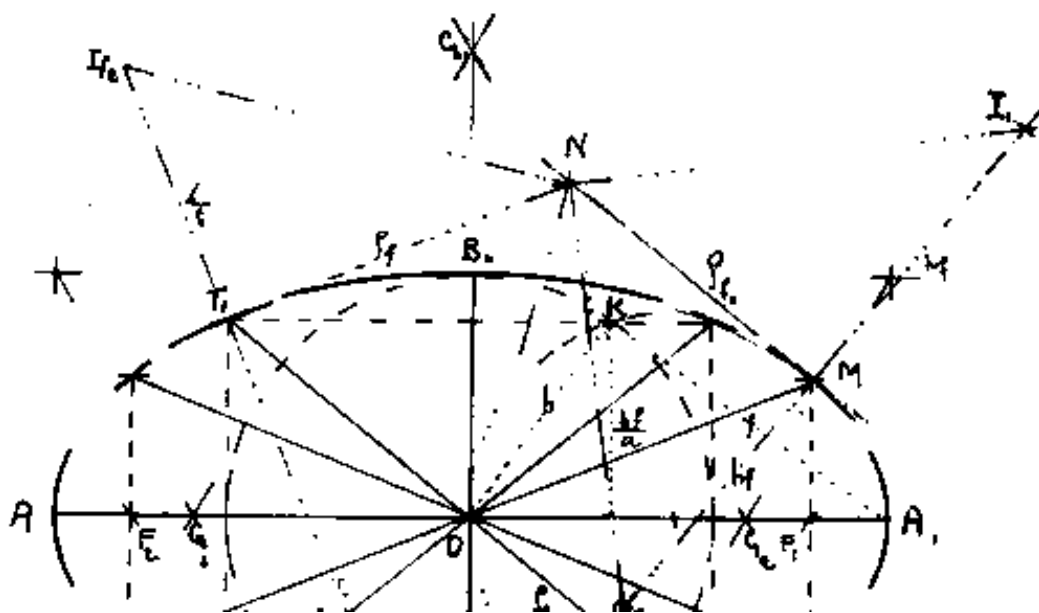
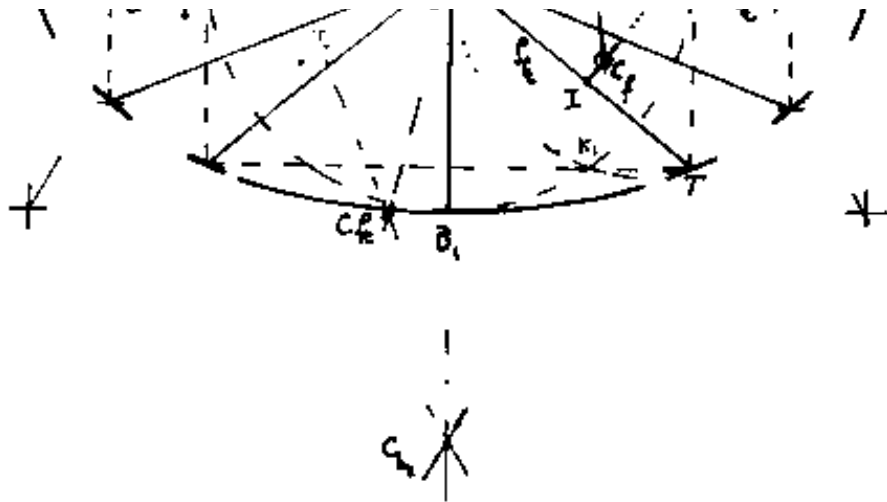
Trattiamo ora i punti: $\boxed{x_f = \pm f}$; $\boxed{y_f = \pm b^2/a = \pm R_a}$

(ricordando che le coordinate degli estremi dei semidiametri coniugati seguono le pitagoriche: $(x_1^2 + x_2^2 = a^2)$; $(y_1^2 + y_2^2 = b^2)$); abbiamo: $\boxed{x_{f_c} = \pm b}$; $\boxed{y_{f_c} = \pm \frac{bf}{a}}$. Consideriamo il semicerchio di diametro "a"; il triangolo rettangolo OKA_1, in esso inscritto, avrà per cateti: $\boxed{\overline{OK} = b = x_{f_c}}$ $\boxed{\overline{KA_1} = f = x_f}$ l'altezza di

[illegible]

tale rettangolo, relativa ad "a" sarà: $h_a = \frac{b f}{a} = y_{f_c}$

Queste osservazioni consentono, dati i diametri 2a, 2b, dell'ellisse di tratteggiare otto punti estremi dei diametri di ascissa $\pm f$ e dei loro coniugati e simmetrici.

Costruito, al solito, il rettangolo circoscritto, all'ellisse ed i centri C_a, C_{a_1}, C_b, C_{b_1}, si traccia

un cerchio di diametro "a" $=(\overline{OA_1})$ ed un cerchio di raggio "b" e centro D; i due cerchi si incontrano in K e K_1. Trovati i fuochi $F_1 F_2$ (col cerchio di raggio "a" e centro in B) da "F" si riportano le ordinate $y_f = R_a$ (ciò determina quattro punti dell'ellisse). Le parallele ad $\overline{AA_1}$ dai punti K sono le ordinate dei punti di ascissa "b" (ciò determina altri quattro punti). Ora agli estremi di ogni diametro si tracciano piccoli tratti paralleli al diametro coniugato, sulle normali ad essi, si riportano i rispettivi raggi di curvatura. Abbiamo già calcolato $\boxed{R_f = R_a\left(\frac{a^2+f^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ che, in questa forma non è comodo graficizzare.

Cerchiamo di trasformare la formula per rendere

I centri di curvatura dell'ellisse (l'evoluta)

L'approssimazione dei cerchi osculatori usati per tratti finiti, ha posto in evidenza la variazione continua dei raggi e dei centri di curvatura.

Abbiamo già calcolato le coordinate dei centri di curvatura per una generica $y = f(x)$:

$$\begin{cases} y_c = f(x) + \dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}} \\[2ex] x_c = x - f'_{(x)} \dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}} \end{cases}$$

Per l'ellisse avremo:

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad ; \quad f'_{(x)} = \frac{-b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad ; \quad f''_{(x)} = \frac{-ab}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

per cui:

$$\frac{1+f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}} = \left(1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right)\left(\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{-ab}\right) = \frac{(a^2(a^2-x^2)+b^2x^2)(\sqrt{a^2-x^2})}{a^3b} =$$

$$\boxed{\frac{1+f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}} = \left(\frac{-b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2b^2}\right)}$$

$$y_c = \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(+1 - \frac{a^4 - c^2x^2}{a^2b^2}\right) = \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\frac{a^2b^2 - a^4 + a^2x^2 - b^2x^2}{a^2b^2}\right)$$

$$y_c = \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\frac{b^2(a^2-x^2)-a^2(a^2-x^2)}{a^4 b^2}\right) = \quad \boxed{y_c = \frac{(b^2-a^2)}{(a^3 b)}(a^2-x^2)^{3/2}}$$

ed anche: $y_c = \frac{b^2-a^2}{b^4}\cdot\frac{b^3}{a^3}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3 \quad \boxed{y_c = \frac{-f^2}{b^4}y^3}$

$$x_c = x - \left(\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\left(\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\frac{a^4-a^2x^2+b^2x^2}{a^2b^2}\right) = \frac{a^4x - a^4x + a^2x^3 - b^2x^3}{a^4}$$

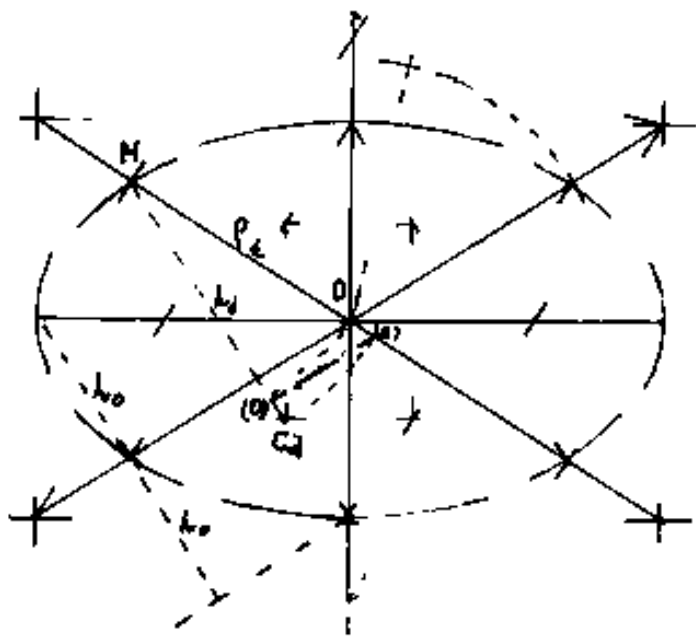
$\boxed{x_c = \frac{+f^2x^3}{a^4}}$ forma simmetrica alla: $\boxed{y_c = \frac{-f^2}{b^4}y^3}$

Il raggio di curvatura nei punti sulle diagonali del rettangolo circoscritto all'ellisse.

Sappiamo che: $\rho_d = d/\sqrt{2}$; $x_{\rho_d} = a/\sqrt{2}$; $y_{\rho_d} = b/\sqrt{2}$

$$R_d = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}{-a^4 b^4} = \frac{(a^4 b^2/2 + b^4 a^2/2)^{3/2}}{-a^4 b^4} = \frac{(a^2+b^2)^{3/2}}{-2\sqrt{2}(ab)} = \frac{d^3}{2\sqrt{2}(ab)}$$

$$R_d = \rho_d^3/ab = \rho_d^3/\rho_d^2 \operatorname{sen} 2\operatorname{arctg}(b/a) = R_d = \rho_d/\left(\frac{2ba}{d^2}\right)$$

$$R_d : \rho_d = \rho_d : h_d$$

In figura è stato tratteggiato un ellisse con archi di cerchio osculatore nei vertici e nei punti sulle diagonali del rettangolo circoscritto.

Prolungo h_d e vi riporto $\rho_d = \overline{M(0)}$, traccio la parallela alla diagonale fino a (c) per similitudine di triangoli $h_d : \rho_d = \rho_d : \overline{M(c)}$ cioè $\overline{M(c)} = R_d$ che riporto in $\overline{MC_d} = R_d$.

$R_d \cdot {}^1/_d = {}^1/_d \cdot M(C)$ cioè $M(C) = R_d$ che riporto in $MC_d = R_d$.

Trovato un centro, si costruiscono gli altri simmetrici agli assi.

Dalla : $R_d = \dfrac{d^3}{2\sqrt{2}\, ab}$ possiamo ricavare := $R_d = \dfrac{d^2}{2\sqrt{2}\, h_0}$; $\left(h_0 = \dfrac{ab}{d}\right)$

$$\boxed{R_d : d = d : 2\sqrt{2}\, h_0}$$

meno comoda da graficizzare.

Risolvendo rispetto ad x ed y abbiamo:

$$x = \left(+\frac{a^4 x_c}{f^2}\right)^{1/3} \quad ; \quad y = \left(\frac{-b^4 y_c}{f^2}\right)^{1/3}$$

sostituendo nell'equazione dell'ellisse si ha:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{+a^4 x_c}{f^2}\right)^{2/3} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{-b^4 y_c}{f^2}\right)^{2/3} = 1$$

cioè:

$$\left(\frac{a x_c}{f^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{b y_c}{f^2}\right)^{2/3} = +1$$

equazione dell'evoluta dell'ellisse.

che può scriversi:

$$(a x_c)^{2/3} + (b y_c)^{2/3} = (f^2)^{2/3}$$

Il segno meno (-) alla y_c ordinata del centro di curvatura indicava che il centro stesso era da banda opposta, rispetto agli assi, del punto a cui si riferisce. (Sparisce col quadrato)

In forma esplicita l'equazione dell'evoluta dell'ellisse sarà:

$$y_c = \frac{1}{b}\left((f^2)^{2/3} - (a x_c)^{2/3}\right)^{3/2}$$

L'equazione dell'evoluta dell'ellisse in coordinate polari:

$$\left(\frac{f}{\rho}\right)^{2/3} = (a\cos\theta)^{2/3} + (b\,\mathrm{sen}\,\theta)^{2/3}$$

Il luogo dei centri di curvatura dell'ellisse e la curva asteroide

L'equazione dell'evoluta = (luogo dei centri di curvatura) è per l'ellisse:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

sia "a" il modulo grafico:

$$(x)^{2/3} + \left(\frac{b}{a}y\right)^{2/3} = \left[a\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)\right]^{2/3}$$

posto: $\left(\frac{b}{a}\right) = \cos(\varphi)$ (ove φ è l'angolo formato dal semiasse "b" con la congiungente il fuoco) cioè:

$b = a\cos(\varphi)$; $f = a\,\text{sen}(\varphi)$; l'equazione diventa:

$$x^{2/3} + (\cos(\varphi) \cdot y)^{2/3} = (f\,\text{sen}(\varphi))^{2/3}$$

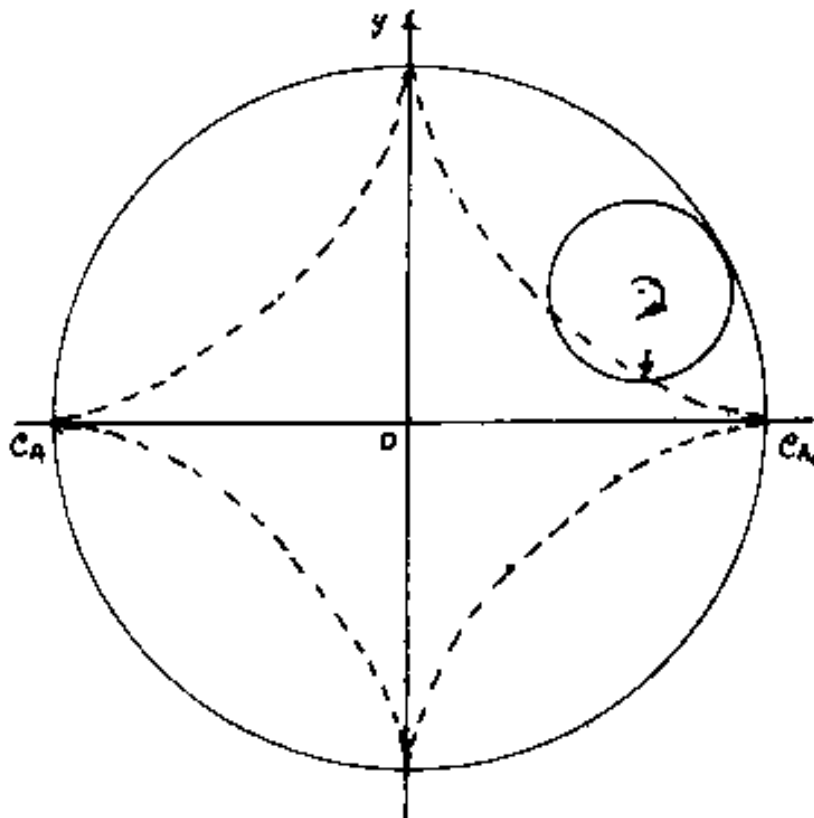
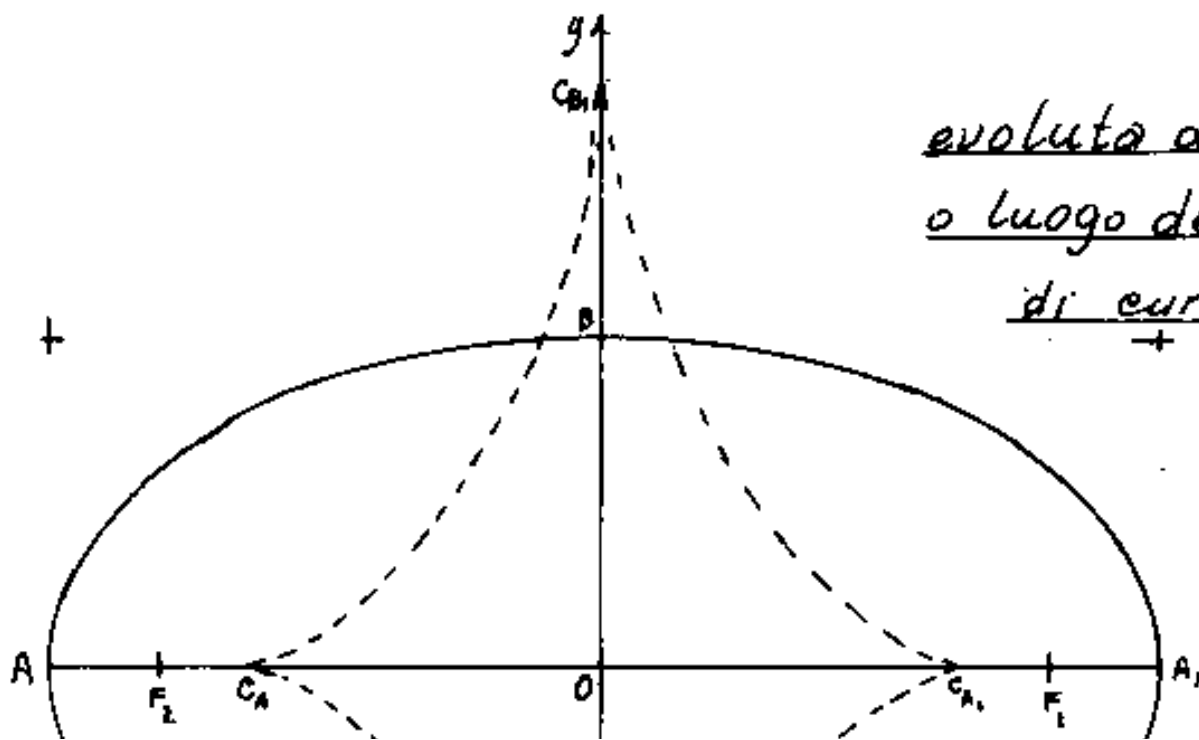
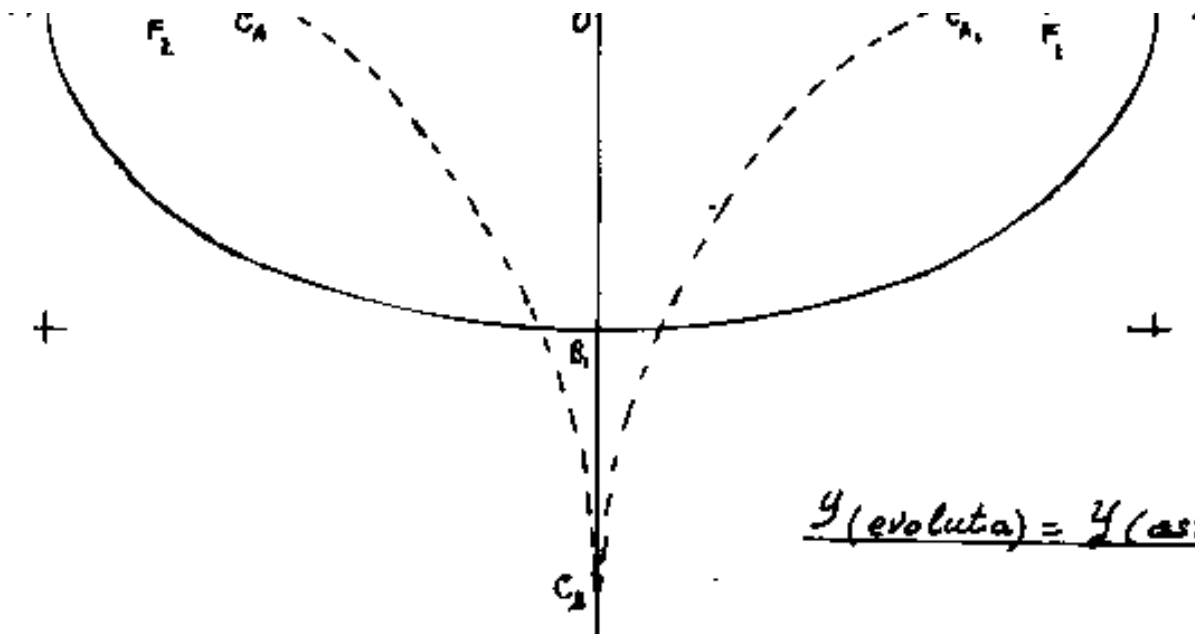
Premesso che l'equazione dell'asteroide è:

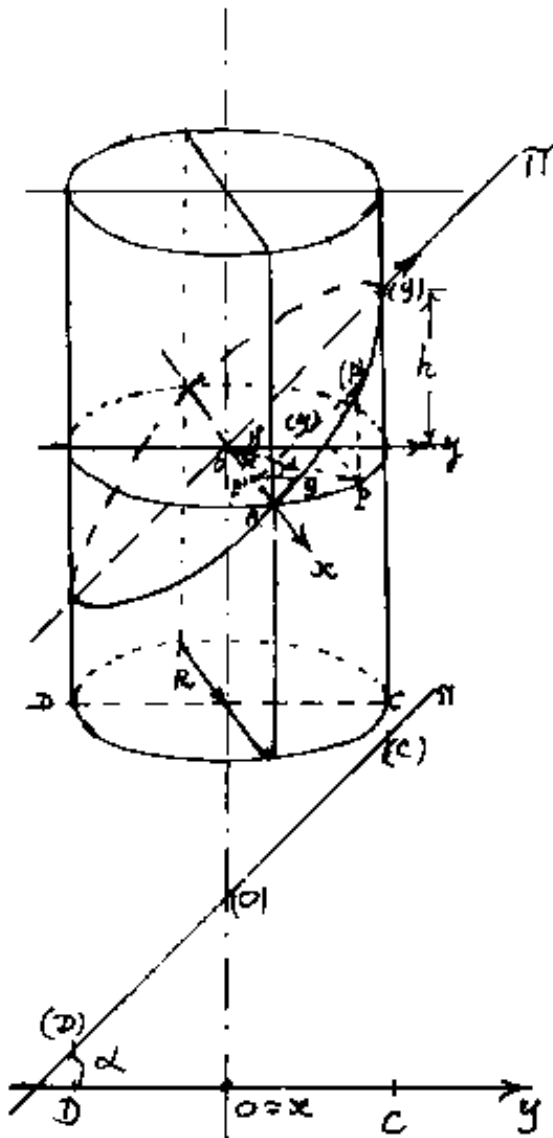
$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$$

avremo che l'equazione dell'evoluta dell'ellisse è la proiezione di una asteroide ruotata dell'angolo

"φ" intorno all'asse "x" ed avente: $R = f\,\text{sen}(\varphi)$.

La curva asteroide è una "ipocicloide" a quattro cuspidi ed è generata da un punto su una circonferenza di raggio $R/4$ che rotola, senza slittare, internamente ad una circonferenza di raggio R. (Vedasi Vol. V per maggiori dettagli)

Disegnamo le due curve:

curva asteroide

evoluta dell'ellisse o luogo dei centri di curvatura

y(evoluta) = y(asteroide) / cos(φ)

L'ellisse come sezione di un cilindro con un piano

Il problema è analogo a quello della proiezione di un cerchio su un piano π, (che abbiamo già trattato), solo che in questo caso, i raggi proiettanti, anziché essere perpendicolari a π, sono perpendicolari al piano di giacitura del cerchio. (Sono le generatrici del cilindro). Indicano in parentesi i punti proiettati avremo:

$$(x) = x$$
$$(y) = y/\cos\alpha$$

sostituendo :

$$\frac{(x^2)}{R^2} + \frac{(y)^2}{(R/\cos\alpha)^2} = 1$$

R	$(R/\cos\alpha)^2$

può scriversi:

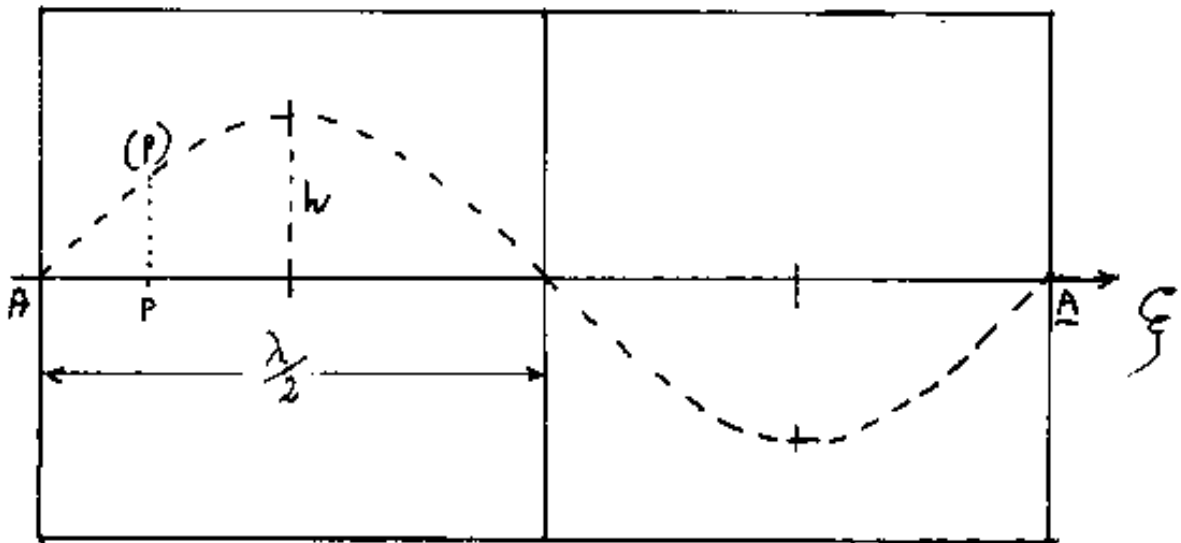
$$(x)^2 + (\cos\alpha(y))^2 = R^2$$

e riportando l'ellisse sul piano del cerchio:

$$y = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{R^2 - x^2}$$

quest'ultima evidenzia che le ordinate del cerchio base del cilindro, sono divise per $(\cos(\alpha))$ per ottenere le ordinate dell'ellisse.

Relazione fra l'ellisse e la sinusoide

Supponiamo di tagliare il cilindro, (che ha come sezione un ellisse), lungo la generatrice passante per il punto comune al semiasse x ed all'ellisse, e di svolgere in piano la superficie cilindrica; otterremo un rettangolo di altezza pari al cilindro, e di base pari alla circonferenza di base del cilindro rettificata. L'ellisse della sezione si svilupperà in una sinusoide.

La lunghezza d'onda della sinusoide sará: $\boxed{\lambda = 2\pi R}$,

mentre l'ampiezza "h" della sinusoide sará: $h = R\tan(\alpha)$

mentre l'ampiezza "h" della sinusoide sarà: $h = R \tan(\alpha)$

(ove α è l'inclinazione del piano di sezione, rispetto ai piani di base del cilindro retto circolare).

Cerchiamo di definire l'ordinata di (P) cioè: $\overline{P(P)}$, in funzione dell'arco $\widehat{AP} = R\cdot\varphi$, ove $\varphi = \widehat{AOP}$; $\overline{P(P)} = R \operatorname{sen}(\varphi) \tan\alpha$;

ma $R\tan(\alpha) = h$ per cui: $\overline{P(P)} = h \operatorname{sen}(\varphi)$ $\overline{P(P)} =$ $\eta = h\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{AP}}{R}\right)\right)$

Ciò dimostra essere una sinusoide la curva ottenuta

svolgendo il cilindro ove A ed A erano coincidenti.

La curva sinusoide è quindi della stessa lunghezza dell'ellisse.

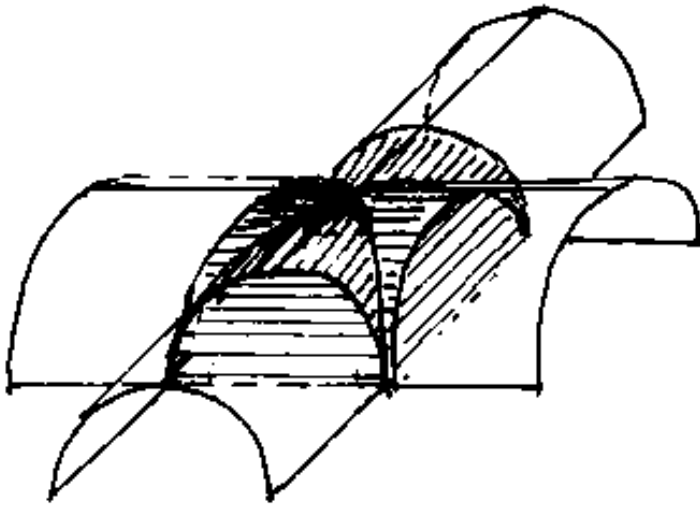
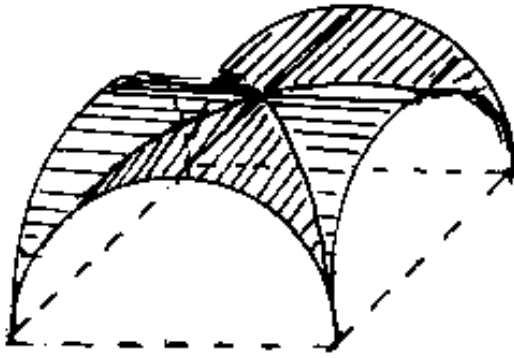
Inversamente, data una sinusoide di lunghezza d'onda λ e di ampiezza h, la cui formula, in piano, è: $\eta = h \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\xi\right)$, avremo che avvolgendo su un cilindro il piano della sinusoide, in modo che $\xi = \lambda$ e $\xi = 0$ coincidano, avremo $\frac{\lambda}{2\pi} = R$ = raggio del cerchio di base del cilindro $R = b$ semiasse minore dell'ellisse.

Il semiasse maggiore dell'ellisse sarà: $a = \sqrt{R^2 + h^2}$ cioè: $b = \frac{\lambda}{2\pi}$; $a = \sqrt{h^2 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}$. Il piano di giacitura dell'ellisse è inclinato di $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{h}{R}\right)$ $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)$ rispetto alla base del cilindro.

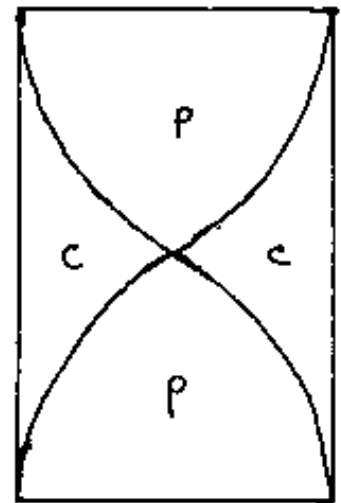
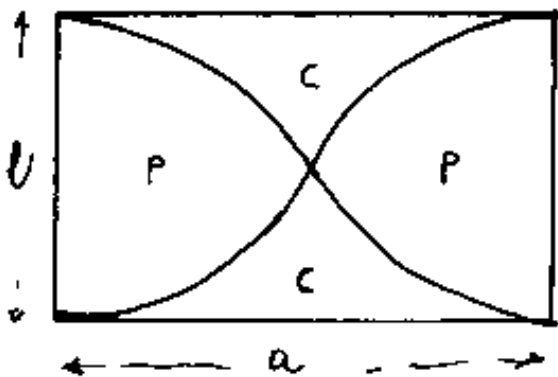
Se: $h = 1$; $\lambda = 2\pi$; e quindi: $R = 1$; $\alpha = 45° = \frac{\pi}{6}$, si avrebbe una vera sinusoide trigonometrica; e l'ellisse che otterremmo, avvolgendola ad un cilidro di raggio = 1, avrebbe per semiassi: $b = 1$; $a = \sqrt{2}$.

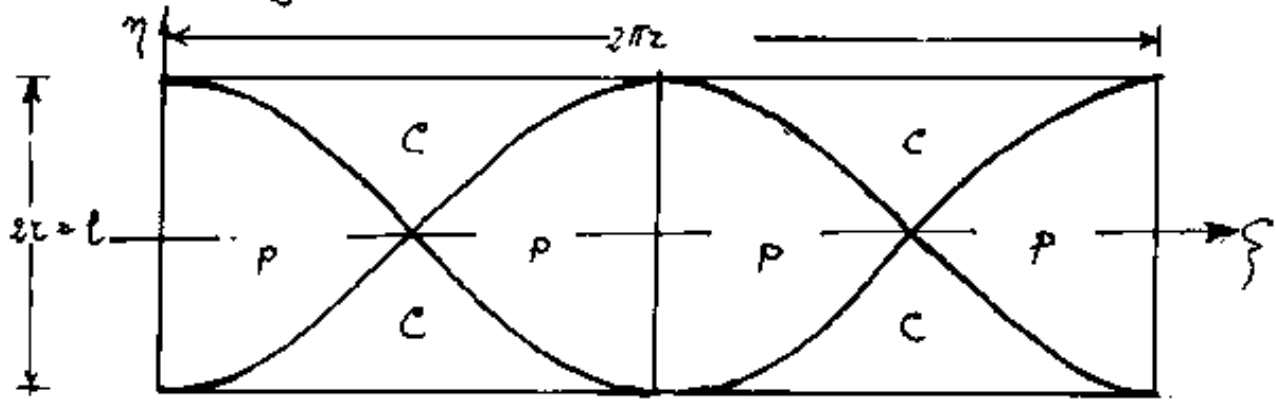
Le correlazioni trovate ci consentono di passare da un ellisse ad una curva sinusoidale e viceversa. Ciò trova applicazione nella costruzione di modelli in lamiera o cartoncino.

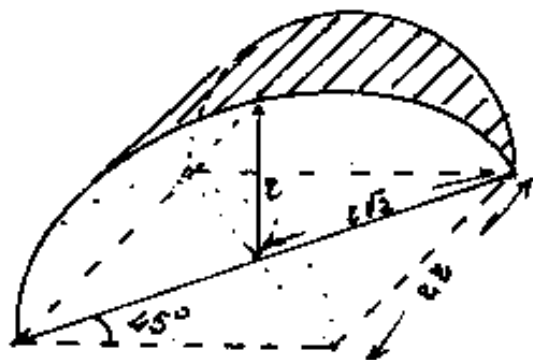
Applicazioni alle volte a crociera e padiglione

Consideriamo l'intersezione di due semicilindri orizzontali, alla stessa quota, e perpendicolari fra loro. Se i cilindri hanno uguale raggio, la zona di intersezione è quadrata come base. Delimitiamola sezionando i cilindri con piani verticali passanti per i quattro lati del quadrato e per le due diagonali. Ogni semicilindro, sulla zona di intersezione viene diviso in 4 parti dai piani verticali passanti in diagonale, e precisamente <u>due fusi</u> e <u>due unghie</u>; le sole <u>unghie</u> dei due cilindri formano, sulla pianta quadrata, <u>una volta a crociera</u>; i soli <u>fusi</u> dei due cilindri formano <u>una volta a padiglione</u>

volta a crociera (unghie)

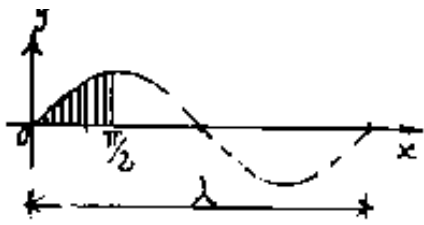
volta a padiglione (fusi)

Sia "r" il raggio dei due semicilindri ed "a" = $r\pi$ la lunghezza dei semiarchi. Sviluppando in piano i due semicilindri, che si intersecano orto= gonalmente, otteniamo due rettangoli di lati: $l = 2r$; $a = r\pi$. Le semiellissi delle sezioni coi piani verticali diagonali, sui semicilindri svolti in ret= tangoli diventano sinusoidi:

Si sono indicate con "c" le parti che formano la crocie= ra, e con "p" le parti che costituiscono il padi= glione. Per fare un modellino di volta a crociera ed uno di volta a padiglione conviene disporre di un rettangolo di cartoncino $2r$ per $2r\pi$ e

di un rettangolo di cartoncino 2τ per $2\tau\pi$ e

disegnarvi due cosinusoidi opposte considerando "τ" = modulo grafico unitario.

Consideriamo un semiellisse intersezione con un piano verticale in diagonale, esso ha per semiassi: "r" ed "$r\sqrt{2}$", ed essendo $\alpha = 45°$, $(\tan(\alpha) = 1)$, (v. pag. prec.), la sinusoide che si ottiene svolgendo il cilindro avrà per equazione: $\boxed{\eta = r\,\text{sen}\,\varphi}$ però, in questo caso, trattandosi di semicilindri, la generatrice origine di φ è spostata di 90° per cui $\text{sen}(90-\varphi) = \cos(\varphi)$, da cui le cosinusoidi sui modellini. (Per il disegno delle sinusoidi vedi esempi di cerchi osculatori).

Confronti fra la volta a crociera e la volta a padiglione.

Sia "l" il lato del quadrato d'imposta delle volte ($l = 2r$); L'area di base sarà: $\boxed{A = l^2}$ ed il volume del semicubo circoscritto alle volte sarà $\boxed{V = \frac{l^3}{2}}$

Poiché l'area di ¼ d'onda di sinusoi-

Poiché l'area di $\frac{1}{4}$ d'onda di sinusoide è: $A_{\lambda/4} = \int_0^{\pi} sen(x)\, dx = [-cos(x)]_0^{\pi/2} =$ $\boxed{A_{\lambda/4} = 1}$

dallo sviluppo dei modellini abbiamo:

Area della superficie della volta a padiglione $= 8r^2 A_{\lambda/4} =$ $\boxed{A_p = 2\ell^2}$

(l'area della superficie della volta a padiglione è il doppio dell'area d'imposta)

Area della superficie della volta a crociera: $A_c = 8r^2(\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{4})$

$A_c = \frac{8r^2}{2}(\pi - 2) = 4r^2(\pi-2)$; $\boxed{A_c = \ell^2(\pi-2)} = \ell^2(1{,}14159..) =$

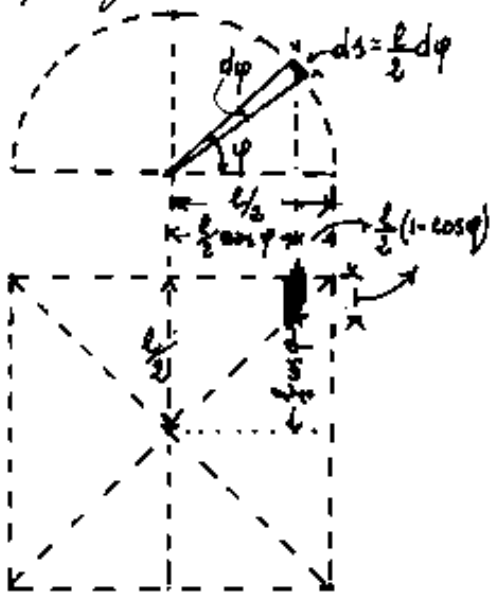
$A_c \cong \ell^2 + (14\%)\ell^2$. (l'area della superficie della volta a crociera è pari all'area d'imposta maggiorata di poco più del 14%.

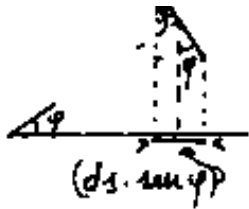
Qualora non avessimo utilizzato lo sviluppo in piano nel modellino di volte, per calcolare l'area della superficie di una "unghia" della volta a crociera (vedi figura):

$$dA_c = \frac{\ell}{2}(1-\cos\varphi)\, ds$$

$$dA_c = \frac{\ell}{2}(1-\cos\varphi)\left(\frac{\ell}{2}\, d\varphi\right)$$

$$A_c = 8\int_0^{\pi/2} \frac{\ell^2}{4}(1-\cos\varphi)\, d\varphi$$

$$A_c = 2\ell^2\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$$

$$\boxed{A_c = \ell^2(\pi-2)}$$

Per il calcolo dei volumi occorre notare che la proiezione sulla base d'imposta dell'area elementare dA è $dA' = (dA \cdot \operatorname{sen}\varphi) = \left(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right)\left(\frac{\ell}{2}(1-\cos\varphi)\right)$

re dA e $dA' = (dA \cdot sen\varphi) = \left(\frac{\ell}{2} sen\varphi\, d\varphi\right)\left(\frac{\ell}{2}(1-\cos\varphi)\right)$

anche l'altezza è funzione di φ, cioè:

$h_{\varphi} = \frac{\ell}{2} sen\varphi$; per cui: $dV = \frac{\ell}{2} sen\varphi \cdot dA'$

(ds. senφ)

$$dV = \frac{\ell^3}{8}\left(sen^2\varphi - sen^2\varphi\cos\varphi\right)d\varphi$$

$$V_C = 8\frac{\ell^3}{8}\int_0^{\pi}\left(sen^2\varphi - sen^2\varphi\right)d\varphi = \ell^3\left[\frac{-sen\varphi\cos\varphi+\varphi}{2} - \frac{sen^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2} = \ell^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{V_C = \frac{\ell^3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)} \qquad \boxed{V_C = \frac{\ell^3}{2}(0,90413)}$$

Il volume delimitato fra la base d'imposta e la volta a crociera è circa i 9/10 del volume del semicubo circoscritto.

Per la volta a padiglione, l'elemento di area proiettato è $dA'_p = (ds \operatorname{sen}\varphi)\left(\frac{\ell}{2}\cos\varphi\right) = \frac{\ell^2}{4}(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\,d\varphi$

$$dV_p = h_{(\varphi)} \cdot dA'_p = \frac{\ell^3}{8}(\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$V_p = 8 \cdot \frac{\ell^3}{8}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \ell^3\left[\frac{\operatorname{sen}^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{V_p = \ell^3/3}$$

Il volume delimitato fra la base e la volta a padiglione è un terzo del volume del semicubo circoscritto.

Per ottenere lo stesso volume della volta a crociera occorre alzare le pareti di: $\frac{\ell^3}{\ell^2}\left(\frac{9}{10} - \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{30}\ell$ che per 4 pareti diventa: $\frac{34}{15}\ell^2$ di murature da aggiungere a $2\ell^2 = A_p$

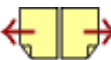
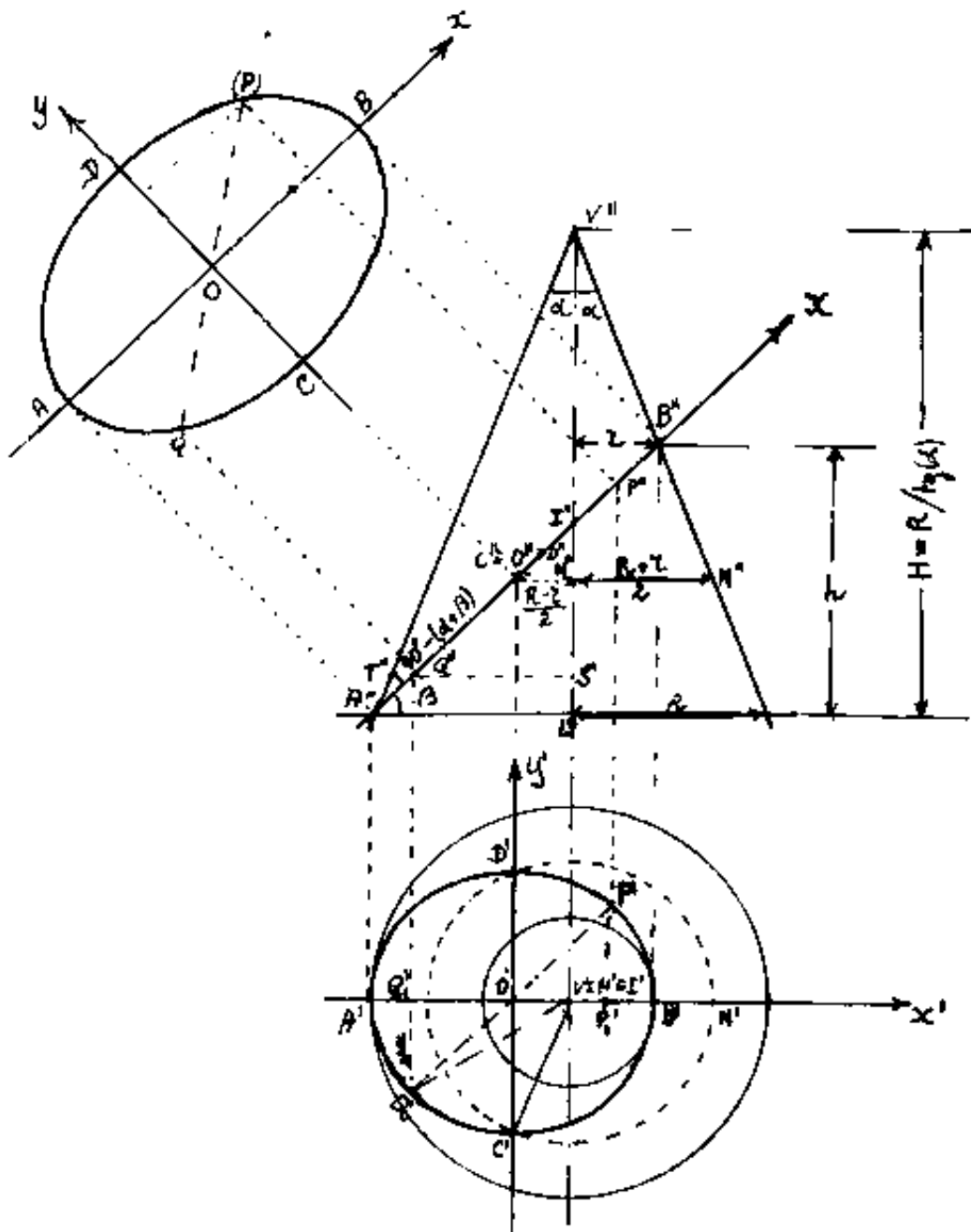
$\frac{64}{15}\ell^2 = \underline{4{,}27\,\ell^2}$. (metri quadri di muratura complessiva)

Per chiudere le pareti di una volta a crociera occorrono:

$2r^2\pi = \frac{l^2}{2}\pi = 1{,}57\,l^2$ da aggiungere $A_c = 1{,}14\,l^2$ = $\underline{2{,}71\,l^2}$ (metri quadri di muratura complessiva).

Per un vano di egual volume.

Con la crociera: (m^2 di parete $= 1{,}57\,l^2$) + (m^2 di volta $= 1{,}14\,l^2$) = $\underline{m^2\,2{,}71\,l^2}$

Col padiglione: (" $= 2{,}27\,l^2$) + (" $= 2\,l^2$) = $\underline{m^2\,4{,}27\,l^2}$

L'ellisse come intersezione di un piano con un cono

Un cono di apertura 2α sia sezionato da un piano inclinato di β sulla base del cono. Siano "r" ed "R" i

clinato di β sulla base del cono. Siano r ed R i raggi di base del tronco di cono sezionato. L'altezza del tronco sarà: $h=(r+R)\,tg\,\beta$. ed anche: $h=(R-r)\,tg\,\alpha$.

per cui: $$tg(\alpha)\cdot tg(\beta)=\frac{(R-r)}{R+r}$$. Bastano quindi tre grandezze per definire l'intersezione: $$R=r\,\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

Calcoliamo il semidiametro maggiore:

$$a=\overline{OA}=\overline{OB}=\frac{(R+r)}{2\cos\beta}$$

Calcoliamo il semidiametro minore

$$b = \overline{OC} = \overline{O'C'} = \sqrt{\overline{M'C'}^2 + \overline{M'O'}^2} = \sqrt{M''N''^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{b = \sqrt{Rr}}$$ (medio proporzionale fra i raggi)

Assunta come asse x la traccia del piano di sezione: $(A''B'')$ e per asse y la perpendicolare ad x, passante per "O" e giacente sulla sezione retta del cono; per un generico punto Q della intersezione si ha:

$$x_Q = \overline{O''Q''} \quad ; \quad y_Q = \overline{Q'Q'_1}$$

Il segno dipende dal verso arbitrario degli assi.

Dal triangolo $Q'_1 H' Q'$ (e sua seconda proiezione)

$$y_Q^2 = \overline{Q'H'}^2 - \overline{Q'_1H'}^2 \qquad y_Q^2 = \overline{T''S''}^2 - \overline{Q''S''}^2$$

$$R : H = \overline{TS''} : (H - \overline{L'S'}) \qquad \frac{R}{H} = \tan(\alpha) \qquad \overline{LS} = (a-x)\operatorname{sen}\beta = (a-x)\operatorname{tg}\beta\cos\beta$$

$$\overline{T''S''} = R - (L''S'')\operatorname{tg}(\alpha) \qquad \overline{T''S''} = R - (a-x)\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)\cos(\beta)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta) = \frac{R-r}{R+r} \quad ; \quad Q''S'' = x\cos\beta + \frac{R-r}{2} \qquad \left(\frac{R-r}{R+r}\right)\cos\beta = \frac{R-r}{2a}$$

$$y_Q^2 = \left(R - (a-x)\frac{(R-r)}{2a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\left(\frac{R+r}{2}\right) + \left(\frac{R-r}{2}\right)\right)^2$$

$$y_Q^2 = \left[\left(\frac{R+r}{2}\right)+\left(\frac{R-r}{2}\right)\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2 - \left[\left(\frac{R+r}{2}\right)\left(\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{R-r}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{R-r}{2}\right)^2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{R+r}{2}\right)^2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2$$

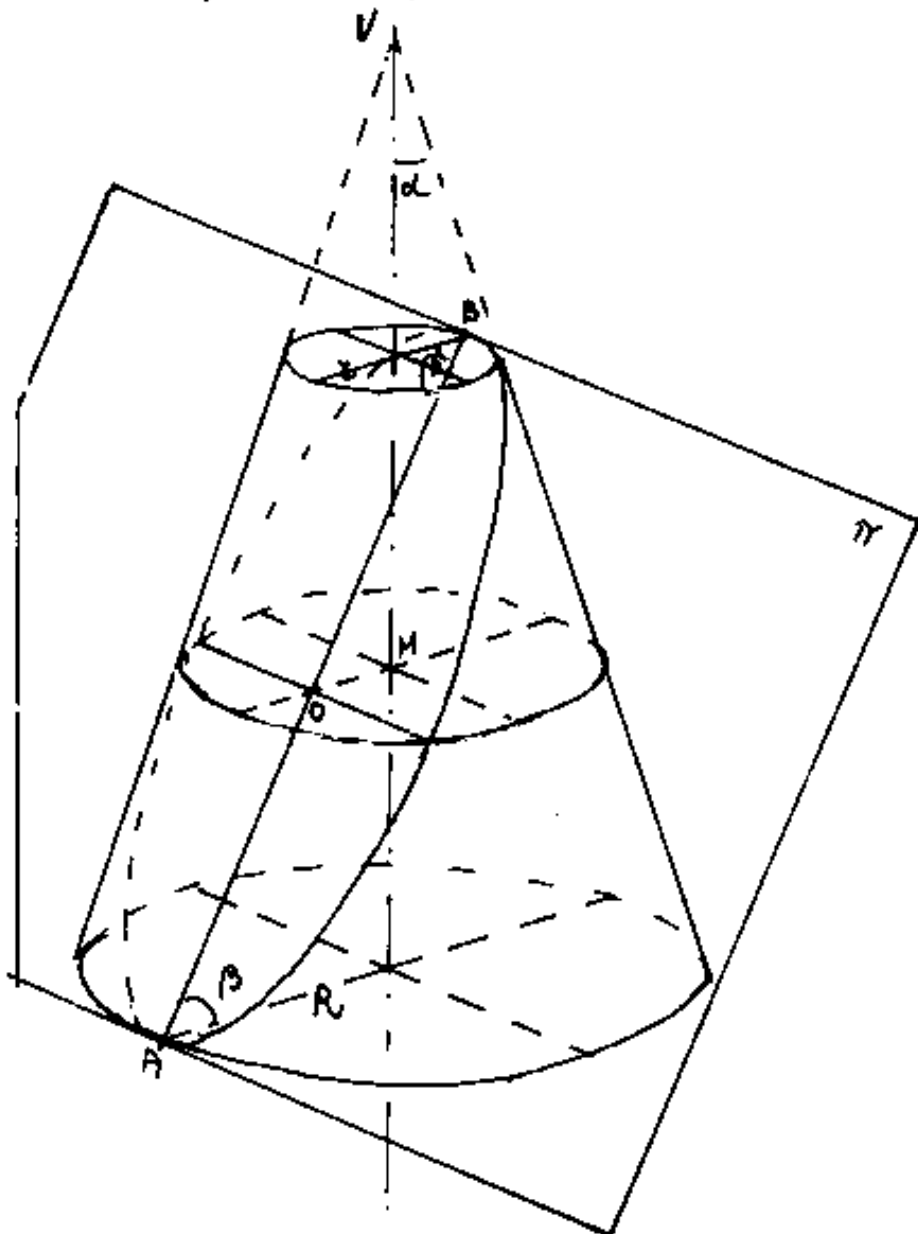
$$y^2 = Rr - Rr\left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad ; \quad \left(Rr = b^2\right)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ciò dimostra che la intersezione fra un cono ed un piano (che lo attraversi) è un'ellisse.

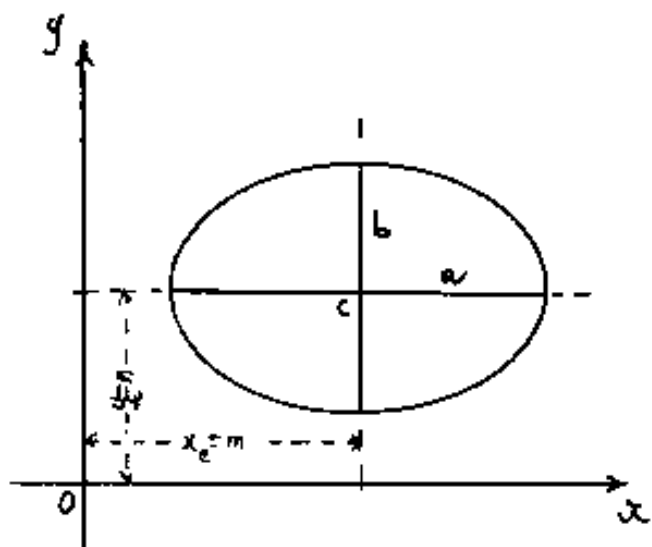
Un tronco di cono di raggi "r" ed "R" ed altezza $h = (R-r)\,tg(\alpha)$, tagliato diagonalmente da un piano inclinato di β sulle basi, per cui vale la relazione: $tang(\alpha)\cdot tang(\beta) = \frac{R-r}{R+r}$; la linea comune al piano ed alla superficie laterale del tronco di cono è una ellissi di assi:

$$a = \frac{(R+r)}{2\cos\beta}$$

$$b = \sqrt{Rr}$$

Si può anche pensare il vertice del cono come un centro di proiezione di una sezione ret=

di una sezione ret=
ta circolare su un piano inclinato di β rispetto
al piano della sezione retta; si ha così che

<u>l'ellisse è ancora la proiezione di un cerchio,
(in proiezione centrale)</u> . (La proiezione centrale ha il
centro di proiezione in campo finito, la proiezione di Monge o per
raggi paralleli ha il centro di proiezione all'infinito)

L'equazione dell'ellisse riferita ad assi traslati

Siano: m ed n le coordinate del centro dell'ellisse, avremo:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

cioè, sviluppando:

$$b^2(x^2 - 2mx + m^2) + a^2(y^2 - 2ny + n^2) - a^2b^2 = 0$$

ed ordinando:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2mx - 2a^2ny + b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

forma classica dell'equazione delle coniche.

dividendo per a^2b^2 si ha:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - 2\left(\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2}\right) + \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) = 1$$

esplicitando y si ha:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-m)^2} + n$$

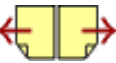
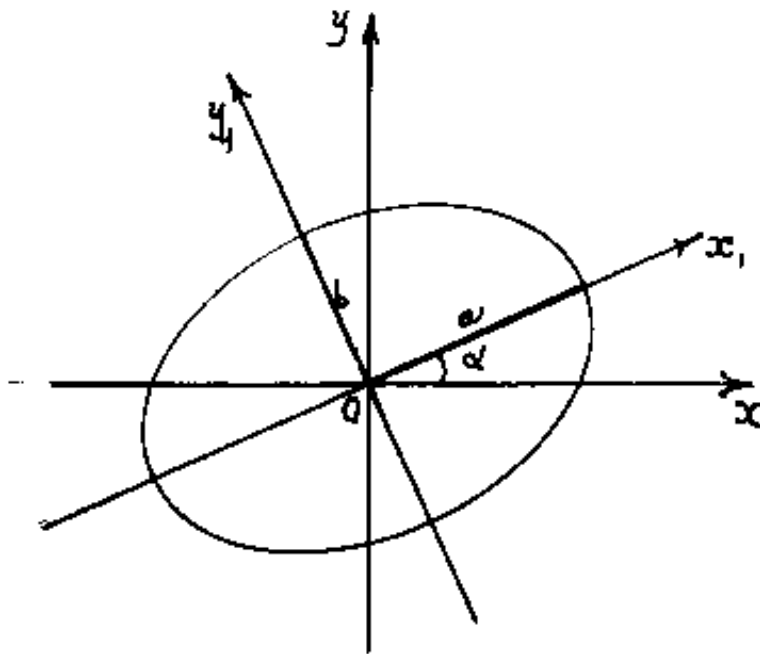
Confrontiamo ora con l'equazione generale delle coniche:

$a_{11} = b^2$; $a_{12} = 0$ (manca il termine in xy); $a_{22} = a^2$; $a_{13} = -b^2 m$; $a_{23} = -a^2 n$;

$a_{33} = b^2 m^2 + a^2 n^2 - a^2 b^2$. Si noti che i coefficienti sono fra loro correlabili.

Cioè affinché si tratti di ellissi ad assi traslati deve essere: $\boxed{a_{12} = 0}$

$a_{33} = \left(\frac{a_{13}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}^2}{a_{22}} - a_{11} \cdot a_{22} \right)$ che può scriversi: $\boxed{a_{11} a_{23}^2 + a_{22} a_{13}^2 - a_{11}^2 a_{22}^2 = a_{11} a_{22} a_{33}}$

Esplicitando la y è possibile ricavare "n"; esplicitando la x è possibile ricavare "m", da cui "a" e "b" e controllare in che forma sono i coeff. dell'equaz. data.

L'equazione dell'ellisse ad assi ruotati

L'equazione per la rotazione degli assi (V. prec.) è:

$$\begin{cases} x_1 = y \operatorname{sen}\alpha + x\cos\alpha \\ y_1 = y\cos\alpha - x\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

l'equazione dell'ellisse al centro: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

può scriversi:

$$\boxed{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2 = 0}$$

sostituendo: $b^2(y^2\operatorname{sen}^2\alpha + x^2\cos^2\alpha + 2xy\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = b^2x_1^2$

$a^2(y^2\cos^2\alpha + x^2\operatorname{sen}^2\alpha - 2xy\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = a^2y_1^2$

sommando: $\boxed{(a^2\operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)x^2 + (a^2\cos^2\alpha + b^2\operatorname{sen}^2\alpha)y^2 + (b^2 - a^2)\operatorname{sen}(2\alpha)xy = a^2b^2}$ (1)

dividendo per a^2b^2 si ha:

$$\boxed{\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2} + \frac{\cos^2\alpha}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\operatorname{sen}(2\alpha)xy = 1} \quad (2)$$

Ricordando che: (vedi eq in coord. polari)

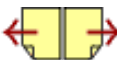
$\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2} + \frac{\cos^2\alpha}{a^2}\right) = \frac{1}{\rho_x^2}$; (ρ_x = semidiametro sull'asse x)

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\sin^2\alpha}{a^2}\right) = \frac{1}{\rho_x^2} \quad ; \left(\rho_x = \ldots\right)$$

$$\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right) = \frac{1}{\rho_y^2} \quad ; \left(\rho_y = \text{semidiametro sull'asse } y\right)$$

si ha:

$$\boxed{\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} + \left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\sin(2\alpha)\right] x y = 1}$$

Attenzione: ρ_x e ρ_y non sono, né possono essere diametri coniugati essendo fra loro perpendicolari.

sommando: $$\frac{1}{\rho_x^2} + \frac{1}{\rho_y^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$ si ha una importante relazione: "La somma dei quadrati dei reciproci di due semidiametri ortogonali, in un ellisse è costante"

facendo la differenza:

$$\frac{1}{\rho_x^2} - \frac{1}{\rho_y^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos(2\alpha)$$

si ha:

"La differenza dei quadrati dei reciproci di due semidiametri ortogonali, in un ellisse è pari alla differenza dei quadrati dei reciproci dei semidiametri principali moltiplicata per il coseno dell'angolo doppio fra i due sistemi"

Ma dati due semidiametri ortogonali di un ellisse, le due relazioni scritte non sono sufficienti a risolvere il problema perché le incognite sono tre: "a" "b" "α"

problema perché le incognite sono tre: "a", "b", "α".

Questo problema, di cui abbiamo già fatto cenno, si presenta spesso nei calcoli di matematica applicata, per esempio nel calcolo dell'ellisse d'inerzia, di una figura piana, non simmetrica, (per esempio la sezione ad **L**) per essa è facile trovare $J_{(x)}$ e $J_{(y)}$, ma occorre avvalersi dei momenti d'inerzia centrifughi per trovare a, b, α.

Se confrontiamo l'equazione dell'ellisse ad assi ruotati con l'equazione generale delle coniche si ha: $a_{11} = (a^2 \operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)$; $2a_{12} = (b^2 - a^2)\operatorname{sen}(2\alpha)$; $a_{22} = (a^2\cos^2\alpha + b^2\operatorname{sen}^2\alpha)$; $2a_{13} = 0$; $2a_{23} = 0$; $a_{33} = -a^2b^2$.

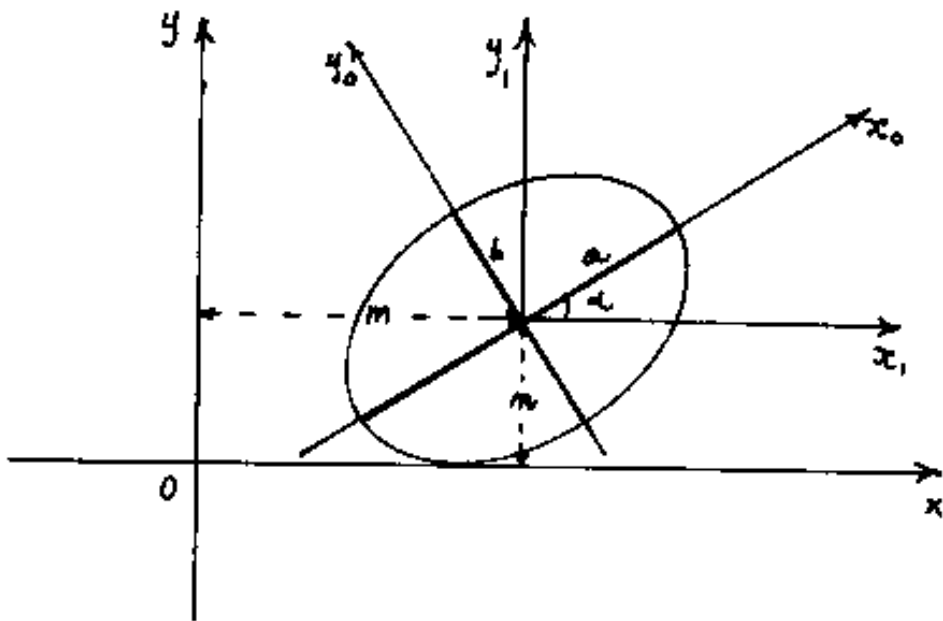
Nell'equazione dell'ellisse ad assi solo ruotati mancano i termini in x ed y, figura invece: a_{12} in xy.

Si nota che se poniamo $a_{33} = 1$ si ha l'equazione nella forma (2). per cui:

$$\frac{a_{11} + a_{22}}{a_{33}} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad ; \quad \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33}} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos(2\alpha)$$

perciò:
$$\frac{2a_{12} \cdot a_{33}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\operatorname{sen}(2\alpha)}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos(2\alpha)} = \operatorname{tang}(2\alpha).$$

trovato: α ; $\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33}\cos\alpha} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$; $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ era noto, quindi per somma e sottrazione si ricavano i diametri principali dell'ellisse.

L'equazione dell'ellisse ad assi ruotati e traslati

Basta sostituire: $(x-m)$ ed $(y-n)$ alle x ed y nell'equazione dell'ellisse ad assi ruotati. Si ha:

$$(a^2 \operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)(x-m)^2 + (a^2\cos^2\alpha + b^2\operatorname{sen}^2\alpha)(y-n)^2 + (b^2-a^2)\operatorname{sen}(2\alpha)(x-m)(y-m) = a^2b^2$$

essendo:

$$(x-m)^2 = (x^2 - 2mx + m^2);\ (y-n)^2 = (y^2 - 2ny + n^2);\ (x-m)(y-n) = (xy - my - nx + mn)$$

avremo: i coefficienti:

$$a_{11} = (a^2\operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)$$

$$a_{22} = (a^2\cos^2\alpha + b^2\operatorname{sen}^2\alpha)$$

$$2a_{12} = (b^2 - a^2)\operatorname{sen}(2\alpha)$$

$$2a_{13} = -[2m\,a_{11} + n2a_{12}]$$

$$2a_{23} = -\left[2n\, a_{22} + m\, 2a_{12}\right]$$

$$a_{33} = \left[m^2 a_{11} + n^2 a_{22} + mn\, 2a_{12} - a^2 b^2\right]$$

che riportati nell'equazione generale:

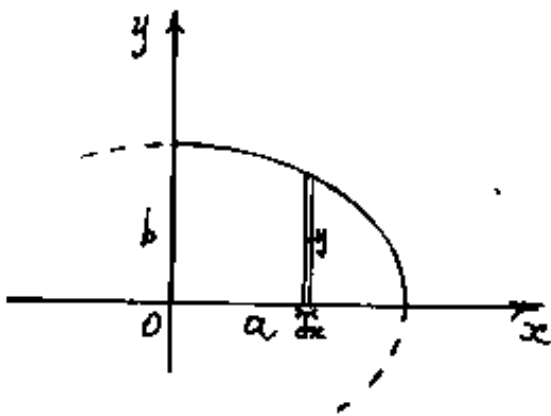
$$\boxed{a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0}$$

danno l'equazione dell'ellisse ad assi ruotati e traslati, l'equazione è completa, affinché sia un ellisse: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$;

affinché sia reale: $(A a_{11} < 0)$ ed $(A a_{22} < 0)$.

L'area dell'ellisse

L'equazione dell'ellisse:

$$y = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

L'area dell'ellisse:

$$A = 4\int_0^a y \cdot dx \quad = \quad A = 4b\int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx$$

$$A = 4ab\int_{x=0}^{x=a} \left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) d\left(\frac{x}{a}\right)$$

posto: $\left(\frac{x}{a}\right) = sen(t)$; $t = arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$; $d\left(\frac{x}{a}\right) = dsen(t)$

$$A = 4ab\int \sqrt{1-sen^2(t)}\, dsen(t)$$

$$A = 4ab\int \cos^2 t\, dt$$

$$A = 4ab\left[\frac{sen t \cos t + t}{2}\right]$$

$$A = 4ab\left[\frac{\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + arcsen\left(\frac{x}{a}\right)}{2}\right]_0^a$$

$$A = 4ab\left(\frac{\arcsin(1)}{2}\right) = 4ab\left(\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{A = ab\pi}$$

Abbiamo visto che l'area dei parallelogrammi costruiti sui semi-diametri coniugati dell'ellisse è (ab), perciò l'area dell'ellisse equivale π volte l'area del parallelogrammo costruito su due semidiametri coniugati, qualsiasi.

La rettificazione dell'ellisse e gli integrali ellittici

La lunghezza di un qualsiasi tratto x_1, x_2 di curva $y = f(x)$ rettificata è espresso da:

$$\Gamma = \int_{x_1}^{x_2} \left(\sqrt{f'^2_{(x)} + 1} \right) dx$$

Anziché fare la derivata dell'equazione dell'ellisse è più comodo considerare che la lunghezza di un ellisse rettificata è pari alla lunghezza di una intera onda di sinusoide rettificata. Abbiamo già visto che la relazione fra un ellisse di semidiametri: "a", "b" ed una sinusoide di ampiezza h e lunghezza d'onda λ è:

$$\lambda = 2\pi b \quad ; \quad h = \sqrt{a^2 - b^2}$$

l'equazione di tale sinusoide sarà:

$$y = h \operatorname{sen} \frac{x}{b} \qquad y = \left(\sqrt{a^2 - b^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{b}\right)$$

Rettifichiamo per prima la sinusoide semplice:

$$y = \operatorname{sen}(x) \qquad y' = \cos(x)$$

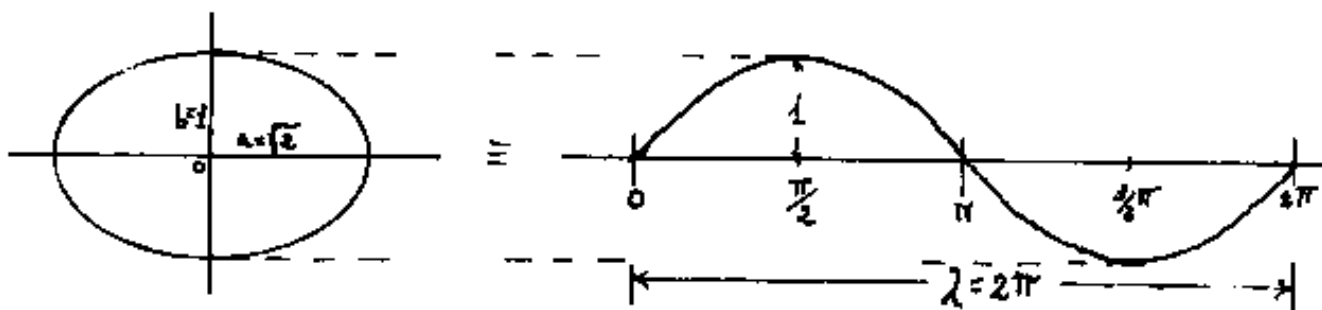
corrispondente all'ellisse di semiassi: $b = 1$; $a = \sqrt{2}$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x}\, dx$$

$$\Gamma = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \operatorname{sen}^2(x)}\, dx = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta\, \operatorname{sen}^2 x}\, dx$$

con $\theta = \frac{\pi}{4}$; forma classica dell'integrale ellittico di seconda specie:

dalle tabelle si ha: $x = \varphi = 90°$; $\theta = 45°$; $1{,}3506$; $\Gamma = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 1{,}3506 = 7{,}64015$

Quindi le lunghezze rettificate dell'ellisse: $\boxed{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1}$ e della sinusoide: $\boxed{y=sen(x)}$ sono equivalenti a: $\underline{7,64015}$.

Cioè un cilindro, di raggio unitario, sezionato da un piano inclinato a $45°=\frac{\pi}{4}$ sulle basi ha per sezione l'ellisse in figura e se sviluppato in piano si ha la sinusoide in figura.

Rettifichiamo ora un ellisse di assi generici: "a", "b"; al quale corrisponde la sinusoide di ampiezza: $\underline{h=\sqrt{a^2-b^2}=f}$; e di lunghezza d'onda: $\underline{\lambda=2\pi b}$. L'equazione della sinusoide: $\boxed{y=f\,sen\left(\frac{x}{b}\right)}$ infatti per $x=\lambda \rightarrow y=f\,sen(2\pi)$. $\quad y'=\frac{f}{b}\cos\left(\frac{x}{b}\right)d(x)$; $\Gamma=\int_\lambda\left(\sqrt{\left(1+\frac{f^2}{b^2}\cos^2\left(\frac{x}{b}\right)\right)}\right)d(x)$

$$\Gamma=\int_\lambda\left(\sqrt{1+\frac{f^2}{b^2}-\frac{f^2}{b^2}sen^2\left(\frac{x}{b}\right)}\right)d(x)=\int_\lambda\sqrt{\left(\frac{b^2+f^2}{b^2}-\frac{a^2f^2}{a^2b^2}sen^2\left(\frac{x}{b}\right)\right)}\,d(x)=a\int\left(\sqrt{1-\frac{f^2}{a^2}sen^2\left(\frac{x}{b}\right)}\right)d\left(\frac{x}{b}\right)$$

si è portato "a" in evidenza e b sotto segno di differenziale.

posto: $\left(\frac{x}{b}\right)=\varphi$; $\left(\frac{f}{a}\right)=K$ = eccentricità si ha l'integrale

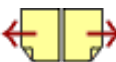
posto: $\left(\frac{x}{b}\right) = \varphi$; $\left(\frac{f}{a}\right) = K$ = eccentricità si ha l'integrale ellittico di seconda specie:

$$\Gamma = a\int_0^{\varphi}\left(\sqrt{1-K^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\right)d\varphi$$

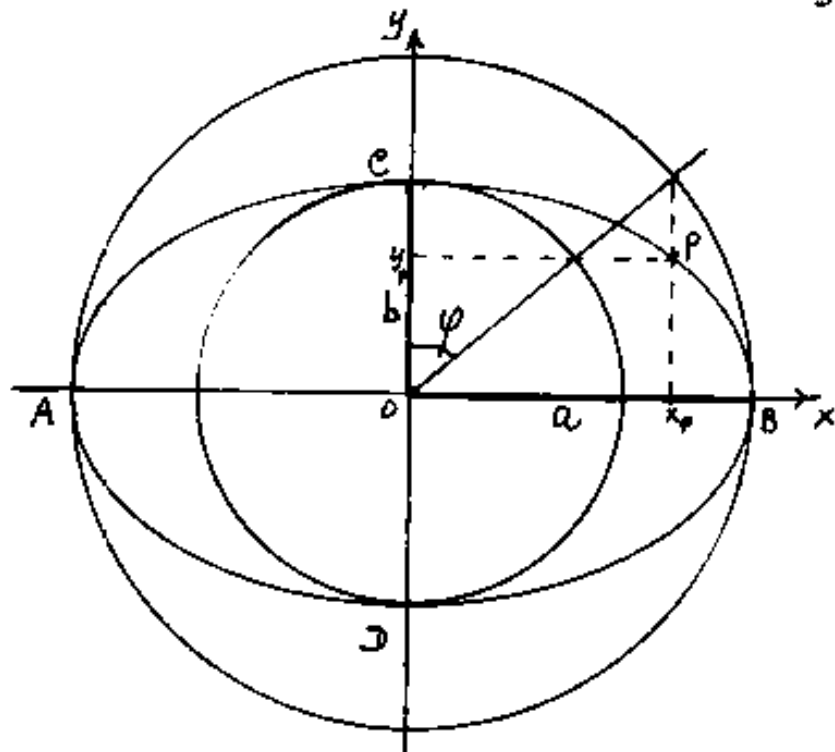
ponendo: $\theta = \operatorname{arcsen}(K)$ l'integrale può scriversi:

$$\Gamma = a\int_0^{\varphi}\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi}\right)d\varphi$$

dalle tavole degli integrali ellittici potremo ricavare un numero: $E_{(K,\varphi)}$ col quale definire la lunghezza dell'arco di ellisse (o di sinusoide)

$$\Gamma_{(\varphi)_K} = a E_{(\varphi,K)}$$

Le coordinate parametriche dell'ellisse

Riprendiamo la costruzione grafica dell'ellisse, ed indichiamo con φ l'angolo che un raggio dei cerchi forma con l'asse minore dell'ellisse; avremo:

$$x = a \operatorname{sen} \varphi$$
$$y = b \cos \varphi$$

che sono le coordinate parametriche dell'ellisse nel parametro "φ".

Utilizzo delle coordinate parametriche per la rettificazione dell'ellisse.

La: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ diventa: $ds^2 = (x'^2_{(\varphi)} + y'^2_{(\varphi)})d\varphi^2$ cioè:

$$\Gamma = \int_0^\varphi \left(\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}\right) d\varphi = \int_0^\varphi \left(\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\varphi}\right) d\varphi =$$

$$\Gamma = a\int_0^\varphi \left(\sqrt{1 - \frac{f^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\varphi}\right) d\varphi \quad ; \quad \text{ma: } \frac{f}{a} = K = \text{accentricità}:$$

$$\boxed{\Gamma = a\int_0^\varphi \left(\sqrt{1 - K^2\operatorname{sen}^2\varphi}\right) d\varphi}$$

per $\theta = \arcsin(K)$

$$\Gamma_{(K,\varphi)} = a \int_0^{\varphi} \left(\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi} \right) d\varphi$$

Formule che abbiamo già trovato, questo procedimento evidenziando "φ" fa vedere quale arco di ellisse viene rettificato. (in figura l'arco $\widehat{CP}$).

Gli integrali ellittici

Abbiamo già visto "lo sviluppo in serie" degli integrali ellittici di prima e seconda specie, a proposito del problema del pendolo, ed abbiamo dato un tabella di integrali calcolati. Abbiamo ritrovato gli integrali ellittici per rettificare l'ellisse e la sinusoide, vogliamo ora dare una definizione degli integrali ellittici: (Cfr. G. Sansone - Lezioni di Analisi Matematica - Vol II pag 139 - ed Cedam - Padova - 1945) "Gli integrali della forma: $\int f(x, \sqrt{P(x)})dx$ dove f è il simbolo di una funzione razionale dei suoi argomenti, e $P(x)$ un polinomio intero della variabile x di terzo o quarto grado, prendono il nome di integrali ellittici." Se $P(x)$ è di grado superiore al quarto, si dicono integrali iperellittici.

E' possibile dimostrare che operando una trasformazione lineare sulla variabile x è possibile ridurre il $P_{(x)}$ dal 3° al 4° o viceversa. La espressione: $f(x, \sqrt{P_{(x)}}) = \frac{A(x) + B(x)\sqrt{P(x)}}{\ldots}$ ...

o viceversa. La espressione: $f(x, \sqrt{P(x)}) = \frac{A(x) + B(x)\sqrt{P(x)}}{C(x) + D(x)\sqrt{P(x)}}$ ove:

$A(x), B(x), C(x), D(x)$ sono polinomi razionali interi in x. L'espressione può

ridursi $= \frac{L(x)}{M(x)} + \frac{N(x)}{M(x)} \frac{1}{\sqrt{P(x)}}$; Sappiamo risolvere: $\int \frac{L(x)}{M(x)} dx$; per il secondo

integrale scomponiamo: $\frac{N(x)}{M(x)} = q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots q_{n-1} x + q_n + \sum_{i,l} \frac{A_{i,l}}{(x-\alpha_i)^l}$

Quindi basterà considerare integrali $I_l = \int \frac{x^l}{\sqrt{P(x)}} dx$; $J_l = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^l \sqrt{P(x)}}$.

È possibile ridurre J_l alla forma: $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{P(x)}}$ (ove: $l = 1$) .

Questa espressione è ancora possibile trasformarla,

si ottengono così: Gli integrali ellittici di prima, seconda e terza specie di Legendre.

Scomposto: $P(x) = a_0 (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ e sostituendo $t = (ax+b)/(x+d)$, si arriva a dimostrare che gli integrali ellittici si esprimono, oltre che con le funzioni note, con i seguenti tre integrali: detti da Legendre:

$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-K^2t^2)}}$ integrale ellittico di prima specie.

$\int \frac{\sqrt{1-K^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ " " di seconda "

$\int \frac{dt}{(1+at^2)\sqrt{(1-t^2)(1-K^2t^2)}}$ " " di terza "

(i quali rappresentano tre nuove trascendenti)

Ponendo: $t = sen(\varphi)$ si ha: $dt = \cos\varphi\, d\varphi$

$$\int \frac{\cos(\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{(1-sen^2\varphi)(1-K^2 sen^2\varphi)}} = \boxed{\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2 sen^2\varphi}}} \quad (I^a \text{ specie})$$

$$\int \frac{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} \cos\varphi \, d\varphi = \boxed{\int \sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}\, d\varphi} \quad (II^a \text{ specie})$$

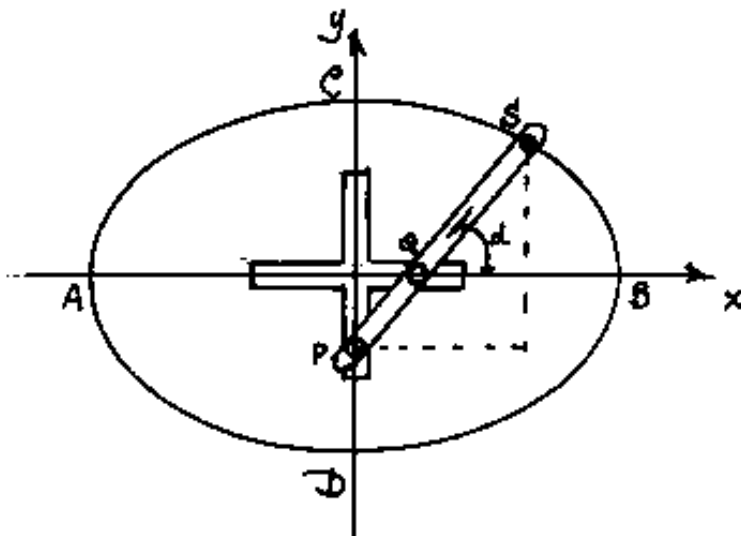
Questi due integrali abbiamo imparato a sviluppparli in serie, e si è data per essi una tabella di conti fatti.

L'ellisse nella matematica applicata.

L'ellisse è particolarmente importante nella matematica applicata ad oltre discipline scientifiche. Basti ricordare l'orbita dei corpi celesti, l'ellisse in meccanica, in statica, in scienza delle costruzioni, ecc. Avremo occasione di ampliare le cognizioni sull'ellisse nel trattare casi di specifica applicazione.

(vedasi per. geometria proiettiva, l'equilibrio, ecc).

L'ellissografo

Esistono strumenti chiamati ellissografi, capaci di disegnare l'ellisse con tratto continuo.

Uno di questi apparecchi è costituito da due guide a croce, entro cui possono scorrere due perni "P" e "Q" posti a distanza fissa su un'asta all'estremo della quale si

all'estremo della quale c'è

una punta scrivente S. Sia: $\overline{PS} = a$; $\overline{QS} = b$ cioè $(a-b) = \overline{PQ}$

detto "α" l'angolo variabile dell'asta sulle ascisse, avremo:

$$\boxed{x = a\cos\alpha} \; ; \; y = a\,\text{sen}\alpha - (a-b)\,\text{sen}\alpha = \boxed{y = b\,\text{sen}\alpha}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \cos^2(\alpha) \; ; \; \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \text{sen}^2(\alpha) \quad \text{perciò:}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

è la curva tracciata da S con tratto continuo.

Equazione delle rette tangenti all'ellisse

$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ eq. dell'ellisse esplicitata in y

derivando: $y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \tan(\alpha)$.

1) Se è noto il punto di tangenza T, di ascissa: x_T,

essendo: $y_T = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_T^2}$ dalla: $\frac{y - y_T}{x - x_T} = tg(\alpha)$ si ha

$$\frac{\left(y - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_T^2}\right)}{(x - x_T)} = -\frac{b}{a}\frac{x_T}{\sqrt{a^2 - x_T^2}}$$

esplicitando y:

$$y = -\frac{b}{a}\frac{x x_T - x_T^2}{\sqrt{a^2 - x_T^2}} + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_T^2} = \frac{b}{a}\frac{a^2 - x_T^2 - x x_T + x_T^2}{\sqrt{a^2 - x_T^2}}$$

eq. della retta tangente in T l'ellisse.

$$\boxed{y = \left(\frac{-b\,x_T}{a\sqrt{a^2 - x_T^2}}\right)x + \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 - x_T^2}}\right)}$$

in forma esplicita

in forma segmentaria:

$$\boxed{\frac{x}{(a^2/x_T)} + \frac{y}{(ab/\sqrt{a^2 - x_T^2})} = 1}$$

può scriversi :

$$\frac{x}{(a^2/x_T)} + \frac{y}{(b^2/y_T)} = 1$$

La distanza di una tangente l'ellisse dal centro "O" sarà: $\delta = (a^2/x_T)(ab/\sqrt{a^2-x_T^2}) / \sqrt{a^4/x_T^2 + a^2b^2/(a^2-x_T^2)}$; semplificando:

(f = distanza focale)
$\kappa = \left(\frac{f}{a}\right)$ = eccentricità.

$$\delta = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^4 - f^2 x_T^2}}$$

$$\therefore \delta = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - \kappa^2 x_T^2}}$$

2) Se il punto noto della tangente è esterno all'ellisse;

$Q \equiv (x_Q, y_Q)$; $\frac{(y - y_Q)}{(x - x_Q)} = m$ = (eq. di tutte le rette passanti per Q)

Il sistema:

$$\begin{cases} y = m(x - x_Q) + y_Q \\ y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

permette di trovare i punti comuni all'ellisse e alle rette per Q.

$$mx - (mx_Q - y_Q) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\boxed{\left(m^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)x^2 - 2m(mx_Q - y_Q)x + \left[(mx_Q - y_Q)^2 - b^2\right] = 0}$$

equazione di 2° grado le cui radici sono le ascisse dei punti comuni all'ellisse ed alla retta di coeff. angolare "m". Tale retta se taglierà l'ellisse avremo due radici reali ($\Delta > 0$), se è tangente all'ellisse, una sola radice reale ($\Delta = 0$), ed infine se la retta è esterna all'ellisse avremo radici immaginarie. ($\Delta < 0$). A noi interessa ($\Delta = 0$) cioè: $m^2(mx_Q - y_Q)^2 - \left[m^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\left[(mx_Q - y_Q)^2 - b^2\right] = 0$

$m^2b^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\left[mx_Q + y_Q\right]^2 = 0$ $\quad m^2a^2 + b^2 - m^2x_Q^2 - y_Q^2 + 2m\,x_Q y_Q = 0$

$$\boxed{(a^2 - x_Q^2)m^2 + (2x_Q y_Q)m + (b^2 - y_Q^2) = 0}$$

La presente equazione di 2° grado fornisce i due coeff. angolari

… fornisce i due coeff. angolari delle due rette per "Q".

$$m = \frac{-x_Q y_Q \pm \sqrt{x_Q^2 y_Q^2 - (a^2 - x_Q^2)(b^2 - y_Q^2)}}{(a^2 - x_Q^2)}$$

$$m = \frac{-x_Q y_Q \pm \sqrt{a^2 y_Q^2 + b^2 x_Q^2 - a^2 b^2}}{(a^2 - x_Q^2)}$$

quando $\Delta = 0 = (a^2 y_Q^2 + b^2 x_Q^2 - a^2 b^2) = 0 \rightarrow y_Q = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_Q^2}$; Q appartiene all'ellisse, si ricade nel caso precedente:

$$m = \frac{-x_Q\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_Q^2}\right)}{(a^2 - x_Q^2)} = -\frac{b}{a}\frac{x_Q}{\sqrt{a^2 - x_Q^2}} = -\frac{b}{a}\frac{x_T}{\sqrt{a^2 - x_T^2}}$$

3) Se è noto il pu to $Q \equiv (x_Q, y_Q)$, esterno all'ellisse, per il quale deve passare la retta tangente, e poniamo come incognita il punto T di tangenza:

$$\frac{(y_T - y_Q)}{(x_T - x_Q)} = -\frac{b\, x_T}{a\sqrt{a^2 - x_T^2}}$$

$$\left(y_T = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_T^2}\right) \qquad \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_T^2} - y_Q = \frac{-b\,x_T^2 + b\,x_T x_Q}{a\sqrt{a^2 - x_T^2}}$$

$$a^2 - x_T^2 - \left(\frac{a}{b}\sqrt{a^2 - x_T^2}\right) y_Q = -x_T^2 + x_T x_Q$$

$$a^4 - 2a^2 x_Q x_T + x_T^2 x_Q^2 = \frac{a^4}{b^2} y_Q^2 - \frac{a^2}{b^2} x_T^2 y_Q^2$$

$$\left(x_Q^2 + \frac{a^2}{b^2} y_Q^2\right) x_T^2 - \left(2a^2 x_Q\right) x_T + \frac{a^4}{b^2}\left(b^2 - y_Q^2\right) = 0$$

$$\left(b^2 x_Q^2 + a^2 y_Q^2\right) x_T^2 - \left(2a^2 b^2 x_Q\right) x + a^4\left(b^2 - y_Q^2\right) = 0$$

equaz. di 2° grado in x_T che ha come radici le ascisse dei due punti di tangenza delle rette per Q.

$$X_T = \frac{a^2b^2x_Q \pm \sqrt{(a^2b^2x_Q)^2 - (b^2x_Q^2 + a^2y_Q^2)a^4(b^2 - y_Q^2)}}{b^2x_Q^2 + a^2y_Q^2}$$

$$= a^2 \; \frac{b^2x_Q \pm \sqrt{b^4x_Q^2 - [b^4x_Q^2 + a^2b^2y_Q^2 - b^2x_Q^2y_Q^2 + a^2y_Q^4}}{(b^2x_Q^2 + a^2y_Q^2)}$$

$$\boxed{X_T = a^2 \; \frac{b^2x_Q \pm y_Q\sqrt{-a^2b^2 + b^2x_Q^2 + a^2y_Q^2}}{(b^2x_Q^2 + a^2y_Q^2)}}$$

ascissa dei punti di tangenza.

L'equazione della normale all'ellisse

Tracciamo la normale dal punto T di tangenza.

l'equazione della normale sarà:

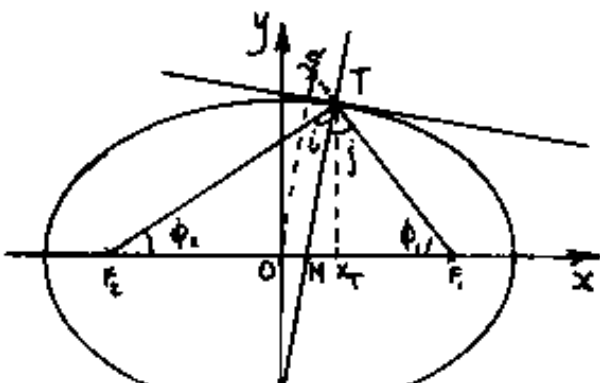
$$\frac{y - y_T}{x - x_T} = \frac{+a\sqrt{a^2 - x_T^2}}{b\,x_T}$$

$$y = \left(\frac{a\sqrt{a^2 - x_T^2}}{b\,x_T}\right)x + y_T - \left(\frac{a\sqrt{a^2 - x_T^2}}{b\,x_T}\right)x_T$$

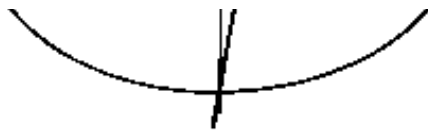
ma: $y_T = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_T^2}$; $\Rightarrow y_T\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = -\frac{f^2}{b^2}y_T$

$$y = \frac{y_T}{b^2}\left(\frac{a^2}{x_T}x - f^2\right) \quad \text{(in forma esplicita)}$$

$$\frac{x}{\left(x_T f^2/a^2\right)} + \frac{y}{\left(-y_T f^2/b^2\right)} \quad \text{(in forma segmentaria)}$$

Detto N il punto di intersezione della normale con l'asse x:

$\overline{ON} = \frac{f^2}{a^2}x_T$; $\overline{NF_2} = f + \overline{ON}$;

$\overline{NF_2} = \frac{f(a^2 + f x_T)}{a^2}$; $\overline{NF_1} = f - \overline{ON}$;

$\overline{NF_1} = \frac{f(a^2 - f x_T)}{a^2}$; $\overline{OT} = \sqrt{x_T^2 + y_T^2}$

$$\overline{OT} = \sqrt{x_T^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_T^2)} \; ; \; \boxed{\overline{OT} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 b^2 + f^2 x_T^2}}$$

$$\overline{NT} = \sqrt{(x_T - \overline{ON})^2 + y_T^2} = \sqrt{\left(x_T^2 + \frac{f^4}{a^4} x_T^2 - \frac{2f^2}{a^2} x_T^2\right) + \left(\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_T^2)\right)} = \boxed{\overline{NT} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - f^2 x_T^2}}$$

$$\overline{F_2 T} = \sqrt{(f + x_T)^2 + y_T^2} = \sqrt{a^2 - b^2 + x_T^2 + 2f x_T + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_T^2} = \frac{1}{a}\sqrt{(a^4 + 2a^2 f x_T + f^2 x_T^2)}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 + f x_T)^2} \qquad \boxed{\overline{F_2 T} = \frac{a^2 + f x_T}{a}} \; ; \; \overline{F_1 T} = \sqrt{(f - x_T)^2 + y_T^2} \; ; \; \boxed{\overline{F_1 T} = \frac{a^2 - f x_T}{a}}$$

se consideriamo: $\left(\frac{f}{a}\right) = K$ = eccentricità le lunghezze dei raggi focali diventano: $\boxed{\overline{F_2 T} = a + K x_T}$; $\boxed{\overline{F_1 T} = a - K x_T}$

Poiché: $\overline{NF_1} = \frac{f}{a}\,\frac{a^2 - f x_T}{a} = \frac{f}{a}\,\overline{F_1T}$ possiamo scrivere la proporzione : $\boxed{\overline{NF_1} : \overline{F_1T} = f : a}$ dalla quale nasce la regola : "Per tracciare la normale all'ellisse da un suo punto T, si prolunga il raggio $\overline{F_1T}$ fino ad "S" in modo che: $\overline{F_1S} = a$, unito quindi S con O, la parallela ad $\overline{SO}$ da T è la retta normale all'ellisse."

Calcoliamo le grandezze angolari.

$$\tan(\phi_2) = \left(\frac{y_T}{f + x_T}\right); \quad \boxed{\tan\phi_2 = \frac{b\sqrt{a^2 - x_T^2}}{a(f + x_T)}} \quad \boxed{\tan\phi_1 = \frac{b\sqrt{a^2 - x_T^2}}{a(f - x_T)}}$$

$$\operatorname{sen}(\phi_2) = \left(\frac{y_T}{\overline{F_2T}}\right); \quad \boxed{\operatorname{sen}\phi_2 = \frac{b\sqrt{a^2 - x_T^2}}{(a^2 + f x_T)}} \quad \boxed{\operatorname{sen}\phi_1 = \frac{b\sqrt{a^2 - x_T^2}}{(a^2 - f x_T)}}$$

$$\cos(\phi_2) = \left(\frac{\operatorname{sen}\phi_2}{\operatorname{tg}\phi_2}\right); \quad \boxed{\cos\phi_2 = \frac{a(f + x_T)}{(a^2 + f x_T)}} \quad \boxed{\cos\phi_1 = \frac{a(f - x_T)}{(a^2 - f x_T)}}$$

$$\operatorname{sen}(j) = \operatorname{sen}(\phi_1)\,\frac{\overline{NF_1}}{\overline{NT}} = \frac{b\sqrt{a^2 - x_T^2}}{(a^2 - f x_T)}\;\frac{f(a^2 - f x_T)}{a^2}\;\frac{a^2}{b\sqrt{a^4 - f^2 x_T^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(j) = \frac{f\sqrt{a^2 - x_T^2}}{\sqrt{a^4 - f^2 x_T^2}}}$$

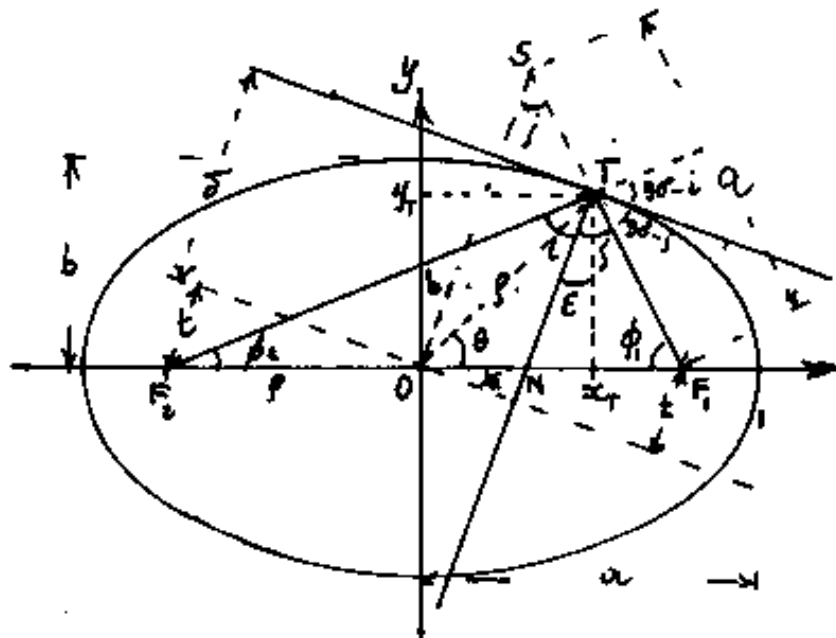
$$sen(i) = sen(\phi_2)\frac{\overline{NF_2}}{\overline{NT}} = \frac{b\sqrt{a^2-x_T^2}}{(a^2+fx_T)}\cdot\frac{f(a^2+fx_T)}{a^2}\cdot\frac{a^2}{b\sqrt{a^4-f^2x_T^2}}$$

$$\boxed{sen(i) = \frac{f\sqrt{a^2-x_T^2}}{\sqrt{a^4-f^2x_T^2}}}$$

Resta dimostrato che $sen(j) = sen(i)$, cioè: $(j) = (i)$ da cui:

" La normale all'ellisse in un suo punto T è bisettrice fra i raggi focali che convergono allo stesso T.

Le proprietà focali dell'ellisse

Le principali proprietà focali dell'ellisse sono state già dimostrate nel corso della trattazione fatta sull'ellisse. Tuttavia ne riportiamo ora le tre essenziali.

1ª) La somma delle distanze dei fuochi da un generico punto (T) dell'ellisse è pari al diametro maggiore dell'ellisse.

La distanza focale: $\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = f$ ove: $f^2 = (a^2 - b^2)$; $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$;

$$\boxed{\sqrt{(f+x_T)^2 + y_T^2} + \sqrt{(f-x_T)^2 + y_T^2} = 2a}$$ (definizione di ellisse)

2ª) Il prodotto delle distanze dai fuochi della tangente è costante e vale b^2.

tangente è costante e vale b^2.

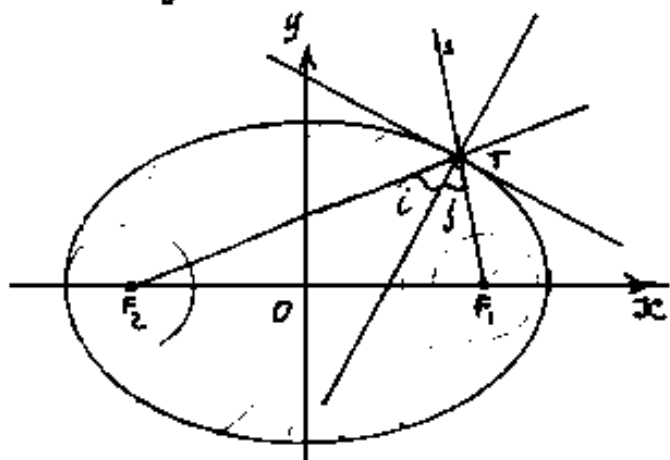
Siano: $(\delta+t)$ e $(\delta-t)$ tali distanze, dobbiamo dimostrare che $(\delta^2-t^2)=b^2$; abbiamo visto: $\delta=\frac{a^2 b}{\sqrt{a^4-f^2x^2}}$

$\delta^2=a^2\frac{a^2b^2}{a^4-f^2x_T^2}$; $sen^2(i)=\frac{f^2(a^2-x_T^2)}{a^4-f^2x_T^2}$ per cui:

$$\cos^2(i)=\frac{a^4-f^2x_T^2-f^2a^2+f^2x_T^2}{a^4-f^2x_T^2}=\cos^2(i)=\frac{a^2(a^2-f^2)}{a^4-f^2x_T^2}=\frac{a^2b^2}{a^4-f^2x_T^2}$$

$$\delta^2=a^2\cos^2(i)\ ;\ t^2=f^2sen^2\varepsilon=\frac{f^2x^2}{a^2}\cos^2(i)\rightarrow\delta^2-t^2=\frac{a^4-f^2x^2}{a^2}\cos^2 i=\frac{b^2\cos^2 i}{\cos^2 i}$$

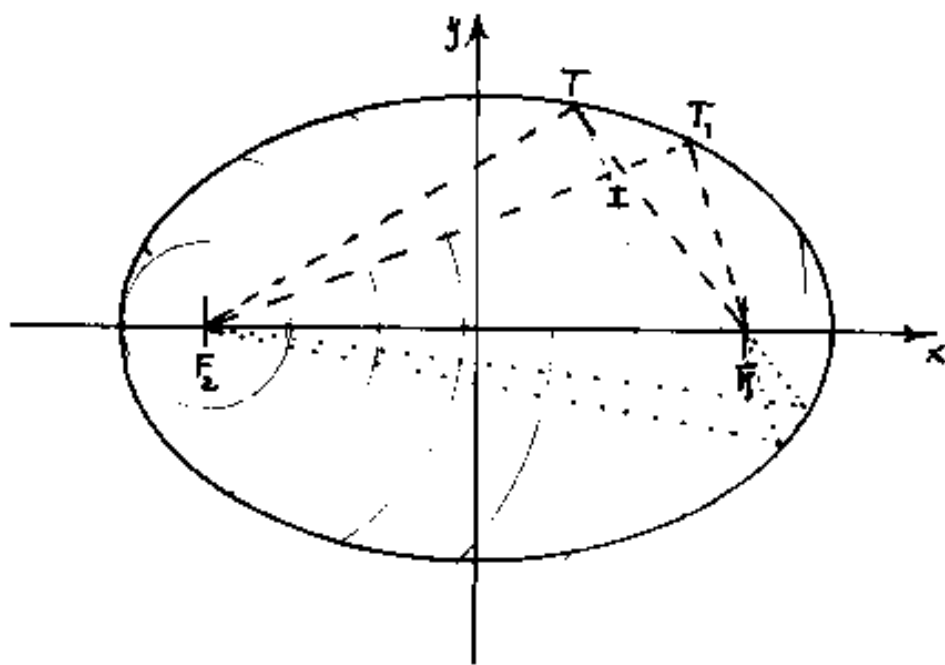
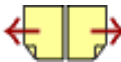
Si può anche dire: 2°) "b è medio proporzionale fra le distanze della tangente dai fuochi dell'ellisse."

3°) "La normale e la tangente all'ellisse bisecano gli angoli formati dai raggi focali."

Questa proprietà è già stata dimostrata con: $\hat{i} = \hat{j}$ per la normale, per la tangente sarà: $(90° - i) = (90° - j)$.

È una proprietà importantissima perché se consideriamo speculare il contorno ellittico, un raggio incidente come $\overline{F_2T}$ si rifletterà in TF_1.

Si narra che nell'antichità Dionisio, disponendo di una grotta con volta ellissoide, ponesse i prigionieri in un fuoco dell'ellisse e che, stando nell'altro fuoco, udisse i loro discorsi, anche fatti a voce molto bassa. (Questa prigione scavata nella

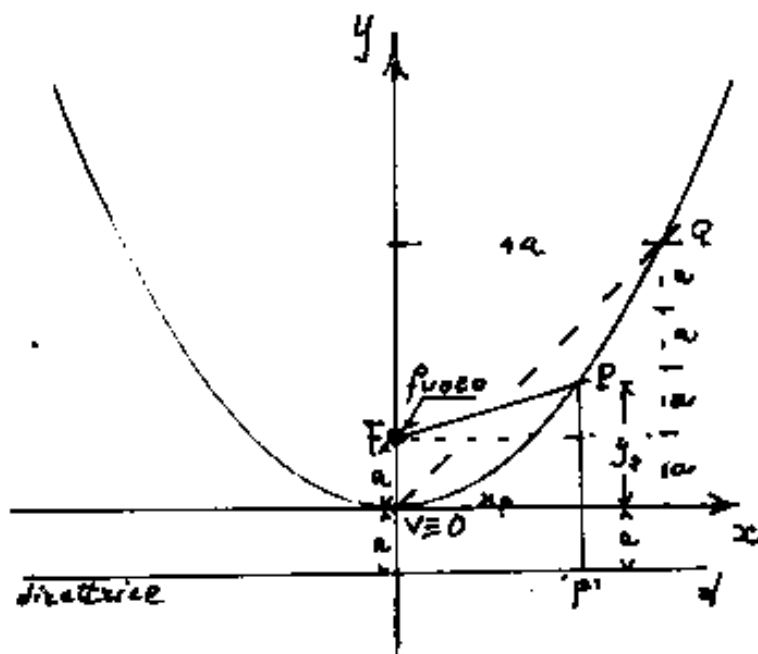
roccia esiste nei pressi di Siracusa ed è detta Orecchio di Dionisio)

Se in una vasca ellittica, piena d'acqua, si getta un sasso in uno dei fuochi, vedremo formarsi increspature di onde concentriche col fuoco che, allargandosi, vanno a riflettersi sul bordo della vasca e riconcentrandosi nell'altro fuoco vi provocano uno sbuffo d'acqua simile a quello provocato dal sasso, all'atto della caduta, sia pure attenuato.

Il fenomeno è molto interessante; cerchiamo di vederne qualche applicazione.
Consideriamo una emissione (o perturbazione) in F_2 che si propaghi in tutte le direzioni. Ciascun raggio uscente da F_2, che arriva per riflessione in F_1, percorre lunghezze uguali, qualunque sia il punto T ove si è riflesso; infatti: $\overline{F_2T} + \overline{TF_1} = 2a$ = costante, quindi se "u" è la velocità di trasmissione nel mezzo: $\tau = \frac{2a}{u}$ sarà il tempo impiegato dai singoli raggi per ritrovarsi in F_1.
Potrebbe sembrare che due raggi come $\overline{TF_1}$ ed $\overline{F_2T_1}$ interferiscano in I, però è facile dimostrare che $\overline{F_2T_1}$ è arrivato in I "prima" di F_2TF_1. Ciò può applicarsi a tutti i raggi. Un volta riprodotto il fenomeno in F_1, F_1 diventa emittente ed i raggi tornano in F_2; il periodo sarà et

emittente ed i raggi tornano in F_2; il periodo sarà $2T$ cioè: $\frac{4a}{u} = T$ e la frequenza dell'oscillazione sarà $\boxed{\nu = \frac{u}{4a}}$

Se il fenomeno emissivo in F_2 è sinusoidale di lunghezza d'onda: $\lambda = 2a$, si ottiene un oscillatore permanente che non emana esternamente, ma tiene accumulato in sé il suo quoto di energia.

La Parabola

"Dicesi parabola il luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da un punto detto fuoco e da una retta detta direttrice."

(Ricaviamo l'eq. al centro, anche se, per la parabola ad asse verticale, ciò è già stato fatto nel Vol.I).

Per il luogo geometrico:

$$\overline{FP} = \overline{PP'}$$

sostituendo: $\sqrt{x_p^2+(y_p-a)^2} = (y_p+a)$ da cui: $x_p^2 - 2ay_p = 2ay_p$;

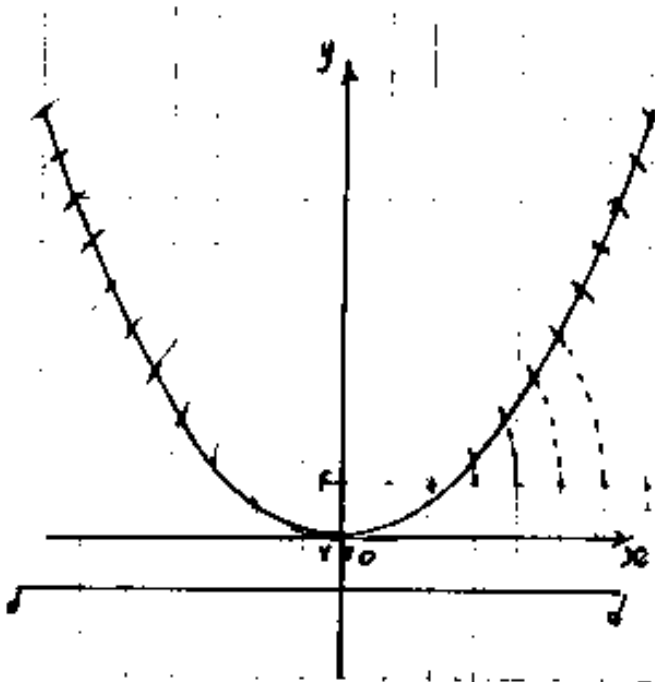
per la genericità di P, possiamo scrivere:

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4a}} \quad \text{od anche posto: } \left(m=\frac{1}{4a}\right) \quad \boxed{y = mx^2}$$

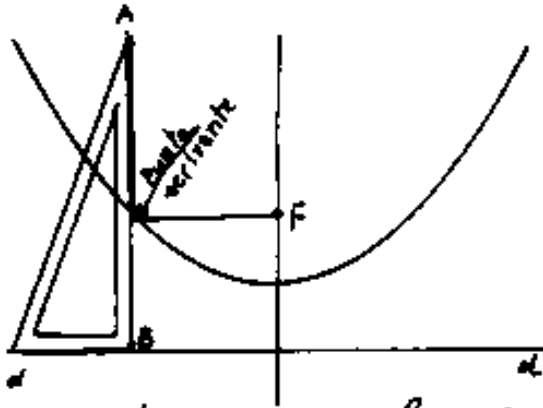
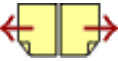
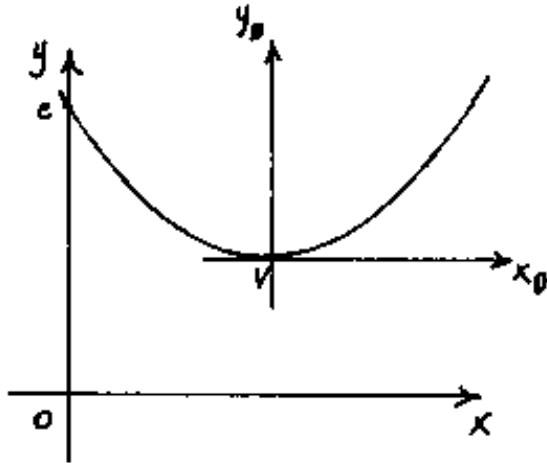
equazione della parabola al centro.

equazione della parabola al centro.

Notiamo che per $(x = 4a)$ anche $y = (4a)$ infatti sostituendo: $y = \frac{(4a)^2}{(4a)} = 4a$. Cio' vuol dire che, se abbiamo il grafico di una parabola con il suo asse, ed assumiamo tale asse come y; e dal vertice V l'ortogonale asse x, una retta $y = x$ (a 45° da $O \equiv V$) incontrerà la parabola in un punto Q tale che $x_Q = y_Q = 4a$ cioè dividendo in 4 parti una coordinata di Q si ottiene "a". $a = \frac{x_Q}{4} = \frac{y_Q}{4} = y_F$.

Costruzione grafica della parabola

Disponendo di carta quadrettata o millimetrata, si riporta la retta direttrice dd su una linea orizzontale della quadrettatura, (si suppone disegnata). Si disegna l'asse y su una linea verticale della quadrettatura vi si indica il vertice V≡O ed il fuoco F. Da O si traccia l'asse x e da F una parallela ad x (si traccia o si pensa tracciata). Si nota che le linee orizzontali della quadrettatura possono rappresentare le progressive distanze dalla direttrice, mentre le linee verticali della quadrettatura possono rappresentare le progressive distanze da F. Perciò facendo centro in F col compasso, si apre di raggio via via crescente quanto indicano le verticali sulla parallela ad x per F e si riportano sulle orizzontali determinando punti della pa

si riportano sulle orizzontali determinando punti della parabola.

Per tracciare la parabola a tratto continuo, si fissa all'estremo A di un cateto di una squadra un filo flessibile lungo quanto il cateto $\overline{AB}$ e si fissa l'altro estremo nel fuoco F. Una punta scrivente, tiene il filo aderente la squadra, mentre questa scorre lungo la direttrice dd, disegna la parabola.

Equazione della parabola ad assi traslati

$$(y-y_v) = m(x-x_v)^2$$

$$y = mx^2 - (2mx_v)x + (y_v - mx_v)$$

espressione nota:

$$y = ax^2 + bx + c$$

valida per parabole ad asse parallelo a y.

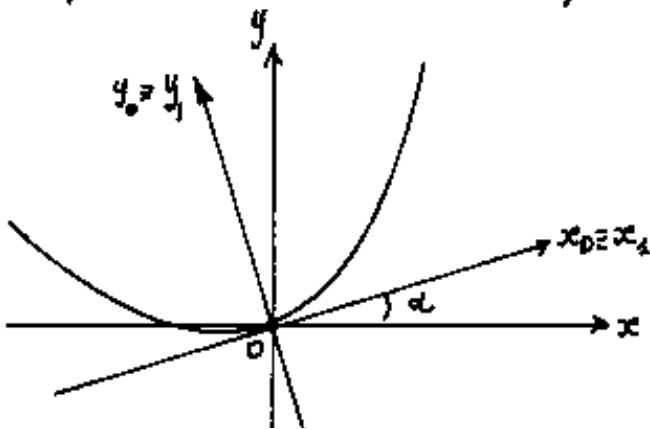
confrontando con l'espressione generale delle coniche:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

si ha: $a_{12} = 0$; $a_{22} = 0$; $a_{13} = (-mx_v)$; $a_{11} = m$; $a_{23} = \frac{1}{2}$;

$a_{33} = (y_v - mx_v)$; quindi dividendo l'espressione generica per $2a_{23}$

abbiamo: $\frac{a_{11}}{2a_{23}} = m$; $\frac{-a_{13}}{a_{11}} = x_v$; $\frac{a_{33} + a_{13}}{2a_{23}} = y_v$.

Equazione della parabola ad assi ruotati

L'equazione al centro $y_1 = \frac{x_1^2}{4a}$

$$\begin{cases} x_1 = y\,\text{sen}\alpha + x\cos\alpha \\ y_1 = y\cos\alpha - x\,\text{sen}\alpha \end{cases}$$

sostituendo:

$$(y\cos\alpha - x\,\text{sen}\,\alpha) = (y\,\text{sen}\,\alpha + x\cos\alpha)^2/4a.$$

$$(4a\cos\alpha)\,y - (4a\,\text{sen}\,\alpha)\,x = y^2\text{sen}^2\alpha + x^2\cos^2\alpha + (2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)\,xy$$

$$\boxed{(\cos^2\alpha)\,x^2 + (\text{sen}^2\alpha)\,y^2 + 2(\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)\,xy + (4a\,\text{sen}\,\alpha)\,x - (4a\cos\alpha)\,y = 0} \quad (1)$$

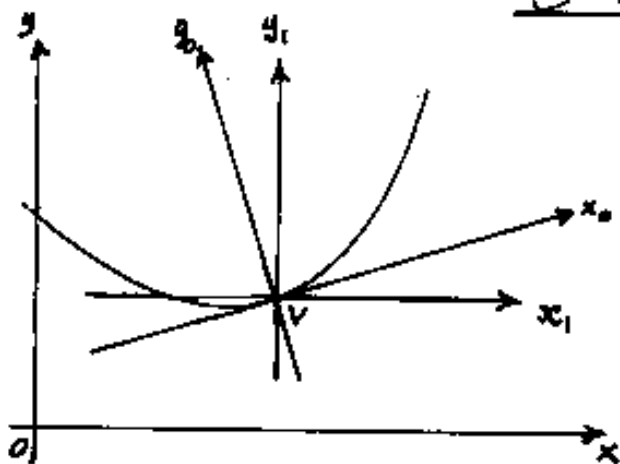
dividendo per $(\cos^2\alpha)$:

$$\boxed{x^2 + tg^2(\alpha)\,y^2 + 2(tg(\alpha))\,xy + 2\left(\frac{2a\,tg\,\alpha}{\cos\alpha}\right)x - 2\left(\frac{2a}{\cos\alpha}\right)y = 0} \quad (2)$$

l'equazione generica delle coniche (che può risultare moltiplicata per un numero K) sarà: (per l'eq. nella forma 1)):

$a_{11} = K\cos^2\alpha$; $a_{22} = K\,\text{sen}^2\alpha$; perciò: $\frac{a_{22}}{a_{11}} = tg^2\alpha$; e ricavata "α"; $\boxed{K = a_{11}/\cos^2\alpha}$; inoltre: $2a_{12} = (2K\,\text{sen}\alpha\cos\alpha)$; $\frac{2a_{12}}{a_{11}} = 2\,tg\alpha$

$\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2 = \left(\frac{a_{22}}{a_{11}}\right)$; $\boxed{K = a_{11} + a_{22}}$; $a = \left(\frac{a_{23}}{4K\,\text{sen}\alpha}\right) = \frac{-a_{13}}{4\cos\alpha}$; $\boxed{a_{33} = 0}$

Equazione della parabola ad assi ruotati e traslati

Riportiamo nell'equazione della parabola ad assi solo ruotati $(x - x_v)$ ed $(y - y_v)$ rispettivamente al posto della x e della y.

Avremo:

$$\boxed{(x-x_v)^2 + tg^2(\alpha)(y-y_v)^2 + 2\,tg(\alpha)(x-x_v)(y-y_v) + 2\left(2a\frac{tg\alpha}{\cos\alpha}\right)(x-x_v) - 2\left(\frac{2a}{\cos\alpha}\right)(y-y_v) = 0}$$

$$x^2 + (tg^2\alpha)y^2 + 2(tg\alpha)(xy) + 2\left(2a\frac{tg\alpha}{\cos\alpha} - x_v - tg\alpha\,y_v\right)x - 2\left(\frac{2a}{\cos\alpha} - y_v - tg\alpha\,x_v\right)y + \left[x_v^2 + y_v^2 tg^2(\alpha)\right.$$

$$\left. + 2(tg\alpha\,x_v y_v) - 2\left(\frac{2a\,tg\alpha\,x_v}{\cos\alpha}\right) + 2\left(\frac{2a}{\cos\alpha}y_v\right)\right] = 0$$

moltiplicando per $\cos^2(\alpha)$ si ha:

$$(\cos^2\alpha)X^2 + (\operatorname{sen}^2\alpha)y^2 + 2(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)Xy + 2(2a\operatorname{sen}\alpha - x_V\cos^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, y_V)X +$$
$$+2(y_V\cos^2\alpha + X_V\operatorname{sen}\alpha - 2a\cos\alpha)y +$$
$$+[\cos^2\alpha X_V + \operatorname{sen}^2\alpha\, y_V + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, X_V y_V - 2(2a\operatorname{sen}\alpha)X_V + 2(2a\cos\alpha)y_V] = 0$$

Poiché i primi tre coeff. sono identici all'eq. della parabola solo traslata vale: $tg\alpha = \frac{a_{12}}{a_{11}}$; $K = a_{11}/\cos^2\alpha$; $\left(\frac{a_{13}}{K} + \frac{a_{23}\,tg\alpha}{K}\right) = \left((-\cos^2\alpha) + \left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}\right)\right)X_V$

da cui si trova "X_V" sostituendo si trova "y_V" ed "a".

Le rette tangenti alla parabola

$y = mx^2$ = eq. al centro assi della parabola

$y' = 2mx = \frac{x}{2a} = \tan g(\alpha) =$ (derivata prima)

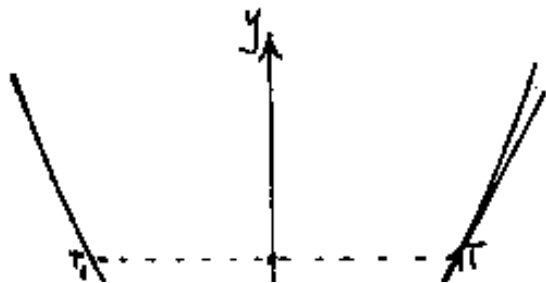
---

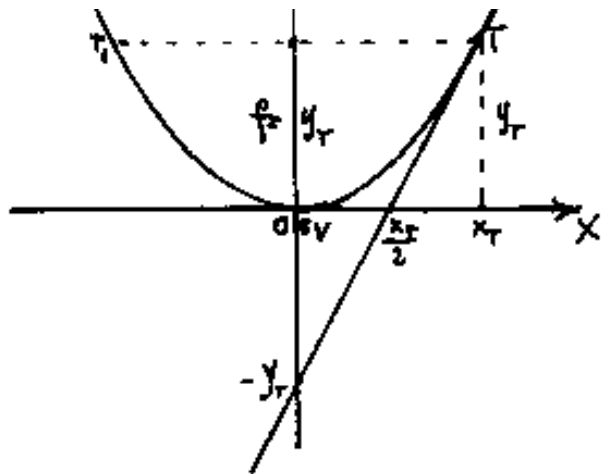
1) Se è noto il punto di tangenza $T \equiv (x_T, y_T)$; $(y_T = m\, x_T^2)$

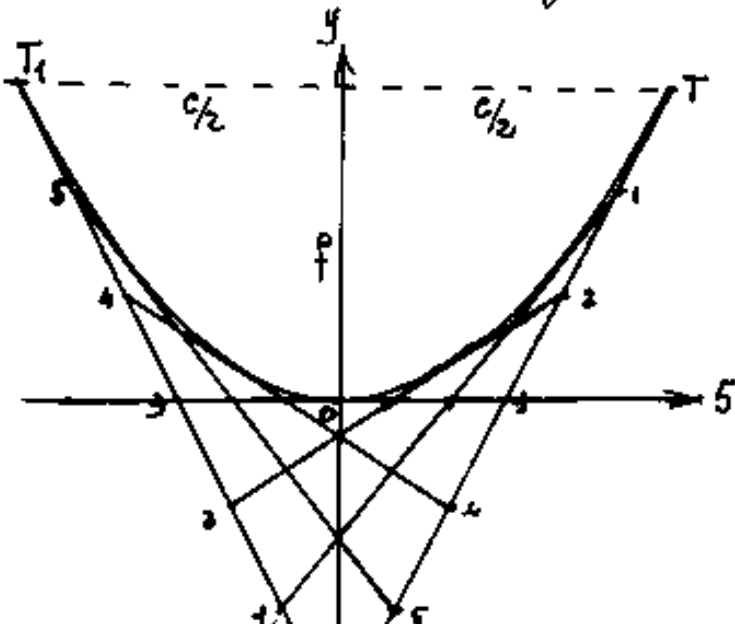
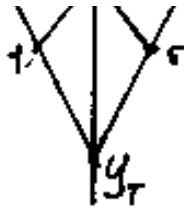
$$\frac{y - y_T}{x - x_T} = \tan g\,\alpha = \frac{(y - m x_T^2)}{(x - x_T)} = 2 m x_T$$

in forma esplicita: $\boxed{y = (2 m x_T)\, x - m\, x_T^2}$ = equazione della retta tangente in T alla parabola.

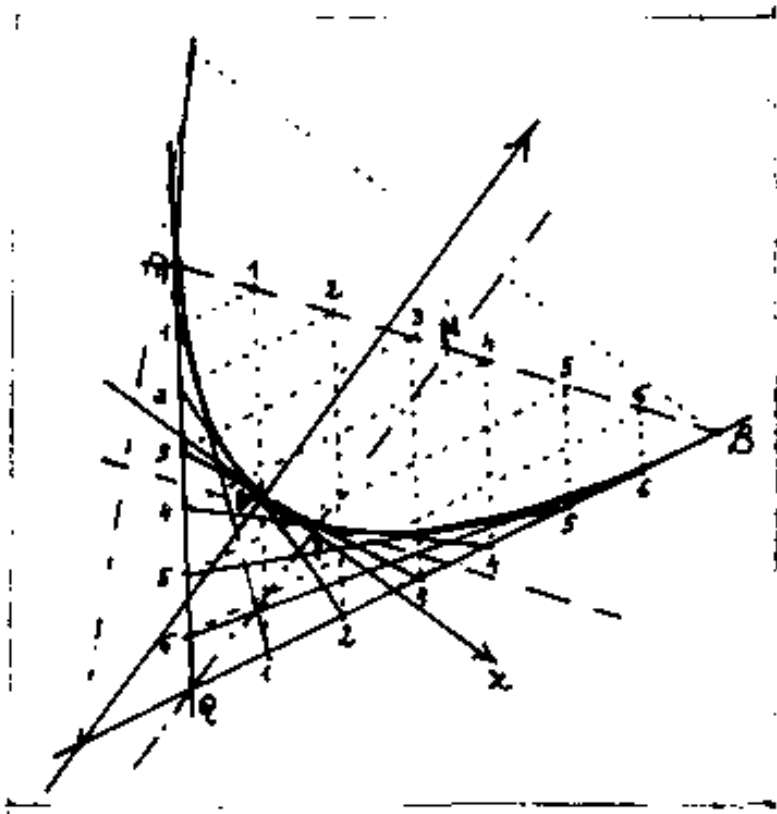
in forma segmentaria: $\boxed{\frac{x}{(x_T/2)} + \frac{y}{(-m\, x_T^2)} = 1}$

che può scriversi: $\boxed{\frac{x}{x_T/2} + \frac{y}{-y_T} = 1}$

Questa forma di equazione eviden-
zia che la retta tangente alla pa-

rabola in un punto $T \equiv (x_T ; y_T)$, taglia gli assi rispettivamente in $\frac{x_T}{2}$ ed $-y_T$. Questa osservazione è molto importante, consente di dire $f = ($freccia di un arco di parabola$) = y_T = |-y_T|$, ed anche $\overline{T_1T} = ($corda di un arco di parabola$) = x_T = (2\frac{x_T}{2})$. Ciò consente la costruzione grafica della parabola per tangenti.

Costruzione grafica della parabola per tangenti.

Sia data la corda e la freccia di una parabola. L'asse della corda è l'asse y ove a distanza f dalla corda si trova il vertice della parabola e per esso tracciamo l'asse x. Se la corda è $\overline{T_1T} = 2c = 2|x_T|$; preso su y un punto $= -y_T = f$ ed unito con T e T_1 avremo tracciato le tangenti in T e T_1. Si noti che: $\overline{O(\frac{x_T}{2})} = \overline{(\frac{x_T}{2})x_T}$; $f = \overline{Oy}$, $\overline{Oy} = -\overline{y_T O}$. Quindi anche: $-\overline{y_T(\frac{x_T}{2})} = \overline{(\frac{x_T}{2})T}$. Se da T sulla tangente scendiamo di un segmento "s", mentre sulla tangente: $\overline{y_T T_1}$ si sale dello stesso segmento "s", l'unione di tali punti è una tangente della parabola.

Perciò dividiamo il segmento $\overline{Ty_T}$ in un numero "n" qualsiasi di parti e numeriamo i punti di separazione: T, 1, 2, ...(n-1), y_T; e nello stesso numero di parti $y_T T_1$ e numeriamo

ro di parti $y_T T_1$ e numeriamo $y_T, 1, 2, 3, \ldots (n-1), T_1$. Unendo i numeri omonimi si ottengono $(n-1)$ tangenti la parabola. Quanto maggiore è "n", meglio è definita la parabola. Per trovare in quale punto la tangente è comune alla parabola, basta trovare ove la tangente taglia le x e raddoppiando l'ascissa si trova x_T.

Il procedimento ora esposto può generalizzarsi.

Dati due punti A e B e le tangenti in A e B alla parabola, costruire la parabola per tangenti. e trovare gli assi di riferimento.

Si unisce A con B e da ogni punto P di $\overline{AB}$ possiamo tracciare le parallele alle tangenti in A e B fino ad incontrare la non parallela. Avendo numerato i punti P di $\overline{AB}$ riportiamo gli stessi numeri sui punti corrispondenti. Unendo i numeri omonimi delle tangenti in A e B abbiamo le tangenti alla parabola.

Noi però vogliamo trovare la posizione del vertice e l'asse della parabola.

Occorre dimostrare che data una corda $\overline{AB}$ di una parabola; il punto di mezzo M di tale corda (comunque inclinata rispetto all'asse della parabola), il punto T di tangenza della retta parallela alla corda, ed il punto Q comune alle rette tangenti agli estremi della corda: M, T, Q sono tre punti allineati e la loro retta è parallela all'asse della parabola.

Quindi basta la tangente perpendicolare ad MTQ per individuare il vertice e l'asse della parabola. Ma prima dimostriamo il teorema.

Sia: $y = mx^2$ l'equazione della parabola; una corda $\overline{AB}$, comunque inclinata sull'asse avrà per equazione:

$$\frac{y - y_A}{x_i - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = tg(\alpha)$$

Il punto M medio di $\overline{AB}$ avrà:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \; ; \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Tenuto presente che il coeff. angolare della retta in T tangente alla parabola e parallela ad $\overline{AB}$ dovrà essere: $y' = 2mx_T = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, ma $y_B = mx_B^2$; $y_A = mx_A^2$; avremo:

$$2mx_T = m\frac{x_B^2 - x_A^2}{(x_B - x_A)} = m(x_B + x_A) \text{; cioè } x_T = \frac{x_B + x_A}{2} = x_M .$$

Resta così dimostrato che la retta $\overline{MT}$ è parallela all'asse della parabola

della parabola.

Consideriamo ora le rette tangenti in A e B alla parabola:

$y = (2mx_A)x - mx_A^2$; $y = (2mx_B)x - mx_B^2$; il punto comune Q, avrà:

$$x_Q = \frac{m(x_A^2 - x_B^2)}{2m(x_A - x_B)} = \frac{x_A + x_B}{2} = x_M = x_T .$$

Resta così dimostrato che x_T, x_Q, x_M sono tre punti allineati e paralleli all'asse delle ascisse.

Si noti che $\overline{MQ}$ e la retta tangente in T alla parabola e parallela ad $\overline{AB}$ sono diagonali di un parallelogramma: HMKQ perciò T è medio fra M e Q ed è medio fra H e K.

3) Tangenti alla parabola da un punto Q esterno alla parabola stessa.

L'equazione delle rette per Q è: $\frac{y-y_Q}{X-X_Q} = \tan\alpha$.

facendo sistema con l'equazione della parabola si ha:

$$y = tg(\alpha)x + y_Q - tg(\alpha)x_Q = mx^2 \; ; \; \boxed{(m)x^2 - (tg(\alpha))x - (m x_Q - y_Q) = 0}$$

$$X = \frac{tg(\alpha) \pm \sqrt{tg^2\alpha - 4m(tg\alpha\, x_Q - y_Q)}}{2m}$$

per:

- $\Delta_x > 0$ si hanno le ascisse dei punti di intersezione
- $\Delta_x = 0$ " " " " " " di tangenza.
- $\Delta_x < 0$ non si hanno punti comuni.

a noi interessa: $\Delta_x = tg^2(\alpha) - 2(2m x_Q) tg(\alpha) + 4m y_Q = 0$

$$tg(\alpha) = 2m x_Q \pm \sqrt{4m^2 x_Q^2 - 4m y_Q}$$

$$tg(\alpha) = 2m x_Q \pm \sqrt{4m^2 x_Q^2 - 4m y_Q}$$

$$\boxed{tg(\alpha) = 2m\left(x_Q \pm \sqrt{x_Q^2 - y_Q/m}\right)}$$

$$\boxed{tg(\alpha) = \frac{x_Q}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{x_Q^2}{4a} - y_Q\right)\frac{1}{a}}}$$

per $\Delta_\alpha = 0$: $\left(\frac{x_Q^2}{4a} = y_Q\right)$ il punto Q sarebbe sulla parabola e si ricade nel caso precedente cioè il punto Q sulla retta tangente, da esterno andrebbe a coincidere col punto di tangenza T.

l'eq. della retta tangente per $\Delta_\alpha = 0$:

$$\boxed{y = (2m x_Q)x - m x_Q^2} \quad ; \quad \boxed{y = \frac{x_Q}{2a}x - \frac{x_Q^2}{4a}}$$

Invece per $\Delta_\alpha < 0$ il punto Q rimane interno alla concavità delimitata dalla parabola, e le radici sono immaginarie perché da punti interni alla concavità parabolica è impossibile tracciare rette tangenti.
Per $\Delta_\alpha > 0$, si hanno finalmente radici reali.

Sostituendo l'espressione di tang(α) nell'equazione della retta tangente si hanno due rette:

$$\frac{y - y_Q}{x - x_Q} = \frac{x_Q}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{x_Q^2}{4a^2} - \frac{y_Q}{a}\right)}$$

$$\begin{cases} y_1 = \left(\dfrac{x_Q}{2a} + \sqrt{\dfrac{x_Q^2}{4a^2} - \dfrac{y_Q}{a}}\right)(x_1 - x_Q) + y_Q \\ y_2 = \left(\dfrac{x_Q}{2a} - \sqrt{\dfrac{x_Q^2}{4a^2} - \dfrac{y_Q}{a}}\right)(x_2 - x_Q) + y_Q \end{cases}$$

Cerchiamo per ciascuna di esse il punto T di tangenza, a tal fine facciamo sistema con l'equazione della parabola: $y = \frac{x^2}{4a}$

quazione della parabola : $y = \frac{x^2}{4a}$

$$\frac{x_T^2}{4a} = \frac{x_Q}{2a} x_T + \left(\sqrt{\left(\frac{x_Q^2}{4a^2}\right) - \frac{y_Q}{a}}\right) x_T - \left[\left(\frac{x_Q^2}{2a}\right) + \left(\sqrt{\frac{x_Q^2}{4a^2} - \frac{y_Q}{a}}\right) x_Q\right] + y_Q$$

$$x_T^2 - 2\left(x_Q + \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}\right) x_T + \left[2x_Q^2 + 2x_Q \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q} - 4a y_Q\right] = 0$$

$$x_T = \left(x_Q + \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}\right) \pm \sqrt{x_Q^2 + x_Q^2 - 4a y_Q + 2x_Q \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q} - \left[2x_Q^2 + 2x_Q \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q} - 4a y_Q\right]}$$

Cioè: $\boxed{x_T = \left(x_Q \pm \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}\right)}$ (abbiamo verificato che $\Delta_{(x)} = 0$ come avevamo imposto).

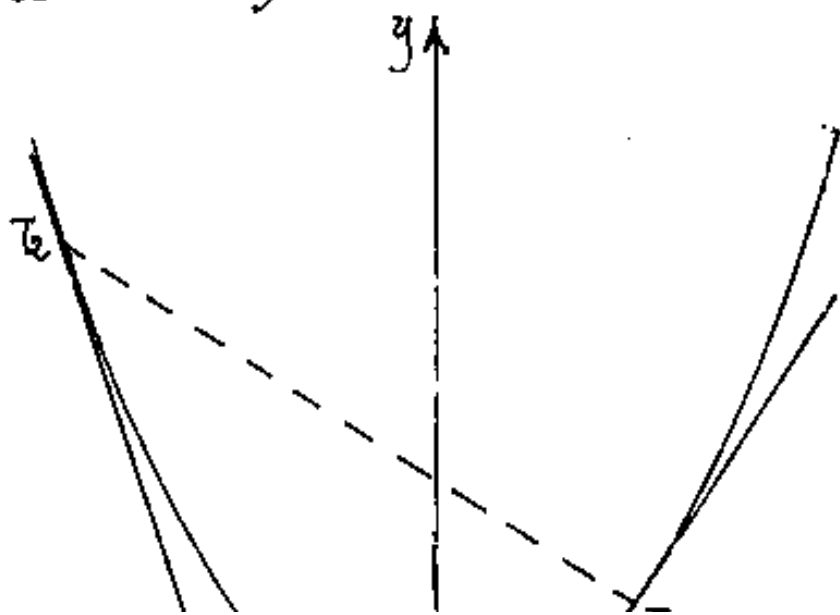
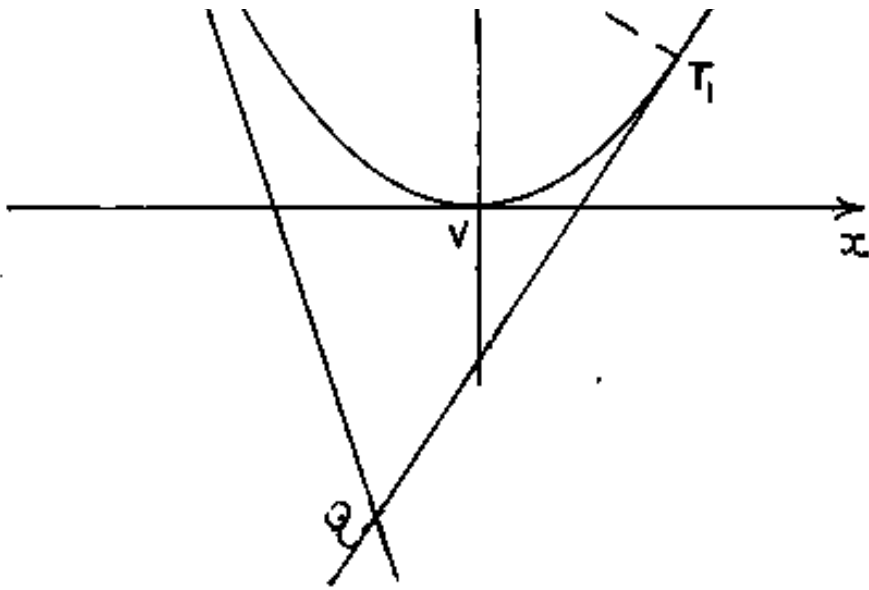
$$\boxed{y_T = \frac{x_T^2}{4a}} = \left(2x_Q^2 - 4a y_Q \pm 2 x_Q \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}\right)\frac{1}{4a}$$

$$\boxed{y_T = \frac{x_Q^2}{2a} - y_Q \pm \frac{x_Q}{2a}\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}}$$

$$x_{T_1} = x_Q + \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q} \quad ; \quad y_{T_1} = \frac{x_Q^2}{2a} - y_Q + \frac{x_Q}{2a}\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}$$

$$x_{T_2} = x_Q - \sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q} \quad ; \quad y_{T_2} = \frac{x_Q}{2a} - y_Q - \frac{x_Q}{2a}\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}$$

$$\boxed{\left(x_{T_1} - x_{T_2}\right) = 2\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}} \quad ; \quad \boxed{\left(y_{T_1} - y_{T_2}\right) = \frac{x_Q}{a}\sqrt{x_Q^2 - 4a y_Q}}$$

La lunghezza della corda: $\overline{T_1T_2} = \sqrt{4x_Q^2 - 16a y_Q + \frac{x_Q^4}{a^2} - \frac{4x_Q^2 y_Q}{a^2}}$

Se la corda $\overline{T_1T_2}$ è parallela ad x, Q giace sulle y, e si ha la costruzione grafica della parabola

per tangenti.
Si nota che in V la tangente (asse x) è normale alla corda (asse y) e che quest'ultima è infinita.

Calcoliamo prima l'equazione della normale.

La normale alla parabola

Supponiamo, al solito, che la normale sia tracciata dallo stesso punto T ove avevamo considerato la tangente. (Il punto T è sulla parabola). L'equazione sarà: (si confronti l'equazione per una curva: f(x)):

$$\frac{y - y_T}{x - x_T} = \left(-y'_T\right)^{-1} = \frac{-1}{y'_T} = \left(\frac{-1}{2m\,x_T}\right)$$

cioè:

$$\boxed{y = \frac{-x}{2m\,x_T} + \left(y_T + \frac{1}{2m}\right)}$$ <u>in forma esplicita</u>

è meglio esprimere in x_T perché ad ogni x_T corrisponde un sol punto nella parabola mentre, ogni y_T corrisponde a due diversi punti sulla parabola.

$$\left(y = \frac{-x}{2m\,x_T} + m x_T^2 + \frac{1}{2m}\right)$$

oppure:

$$\left(y = \frac{-x}{x_T}\,2a + \frac{x_T^2}{4a} + 2a\right)$$

$\left(\frac{y}{[illegible]}\right) = -\left(\frac{2a}{[illegible]}\right)\left(\frac{x}{[illegible]}\right) + 4\left(\frac{x_T}{[illegible]}\right)^2 + 1$ (modulare)

$$\left(\frac{y}{2a}\right) = -\left(\frac{2a}{X_T}\right)\left(\frac{X}{2a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{X_T}{2a}\right)^2 + 1 \qquad (\text{modulare})$$

$$\left(\left(\frac{2a}{X_T}\right)\left(\frac{X}{2a}\right) + \left(\frac{y}{2a}\right) = \frac{X_T^2 + 8a^2}{8a^2}\right)$$

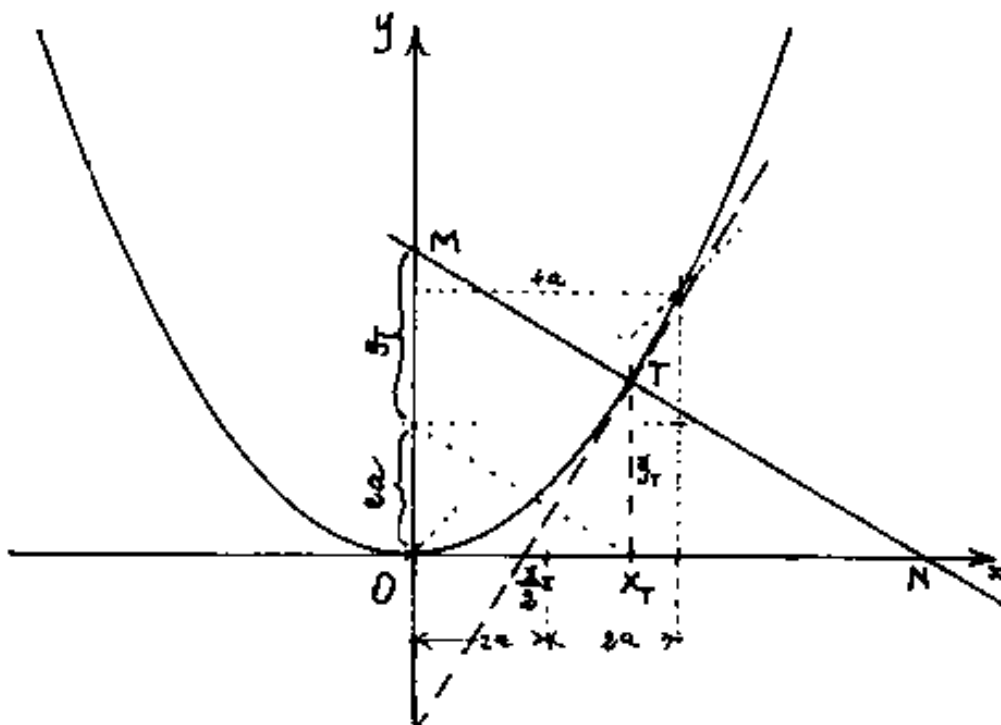
$$\left(\frac{8a^2}{8a^2 + X_T^2}\right)\left(\frac{2a}{X_T}\right)\frac{X}{2a} + \left(\frac{8a^2}{8a^2 + X_T^2}\right)\left(\frac{y}{2a}\right) = 1$$

finalmente, semplificando abbiamo l'equazione

della normale alla parabola in <u>forma segmentaria</u>

$$\frac{X}{\left(\frac{X_T\left(X_T^2+8a^2\right)}{8a^2}\right)}+\frac{y}{\frac{\left(X_T^2+8a^2\right)}{(4a)}}=1$$

anche questa espressione è opportuno scriverla in <u>forma modulare</u>. (ove $1 = {}^{2a}/_{2a}$)

$$\frac{(X/2a)}{\left(\frac{X_T}{2a}\right)\left[\left(\frac{X_T}{2a}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1\right]}+\frac{(y/2a)}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{X_T}{2a}\right)^2+1\right]}=1$$

Per similitudine di triangoli potevamo scrivere:

$$\overline{X_TN} : y_T = y_T : \frac{X_T}{2}$$

$$\overline{X_TN} = m^2 X_T^4 \frac{2}{X_T} = \frac{X_T(X_T)^2}{8a^2}$$

da cui: $\overline{ON} = \overline{OX_T} + \overline{X_TN}$

$$\overline{ON} = \left(X_T + \frac{1}{2}\left(\frac{X_T}{2a}\right)^2 X_T\right)$$

$$\overline{ON} = x_T\left(\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2\frac{1}{2} + 1\right)$$

Avremo inoltre: $\overline{OM} : \overline{ON} = \frac{x_T}{2} : y_T$; da cui: $\overline{OM} = \left(\frac{\overline{ON}\, x_T}{2y_T}\right)$

$$\overline{OM} = x_T\left[\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2\frac{1}{2} + 1\right]\frac{x_T}{2m\,x_T^2} = \boxed{\overline{OM} = (2a)\left[\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2\frac{1}{2} + 1\right]}$$

e poiché:

$$\frac{x}{\overline{ON}} + \frac{y}{\overline{OM}} = 1 \quad \text{avremo:} \quad \frac{x}{x_T\left[\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2\frac{1}{2} + 1\right]} + \frac{y}{(2a)\left[\left(\frac{x_T}{2a}\right)^2\frac{1}{2} + 1\right]} = 1$$

ove dividendo numeratore e denominatore per $(2a)$, si ha la forma modulare sopra scritta.

Dalla:

$$y = -\left(\frac{2a}{x_T}\right)x + \left(2a + y_T\right)$$

la costruzione grafica della normale, in un punto T della parabola, risulta notevolmente facilitata, infatti sulle ordinate basta riportare: $(2a + y_T)$ per trovare M; $\overline{OM} = (2a + y_T)$.

e l'espressione segmentaria della normale:

$$\frac{x}{\frac{x_T}{2a}\left(2a + y_T\right)} + \frac{y}{\left(2a + y_T\right)} = 1$$

---

2) Consideriamo ora un punto Q non sulla parabola, e da Q, vogliamo tracciare la normale alla parabola. Si nota che mentre per la tangente Q doveva essere esterno alla parabola, per la normale Q può anche essere interno alla concavità parabolica senza giacere sulla linea "parabola".

linea parabola.

Ogni retta uscente da Q <u>esterno</u> alla parabola può incontrare la parabola in due punti, essere tangente, essere esterna cioè non incontrare la parabola. Ogni retta uscente da Q <u>interno</u> alla concavità parabolica incontra necessariamente la parabola; e, se tale retta non è parallela

all'asse della parabola, la incontra in due punti; se è parallela, la incontra in un punto solo.

Rifacendosi al caso generale, siano T e T_{u} i due punti in cui la normale in T (non in T_{u}) alla parabola, e passante per Q, taglia la curva. Avremo:

$$\frac{y_T - y_Q}{x_T - x_Q} = \left(\frac{-1}{y'_T}\right)$$

Si noti che, in generale: $y'_T \neq y'_{T_u}$

possiamo scrivere:

$$\frac{mx_T^2 - y_Q}{x_T - x_Q} = \frac{-1}{2m\,x_T}$$

equazione in cui l'unica incognita è x_T

$$mx_T^2 - y_Q = \frac{-x_T}{2m\,x_T} + \frac{x_Q}{2m\,x_T} \quad \text{da cui:}$$

$$2m^2x_T^3 \quad -2m\left(y_Q + \frac{1}{2m}\right)x_T - x_Q = 0$$

Non abbiamo ancora trattato le equazioni di 3° grado, (vedi volume V), per cui occorrerà ricorrere a qualche artificio per uscirne

qualche artificio per uscirne.

Cominciamo col considerare che, una retta <u>normale alla parabola</u> nel punto T, se non è l'asse, incontra la parabola in un altro punto T_u; vogliamo correlazionare T_u e T. A tal fine basta far sistema fra la normale in T e l'equazione della parabola:

$$-\left(\frac{2a}{X_T}\right)X + \left(2a + y_T\right) = \frac{X^2}{4a}$$

$$X^2 + \frac{8a^2}{X_T}X - \left(8a^2 + 4ay_T\right) = 0$$

$$X^2 + 2\left(\frac{4a^2}{X_T}\right)X - \left(8a^2 + X_T^2\right) = 0$$

$$X = -\frac{4a^2}{X_T} \pm \sqrt{\frac{16a^4}{X_T^2} + 8a^2 + X_T^2}$$

$$X = \frac{-4a^2}{X_T} \pm \sqrt{\frac{16a^4 + 8a^2X_T^2 + X_T^2}{X_T^2}}$$

$$X = -\frac{4a^2}{X_T} \pm \sqrt{\frac{(4a^2 + X_T^2)^2}{X_T^2}} = \left(-\frac{4a^2}{X_T} \pm \frac{4a^2 + X_T^2}{X_T}\right)$$

$$X = \begin{cases} -\frac{4a^2}{X_T} + \frac{4a^2}{X_T} + X_T = X_T \\ -\frac{4a^2}{X_T} - \frac{4a^2}{X_T} - X_T = X_{T_u} = \left(\frac{-8a^2}{X_T} - X_T\right) \end{cases}$$

$$\boxed{X_{T_u} = \frac{-8a^2 - X_T^2}{X_T}} \qquad X_{T_u} = -\left(\frac{X_T\,4a\cdot 2a}{X_T^2} + X_T\right)$$

$$Y_{T_u} = -X_T\left(\frac{2a}{\ldots} \ldots\right) \qquad \boxed{Y = -X_T\left(2a + y_T\right)}$$

$$X_{T_u} = -X_T\left(\frac{2a}{y_T} + 1\right) \qquad \boxed{X_{T_u} = -X_T\left(\frac{2a + y_T}{y_T}\right)}$$

una equazione di 2° grado che abbia per radici X_{T_u} ed X_T, è del tipo: $\boxed{(x - x_T)(x - x_{T_u}) = 0}$

cioè: $x^2 - (x_T + x_{T_u})x + (x_T)(x_{T_u}) = 0$

sostituendo:

$$\boxed{x^2 - \left(\frac{2aX_T}{y_T}\right)x - x_T^2\left(\frac{2a + y_T}{y_T}\right)}$$

Possiamo ora tornare al nostro problema.

Alla corda $\overline{T_1T_2}$, unione dei punti di tangenza delle rette uscenti da Q, imponiamo di essere, in T_1, normale alla parabola, cioè poniamo: $T_1 = T$; e $T_2 = T_u$.

Mentre T_1 (con coordinate entrambe positive) varia dal centro assi, (vertice della parabola), all'infinito: $0 \leq x_T \leq \infty$ $0 \leq y_T \leq \infty$; si nota che esiste un limite alle coordinate di T_u a cui corrisponde un valore intermedio delle coordinate di T.

derivando la: $X_{T_u} = \dfrac{-(8a^2 + X_T^2)}{X_T}$

si ha:

$$\frac{d(X_{T_u})}{d(X_T)} = \frac{(-2X_T)(X_T) + 8a^2 + X_T^2}{X_T^2} = \frac{8a^2 - X_T^2}{X_T^2} = 0$$

da cui: $X_T^2 = 8a^2$; $X_T = 2a\sqrt{2}$; $y_T = 2a$

sostituendo:

$$x_{T_u} = \frac{-(8a^2 + 8a^2)}{2a\sqrt{2}} \qquad X_{T_u} = -4a\sqrt{2} \; ; \; y_{T_u} = 8a$$

La retta tangente in T avrà per equazione:

La retta tangente in T avrà per equazione

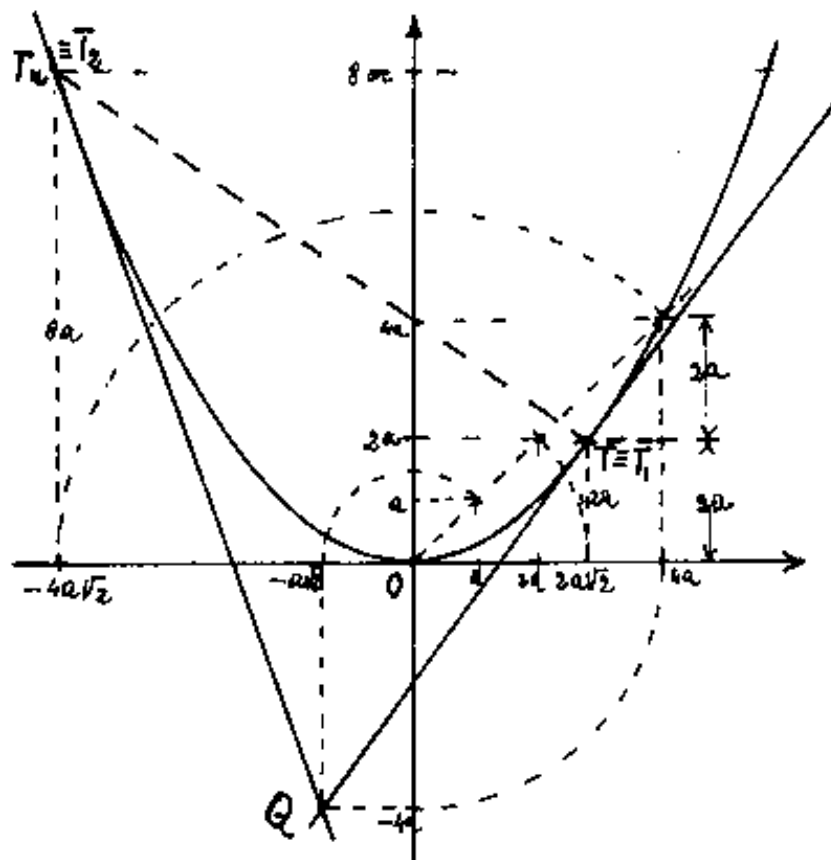
$$\frac{(y-2a)}{(x-2a\sqrt{2})} = +\sqrt{2}$$

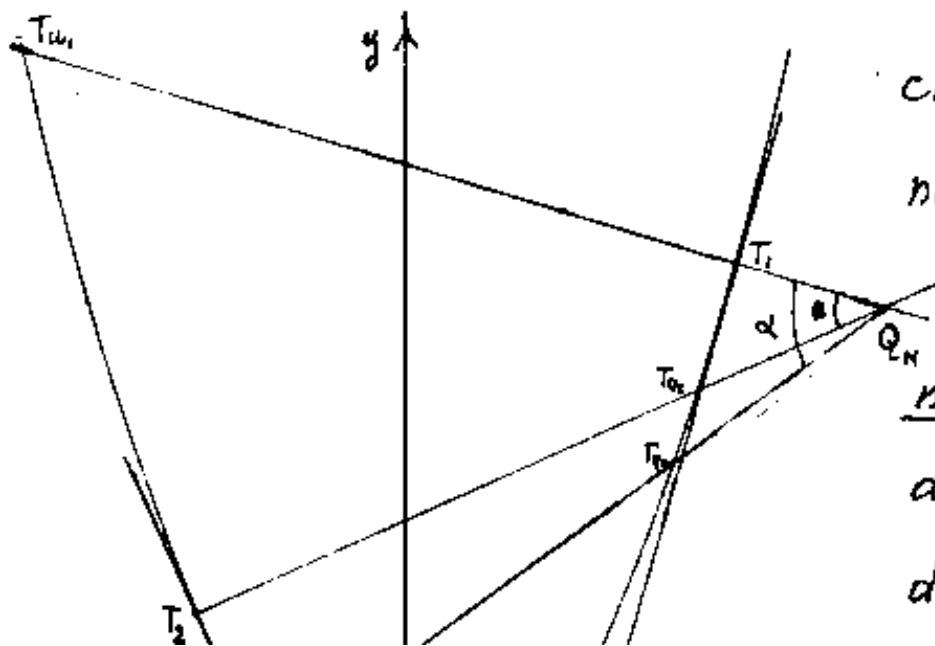
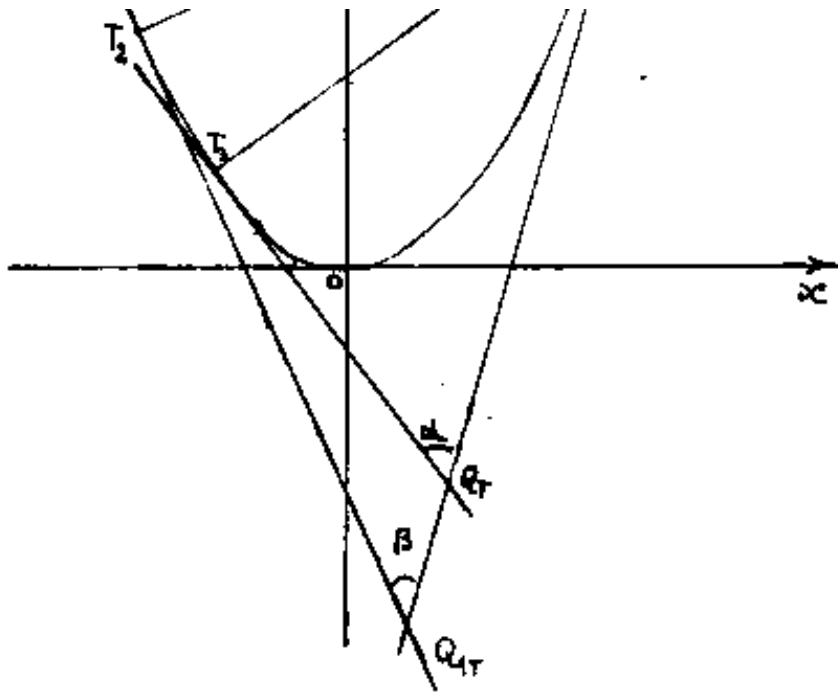
$$y = +\sqrt{2}\,x - 2a$$

L'equazione della retta tangente in T_4 sarà:

$$\frac{y-8a}{x+4a\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \qquad y = -(2\sqrt{2})x - 8a$$ da cui

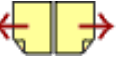
facendo sistema: $$x_Q = -a\sqrt{2} \; ; \; y_Q = -4a$$

Presentiamo il grafico di tali condizioni limite. Ma vi sono altre correlazioni fra le rette tangenti e le rette normali alla parabola.

Sia T_u sulla parabola, il punto dal quale si tracciano le normali; esiste sempre una normale in T_u. Per $y_{T_u} < 8a$ si ha solo la normale in T_u.

Dalla figura sottostante è possibile rilevare che da un punto esterno alla parabola è possibile tracciare tre normali, una nel ramo dalla parte del punto, e due nel ramo opposto di

parabola. E facile ri=
levare che gli angoli
formati dalle tangen=
ti sono uguali agli ango=
li delle normali per gli
stessi punti.

Resta con ció giustificato l'equazione di terzo grado, che ammette tre radici, che possono essere, tre reali, oppure una sola reale e due immaginarie coniu= gate. Quest'ultimo caso lo abbiamo esaminato nel calco= lare il limite delle coordinate di Tu.

Quindi, mentre è possibile, con una equazione di secondo grado, calcolare le tangenti alla pa= rabola uscenti da un punto esterno, perche le tangenti sono solo due; per calcolare le normali alla parabola occorre una equazio= ne di terzo grado, perche le normali sono: o tre, o una sola reale. Poiché una equazione di terzo grado, quando ammette tre radici reali, (caso irriducibile) non è più riducibile neppure alla estrazione di radici cubiche, ma si avvale della trigonometria (cioè di tavole di conti fatti) per

risolvere le radici; e noi sappiamo che, graficamente, usando la riga ed compasso, non è possibile risolvere le radici cubiche (poiché avremmo risolto il "problema di Delo" cioè la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo.) rinviamo la risoluzione alla trattazione delle radici cubiche. (vol V).

Altro metodo grafico per costruire la parabola per punti

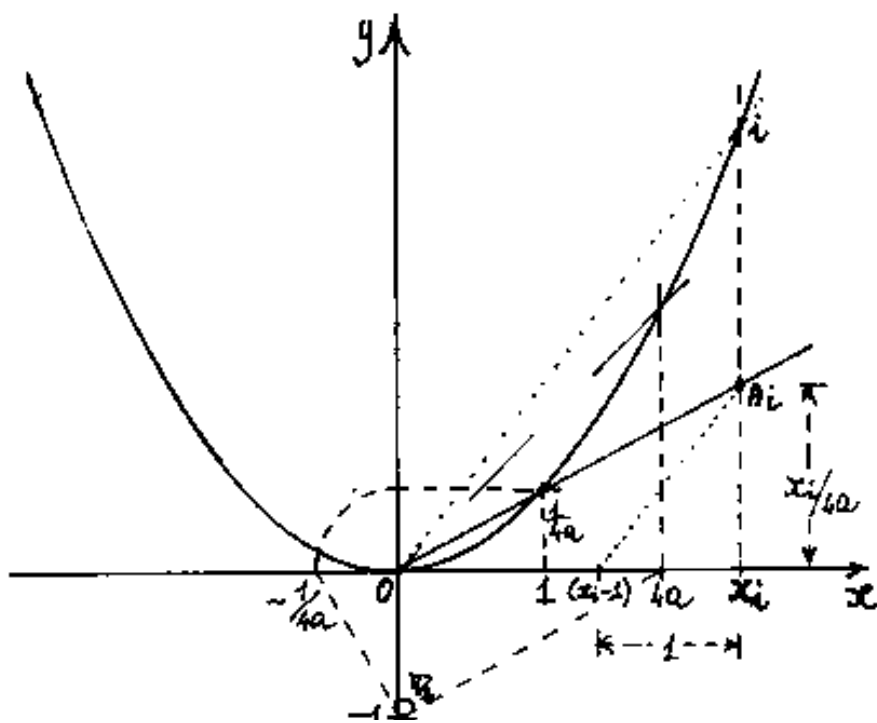
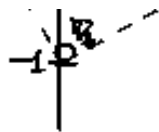
L'equazione della parabola: $y = \frac{1}{4a} x^2$ può scriversi: $y = \left(\frac{x}{4a}\right) x$ ed anche: $(4a) \cdot y = (x)(x)$ si può anche scrivere: $y : x = x : 4a$ e cioè "In una parabola, le ascisse sono medie proporzionali fra le corrispondenti ordinate ed il modulo 4a". $\left(\frac{y}{x} = \frac{x}{4a}\right)$

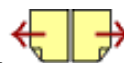
Consideriamo inizialmente la retta per l'origine degli assi: $y = \left(\frac{1}{4a}\right) x$ ove: $\left(\frac{1}{4a}\right)$ è il coefficiente angolare. Si suppone dato il modulo "4a".

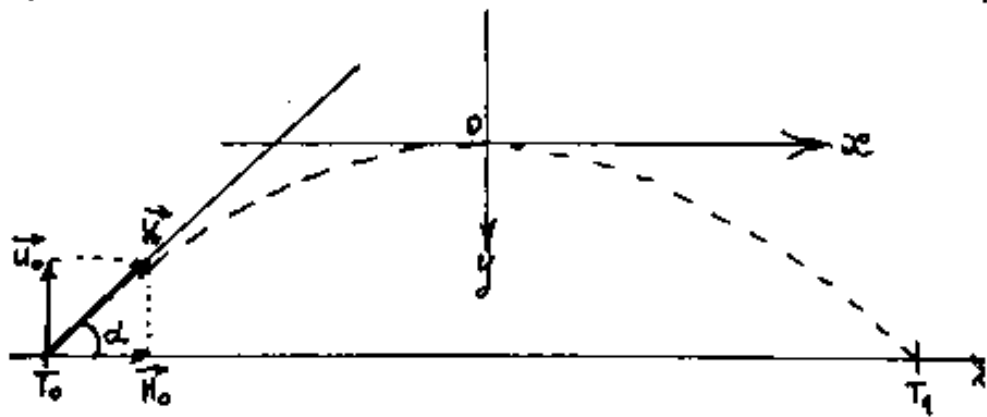
se "4a" è un numero si ha subito numericamente: "$\frac{1}{4a}$".

Il modulo grafico = 1 è arbitrario. !!

Se il modulo 4a è dato come segmento, col nostro modulo grafico = 1 (che è

-1 ... grafico ... è ...

un segmento, sappiamo

costruire il segmento $\left(\frac{1}{4a}\right)$. Per $x = 1$; sia la parabola, sia la retta hanno $y = \frac{1}{4a}$ e possiamo, tracciati gli assi riportare in ascisse i segmenti $x = 4a$, $x = 1$, l'ordinata per $x = 1 \rightarrow y = 1/4a$ e la retta: $y = \frac{x}{4a}$. Presa ora una generica ascissa x_i ed $(x_i - 1)$, unito a_i sulla retta con $(x_i - 1)$ e tracciata la parallela da 0, troviamo "i" sull'ordinata di x_i. Infatti: $\boxed{\frac{x_i}{4a} : 1 = y_i : x_i}$ (vedi figura).

La parabola come traettoria, in campo gravitazionale, di un corpo lanciato, con velocità iniziale V_0, in direzione α.

Si trascura l'attrito dell'aria. Sia α l'angolo che la direzione di lancio forma con l'orizzontale, siamo: T e T_1 i punti a terra di partenza e di arrivo, supposti alla stessa quota. Sia g l'accelerazione di gravità, e "t" la variabile tempo da t_0 a t_1.

Scomponiamo il vettore (velocità) V_0 agente in direzione α, nei componenti:

orizzontale: $\vec{H_0} = \vec{V_0} \cos\alpha$, e verticale $\vec{U_0} = \vec{V_0} \operatorname{sen}\alpha$.

Se trascuriamo la resistenza dell'aria, $\vec{H_0}$ resta invariato nel tempo, mentre $\vec{U_0}$ viene via, via, attenuata dall'accelerazione di gravità $\vec{g}$ che è diretta verso terra. Dalla fisica ricor=

diamo che: $\boxed{\vec{u} = \vec{u}_0 - \vec{g}t}$; ma la velocità in direzione verticale è nulla, $(u=0)$, nell'istante che il proietto cessa di salire ed inizia a discendere, se indichiamo con t_m il tempo impiegato da t_0 per raggiungere la massima quota $(u=0)$ si ha: $\boxed{t_m = \frac{u_0}{g}}$

Lo stesso tempo impiega nella discesa, ed arriva a terra con velocità verticale: $\vec{U}_1 = -\vec{V}_0$, ed orizzontale: $\vec{H}_1 = \vec{H}_0$ (invariata). Il tempo impiegato da T_0 a T_1 è $2t_m = 2u_0/g = \left(\frac{2V_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}\right)$. Che è il

tempo impiegato a percorrere la traettoria.

Si può calcolare la massima altezza: $h = \int_{t_0}^{t_m} u\,dt = \int_{t_0}^{t_m} (u_0 - gt)\,dt =$

$h = \left[u_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right]_{t_0}^{t_m}$; se poniamo: $(t_0 = 0)$; $h = \left[u_0 t_m - \frac{1}{2} g t_m^2\right]$; e sostituendo

$(t_m = u_0/g)$ si ha: $h = \left(\frac{u_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{u_0^2}{g}\right)$; $h_{max} = u_0^2/2g$

Si può calcolare la gittata: $\overline{T_0 T_1} = H_0 (2 t_m) = (\vec{V_0} \cos\alpha)\left(2 \frac{\vec{V_0} \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) =$

$\overline{T_0 T_1} = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g} = \frac{2}{g}(H_0 U_0)$

Il fatto che ad ogni punto della traettoria sia abbinato un tempo, implica la possibilità di scriverne le coordinate parametriche. : $h = \int_0^t \vec{u}\,dt$; $\overline{T_0 T} = \vec{H} t$.

Data la simmetria, conviene porre gli assi con l'origine alla massima quota (ove $u=0$), l'asse x nella direzione della velocità: $\vec{H}$ ed y diretto verso il basso; avremo: (posto zero il tempo in 0): $y = \frac{1}{2} g t^2$; $x = H_0 t$ eq. parametriche

eliminando t abbiamo:

$$t^2 = \left(\frac{x}{H_0}\right)^2 = \frac{2y}{g} \quad \text{cioè:} \quad y = \left(\frac{g}{2 H_0^2}\right) X^2$$

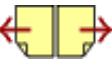
classica equazione di una parabola.

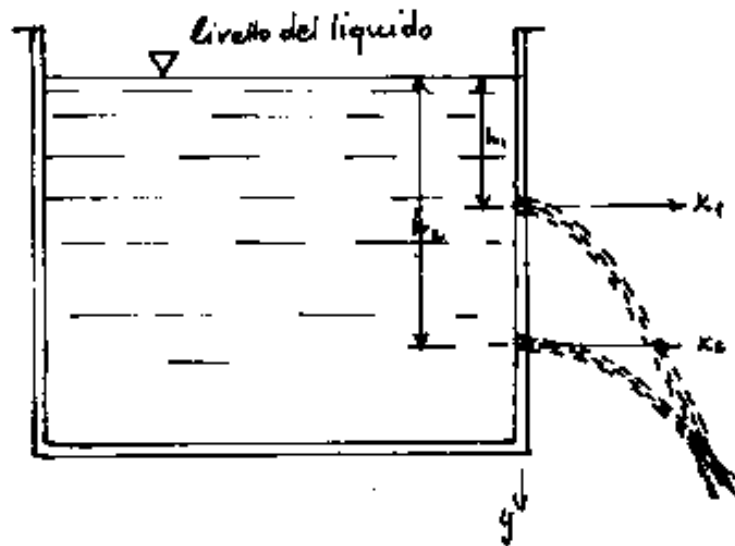
Se avessimo scelto l'origine degli assi: (λ, h) (con $\lambda = \overline{T_0 T}$), e del tempo

Se avessimo scelto l'origine degli assi: (λ, h) (con $\lambda = \overline{T_0 T}$), e del tempo in T_0 avremmo: $h = \left[U_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right]$ e $\lambda = [H_0 t]$;

$$h = \left[\frac{U_0}{H_0}\lambda - \frac{g}{2}\frac{\lambda^2}{H_0^2}\right] = \left[tg(\alpha)\lambda - \frac{g\,\lambda^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}\right] \text{ cioè: } \boxed{h = \left(\frac{-g}{2V_0^2\cos^2\alpha}\right)\lambda^2 + (tg\,\alpha)\lambda}$$

che è l'equazione di una parabola verso il basso, negli assi "h", e "λ". Se scriviamo: $(h_{max} - h) = \left(\lambda - \frac{\overline{T_0 T}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{g}{2 H_0^2}\right) = \left(\frac{U_0^2}{2g} - h\right) = \left(\lambda - \frac{U_0 H_0}{g}\right)^2 \left(\frac{g}{2H_0^2}\right)$

$$h = -\lambda^2 \frac{g}{(2H_0^2)} + \left(2\frac{U_0 H_0}{g}\frac{g}{2 H_0^2}\right)\lambda + \frac{U_0^2}{2g} - \frac{U_0^2}{g}\frac{H_0^2}{g}\frac{g}{2H_0^2} = \boxed{h = \left(\frac{-g}{2H_0^2}\right)\lambda^2 + \frac{U_0}{H_0}\lambda} \text{ (torna).}$$

L'efflusso di fluidi, a livello costante, da un orificio distante "h" dal bordo libero

Si abbia un recipiente ove il liquido contenuto è mantenuto a livello costante. (cioè istante per istante il liquido entrante uguaglia il liquido uscente). Ricordiamo che la velocità di uscita di un liquido da un orificio più basso di "h" dal livello del liquido è pari alla velocità di un corpo caduto da una stessa altezza h in campo gravitazionale. $h = \frac{1}{2} g t^2$;

$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; $V = gt = \sqrt{2gh}$; $\boxed{\vec{V_0} = \sqrt{2gh}}$ = velocità di uscita diretta orizzontalmente cioè: $\vec{H_0} = \sqrt{2gh}$; $U_0 = 0$, siamo nel caso precedente, al vertice della parabola cioè usando gli stessi simboli: (salvo h), $V_0 = \vec{H} = H_0$; $U = gt$; $y = \frac{1}{2} g t^2$; $X = (\sqrt{2gh})t$

$t^2 = \frac{X^2}{2gh} = \frac{2y}{g}$ da cui: $\boxed{y = \frac{X^2}{4h}}$ si può scrivere: $\boxed{y : \frac{x}{2} = \frac{x}{2} : h}$

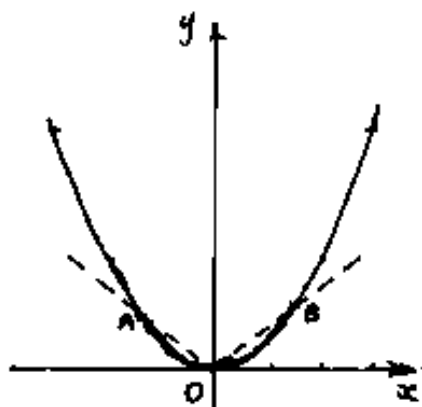
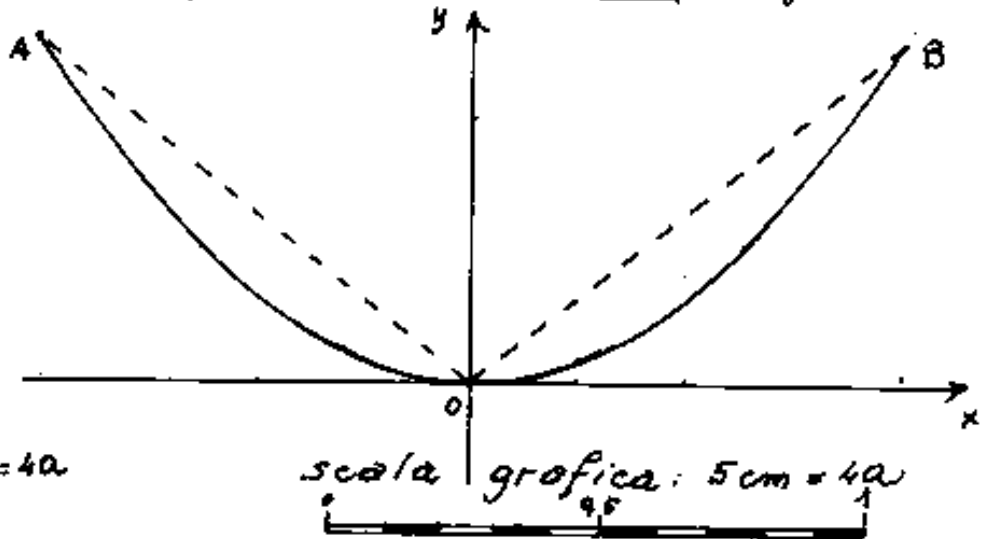
cioè la profondità "h" dal pelo libero, tiene il posto del modulo "a" della parabola. E' importante rilevare che se il modulo "a" è dato con un segmento definito, la configurazione della parabola non varia se, fermo restando il segmento "a" si varia il segmento grafico = 1 cioè il modulo della scala grafica. Approfondiamo l'argomento.

Il concetto di modulo nella parabola

L'equazione al centro assi della parabola: $y = \frac{x^2}{4a}$

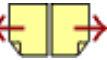
dividendo l'uguaglianza per 4a diventa: $\left(\frac{y}{4a}\right) = \left(\frac{x}{4a}\right)^2$

ove: "4a" diventa il modulo unità di misura grafica; cioè tutte le parabole al centro possono rappresentarsi con l'unica equazione $Y = X^2$ $y' = 2x$

y A B O x

scala grafica: 1cm = 4a

scala grafica: 5cm = 4a

Le due parabole in figura sono la stessa !!! parabola in scala diversa. Il tratto di parabola $\widehat{AB}$ è ingrandito cinque volte nel secondo disegno. Entrambe rispondono all'unica equazione, alla quale possono ridursi tutte le parabole, cioè: $y = x^2$ il modulo "4a" è l'unità grafica. Per esempio: la parabola: $y = 25x^2$

è l'unità grafica. Per esempio: la parabola: $y = 25x^2$ che possiamo scrivere: $y = \frac{x^2}{4\left(\frac{1}{100}\right)}$; cioè: $a = 1/100$; ma se non viene specificato $\frac{1}{100}$ di cosa? Supponiamo $\frac{1}{100}$ di metro allora $4a = 4$ cm. allora la prima figura è in scala 1:4, mentre la seconda figura è in scala 1:0,8 della $y = 25x^2$ in metri!

questo discorso vale ovviamente per la rappresentazione di tutte le curve, individuando opportunamente il modulo grafico.

Il modulo grafico unitario di una curva qualsiasi

Data l'equazione di una curva qualsiasi: $y = f(x)$ od anche: $f(y, x) = 0$; se riusciamo, utilizzando, i parametri della funzione a scrivere: $\frac{y}{u} = f\left(\frac{x}{u}\right)$, avremo che "u" è il modulo grafico unitario. facciamo qualche esempio:

$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 \rightarrow R =$ modulo grafico del cerchio

$\frac{y}{a} = \rho\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ ove: $\rho = \frac{b}{a}$ $a =$ modulo dell'ellisse

$\frac{y}{a} = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ $a =$ modulo della catenaria

---

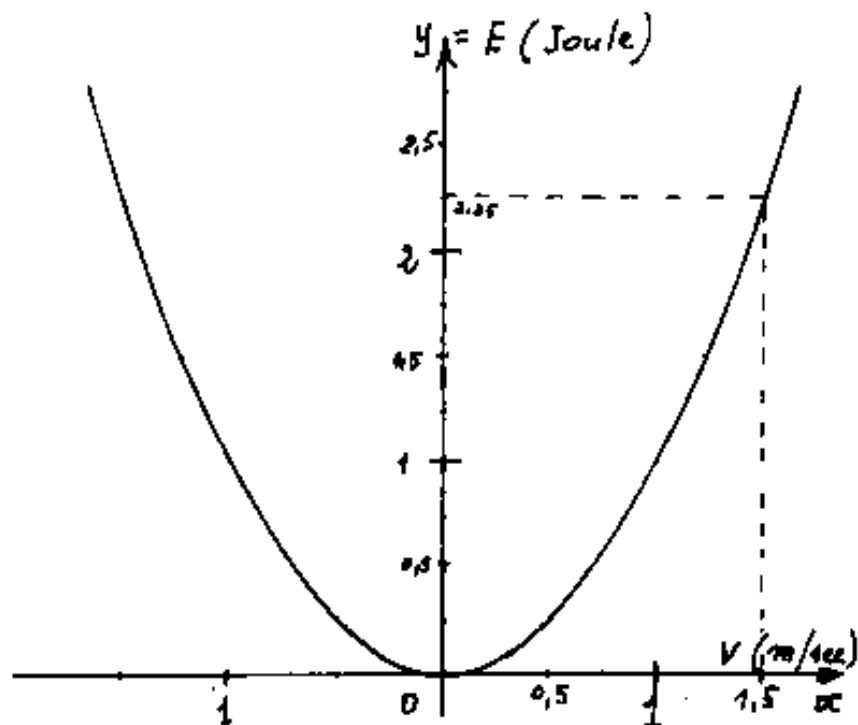
Si noti che: x ed y, nella loro rappresentazione grafica, sono lunghezze, anche se nella espressione: $y = f(x)$ possono avere qualunque dimensione fisica; mentre se "a" è il modulo, anche "a" è una lunghezza perciò: $\frac{y}{a}$ ed $\frac{x}{a}$ come rapporto di lunghezze sono numeri puri privi di dimensioni. Però occorre riferire le grandezze dimensionali; per esempio: l'energia cinetica: $E = \frac{1}{2}MV^2$ può essere scritta: $\frac{E_c}{\ldots} = \left(\frac{V}{\ldots}\right)^2$ · il

cinetica: $E_c = \frac{1}{2} M V^2$ può essere scritta: $\frac{E_c}{(2/M)} = \left(\frac{V}{2/M}\right)^2$; il nostro modulo diventa: $(2/M)$: che tiene il posto di "a" nel grafico che è una parabola. La pabola è la stessa: $y = x^2$ ma le dimensioni debbono essere interpretate. Usiamo il sistema di misure: M.K.S. = (metro, Kg massa, secondo) E = Joule = (Newton)(metro) = $Kg \cdot m^2/sec^2$

ove $\frac{E_c}{2/M} = \frac{E_c}{2} M \left(\frac{Kg \cdot m}{sec}\right)^2$; omogenea con $\left(\frac{VM}{2}\right)^2$.

Per chiarire meglio questo importantissimo concetto, facciamo

Un esempio pratico.

Assumiamo come modulo grafico della nostra parabola un segmento lungo 2 cm.

cioè: 0 ——— 1 (modulo unitario) $= \left(\frac{2}{Kg^*}\right)$

Questa parabola rappresenta l'energia cinetica al variare della velocità per una massa di 2 Kg* (perché: $\frac{2}{2 Kg^*} = 1$)

Consideriamo una velocità di 1,5 m/sec applicata ad una massa di 2 Kg, avrà una energia cinetica di: $E_c = \frac{1}{2} MV^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(2)(1,5)^2 = 2,25$ Joule (come indicato nel grafico).

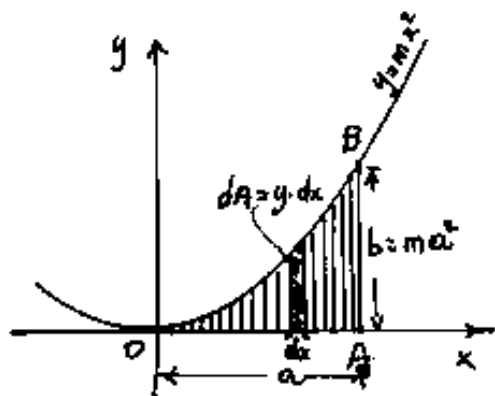
Per una massa qualsiasi, si noti che nell'espressione $E_c = \left(\frac{M}{2}\right) V^2$ abbiamo posto $\left(\frac{M}{2}\right) = 1$, quindi non volendo alterare la graduazione delle ascisse si ha che in ordinate per una massa generica M dovremo moltiplicare per la nostra unità $\left(\frac{M}{2}\right) = u$ cioè alla stessa velocità 1,5 m/sec per la massa di un Kg^*: $\frac{M}{2} = \frac{1}{2}$

cioè alla stessa velocità 1,5 m/sec per la massa di un Kg: $\frac{M}{2} = \frac{1}{2}$

$E_c = \frac{1}{2}(2,25) = 1,125$ (Joule); per una massa di 10 Kg $\mu = \left(\frac{10}{2}\right) = 5$

$E_c = 5(2,25) = 11,25$ (Joule). (a pari velocità). (Basta uno scalimetro)

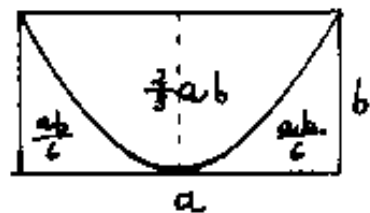
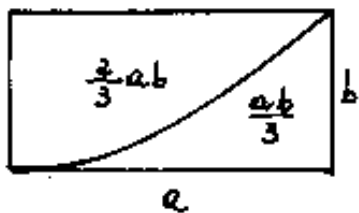
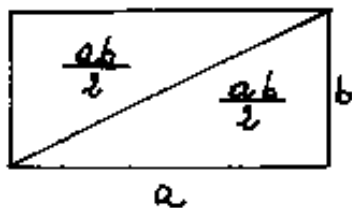
Negli scalimetri ordinari il nostro modulo di 2cm sarebbe uguale ad 1 nella scala 1:50 m. Purtroppo, spesso, non specifichiamo "m." (metri) e se lo scalimetro fosse 1:50 ft (ft = piedi inglesi ove: 1ft = 30,481 cm) anziché leggere 1 leggeremmo: 3,28 !!! (Torneremo ancora sulle scale grafiche).

L'area della parabola (triangolo parabolico)

Consideriamo il triangolo parabolico: OAB,

$dA = y\,dx = m x^2 dx$; $A = \int_0^a m x^2 dx$;

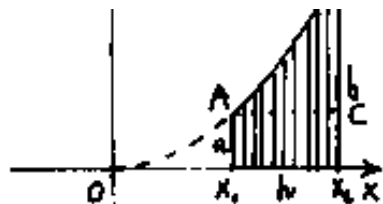
$A = \left[\frac{m x^3}{3}\right]_0^a = \left(\frac{m a^2 \cdot a}{3}\right) =$ $\boxed{A = \frac{a \cdot b}{3}}$

formula di uso frequente.

considerìamo un rettangolo di lati a, b e quindi di area: $A_r = ab$; dividiamolo con una diagonale rettilinea, con una diagonale parabolica; inscriviamoci una parabola.

Le relative aree sono evidenziate in figura.

Consideriamo ora un trapezio parabolico, di basi "a"; "b" ed altezza: "h". Il lato obliquo è un arco di parabola

$A = \left[\frac{m x^3}{3}\right]_{x_1}^{x_2} = \boxed{\frac{m}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right)} = \boxed{\frac{1}{3}\left(b\,x_2 - a\,x_1\right)} =$

$h = (x_2 - x_1)$; $x = (x + h)$; $(x_1) = (x_m - h)$; $x_m = \frac{(x_1 + x_2)}{}$

$h = (x_2 - x_1)$; $x_2 = \left(x_m + \frac{h}{2}\right)$; $(x_1) = \left(x_m - \frac{h}{2}\right)$; $x_m = \frac{(x_1 + x_2)}{2}$

$$A = \frac{1}{3}\left(b x_m + \frac{bh}{2} - a x_m + \frac{ah}{2}\right)$$

$$A = \left[(b-a)x_m + \frac{a+b}{2}h\right]\frac{1}{3}$$

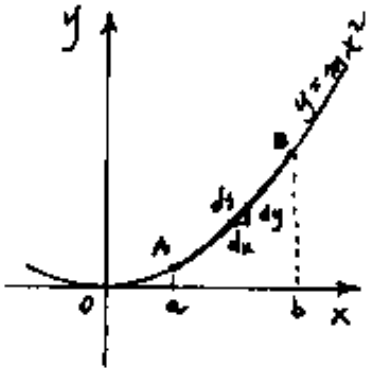
$$A = \frac{1}{6}\left((b-a)(x_1+x_2) + (b+a)(x_2-x_1)\right)$$

Si può anche scrivere: $A = \frac{(b-a)x_2}{3} - \frac{2}{3}ah$ per cui l'area del triangolo parabolico: ACB è: $A_{ABC} = A - ah =$ $A_{ABC} = \frac{(b-a)x_2}{3} - \frac{5}{3}ah$

$$A = \frac{m}{3}\left(x_2^2 + x_1^2 + x_2 x_1\right)h$$

$$A = \frac{1}{3}\left(b + a + \frac{ab}{m}\right)h$$

ove $\left(\frac{ab}{m}\right) = x_{mg} = \sqrt{x_1 x_2}$.

La rettificazione della parabola

$y = mx^2$; $y' = 2mx$; $dy = (2mx)dx$

$ds^2 = dy^2 + dx^2$; $ds = (\sqrt{4m^2x^2+1})\,dx$

quindi la lunghezza dell'arco $\widehat{AB}$ di parabola sarà:

$$s_{\widehat{AB}} = \int_a^b (\sqrt{4m^2x^2+1})\,dx$$

che possiamo scrivere: $s_{\widehat{AB}} = \left(\frac{1}{2m}\right)\int_a^b (\sqrt{(2mx)^2+1})\,d(2mx)$

E' un integrale del tipo: $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2 \lg(x+\sqrt{x^2\pm a^2})\right]$

può risolversi in vari modi per es. per integrazione per parti si avrebbe: $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = x\sqrt{x^2\pm a^2} - \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$ aggiungendo e togliendo $\pm a^2$ al numeratore si ha: $2\int\sqrt{x^2\pm a^2} = x\sqrt{x^2\pm a^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$ e risolvendo per sostituzione: $(t = \sqrt{x^2\pm a^2}+x)$ vedi vol.I. Si ha la risoluzione sopra indicata.

oppure poniamo: $(2mx) = \operatorname{senh}(t)$; $dx = d\operatorname{senh}(t)$ | $t = \operatorname{argsenh}[2mx]$

avremo: $\int\sqrt{(2mx)^2+1}\,dx = \int\sqrt{\operatorname{senh}^2(t)+1}\,d(\operatorname{senh}(t)) = \int\cosh(t)\,d\operatorname{senh}(t)$

(risolvendo per parti) $= \operatorname{senh}(t)\cosh(t) - \int\operatorname{senh}(t)\,d\cosh(t) =$

(risolvendo per parti) $= \operatorname{senh}(t)\cosh(t) - \int \operatorname{senh}(t)\, d\cosh(t) =$

$$\int \cosh(t)\, d\operatorname{senh}(t) = \operatorname{senh}(t)\cosh(t) - \int [\cosh^2(t) - 1]\, dt$$

$$\int \cosh(t)\, d\operatorname{senh}(t) = \frac{\operatorname{senh}(t)\cosh(t) + t}{2}$$ da cui:

$$\frac{1}{a_b} = \frac{1}{2m}\int_a^b \sqrt{(2mx)^2+1}\; d(2mx) = \frac{1}{2m}\left[\frac{2mx\sqrt{(2mx)^2+1} + \operatorname{argsenh}[2mx]}{2}\right]_a^b$$

$$\boxed{\frac{1}{a_b} = \frac{1}{4m}\left[(2mx)\sqrt{(2mx)^2+1} + \ln\left|(2mx) + \sqrt{(2mx)^2+1}\right|\right]_a^b}$$

e limitando l'integrale fra o ed x.

$$s = \frac{x}{2}\sqrt{(2mx)^2+1} + \frac{1}{4m} ln\left|(2mx)+\sqrt{(2mx)^2+1}\right|$$

sostituendo: $m = \left(\frac{1}{4a}\right)$

$$\frac{s}{a} = \frac{x}{2a}\sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)^2+1} + ln\left|\left(\frac{x}{2a}\right)+\sqrt{\left(\frac{x}{2a}\right)^2+1}\right|$$

questa espressione modulare in x permette, sostituendo x in funzione di "a", di avere la lunghezza in "a" per esempio:

per $\boxed{x=4a}$; $s = 2a\sqrt{5} + a\, ln\left|2+\sqrt{5}\right| = a(5{,}91577)$

Se pensiamo: $y = x^2$ estesa da $x=0$ ad $x=1$ avremo: $s = 1{,}47894$.

per $\boxed{x=2a}$; $s = a\sqrt{2} + a\, ln\left|1+\sqrt{2}\right|$; $s = a(2{,}29559)$

il tratto: $\underset{2a-4a}{s} = a(5{,}91577 - 2{,}29559) = (3{,}62018)\,a$

ponendo: $\left(\frac{x}{2a}\right)^2 = \frac{y}{a}$; cioè $x = 2\sqrt{ay}$; avremo:

$$\frac{s}{a} = \left[\sqrt{\frac{y}{a}}\sqrt{1+\frac{y}{a}} + ln\left|\sqrt{\frac{y}{a}}+\sqrt{1+\frac{y}{a}}\right|\right]$$ (dimensionalmente omogenea)

(per $a=1$) : $s = \sqrt{y+y^2} + ln\left|\sqrt{y}+\sqrt{1+y}\right|$ (non omogenea)

(per $a = 1$) : $s = \sqrt{y + y^2} + \ln\left|\sqrt{y} + \sqrt{1+y}\right|$ (non omogenea)

elevando a quadrato la parte sotto logaritmo:

(per $a = 1$): $s = \sqrt{y + y^2} + \frac{1}{2}\ln\left|1 + 2y + 2\sqrt{y + y^2}\right|$

I raggi di curvatura della parabola.

$y = mx^2$; $y' = 2mx$; $y'' = 2m$. ove: $m = \frac{1}{4a}$

$$R = \frac{\left(1 + (2mx)^2\right)^{3/2}}{2m}.$$

(in y) $$R = \frac{(1 + 4my)^{3/2}}{2m}$$;

modulare: $$\frac{R}{2a} = \left(1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2\right)^{3/2}$$; $$\frac{R}{a} = 2\left(1 + \frac{y}{a}\right)^{3/2}$$

$$R = \frac{\left((2a)^2 + x^2\right)^{3/2}}{2a^2}$$

per: $(x = 0) \rightarrow (R = 2a)$. = (Raggio nel vertice della parabola)

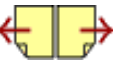
" $(y = 3a) \rightarrow (R = 16a)$; (ove $x = 2a\sqrt{3}$)

Per tracciare archi osculatori nei punti caratteristici della parabola, facciamo una tabella di conti fatti.

x	$y = \frac{x^2}{4a}$	$y' = \frac{x}{2a}$	R
0	0	0	$2a = (2)a$
a	a/4	½	$\frac{5}{4}\sqrt{5}\,a = (2,79508)a$

Sapendo che il raggio di curvatura giace sulla normale alla curva, e che, quest'ultima è

a	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$2a$	a	1	$4\sqrt{2}\,a = (5,65685)a$
$3a$	$\frac{9}{4}a$	$3/2$	$\frac{13}{4}\sqrt{13}\,a = (11,71804)a$
$2a\sqrt{3}$	$3a$	$\sqrt{3}$	$16\,a = (16)a$
$4a$	$4a$	2	$20\sqrt{5}\,a = (44,72136)a$

che, quest'ultima è perpendicolare alla tangente in quel punto. Ricordando che la tangente, in un punto, alla parabola, taglia le ascisse in $x/2$ di quel punto, è facile tracciare una serie di archetti osculatori.

I centri di curvatura della parabola.
L'evoluta della parabola

Abbiamo già ricavato, in forma parametrica le coordinate dei centri di curvatura, per una qualsiasi: $y = f(x)$. esse rappresentano l'equazione parametrica dell'evoluta

$$\begin{cases} x_c = x - f'_{(x)} \dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{(x)}} \\ y_c = f_{(x)} + \dfrac{1 + f'^2_{(x)}}{f''_{x}} \end{cases}$$

per la parabola diventano:

$$x_c = x - 2mx \frac{1 + (2mx)^2}{2m} = x\left(1 - 1 - (2mx)^2\right) = -x(2mx)^2$$

$$y_c = mx^2 + \frac{1 + (2mx)^2}{2m} = x^2\left(\frac{2m^2 + 4m^2 + 1}{2m}\right) = 3mx^2 + \frac{1}{2m} = 3y + \frac{1}{2m}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= -4m^2x^3 \\ y_c &= 3mx^2 + \frac{1}{2m} \end{aligned}} \qquad x_c = \frac{-x^3}{4a^2} \qquad \boxed{\frac{x_c}{2a} = \left(\frac{x}{2a}\right)^3}$$

$$y_c = \frac{3x^2}{4a} + 2a \qquad \boxed{\frac{y_c}{2a} = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + 1}$$

Ricaviamo $x = (4a^2x_c)^{\frac{1}{3}} = \left((y_c - 2a)\frac{4a}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ elevando alla 2ª.

$$(4^2a^4x_c^2)^{1/3} = y_c\frac{4a}{3} - \frac{8a^2}{3} \qquad y_c = \left(\sqrt[3]{16a^4x_c^2}\right)\left(\frac{3}{4a}\right) + 2a$$

$$y_c = \sqrt{8a^3 \cdot 2a \cdot x_c^2 \cdot \frac{27}{64a^3}} + 2a = 3\sqrt[3]{\frac{a x_c^2}{4}} + 2a$$

$$\boxed{y_c = 3\left(\frac{a x_c^2}{4}\right)^{1/3} + 2a}$$

equaz. dell'evoluta in forma esplicita

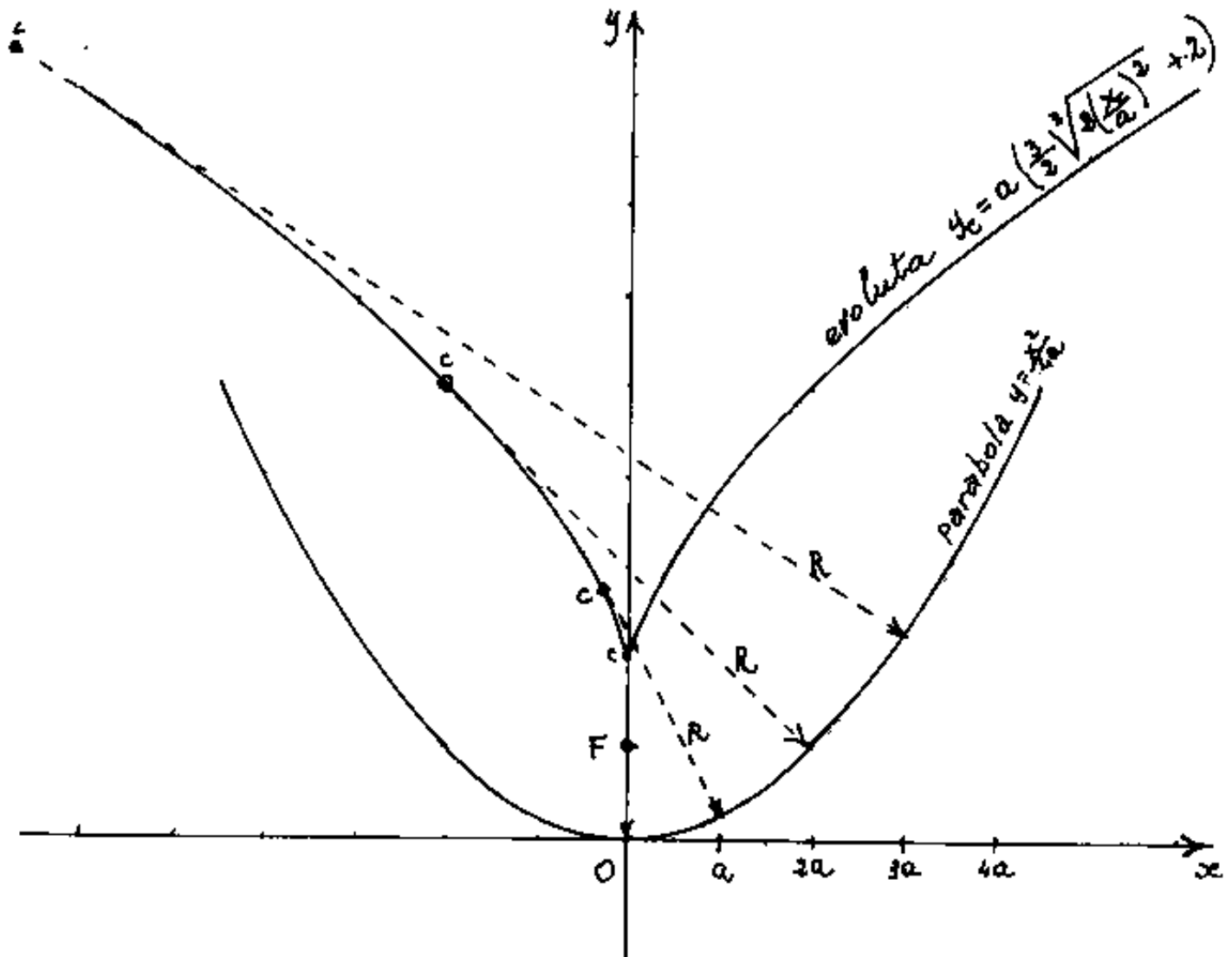
modulare:

$$\boxed{\left(\frac{y_c}{a}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2\left(\frac{x_c}{a}\right)^2} + 2}$$

evoluta

Grafico dell'evoluta della parabola

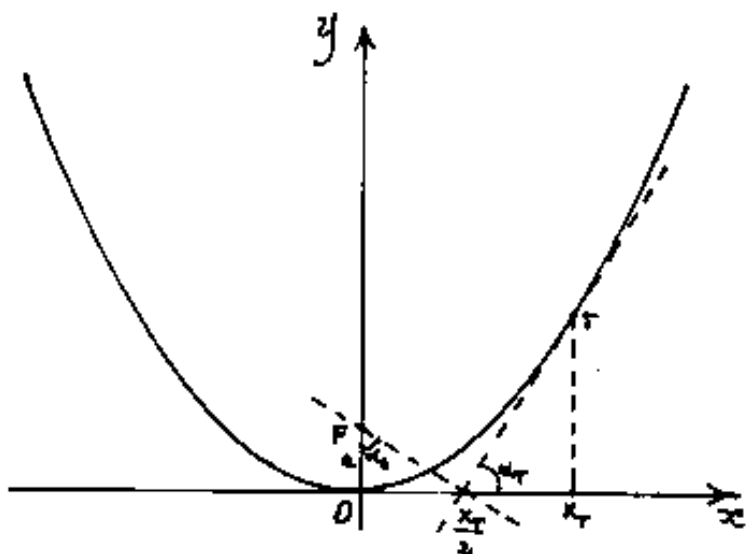
Dalle formule scritte, possiamo calcolare una tabella:

$x_c =$	0	$a/4$	$a/2$	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$
$y_c =$	$2a$	$2{,}75a$	$3{,}19a$	$3{,}89a$	$5a$	$5{,}93a$	$6{,}76a$	$7{,}53a$	$8{,}24a$

Notiamo che l'evoluta (luogo dei centri di curva-

notiamo che l'evoluta (luogo dei centri di curvatura, non possa avere ordinate $y<0$ perché: $x^2>0$.

L'evoluta della parabola presenta una cuspide per $x_c=0$; $y_c=2a$. La variabile: $x_c^{2/3}$ con esponente $2/3$ implica che per $x_c \to 0$ la cuspide abbia tangenti verticali, mentre per $x_c \to \infty$ anche $y_c \to \infty$, ma con tangente orizzontale. (Si confronti l'evoluta dell'ellisse)

Proprietà focali della parabola

1) Data una retta tangente alla parabola, la normale ad essa dal punto comune con le ascisse, incontra l'asse y nel fuoco.

Infatti: $y = x^2/4a$; $y' = x/2a$ ricordando che la retta tangente incontra l'asse x nel punto: $\frac{x_T}{2}$; dalla $y' = \frac{x}{2a} = tg(\alpha_T)$ avremo: $a = \frac{x}{2} \frac{1}{tg\,\alpha_T}$ (vedi figura)

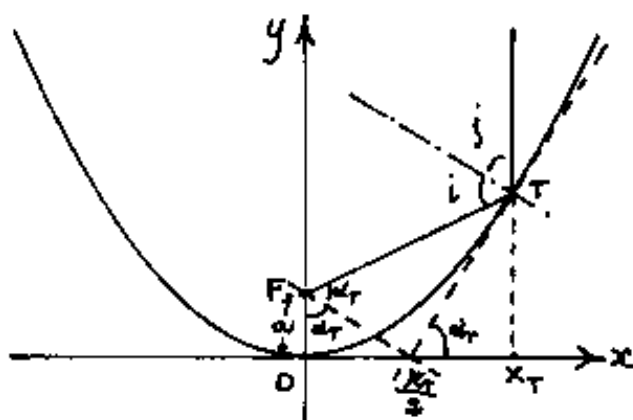
La podaria

Dicesi Podaria di una curva Γ rispetto ad un punto Q; il luogo dei "piedi" delle normali tracciate dal punto Q alle tangenti di Γ. (Per piedi si intendono i punti ove le normali incontrano le tangenti,

intendono i punti ove le normali incontrano le tangenti, cioè i vertici retti.)

Per la proprietà sopra dimostrata, <u>la podoria di una parabola, rispetto al fuoco</u> (vedi figura) <u>è l'asse delle ascisse</u>. (<u>retta tangente nel vertice</u>)

(Cioè se da F si tira una perpendicolare ad una tangente qualsiasi della parabola, la incontrerà sull'asse x.)

2) Per ciascun punto della parabola, la normale biseca l'angolo formato dalla parallela all'asse per quel punto, e dalla congiungente il fuoco.

Dobbiamo dimostrare: $i = j$

$(90° - j) = (90° - \alpha_T)$ (opposti al vertice in T)

perciò: $\alpha_T = j$

$y_T : \frac{x_T}{2} = tg(\alpha) = \frac{x_T}{2} : a$

I triangoli: $FO\frac{x_T}{2}$ e $\frac{x_T}{2}x_T T$ sono simili con rapporto di similitudine: $tg(\alpha) = \overline{\frac{x_T}{2}T} : \overline{F\frac{x_T}{2}}$; perciò anche il triangolo $F\frac{x_T}{2}T$ è simile e l'angolo: $T\hat{F}\frac{x_T}{2} = \alpha$ quindi $F\hat{T}\frac{x}{2} = (90° - i)$ $F\hat{T}\frac{x}{2} = (90° - \alpha)$ perciò: $\alpha = i$ ed è dimostrato: $i = j$

Questa propretà è notevole, perché se consideriamo speculare internamente il paraboloide ottenuto facendo ruotare la parabola intorno al suo asse; i raggi paralleli all'asse provenienti dall'esterno convergeranno in F. Sono stati costruiti paraboloidi a specchi per fondere i metalli uti-

lizzando raggi solari. Inversamente una sorgente lumi=
nosa nel fuoco proietterà a fascio la sua luce (come i
fari delle macchine) Paraboloidi sono anche utilizzati come
antenne di onde elettromagnetiche, oppure come concentrato-
ri di suoni per individuare la posizione di un aereo in volo.

La parabola come sezione di un piano con un cono

Si abbia un cono di apertura 2α, e sia tagliato con un piano parallelo ad una generatrice, di traccia V_pB, sia V_c il vertice del cono, in V_p la prima generatrice tagliata. Sia $\overline{V_cV_p} = d$ la distanza dal vertice.

L'altezza del cono $h = (d + \overline{V_pB})\cos(\alpha)$ e considerando variabile $\overline{V_pB} = y$ avremo $h = (d+y)\cos\alpha$.; ed anche $\overline{CB} = (y-d)\operatorname{sen}\alpha$; (per comodità è ribaltata in figura la semibase del cono); $R = h\operatorname{tang}(\alpha) = (d+y)\operatorname{sen}\alpha$; $\overline{BD} = x$; ove $x^2 = (R^2 - \overline{BC}^2) = (d+y)^2\operatorname{sen}^2\alpha - (y-d)^2\operatorname{sen}^2\alpha = 4dy\operatorname{sen}^2\alpha$.

$\overline{HV_p} = d\operatorname{sen}\alpha$; $\overline{FV_p} = a = \overline{HV_p}\operatorname{sen}\alpha = d\operatorname{sen}^2\alpha$; $4ay = x^2$

$$y = \frac{x^2}{4a}$$

che è l'equazione di una parabola di vertice V_p; fuoco F e modulo 4a. Si noti che $\boxed{d = a/\sin^2\alpha}$

Pensiamo di far ruotare la traccia del piano intorno a V_p, iniziando dalla posizione $\overline{V_pH}$ la cui sezione è un cerchio, lasciato il cerchio si hanno ellissi (ἐλλείπειν = lasciare) finché uguaglia la pendenza della generatrice e si ha una parabola (παραβάλλειν = uguagliare) poi l'iperbole (ὑπερβάλλειν = sorpassare).

La parabola in coordinate polari

Sostituendo, nell'equazione della parabola: $y = \frac{x^2}{4a}$

$y = \rho \operatorname{sen}\theta$; $x = \rho \cos\theta$; si ha: $\frac{\rho^2 \cos^2\theta}{4a} = \rho \operatorname{sen}\theta$

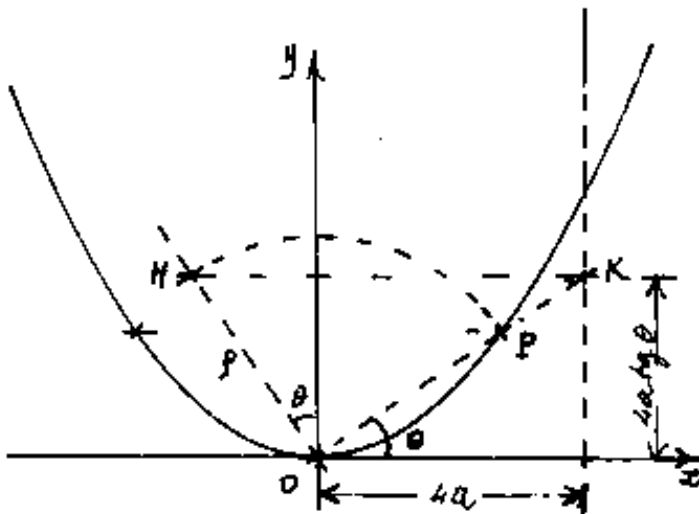
esplicitando ρ si ha:

$$\rho = \frac{4a\, tg(\theta)}{\cos(\theta)}$$

equaz. della parabola in polari.

$$\begin{cases} x = 4a\, tg(\theta) \\ y = 4a\, tg^2(\theta) \end{cases}$$

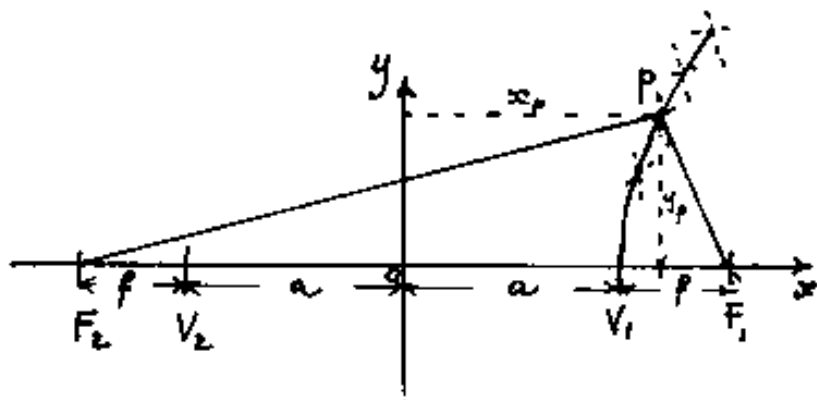
coordinate parametriche

Una costruzione grafica della parabola per coordinate polari.

Tracciati gli assi, si disegni la retta $y = 4a$ (parallela alle ordinate), quindi dall'origine "o" si tracci un qualsiasi raggio inclinato di θ sulle ascisse e la sua perpendicolare. Il raggio inclinato di θ incontrerà in K la retta: $y = 4a$, e l'ordinata di K

sarà: $(4a)tg(\theta)$; da K si tiri una parallela alle axcisse, fino ad incontrare in H la perpendicolare al raggio, avremo: $\overline{OH} = \frac{4a\,tg\theta}{\cos\theta} = \rho$ è il modulo in polari che riportato sul raggio inclinato di θ, dà in P un punto della parabola. $(\overline{OP} = \overline{OH} = \rho)$.

L'Iperbole

"L'iperbole è il luogo geometrico dei punti per i quali la differenza delle distanze da due punti detti fuochi è costante."

Siano F_1 ed F_2 i fuochi che prenderemo sull'asse x, simmetrici rispetto ad y. Vi saranno due punti, pure sull'asse x, che appartengono all'iperbole, indichiamoli con V_1 e V_2, necessariamente simmetrici rispetto ad y. Infatti, applicando la definizione dell'iperbole come luogo geometrico si ha:

$$\overline{F_2V_1} - \overline{F_1V_1} = \text{cost} = \overline{F_1V_2} - \overline{F_2V_2}$$

Indichiamo con $2a = \overline{V_1V_2}$; e con $f = \overline{F_1V_1} = \overline{F_2V_2}$ avremo:

$$\overline{F_2V_1} = \overline{F_2V_2} + \overline{V_2V_1} = (f+2a) = \overline{F_1V_2} \qquad \text{cioè: } \overline{F_2V_1} - \overline{F_1V_1} = \overline{F_1V_2} - \overline{F_2V_2} = (\cancel{f}+2a) - \cancel{f}$$

cioè la costante è $2a = cost.$

Individuata la costante $= 2a$, cioè dati F_1 ed F_2 e quindi V_1 e V_1, si può costruire l'iperbole per punti, prendendo un arco di cerchio di centro F_2 e raggio: $r_2 > (2a+f)$, quindi con centro in F_1 e raggio: $(r_1 = r_2 - 2a)$ si trova un punto della iperbole come punto comune ai due archi.

Consideriamo un generico punto P, ove: $\overline{F_2P} - \overline{F_1P} = 2a$;

$\overline{F_2P} = \sqrt{((a+f)+x_p)^2+y_p^2}$; $\overline{F_1P} = \sqrt{(-x_p+(a+f))^2+y_p^2}$ sostituendo,

isolando una radice ed elevando a quadrato si ha:

$$(a+f)^2+(x_p)^2+2x_p(a+f)+y_p^2 = x_p^2+(a+f)^2-2x_p(a+f)+y_p^2+(2a)^2+4a\sqrt{(-x_p+(a+f))^2+y_p^2}$$

$$4x_p(a+f)-4a^2 = 4a\sqrt{(-x_p+(a+f))^2+y_p^2}$$

elevando, di nuovo, a quadrato:

$$x_p^2(a+f)^2+a^4-2a^2x_p(a+f) = x_p^2+(a+f)^2a^2-2a^2x_p(a+f)+a^2y_p^2$$

$$x_p^2a^2+x_p^2f^2+2x_p^2af+a^4 = x_p^2a^2+a^4+a^2f^2+2a^3f+a^2y_p^2$$

$$x_p^2(f+2a)f = a^2(f+2a)f+a^2y_p^2$$

dividendo per: $a^2(f+2a)f$ e portando.

$$\frac{x_p^2}{a^2}-\frac{y_p^2}{(2a+f)f} = 1$$

poniamo: $b^2 = 2af+f^2$

$$\boxed{\frac{x_p^2}{a^2}-\frac{y_p^2}{b^2} = 1}$$

abbiamo l'equazione dell'iperbole.

Vogliamo ora risolvere f dalla: $f^2+2af-b^2$ abbiamo:

$$f = -a+\sqrt{a^2+b^2}$$

ma: $\sqrt{a^2+b^2} = d$ è la diagonale di un rettangolo

$f=(d-a)$. Data l'analogia con la formula dell'ellisse, si può costruire l'ellisse e l'iperbole sugli stessi parametri "a" e "b". Si noti che: $d=(a+f)$.

Quindi disegnato il rettangolo in centro assi simmetrico di lati 2a e 2b, resta da dimostrare che le rette sulle diagonali sono asintoti dell'iperbole.

Gli asintoti dell'iperbole

Esplicitando y si ha: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

derivando:

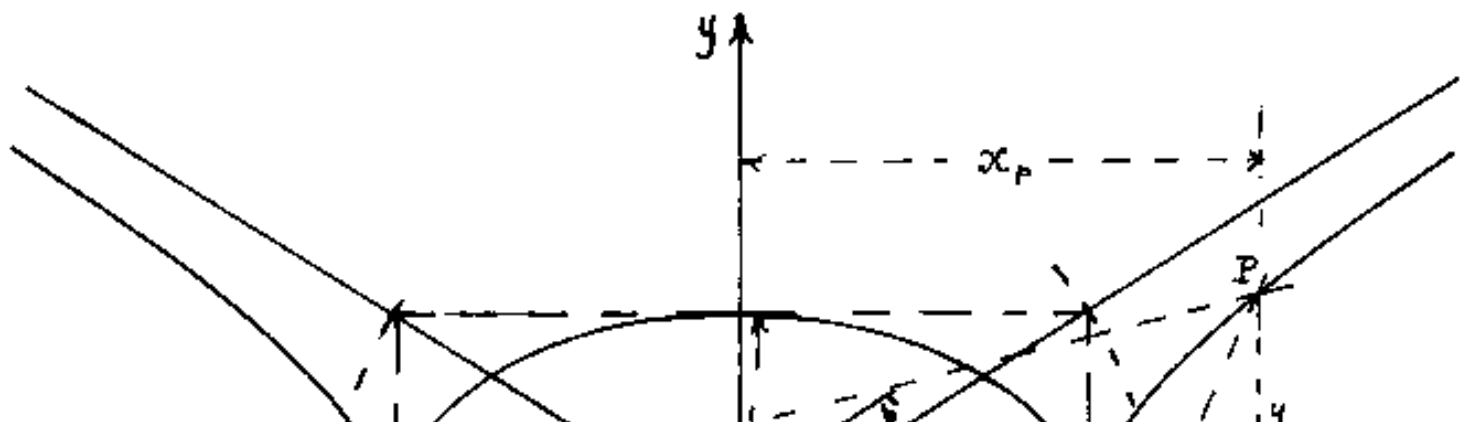
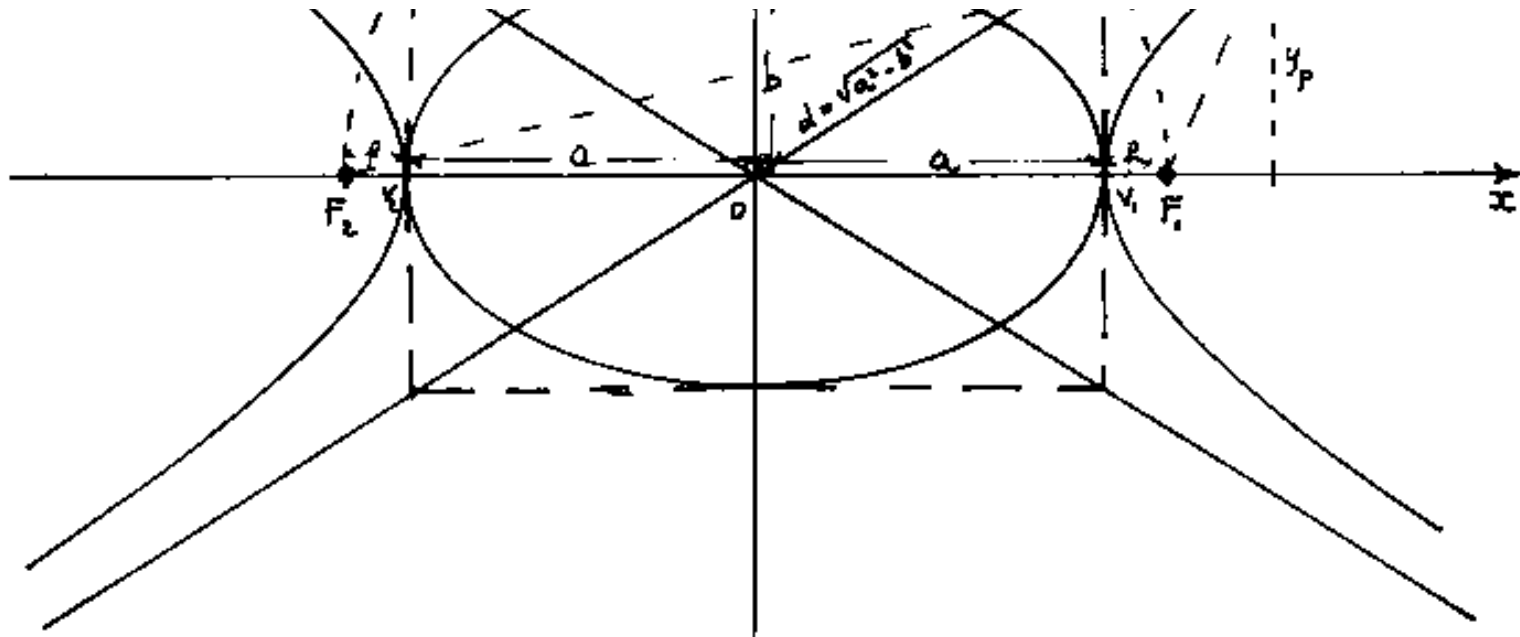
$$y' = \frac{b}{a}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right)$$

può scriversi:

$$y' = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}\right)$$

$\lim_{x \to \infty} (y') = \pm\left(\frac{b}{a}\right) =$ e poiché: $q = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right)$

risulta $q = 0$, avremo che l'equazione degli asintoti è: $y = \pm\frac{b}{a}x$

che è l'equazione delle rette passanti per le diagonali del nostro rettangolo.

L'equazione dell'iperbole in coordinate polari

Dalla: $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 \rho^2 \cos^2\theta - \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot a^2 = a^2 b^2$$

$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta - a^2\operatorname{sen}^2\theta}}$$

equazione dell'iperbole in coordinate polari esplicitata in ρ.

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{b^2}$$

Le forme di equazione, salvo il segno, sono analoghe a quelle dell'ellisse.

$$b^2(1-\operatorname{sen}^2\theta) - a^2\operatorname{sen}^2\theta = \frac{a^2b^2}{\rho^2} \Rightarrow (b^2+a^2)\operatorname{sen}^2\theta = \left(b^2 - \frac{a^2b^2}{\rho^2}\right)$$

posto: $d = \sqrt{a^2+b^2}$ si ha:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{b}{\rho d}\sqrt{\rho^2 - a^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\rho d}\sqrt{\rho^2 + b^2}$$

equazioni in coordinate polari dell'iperbole risolte rispetto a funzio

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + b^2}}$$

...ni dell'argomento θ

Qualora $a = b = R$ si ha l'iperbole equilatera:

$$x^2 - y^2 = R^2$$

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$$

$$\cos(2\theta) = \frac{R^2}{\rho^2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\rho^2 - R^2}{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\rho^2 + R^2}{2}}$$

Le derivate nell'iperbole

Supponiamo di volere che sia definito il punto in cui deriviamo. La: $y' = \frac{b x}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$, per il doppio segno della radice, fornisce due valori; quindi la derivata occorre scriverla nella forma:

$$y' = \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$

ove il segno della derivata dipende dai segni di x e di y; cioè dalle coordinate che definiscono il punto in cui si deriva.

Si noti la forma: $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$ essa è valida per 4 punti: $(\pm x); (\pm y)$, però è impossibile distinguerli.

E' opportuno che le espressioni algebriche siano poste in forme non equivocabili

Calcoliamo la derivata seconda

$$y'' = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{(x^2 - a^2)} = \frac{b}{a} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{(x^2 - a^2)^{3/2}} = \boxed{y'' = \frac{-ab}{(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2}}}$$

poiché: $\left(\sqrt{x^2-a^2} = \frac{ay}{b}\right)$; $\quad y'' = \frac{-ab}{\left(\frac{ay}{b}\right)^3}$

$$\boxed{y'' = \frac{-b^4}{a^2 y^3}}$$

Il segno della derivata seconda dipende solo dal segno della y. (si ha concavità verso il basso per $y>0$, viceversa per $y<0$)

Però è valida per due valori di x di segno opposto. $\boxed{y'' = \frac{-b^2}{y(x^2-a^2)}}$

non risolve l'indeterminazione del segno della x.

Equazioni delle tangenti all'iperbole

1) Se è noto il punto di tangenza $T \equiv (x_T, y_T)$

si ha:

$$\frac{(y - y_T)}{(x - x_T)} = y'_T = \frac{b}{a}\frac{x_T}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}$$

allo scopo di evitare la radice poniamo:

$$y'_T = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_T}{y_T}$$ (vedi pag prec)

avremo:

$$y = \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_T}{y_T}\right] x + \left[y_T - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_T^2}{y_T}\right]$$

equazione in forma esplicita della tangente in T all'iperbole.

$$\frac{\left(\frac{x_T}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x_T^2}{a^2} - \frac{y_T^2}{b^2}\right)} + \frac{\left(\frac{y_T}{b}\right)\left(\frac{y}{b}\right)}{\frac{y_T^2}{b^2} - \frac{x_T^2}{a^2}} = 1$$

$$\left(\frac{x_T}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{y_T}{b}\right)\left(\frac{y}{b}\right) = \left(\frac{x_T}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_T}{b}\right)^2$$ (modulare)

In quanto il secondo membro è la verifica che: $\left(\frac{x_T^2}{a^2} - \frac{y_T^2}{b^2}\right) = 1$

ed essendo T sull'iperbole, l'equazione diventa:

$$\frac{x}{a^2/x_T} + \frac{y}{-b^2/y_T} = 1$$ forma segmentaria

$$\frac{x}{a^2/x_T} + \frac{y}{-b^2/y_T} = 1$$ forma segmentaria

$$y = \left(\frac{x_T}{a^2}\right)\left(\frac{b^2}{y_T}\right)x - \frac{b^2}{y_T}$$ forma esplicita

$$y = \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{x_T}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}\right)x - \frac{ab}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}$$ (espressione in x_T) che, dato il doppio segno della radice rende ambiguo decidere quale retta è quella che ci interessa come tangente.

2) Se il punto noto $Q \equiv (x_Q ; y_Q)$, per il quale si tracciano le tangenti all'iperbole, è esterno alla curva, detta x_T l'ascissa del punto di tangenza si ha:

$$\frac{y_T - y_Q}{x_T - x_Q} = y'_T = \frac{b}{a} \frac{x_T}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}$$

$$\frac{a}{b}\left(\sqrt{x_T^2 - a^2}\right)\left(\frac{b}{a}\sqrt{x_T^2 - a^2} - y_Q\right) = x_T^2 - x_Q x_T$$

$$x_T^2 - a^2 - \left(\frac{a}{b}\sqrt{x_T^2 - a^2}\right) y_Q = x_T^2 - x_Q x_T$$

$$x_Q^2 x_T^2 + a^4 - 2a^2 x_Q x_T = \frac{b^2}{a^2}\left(x_T^2 - a^2\right) y_Q^2$$

$$\left(\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2}\right) x_T^2 - 2 x_Q x_T + a^2\left(\frac{y_Q^2}{b^2} + 1\right) = 0$$

$$x_T = \frac{x_Q \pm \sqrt{x_Q^2 - a^2\left(1 + \frac{y_Q^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2}\right)}}{\left(\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2}\right)}$$

$$\boxed{\frac{x_T}{a} = \frac{\frac{x_Q}{a} \pm \frac{y_Q}{b}\sqrt{1 - \left(\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2}\right)}}{\left(\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2}\right)}}$$ (modulare)

Per la realtà di x_T deve essere: $\left(\frac{x_Q}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_Q}{b}\right)^2 < 1$.

Se fosse $\left(\frac{x_Q}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_Q}{b}\right)^2 = 1$, si avrebbe $x_T = x_Q$, cioè il punto

Se fosse $\left(\frac{x_Q}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_Q}{b}\right)^2 = 1$, si avrebbe $x_T = x_Q$, cioè il punto esterno Q si è avvicinato all'iperbole tanto da sovrapporvisi.

Se $\left(\frac{x_Q}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_Q}{b}\right)^2 > 1$ il punto Q sarebbe nello spazio delimitato da un ramo dell'iperbole e di lì è impossibile far passare tangenti all'iperbole.

Noto x_T si sostituisce e l'equazione della tangente diventa:

$$y = \left(\frac{b}{a} \frac{x_T}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}\right) x - \left(\frac{ab}{\sqrt{x_T^2 - a^2}}\right)$$

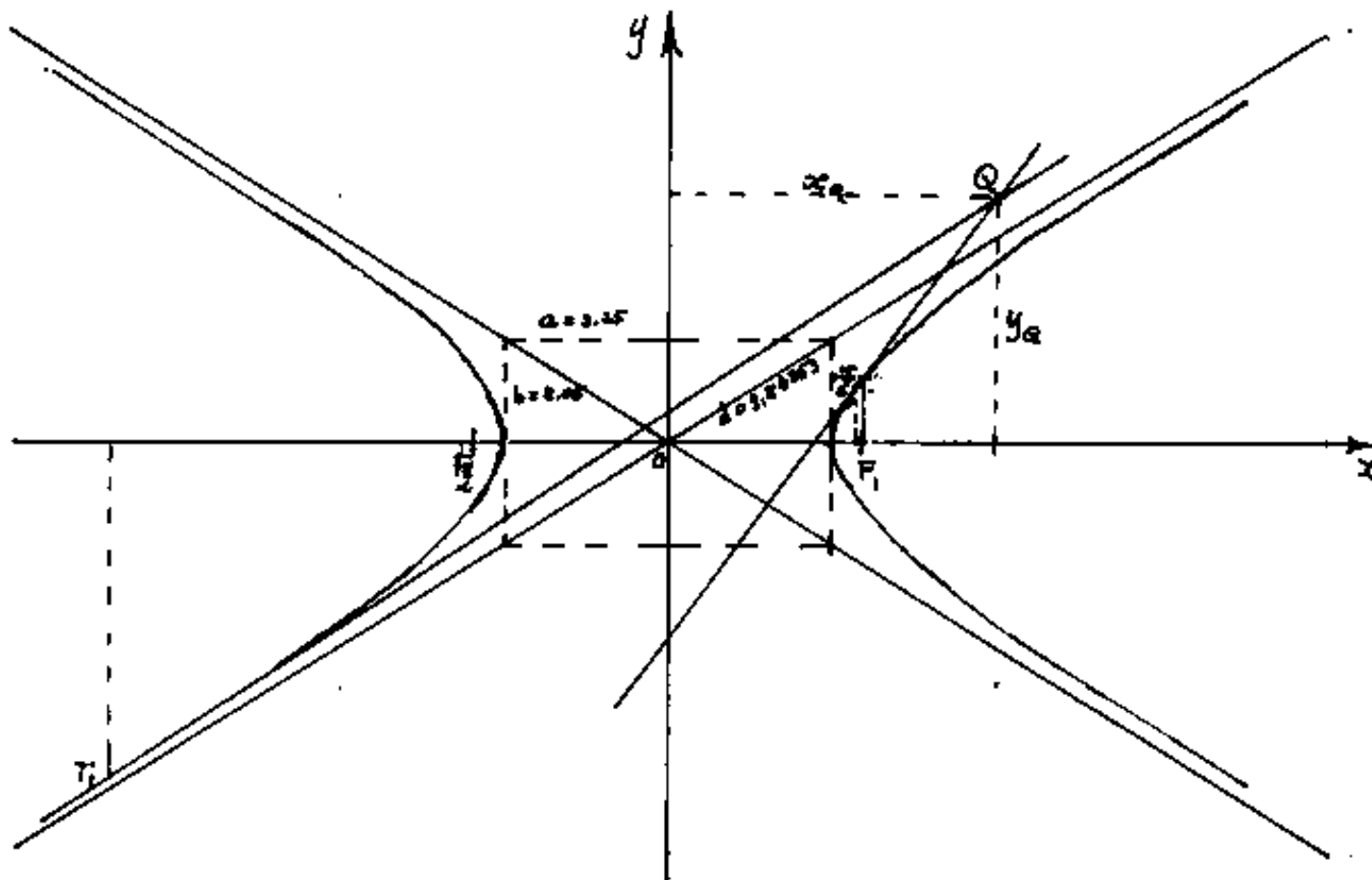
ed in forma segmentaria: $\boxed{\dfrac{x}{a^2/x_T} - \dfrac{y}{b^2/y_T} = 1}$

formule già note nel caso 1).

Esempio numerico

siano: $a = 2,25$; $b = 2,05$; per cui $d = \sqrt{a^2+b^2} = 3,04253$.

$x_Q = 6,50$; $y_Q = 4,92$; $\left(\dfrac{x_Q}{a}\right) = 2$; $\left(\dfrac{y_Q}{b}\right) = 2,4$;

$$\left(\frac{x_Q}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_Q}{b}\right)^2 = 4 - 5,76 = -1,76$$

$= -3,40181 \supset x_T = -11,05587$

$$\left(\frac{x_T}{a}\right) = \frac{2 \pm \left(\sqrt{2,76}\right) 2,4}{-1,76} = \begin{cases} = -3,40181 \Rightarrow x_{T_1} = -11,05587 \\ = 1,12908 \Rightarrow x_{T_2} = 3,66951 \end{cases}$$

equazione della retta tangente in T_1 : $y = (0,65993)x + 0,63048$

" " " " in T_2 : $y = (1,35853)x - 3,91046$

L'equazione della normale all'iperbole.

Nel punto T, l'equazione della normale:

$$\left(\frac{y - y_T}{x - x_T}\right) = \left(\frac{-1}{y'_T}\right)$$

che per l'iperbole, in funzione della sola (x_T) diventa:

$$\frac{y - \frac{b}{a}\sqrt{x_T^2 - a^2}}{(x - x_T)} = -\frac{a}{b}\frac{\sqrt{x_T^2 - a^2}}{x_T}$$

peró volendo eliminare le radici:

$$\frac{y - y_T}{x - x_T} = -\frac{y_T}{x_T}\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

che in forma esplicita diventa:

$$y = -\left(\frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{y_T}{x_T}\right)x + y_T\left(\frac{b^2 + a^2}{b^2}\right)$$

si puó scrivere:

$$\frac{y}{y_T}\left(\frac{b^2}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{-a^2}{a^2 + b^2}\right)\frac{x}{x_T} + 1$$

cioé in forma segmentaria : (posto $(a^2 + b^2) = d^2$)

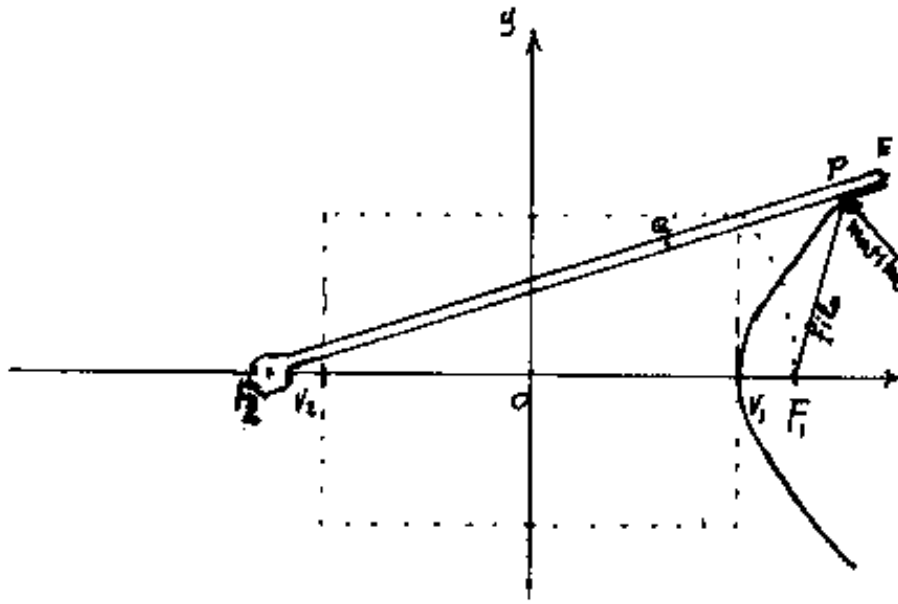
$$\frac{X}{(X_T\, d^2/a^2)} + \frac{y}{(y_T\, d^2/b^2)} = 1$$

= equazione della normale in forma segmentaria

Costruzione grafica

Si traccia $y = d$; su y_T; $\overline{x_T A} = a$, unito $\overline{OA}$ si trova D_1 da D_1 la parallela ad y fino ad A_1; $\overline{OA_1}$ trova D_2 ed N ove $\overline{NT}$ è la normale in T.

L'iperbole tracciata con segno continuo.

Siano F_1 ed F_2 i fuochi dell'iperbole da disegnare e sia $2a$ la distanza fra i due vertici, (avremo: $f = \frac{1}{2}(\overline{F_1F_2} - 2a)$; $b = \sqrt{(f+a)^2 - a^2}$), sia O il centro assi. Si prenda un regolo abbastanza lungo e se ne fissi l'estremo in F_2, in modo che possa ruotare intorno ad F_2. Si segni sul regolo il punto "Q", tale che, la distanza $\overline{F_2Q} = 2a$. Si prenda un filo lungo quanto è il regolo da Q all'altro estremo "F", si fissa un capo in tale estremo; e l'altro capo in F_1 con la matita si tiene il filo aderente al regolo, che si fa ruotare intorno ad F_2 la matita traccerà un ramo di iperbole. Se invece fissiamo il regolo in F_1 tracceremo=

[illegible] Se invece giriamo il regolo in F_1 traccia-
mo il ramo d'iperbole da banda opposta.

Il funzionamento è ovvio: se P è il punto in cui in un certo istante si trova la matita, dovrà essere: $\overline{F_2P} - F_1P = 2a$. Ma $\overline{F_2P} = \overline{F_2Q} + \overline{QP} = 2a + \overline{F_1P}$, essendo $F_1P = \overline{QP}$ perché a $\overline{QE}$ = lunghezza del filo è stato tolto $\overline{EP}$. (Si noti che il bordo del regolo taglia F_2).

I raggi di curvatura dell'iperbole

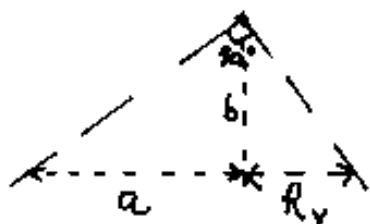
$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1 + \frac{b^2x^2}{a^2(x^2-a^2)}\right)^{3/2}}{\frac{-ab}{(x^2-a^2)^{3/2}}} = \frac{-\left((x^2-a^2) + \frac{b^2x^2}{a^2}\right)^{3/2}}{(ab)} =$$

$$R = \frac{-(a^2x^2 - a^4 + b^2x^2)^{3/2}}{a^4 b} = \qquad \boxed{R = \frac{(a^4 - x^2d^2)^{3/2}}{a^4 b}}$$

$$R = \frac{-\left(y^2\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2}\right)^{3/2}}{ab} = \qquad \boxed{R = -\frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}}$$

per: $(x = a) \rightarrow$ raggio nel vertice $= R_v = \frac{a^3b^3}{a^4 b} = \boxed{R_v = \frac{b^2}{a}}$

Il modulo b è medio proporzionale fra il modulo "a" ed il raggio di curvatura nel vertice:

b
a
R_v

Il risultato algebrico implica la costruzione grafica a fianco.

Anche per l'iperbole l'ordinata del fuoco è il raggio di curvatura nel vertice. Infatti: $y_f = \frac{b}{a}\sqrt{x_f^2 - a^2}$ cioè, essendo: $x_f^2 = (a^2+b^2)$ avremo: $y_f = \frac{b^2}{a}$ C.V.D.

È assai rapida la variazione di R al variare di x, infatti: $\frac{dR}{dx} = -\frac{1}{a^4 b}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x^2 d^2 - a^4}\right) 2 x d^2 =$

$$\frac{dR}{dx} = -3\,\frac{a^2+b^2}{a^4 b}\,x\sqrt{x^2(a^2+b^2)-a^4}$$ ove per $x = a$ si ha

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)_a = -3\,\frac{a^2+b^2}{a^4 b}\,a\sqrt{a^4-a^2b^2-a^4} = -3\,\frac{(a^2+b^2)}{a^2} = \boxed{-3\,\frac{d^2}{a^2}}$$

$\left(\frac{dR}{dx}\right)_a = -3\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$. Per l'iperbole equilatera $\left(\frac{dR}{dx}\right)_R = -6$; $(b=a)$.

I centri di curvatura dell'iperbole.

Ricordiamo che le coordinate dei centri di curvatura del grafico di una funzione $y = f(x)$ sono:

$$y_c = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

$$x_c = x + \left(-y' \frac{1 + y'^2}{y''} \right)$$

calcoliamo: $\frac{1+y'^2}{y''}$ per l'iperbole:

$$y' = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad ; \quad y'' = \frac{-ab}{(x^2-a^2)^{3/2}}$$

conviene la forma:

$$y' = \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} \quad ; \quad y'' = \frac{-b^4}{a^2 y^3}$$

$$\frac{1+y'^2}{y''} = \left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} \right) \left(\frac{a^2 y^3}{-b^4} \right) = \left(\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{-a^2 b^4} \right) y =$$

$$\boxed{\left(\frac{1+y'^2}{y''} \right) = -\left(\frac{a^2 y^3}{b^4} + \frac{y x^2}{a^2} \right)}$$

da cui:

$$y_c = \left(y - \frac{y x^2}{a^2} - \frac{a^2 y^3}{b^4} \right) = \left(y \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2} \right) - \frac{a^2 y^3}{b^4} \right) = \left(-\frac{y^3}{b^2} - \frac{a^2}{b^4} y^3 \right)$$

$$y_e = -y^3\left(\frac{a^2+b^2}{b^4}\right); \quad \boxed{y_e = -\frac{y^3 d^2}{b^4}} \qquad \boxed{y = -\sqrt[3]{y_e \frac{b^4}{d^2}}}$$

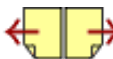
$$x_e = x + \left(\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\right)\left(\frac{a^2y^3}{b^4}+\frac{yx^2}{a^2}\right) = x + \left(-\frac{xy^2}{b^2}+\frac{b^2x^3}{a^4}\right) = x + x\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}+\frac{b^2x^2}{a^4}\right)$$

$$x_e = x\left(1+\frac{a^2x^2-a^4+b^2x^2}{a^4}\right) = x\left(1+\frac{d^2x^2}{a^4}-1\right); \quad \boxed{x_e = \frac{d^2}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^3}$$

cioè:

$$\boxed{\begin{aligned}(x_e/a) &= (d/a)(x/a)^3\\ (y_e/b) &= (d^2/b)(y/b)^3\end{aligned}}$$

da cui:

$$\boxed{\begin{aligned}(x/a)^2 &= \left[a^2/d^2\,(x_e/a)\right]^{2/3}\\ (y/b)^2 &= \left[b^2/d^2\,(y_e/b)\right]^{2/3}\end{aligned}}$$

Evoluta dell'iperbole (luogo dei centri di curvatura)

Sostituendo nell'equazione dell'iperbole i valori di $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ e $\left(\frac{y}{b}\right)^2$ in funzione di x_c ed y_c, si ha:

$$\left[\frac{a^2}{d^2}\left(\frac{x_c}{a}\right)\right]^{2/3} - \left[\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{y_c}{b}\right)\right]^{2/3} = 1$$

$$(a x_c)^{2/3} - (b y_c)^{2/3} = d^{4/3}$$

in forma implicita

é l'equazione dell'evoluta dell'iperbole.

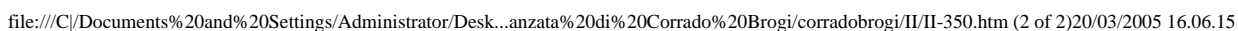
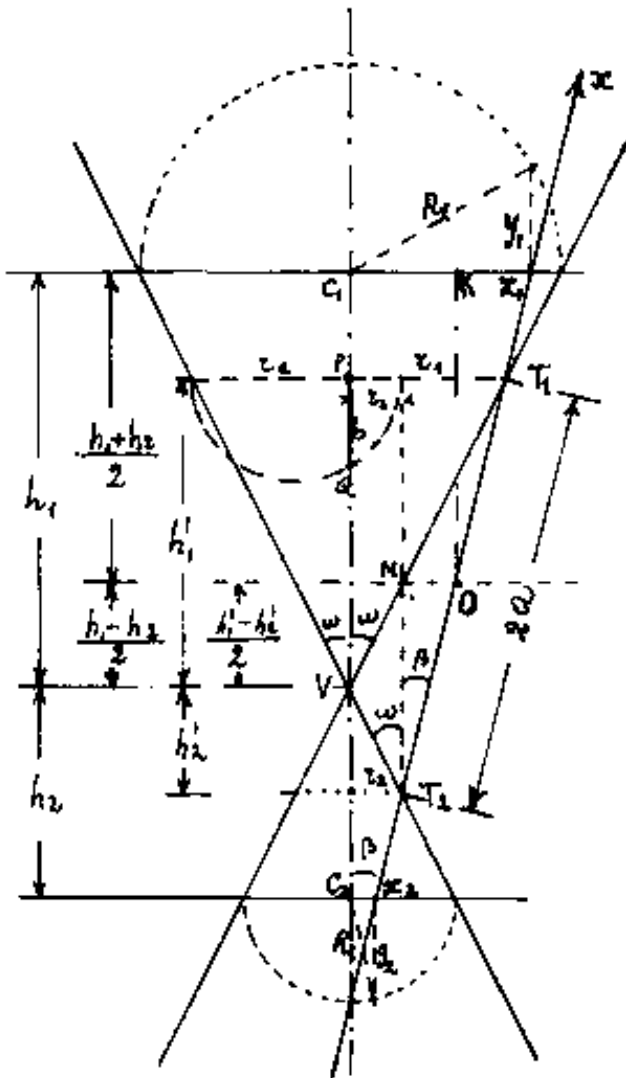
esplicitando la y:

$$y_c = \frac{1}{b}\left((a x_c)^{2/3} - d^{4/3}\right)^{3/2}$$

in forma esplicita

od anche:

$$y_c = \left[\left(\frac{a}{b}x_c\right)^{2/3} - \left(\frac{d^2}{b}\right)^{2/3}\right]^{3/2}$$

Notare che il raggio di curvatura dell'iperbole è normale all'iperbole e tangente all'evoluta.

L'Iperbole come intersezione di un piano con un cono

Sia 2ω l'angolo di apertura del cono, sia $\overline{T_1T_2} = 2a$ il segmento di traccia del piano di sezione, che rimane esterno al cono, sia β l'angolo di inclinazione dell'asse del cono sul piano di sezione.

Si assume la traccia del piano di sezione come asse x, con origine in O, punto medio fra T_1 e T_2. Sia "y" normale ad x, nel piano di sezione (Nel disegno l'asse y si proietta in O). Assunta una ascissa generica: $+x = \overline{Ox_1}$; $-x = Ox_2$, con $|\overline{Ox_1}| = |\overline{Ox_2}|$; ribaltando le sezioni rette del cono (cerchi di raggio R_1, R_2), individuiamo y_1 e y_2 (che dimostreremo essere uguali fra loro).

s_1 e s_2 (che dimostreremo essere uguali fra loro).

Possiamo scrivere: (vedi figura)

$$\begin{cases} 2a \cdot \cos(\beta) \cdot \tan g(\omega) = (r_1 + r_2) \\ 2a \ \operatorname{sen}(\beta) = (r_1 - r_2) \end{cases}$$

$$a \cos\beta \operatorname{tg}\omega = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

$$a \operatorname{sen}\beta = \frac{r_1 - r_2}{2}$$

Perciò si noti che qualunque siano h_1 ed h_2, purché indicanti distanze dal vertice V, di sezioni equidistanti da "O", avremo che il punto medio è determinato da $\frac{h_1 + h_2}{2}$, e

se da questa sottraiamo h_2, avremo: $\frac{h_1+h_2}{2} - h_2 = \frac{h_1-h_2}{2}$,

ma: $\frac{h_1-h_2}{2} = \frac{h_1'-h_2'}{2}$, e poiché: $R_1 = h_1 \operatorname{tang}(\omega)$; $r_1 = h_1' \operatorname{tg}(\omega)$,

avremo che: $$\boxed{\frac{r_1-r_2}{2} = \frac{R_1-R_2}{2} = a \operatorname{sen}(\beta).}$$

$$\boxed{\frac{R_1+R_2}{2}} = \left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)\operatorname{tang}(\omega) = (OK)\operatorname{tang}(\omega) = \boxed{x \cdot \cos(\beta)\operatorname{tg}(\omega)}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni abbiamo:

$$\begin{cases} R_1 = x\cos\beta\operatorname{tg}(\omega) + a\operatorname{sen}\beta \\ R_2 = x\cos\beta\operatorname{tg}\omega - a\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 = a\cos\beta\operatorname{tg}\omega + a\operatorname{sen}\beta \\ r_2 = a\cos\beta\operatorname{tg}\omega - a\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

avremo anche:

$$\begin{cases} \overline{C_1X_1}^2 = R_1^2 - y_1^2 \\ \overline{C_2X_2}^2 = R_2^2 - y_2^2 \end{cases}$$ sostituendo: $\overline{C_1X_1} = \frac{r_1+r_2}{2} + x\operatorname{sen}\beta$

$\overline{C_2X_2} = \frac{r_1+r_2}{2} - x\operatorname{sen}\beta$

$$\left\{(a\cos\beta\cdot\operatorname{tg}\omega + x\operatorname{sen}\beta)^2 = (x\cos\beta\operatorname{tg}\omega + a\operatorname{sen}\beta)^2 - y_1^2\right.$$

$$\begin{cases} (a\cos\beta \cdot tg\,\omega + x\,sen\,\beta)^2 = (x\cos\beta\,tg\,\omega + a\,sen\,\beta)^2 - y_1^2 \\ (a\cos\beta\,tg\,\omega - x\,sen\,\beta)^2 = (x\cos\beta\,tg\,\omega - a\,sen\,\beta)^2 - y_2^2 \end{cases}$$

ove sviluppando i quadrati e semplificando i doppi prodotti uguali

$$\begin{cases} a^2\cos^2\beta\,tg^2\omega + x^2 sen^2\beta = a^2 sen^2\beta + x^2\cos^2\beta\,tg^2\omega - y_1^2 \\ a^2\cos^2\beta\,tg^2\omega + x^2 sen^2\beta = a^2 sen^2\beta + x^2\cos^2\beta\,tg^2\omega - y_2^2 \end{cases}$$

l'uguaglianza delle due espressioni dimostra: $\boxed{y_1^2 = y_2^2 = y^2}$

perciò:

$$x^2(\cos^2\beta\,tg^2\omega - sen^2\beta) - y^2 = a^2(\cos^2\beta\,tg^2\omega - sen^2\beta)$$

dividendo per $a^2(\cos^2\beta \cdot tg^2\omega - sen^2\beta)$. :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(\cos^2\beta\, tg^2\omega - sen^2\beta)} = 1$$

possiamo scrivere:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2\left(\frac{sen^2\omega - sen^2\beta}{\cos^2\omega}\right)} = 1$$

posto:

$$b^2 = a^2\left(\frac{sen^2\omega - sen^2\beta}{\cos^2\omega}\right)$$

abbiamo:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Equazione dell'iperbole al centro.

Cerchiamo ora di individuare il segmento "b"

$$a^2\cos^2\beta \cdot tg^2\omega = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2$$

$$a^2 sen^2\beta = \left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right)^2$$

$$(a^2\cos^2\beta\, tg^2\omega - a^2 sen^2\beta) = b^2 = r_1 r_2$$

$$(a^2\cos^2\beta\, tg^2\omega - a^2 sen^2\beta) = b^2 = \tau_1\tau_2$$

cioè :

$$b = \sqrt{\tau_1\tau_2}$$

b è medio proporzionale fra τ_1 ed τ_2 : $\tau_1 : b = b : \tau_2$

$b = \overline{PQ}$ (in figura)

Poiché: $b/a = tg(\alpha)$ = coeff. angolare degli asintoti,

avremo che : $tg^2(\alpha) = \cos^2\beta\, tg^2\omega - sen^2\beta$

$$\frac{b}{a} = \tan(\alpha) = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\omega - \operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\omega}}$$

Si noti che β non può essere maggiore di ω perchè avremmo radici immaginarie.

per: $\beta = \omega$ si ha una parabola

$\beta > \omega$ " hanno ellissi.

Quando: $a = b$; $\tan(\alpha) = 1$; $(\alpha = 45°)$

gli asintoti sono ortogonali fra loro, e

$$\cos^2\omega = \operatorname{sen}^2\omega - \operatorname{sen}^2\beta$$

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{\operatorname{sen}^2\omega - \cos^2\omega}$$

Per: $\omega \geq 45°$ si hanno radici reali;

e l'iperbole si dice equilatera

per :

per:

$\omega = 45° \longrightarrow \beta = 0$

$\omega = 60° \longrightarrow \beta = 45°$

$\omega = 90° \longrightarrow \beta = 90°$ (Il cono degenera in un piano)

L'equazione dell'iperbole ad assi traslati

Se x_0 ed y_0 sono le coordinate del centro assi cui si riferisce l'equazione canonica; avremo:

$$b^2(x-x_0)^2 - a^2(y-y_0)^2 = a^2b^2$$

sviluppando:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2(b^2x_0)x + 2(a^2y_0)y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

dividendo per b^2:

$$x^2 - (a/b)^2y^2 - 2(x_0)x + 2[(a/b)^2y_0]y + [x_0^2 - (a/b)^2y_0^2 - a^2] = 0$$

$a_{11} = 1$; a_{22} $2a_{13}$ $2a_{23}$ a_{33}

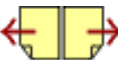
manca il termine in xy, cioè: $2 \cdot a_{12} = 0$

Si noti che mentre nell'ellisse a_{11} ed a_{22} hanno lo stesso segno nell'iperbole hanno segni opposti.

Equazione dell'iperbole equilatera ad assi traslati

$$(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 = a^2$$

$$x^2 - y^2 - 2(x_0)x - 2(y_0)y + x_0^2 - y_0^2 - a^2 = 0$$

Equazione che differisce da quella del cerchio perché i coefficienti di x^2 ed y^2 pur essendo uguali, hanno segno opposto.

Equazione dell'iperbole ad assi ruotati.

$$b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$$

$$\begin{cases} x_1 = y \operatorname{sen}\alpha + X\cos\alpha \\ y_1 = y\cos\alpha - X \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

sostituendo

$$b^2(y^2 \operatorname{sen}^2\alpha + X^2\cos^2\alpha + 2Xy\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) -$$

$$-a^2(y^2\cos^2\alpha + X^2\operatorname{sen}^2\alpha - 2Xy\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = a^2b^2$$

da cui:

$$(b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)X^2 + (b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)y^2 + \left[(a^2+b^2)\operatorname{sen}2\alpha\right]Xy = a^2b^2$$

I coefficienti possono essere moltiplicati per un K arbitrario, o possono assumere aspetti diversi, per esempio:

$$\underbrace{K\left(1 - \left(\frac{a\,\operatorname{tg}\alpha}{b}\right)^2\right)}_{a_{11}}X^2 + \underbrace{K\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}_{a_{22}}y^2 + \underbrace{K\left[\frac{(a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha)}{b^2\cos^2\alpha}\right]}_{2a_{12}}Xy - \underbrace{\left(K\frac{a}{\cos^2\alpha}\right)}_{a_{33}} = 0$$

mancano i coefficienti a_{13} ed a_{23}.

Si notino i segni diversi nell'equazione dell'ellisse.

Equazione dell'iperbole equilatera ad

Equazione dell'iperbole equilatera ad assi ruotati

$$K(\cos 2\alpha)X^2 - K(\cos 2\alpha)Y^2 + K(2\,\mathrm{sen}\,2\alpha)XY - Ka^2 = 0$$

può scriversi:

$$X^2 - Y^2 + 2\,\mathrm{tang}(2\alpha)XY - \frac{a^2}{\cos(2\alpha)} = 0$$

a_{11} a_{22} $2\,a_{12}$ a_{33}

Può sempre ridursi a questa forma, ove: $(2\alpha) = \mathrm{arctg}(a_{12})$.

Equazione dell'iperbole ad assi ruotati e traslati

Dette x_0, y_0 le coordinate del centro assi dell'equazione canonica, considerato che: $(x-x_0)(y-y_0) = xy - y_0 x - x_0 y + x_0 y_0$, sostituendo gli assi traslati nella formula degli assi ruotati si ha:

$$\underbrace{(b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)}_{a_{11}} x^2 + \underbrace{(b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)}_{a_{22}} y^2 + \underbrace{((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))}_{2a_{12}} xy + \cdots$$

$$\cdots - (b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)(2x_0)x - (b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)(2y_0)y + \cdots$$

$$\cdots - ((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))(y_0)x - ((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))(x_0)y + \cdots$$

$$\cdots + \underbrace{\left[(b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)x_0^2 + (b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)y_0^2 + (a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha)x_0y_0 - a^2b^2\right]}_{a_{33}} = 0$$

Consideriamo i coefficienti dell'equazione completa.

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= (b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)K \\ a_{22} &= (b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)K \end{aligned}\right\} \quad (a_{11}+a_{22}) = (b^2-a^2)K; \quad (a_{11}-a_{22}) = (a^2+b^2)\cos(2\alpha)(K)$$

$$2a_{12} = ((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))K \longrightarrow \boxed{\frac{a_{12}}{(a_{11}-a_{22})} = tg(2\alpha)} \left(\begin{array}{c}\text{si trova} \\ \text{l'angolo}\end{array}\right)$$

$$2a_{13} = [(b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)(2x_0) + ((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))(y_0)]K$$

$$2a_{13} = \left[(b^2\cos^2\alpha - a^2 \operatorname{sen}^2\alpha)(2X_0) + ((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))(Y_0) \right] K$$

$$2a_{23} = -\left[(b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)(2Y_0) + ((a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha))(X_0) \right] K$$

$$a_{33} = \left[(b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)X_0^2 + (b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)Y_0^2 + (a^2+b^2)\operatorname{sen}(2\alpha)X_0Y_0 - a^2b^2 \right]$$

Dal sistema:

$$\begin{cases} (-2a_{13}) = a_{11}(2X_0) + 2a_{12}(Y_0) \\ (-2a_{23}) = 2a_{12}(X_0) + a_{22}(2Y_0) \end{cases} \rightarrow \boxed{X_0 = \frac{-2a_{22}2a_{13} + 2a_{12}2a_{23}}{4a_{11}a_{22} - (2a_{12})^2}} \quad \boxed{Y_0 = \frac{-2a_{11}2a_{23} + 2a_{12}2a_{13}}{4a_{11}a_{22} - (2a_{12})^2}}$$

posto: $(-Ka^2b^2) = a'_{33}$; $a_{11} = a'_{11}$; $a_{22} = a'_{22}$; $2a_{12} = 2a'_{12}$; l'equazione è ridotta a solo ruotata. (che sappiamo risolvere).

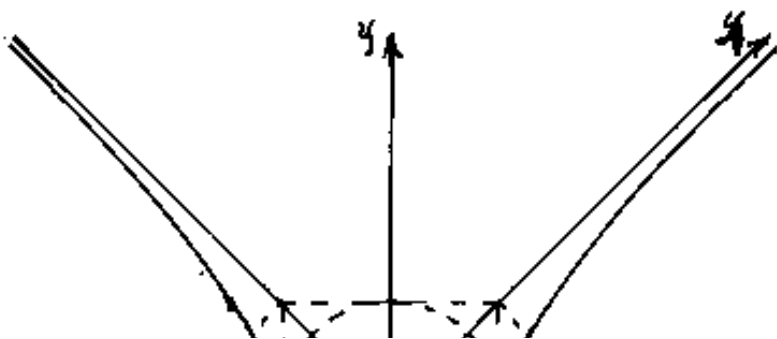
Equazione dell'iperbole equilatera ad assi ruotati e traslati

$$x^2 - y^2 + 2tg(2\alpha)xy - (2x_0 + 2tg(2\alpha)y_0)x - (2y_0 + 2tg(2\alpha)x_0)y + (x_0^2 - y_0^2 + 2tg(2\alpha)x_0y_0 - a^2) = 0$$

L'Iperbole equilatera

L'iperbole equilatera riveste particolare importanza in analisi matematica; è l'analoga del cerchio, infatti accanto alla trigonometria circolare, v'è, (come vedremo) la trigonometria iperbolica.

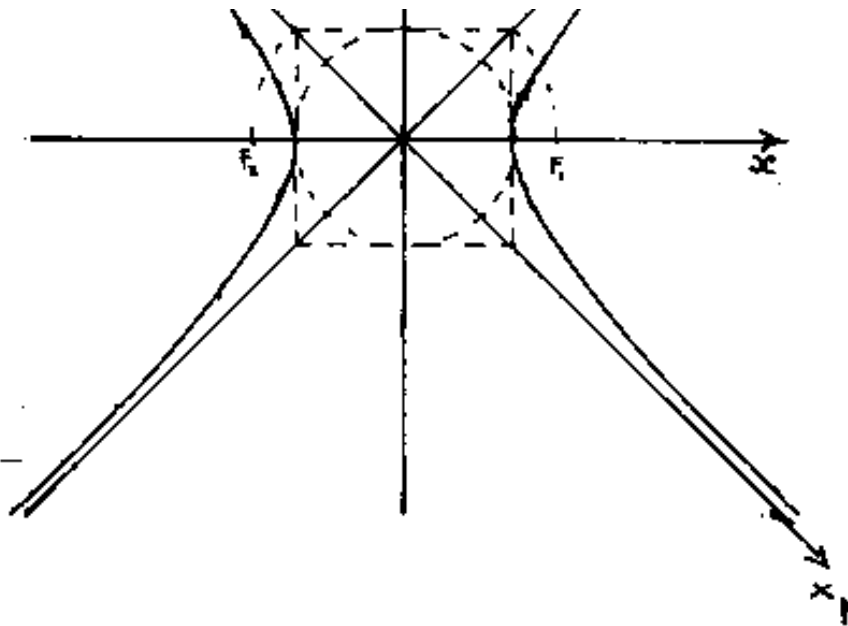
L'equazione al centro è:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Dall'equazione ad assi solo ruotati:

$$\cos(2\alpha)(x_1^2 - y_1^2) + 2\,sen(2\alpha)\,x_1y_1 = a^2$$

per $\alpha = 45°$; $2\alpha = 90°$

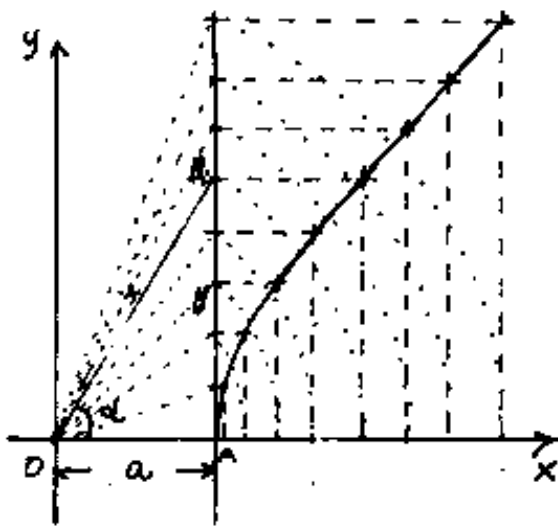
per $\alpha = 45°$; $2\alpha = 90°$

si ha: $2 x_1 y_1 = a^2$

$$x_1 y_1 = a^2/2$$

che è l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti

Ricordiamo anche l'equazione in coordinate polari: $\rho^2 \cos(2\theta) = a^2$

Costruzione grafica dell'iperbole equilatera

Consideriamo l'equazione dell'iperbole equilatera nella forma: $x^2 - y^2 = a^2$; oppure: $x^2 = a^2 + y^2$ si ha la visione di un triangolo rettangolo di cui è fisso un cateto. (nell'equazione della circonferenza era fissa l'ipotenusa) Il cateto fisso è "a"; ciò implica una facile determinazione dei punti dell'iperbole equilatera. Tracciamo una retta: $x = a$; tutte le rette uscenti da "O", avranno "ipotenuse" $\overline{OB_i} = x$ (ascisse dell'iperbole equilatera) e staccheremo l'altro cateto $\overline{AB_i} = y$, (ordinate dell'iperbole equilatera) Se indichiamo con α l'angolo che le rette uscenti da "O" formano con le ascisse, avremo:

$$\begin{cases} x = a/\cos(\alpha) \\ y = a\,tg(\alpha) \end{cases}$$

(coordinate parametriche dell'iperbole equilatera.)

elidendo "a" $= x \cos\alpha = y \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\rightarrow$ $\boxed{y = x \sin\alpha}$

"correlazione fra le coordinate dell'iperbole equilatera"

e siccome: $tg\,\theta = \frac{y}{x}$ avremo: $\boxed{tg(\theta) = \sin(\alpha)}$

ove θ è l'argomento delle coordinate polari.

si noti che $tg\,\theta$ non può essere maggiore di 1 cioè $\theta \leq 45°$ (angolo degli asintoti).

La derivata dell'iperbole equilatera

$$y = \sqrt{x^2 - a^2} \qquad y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad \boxed{y' = \frac{x}{y}}$$

Ciò implica che la normale in un punto dell'iperbole equilatera incontri l'asse delle ascisse nel punto $2x$. (ascissa doppia). Derivando ancora:

$$y'' = \frac{\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{(x^2 - a^2)}$$

$$y'' = \frac{x^2 - a^2 - x^2}{(x^2 - a^2)^{3/2}} \qquad \boxed{y'' = \frac{-a^2}{(x^2 - a^2)^{3/2}}}$$

Il raggio di curvatura

$$R = \left(1 + \frac{x^2}{x^2 - a^2}\right)^{3/2} \Big/ \frac{a^2}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$$

$$R = \frac{(2x^2 - a^2)^{3/2}}{-a^2} = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{-a^2}$$

ma: $(x^2 + y^2) = \rho^2$ perciò:

$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{\rho^2}{a^2}}$$

nel vertice: $\boxed{R_V = a}$; nell'ordinata di F $\boxed{R = 3a\sqrt{3}}$

Per la costruzione grafica di $R = \rho \cdot \frac{\rho}{a} \cdot \frac{\rho}{a}$

basta costruire il triangolo 0 1 2 ove: $\overline{01} = a$; $\overline{02} = \rho$

unito $\overline{12}$ e da 2 la normale 23 ove $\overline{03} = \rho^2/a$

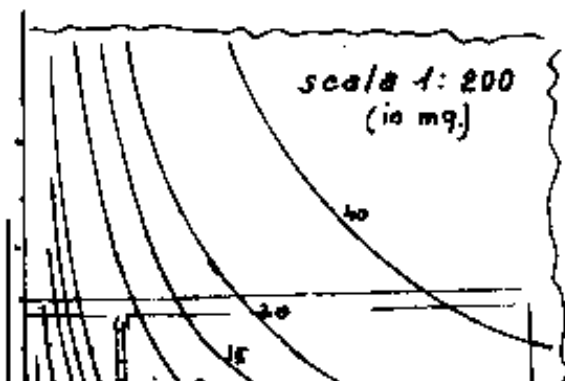
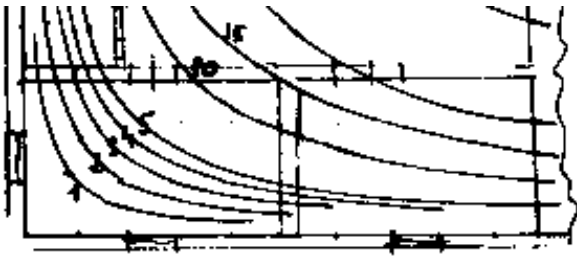
$\overline{04} = a$ unito $\overline{43}$ da 2 la parallela $\overline{25}$

ove $\overline{05} = R$.

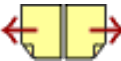
L'Iperbole equilatera riferita agli asintoti

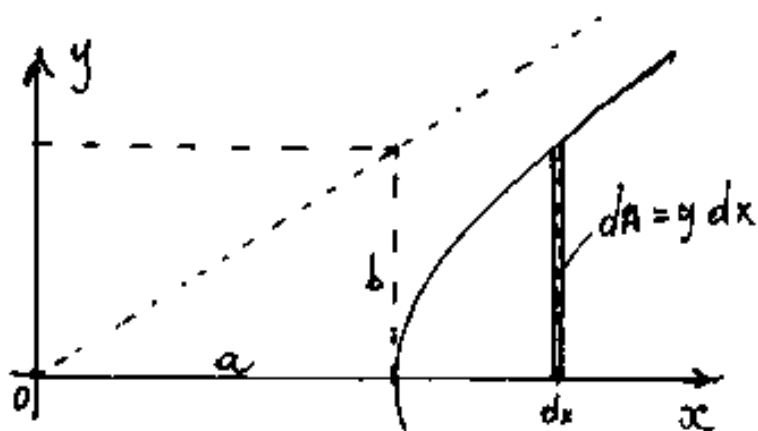
Abbiamo già ricavata la formula, riferendo l'iperbole equilatera ad assi ruotati di 45°. Consideriamo ora la formula generica: $x \cdot y = K$ ove K è una costante. Questa espressione è importantissima in molte applicazioni scientifiche; per esempio la legge di Boyle: $p \cdot v = cost.$ che rappresenta le isoterme alle variabili: "pressione"; "volume". La legge di Ohm: $i \cdot r = V$ ove ogni iperbole equilatera si riferisce ad una certa tensione costante, nelle variabili "resistenza" e "intensità di corrente". ecc.

Una particolare applicazione dell'iperbole equilatera è quella di misurare aree rettangolari.

scala 1: 200 (in mq.)

Disegnate in una certa scala, su carta trasparente, una serie di iperboli equilatere, sovrapponendo queste iperboli, per

ponendo queste iperboli, per esempio ad una planimetria, è possibile vedere le aree dei vani.

(Nel disegno si misura il vano d'angolo che risulta di 15 mq.)

Serve in particolare per individuare vani eccedenti o carenti misure assegnate. (per es. il "vano utile" del N.C.E.U a seconda le categorie era (7÷21) oppure (8÷24) mq).

L'Area dell'iperbole

Consideriamo l'iperbole al centro assi: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

$$A = b\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)\, dx$$

$$A = ab\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\; d\left(\frac{x}{a}\right)$$

posto $\left(\frac{x}{a}\right) = \cosh(t)$; $t = \operatorname{argcosh}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left|\left(\frac{x}{a}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right|$

$$d\left(\frac{x}{a}\right) = d\cosh(t) = \operatorname{senh}(t)\, dt.$$

$$A = ab\int \operatorname{senh}^2(t)\, dt$$

$$A = ab\left(\frac{\operatorname{senh}(t)\cosh(t) - t}{2}\right)$$

$$A = \frac{ab}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} - \ln\left|\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right|\right]_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2}$$

$$A = \frac{ab}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right) - \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right|\right]_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2}$$

$$A = \frac{ab}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right) - \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right|\right]_{\bar{x}_1}$$

A_1 non è reale per $x_1 < a$

Per $x_1 = a$ $A = 0$

per $x = a\sqrt{2}$; $A = \frac{ab}{2}\left[\sqrt{2} - \ln\left|\sqrt{2}+1\right|\right] = 0{,}26642\ ab$

$\ln\left|\left(\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{y}{b}\right)\right| = \frac{xy - 2A}{ab}$; $\frac{e^{xy/ab}}{e^{2A/ab}} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$ poiché:

$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \frac{e^{2A/ab}}{e^{xy/ab}}$; $e^{2A/ab} = e^{xy/ab}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$; $e^{2A} = e^{xy}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^{ab}$

$$A = \frac{1}{2}\ln\left|e^{xy}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^{(ab)}\right|$$

Qualora l'iperbole sia equilatera:

$$A = \frac{a^2}{2}\left[\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} - \ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right|\right]$$

$$\boxed{A = \frac{xy}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+y}{a}\right|}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\ln\left|e^{xy}\left(\frac{x-y}{a^2}\right)^{a^2}\right|}$$

Qualora l'iperbole equilatera sia riferita agli asintoti:

$$\boxed{y = K/x}$$

$$A = K\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x}$$

$$A = \Big[K \ln|x|\Big]_{x_1}^{x_2}$$

$$\boxed{A = K\cdot\ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}$$

ma $K = a^2/2$.

ma $K = a^2/2$

$$\boxed{A = \frac{a^2}{2} \ln\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}$$

Se poniamo $x_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ed $x_2 = x$; $A = \frac{a^2}{2} \ln\left|\frac{x\sqrt{2}}{a}\right|$

che è l'area fra l'asintoto e l'arco di iperbole a partire dal vertice, per segmenti perpendicolari all'asintoto.

I diametri coniugati dell'iperbole

Abbiamo visto i diametri coniugati dell'ellisse. Premesso che l'ellisse e l'iperbole sono dette coniche centrali (ammettono un centro di simmetria), la parabola è una conica non centrale.

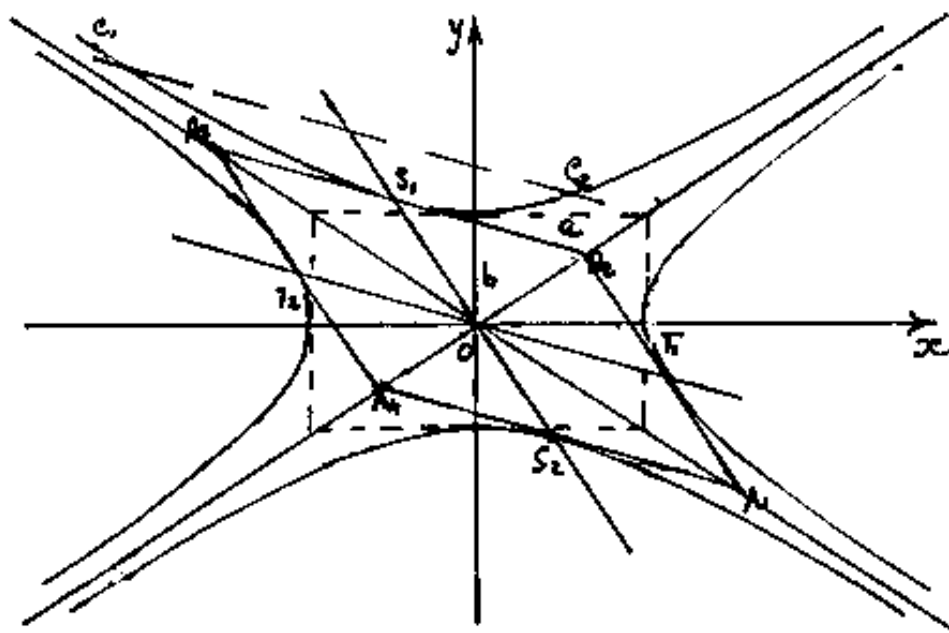
1). La retta che biseca le corde di una conica è detta diametro coniugato alla retta parallela alle corde bisecate e passante per il centro.

2) Tutti i diametri coniugati di una conica centrale passano per il centro

3) Tutti i diametri di una parabola sono paralleli all'asse.

Consideriamo la sezione conica che dà luogo all'iperbole; Si possono tracciare infiniti piani paralleli che sezionano il cono; però, ve ne sarà uno solo che "parallelo" passa anche per

il vertice del cono. Questo piano taglia il cono secondo due rette che sono gli asintoti comuni a tutte le iperboli ottenute dalle sezioni, dello stesso cono, con piani ad esso paralleli. Le equazioni degli asintoti: $y = \pm \frac{b}{a} x$, sono condizionate dal rapporto: $\frac{b}{a}$. Al variare del rapporto: $\frac{b}{a} \lesseqgtr 1$ si hanno iperboli acutangole, equilatere, ottusangole; a seconda

che gli asintoti formino un angolo acuto, retto, od ottuso nel campo delle linee iperboli. Cioè gli asintoti dividono lo spazio piano in quattro parti; in due opposti vi sono le curve iperboli che tagliano i semiassi "a" e non tagliano i semiassi "b", quando la formula è: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Se scrivessimo la formula: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; I rami di iperbole occuperebbero le altre due parti di spazio, se una è acutangola, l'altra è ottusangola, <u>e queste due iperboli sono dette coniugate</u>.

Consideriamo i punti T_1 e T_2 dell'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Consideriamo i punti T_1 e T_2 dell'iperbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

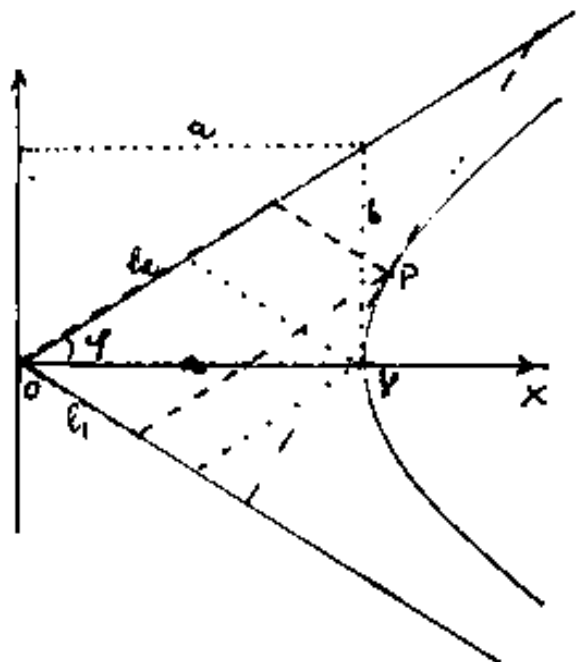
ed i punti S_1 ed S_2 della sua coniugata: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

I segmenti di tangente in questi punti, intercettati fra gli asintoti, formano il parallelogramma: $A_1A_2A_3A_4$

Le rette: $\overline{T_2T_1}$ ed $\overline{S_2S_1}$ <u>sono diametri coniugati</u>

Quindi se consideriamo una sola iperbole, un diametro

che tagli l'iperbole, il suo coniugato non la taglia

f) Il parallelogrammo che ha i lati sui due asintoti e sulle parallele ad essi condotte da un punto qualunque dell'iperbole, ha area costante.

Se indichiamo con l_1 ed l_2 i lati del parallelogrammo avremo:

$$y_P = (l_2 - l_1)\,\text{sen}\,\varphi \quad ; \quad x_P = (l_2 + l_1)\cos\varphi$$

$$(l_2 - l_1)^2\,\text{sen}^2\varphi = \frac{b^2}{a^2}\left((l_2 + l_1)^2\cos^2\varphi - a^2\right)$$

ed essendo $b^2/a^2 = tg^2\varphi = \text{sen}^2\varphi/\cos^2\varphi$

semplificando:

$$-2\,l_1 l_2 = 2 l_1 l_2 - a^2/\cos^2\varphi$$

da cui: $l_1 l_2 = a^2/4\cos^2\varphi$; $\boxed{l_1 l_2 = \left(\frac{a}{2\cos\varphi}\right)^2}$ è

l'equazione riferita ad assi obliqui (agli asintoti) che è del tipo: $\boxed{l_1 l_2 = \text{cost.}}$.

moltiplicando per (sen 2φ) si ha: $A = 2 l_1 l_2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi =$

$$\frac{a^2}{4}\frac{2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{a}{2}a\,tg\,\varphi = \frac{a}{2}\cdot\frac{a\,b}{a}$$ cioè l'area

4 cos φ ... 2 ... 2

costante: $A = l_1 l_2 \sin 2\varphi = \frac{ab}{2}$

2) È costante l'area del triangolo che ha per lati i segmenti staccati sugli asintoti da una tangente qualsiasi all'iperbole, ed il segmento di tangente stessa.

Essendo la tangente parallela alla diagonale del parallelogramma: $A = (ab)$

I teoremi di Apollonio Pergeo.

I due teoremi ora dimostrati sono la base per la dimostrazione dei seguenti teoremi detti di Apollonio.

1) L'area del parallelogrammo che ha per diagonali due diametri coniugati di due iperboli coniugate è costante.

2) L'area del parallelogrammo che ha per mediane due diametri coniugati di due iperboli coniugate è costante.

3) La differenza dei quadrati delle lunghezze di due diametri coniugati di due iperboli coniugate è costante.

Se ρ_1 e ρ_2 sono due semidiametri coniugati avremo:

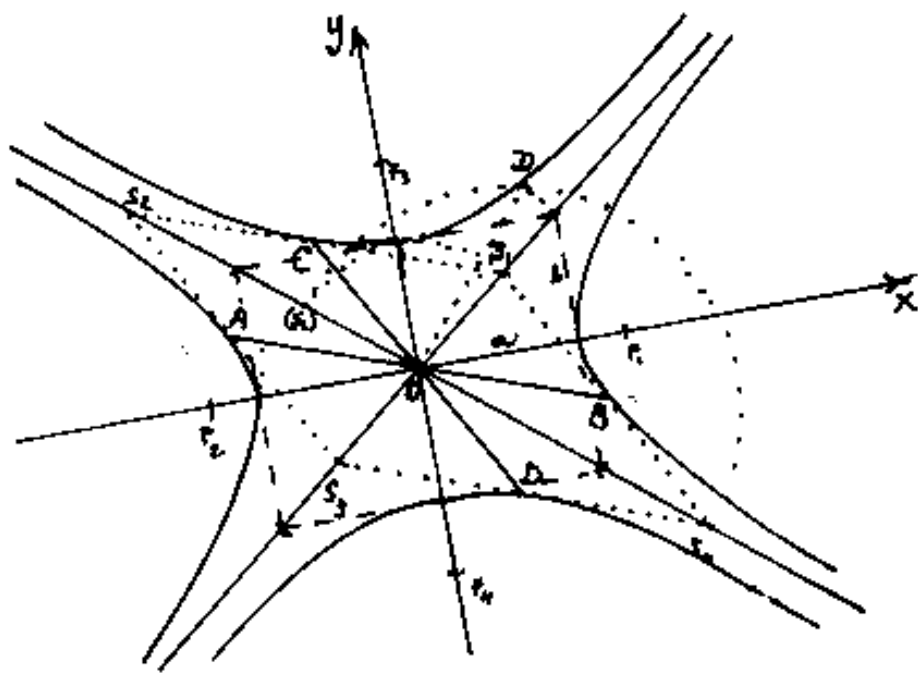
$$\rho_1^2 - \rho_2^2 = (a^2 - b^2)$$

Se ρ_1 taglia l'iperbole, in coordinate polari

si ha $$\rho_1^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta} = a^2 - b^2 + \rho_2^2$$

avremo: $$\rho_2^2 = \frac{a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\theta - a^2b^2\sin^2\theta + a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}{b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta}$$

$$\boxed{\rho_2^2 = \frac{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}{b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta}}$$

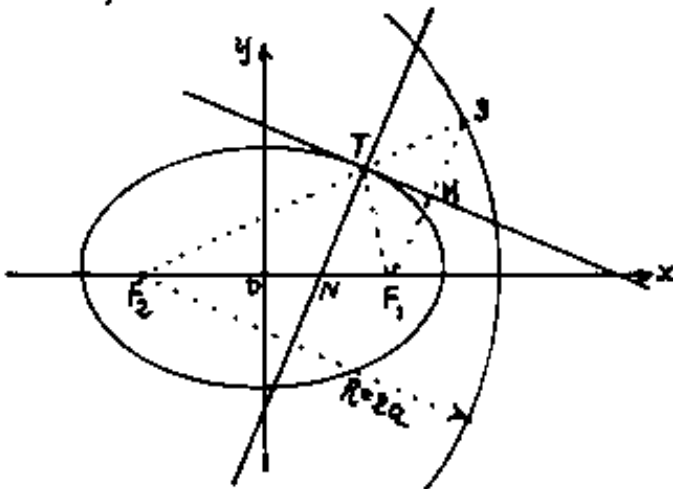
<u>Dati due diametri coniugati di due iperboli coniugate, trovare gli assi, gli asintoti e disegnare le due iperboli.</u>

Siano $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ i due diametri coniugati che si incontrano nel punto medio "O". Per A e per B tracciamo le parallele a $\overline{CD}$; per C e per D tracciamo le parallele ad AB. Queste parallele (tangenti alle iperboli in A, B, C, D,) formano un parallelogrammo: $S_1 S_2 S_3 S_4$; <u>le diagonali</u> di questo parallelogrammo <u>sono gli asintoti</u> $\overline{OS_1}$ $\overline{OS_2}$, $\overline{OS_3}$, $\overline{OS_4}$. <u>Le bisettrici</u> degli asintoti sono <u>le direzioni degli assi</u>. Poichè è costante l'area

dei triangoli fra due asintoti ed una qualsiasi tan=
gente all'iperbole, (per es. S_2OS_4 ; $A = \overline{OS_2} \cdot \overline{OS_4} \cdot sen(2\varphi)$);
poichè rimane costante l'angolo fra gli asintoti
(2φ) avremo che $A = d^2 sen(2\varphi)$, cioè d è medio geo=
metrico fra $\overline{OS_1}$ ed $\overline{OS_4}$. Riportato S_1 su $\overline{S_2S_4}$ in (S_1); semicer=
chio di diametro: $\overline{(S_1)S_4}$, da "O" la normale $\overline{OD}$; ove $\overline{OD} = d$, e; $d^2 = (a^2 + b^2)$
Riportato $\overline{OD} = d$ sugli asintoti si ha il rettangolo: $2a$, $2b$.

I circoli direttori dell'iperbole (ed ellisse)

Sono detti circoli direttori (per l'ellisse e l'iperbole) i cerchi aventi il raggio pari all'asse principale: "2a" e per centro uno dei fuochi.

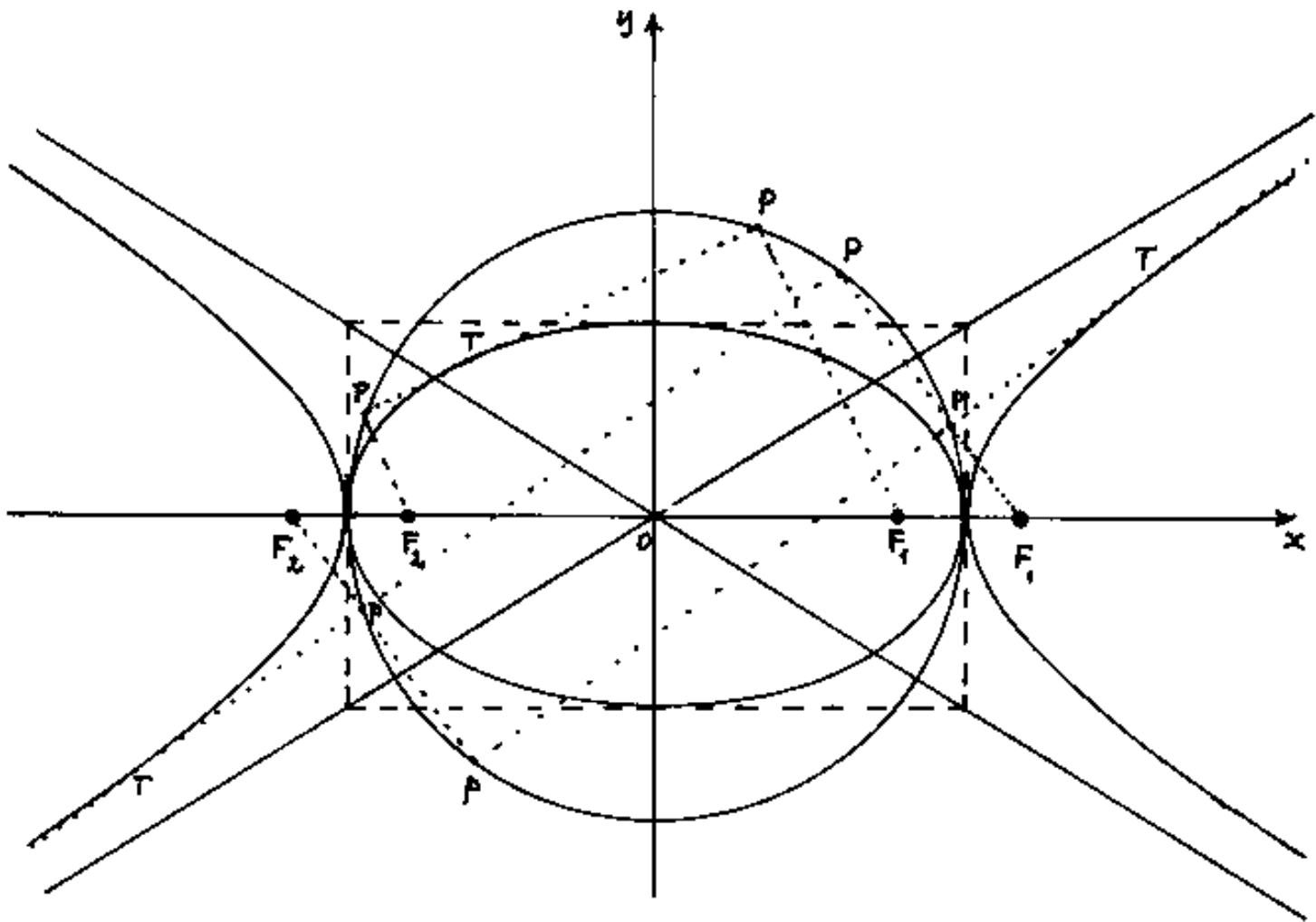
L'asse "2a" è anche detto asse trasverso, mentre "2b" è detto asse non trasverso; "2a" talvolta è detto asse focale, nel senso che contiene i fuochi.

1) Il luogo dei punti simmetrici (equidistanti) di un fuoco (di una ellisse o di una iperbole) rispetto alle tangenti è il circolo direttore che ha per centro l'altro fuoco.

1) Per l'ellisse: essendo: $\overline{F_2S} = 2a$, $\overline{TF_1} = \overline{TS}$, essendo $\overline{TN}$ parallelo ad $\overline{F_2S}$; "S" ed F_1 sono simmetrici rispetto ad M (cioè alla tangente).

2) Per l'iperbole: la dimo=

strazione è analoga; essendo: $\overline{F_2S}=2a$; $\overline{ST}=\overline{F_1T}$ e poiché: $S\hat{T}M = F_1\hat{T}M$; "S" ed "F_1" sono simmetrici rispetto ad M (cioè rispetto alla tangente) ($\overline{SF_1}$ parallelo a $\overline{TN}$)

La podaria dell'iperbole (e dell'ellisse)

La podaria di un fuoco di una conica centrale (ellisse o iperbole) è il circolo che ha per diametro l'asse principale, e per centro il centro assi.

In figura: T = punti di tangenza; F = fuochi; P = piedi delle normali

alle tangenti, dai fuochi.

La dimostrazione può farsi cercando il luogo geometrico dei punti M del precedente teorema. Unito O con M, essendo $\overline{F_2O} = \overline{OF_1}$ (vedi precedente figura) $\overline{OM}$ risulta parallelo ad $\overline{F_2S}$ ed $\overline{OM} = \frac{1}{2} F_2S$, ma $\overline{F_2S} = 2a$ per cui $\overline{OM} = a$ = raggio del cerchio di centro o, podaria dell'iperbole e dell'ellisse.

Proprietá focali dell'iperbole

Come per l'ellisse, le principali proprietá focali del l'iperbole sono giá state trattate.

1) La differenza delle distanze dei fuochi da un generico punto "T" dell'iperbole, è pari alla distanza dei vertici dei due rami dell'iperbole stessa. (= 2a).

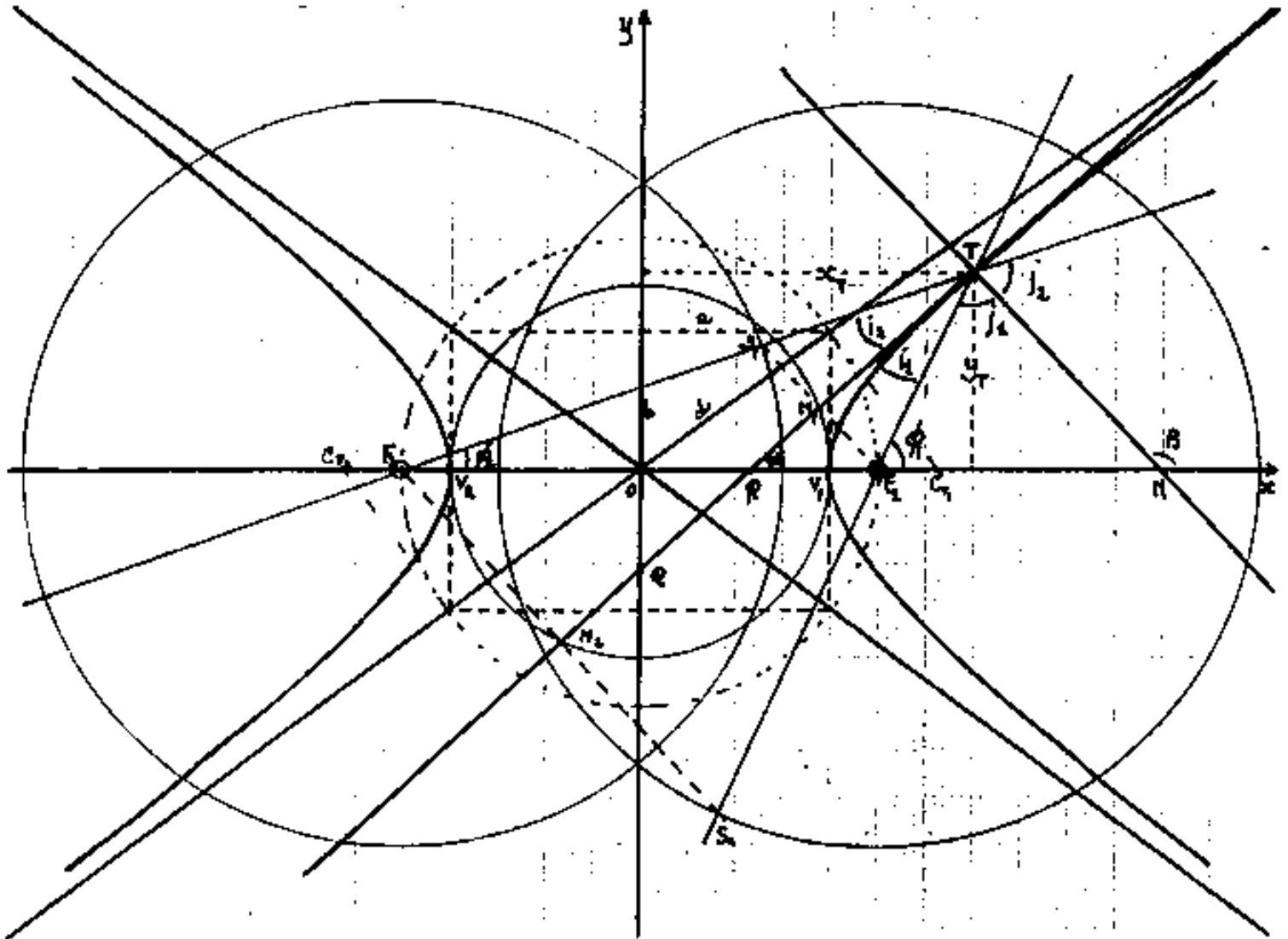
(definizione di iperbole come luogo geometrico)

2) La normale e la tangente in un punto "T" dell'iperbole sono le bisettrici degli angoli formati dai raggi focali: F_1T ed F_2T.

3) L'iperbole (o l'ellisse) è il luogo dei punti equidistanti da un fuoco e dal corrispondente circolo direttore.

4) Il prodotto delle distanze dei fuochi di una conica centrale è costante e vale b^2.

(questa proprietá è stata dimostrata per l'ellisse).

Al fine di una visione completa delle caratteristiche dell'iperbole si fa una figura completa dei circoli direttori, del circolo podaria dei fuochi, e si mostra, tracciando una tangente e le normali ad essa dai fuochi, ed i raggi focali, le caratteristiche di tali circoli.

Calcoliamo utilizzando il simbolismo in figura.

$$\overline{F_2T} = \rho_2 = \overline{F_2S_1} + \overline{S_1T} = 2a + \overline{S_1T} = (2a + \rho_1)$$

$$\overline{F_1T} = \rho_1 = \overline{S_1T} = \overline{F_2T} - \overline{S_1F_2} = (\rho_2 - 2a)$$

(raggi focali)

$\phi_2 = x\widehat{F_2}T$; $\phi = x\widehat{F_1}T$; (argomenti focali)

$\varphi_2 = x\hat{F_2}T$; $\varphi_1 = x\hat{F_1}T$; (argomenti focali)

$(\rho ; \theta)$ (coordinate polari)

$(x_T ; y_T)$ (coordinate cartesiane)

$\overline{V_1V_2} = 2a$ = (distanza fra i vertici = asse principale)

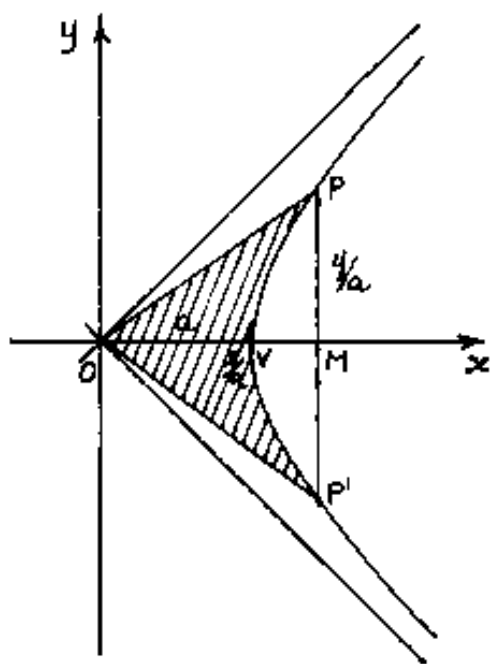
$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = d = \sqrt{a^2+b^2}$ = (distanza focale) = "f"

C_{V_1} ; C_{V_2} = (centri di curvatura nei vertici)

M_1 ; M_2 = (piedi delle normali dai fuochi alla tangente)

(giacciono sulla podaria rispetto ai fuochi = cerchio di raggio "a")

La trigonometria iperbolica

Sia: $x^2 - y^2 = a^2$ l'iperbole equilatera riferita agli assi oxy, e sia il vertice "V" ove $x_V = a$; $y_V = 0$.; cioè: $\overline{OV} = a$. L'ascissa generica $\overline{OM} = x$ corrisponda alle ordinate: $y = \overline{MP}$; $-y = \overline{MP'}$.

Consideriamo il triangolo iperbolico: OPVP'O, e poniamo l'area:

$$A_{OPVP'O} = u\,a^2$$

(area tratteggiata in figura), avremo:

$$u = \frac{A_{OPVP'O}}{a^2}$$

ove "u" è indipendente dal modulo grafico. L'area del triangolo isoscele OPP' sarà

$$A_{OPP'} = \frac{x \cdot y}{a^2}$$

L'area del segmento iperbolico: $A_s = \frac{xy}{a^2} - \ln\left|\frac{x+y}{a}\right|$ (era già calcolato nel paragrafo "area dell'iperbole).

per cui: $u = A_{OPP'} - A_s$: $u = \frac{xy}{} - xy + \ln\left|\frac{x+y}{}\right|$

per cui: $u = A_{opp'} - A_s$; $u = \frac{xy}{a^2} - \frac{xy}{a^2} + \ln\left|\frac{x+y}{a}\right|$

$$u = \ln\left|\frac{x+y}{a}\right|$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = e^u$$

posto: $\left(\frac{x}{a}\right) = \cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$

$\left(\frac{y}{a}\right) = \operatorname{senh}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$

} vedi trigonometria complessa di Eulero

$$\operatorname{senh}(u) + \cosh(u) = e^u$$

$$\rho_2 = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2+b^2)x_T^2 + a^2(a^2+b^2) + a^2(2fx_T) - a^2b^2} = \frac{1}{a}\sqrt{f^2x_T^2 + a^4 + 2(a^2fx_T)}$$

$$\boxed{\rho_2 = \frac{1}{a}(fx_T + a^2)}$$

$$\rho_1 = \sqrt{(x-f)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_T^2 - a^2)} = \frac{1}{a}\sqrt{f^2x_T^2 + a^4 - 2a^2fx_T} \; ; \; \boxed{\rho_1 = \frac{1}{a}(fx_T - a^2)}$$

quindi:

$$\frac{f + \overline{OP}}{\rho_2} = \frac{(fx_T + a^2)}{x_T} \cdot \frac{a}{(fx_T + a^2)} = \frac{a}{x_T}$$

$$\frac{f - \overline{OP}}{\rho_1} = \frac{(fx_T - a^2)}{x_T} \cdot \frac{a}{(fx_T - a^2)} = \frac{a}{x_T}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(i_2) = \left(\frac{a \operatorname{sen}\alpha}{x_T}\right)} \; ; \; \boxed{\operatorname{sen} i_1 = \left(\frac{a \operatorname{sen}\alpha}{x_T}\right)}$$

Con ciò resta dimostrato che: $(i_1 = i_2)$ e quindi: $(\dot{\rho}_1 = \dot{\rho}_2)$. Il triangolo isoscele: S_1TF_1 ha la tangente $\overline{TM_1}$ come mediana, altezza, e bisettrice;

$$\boxed{\overline{F_1M_1} = \overline{M_1S_1} = \rho_1 \operatorname{sen}(i)} ; \; \boxed{\overline{TM_1} = \rho_1 \cos(i)}$$

$$\boxed{\overline{F_2M_2} = \overline{M_2S_2} = \rho_2 \operatorname{sen}(i)} ; \; \boxed{\overline{TM_2} = \rho_2 \cos(i)}$$

si ha anche: $\boxed{(\alpha + i) = \varphi_1 \; ; \; (\alpha - i) = \varphi_2}$

$$\alpha = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

L'angolo che la retta tangente in un punto T dell'iperbole forma con le ascisse, è la media degli angoli che i raggi focali di quel punto, formano con le stesse ascisse.

Relazioni di Trigonometria Iperbolica

Dalla formula dell'iperbole abbiamo:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

per cui:

$$\cosh^2(u) - \operatorname{senh}^2(u) = 1$$

Questa relazione pitagorica fondamentale è l'analoga di $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ della trigonometria circolare.

$$\frac{\operatorname{senh}(u)}{\cosh(u)} = \tanh(u) = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\right)$$

dalla relazione pitagorica:

$$(\cosh^2(u) - 1) = \cosh^2(u) \cdot \tanh^2(u)$$

$$\cosh(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(u)}}$$

$$\operatorname{senh}(u) = \frac{\tanh(u)}{\sqrt{1 - \tanh^2(u)}}$$

$$\operatorname{senh}(u)\cosh(u) = \frac{\tanh(u)}{1-\tanh^2(u)} = \frac{1}{\coth(u)-\tanh(u)}$$

$$\operatorname{senh}(u)\cosh(u) = \left(\frac{e^{u}-e^{-u}}{2}\right)\left(\frac{e^{u}+e^{-u}}{2}\right) = \left(\frac{e^{2u}-e^{-2u}}{4}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{senh}(2u) = 2\operatorname{senh}(u)\cosh(u)} \quad \text{(duplicazione)}$$

$$\cosh^2(u)+\operatorname{senh}^2(u) = \left(\frac{e^{u}+e^{-u}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{u}-e^{-u}}{2}\right)^2 = \left(\frac{2e^{2u}+2e^{-2u}}{4}\right) = \left(\frac{e^{2u}+e^{-2u}}{2}\right)$$

$$\boxed{\cosh(2u) = \cosh^2(u)+\operatorname{senh}^2(u)} \quad \text{(duplicazione)}$$

$$\frac{\operatorname{senh}(2u)}{\cosh(2u)} = \frac{2\operatorname{senh}(u)\cosh(u)}{\cosh^2(u)+\operatorname{senh}^2(u)} = \frac{2\operatorname{senh}(u)\cosh(u)/\operatorname{senh}^2(u)}{(\cosh^2(u)+\operatorname{senh}^2(u))/\operatorname{senh}^2(u)}$$

$$\tanh(2u) = \frac{2\tanh(u)}{1+\tanh^2(u)} \quad \text{(duplicazione)}$$

Formule di bisezione:

$$\cosh(2u) = \begin{cases} (1+2\operatorname{senh}^2(u)) \rightarrow \operatorname{senh}(u) = \sqrt{\dfrac{\cosh(2u)-1}{2}} \\ (2\cosh^2(u)-1) \rightarrow \cosh(u) = \sqrt{\dfrac{\cosh(2u)+1}{2}} \end{cases}$$

per cui:

$$\operatorname{senh}\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(u)-1}{2}}$$

$$\cosh\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(u)+1}{2}}$$

$$\tanh\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{\operatorname{senh}(u)}{\cosh(u)+1} = \frac{\cosh(u)-1}{\operatorname{senh}(u)}$$

$$\tanh\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{1-\tanh^2(u)}}{\tanh(u)}$$

$$\tanh\left(\frac{u}{2}\right) = \coth(u) - \sqrt{\coth^2(u)-1}$$

Formule di somma e sottrazione:

$$\operatorname{senh}(u+v) = \frac{e^{u+v} - e^{-u-v}}{2} = \frac{2e^{u} \cdot e^{v} - 2e^{-u} \cdot e^{-v} - e^{-u+v} + e^{+u-v} + e^{-u+v} - e^{+u-v}}{4}$$

$$= \left(\frac{e^{u} - e^{-u}}{2}\right)\left(\frac{e^{v} + e^{-v}}{2}\right) + \left(\frac{e^{u} + e^{-u}}{2}\right)\left(\frac{e^{v} - e^{-v}}{2}\right)$$

infatti eseguendo i prodotti:

$$\frac{e^{u+v} - e^{-u+v} + e^{u-v} - e^{-u-v} + e^{u+v} + e^{-u+v} - e^{u-v} - e^{-u-v}}{4}$$

analogamente le altre.

Mentre in trigonometria circolare i segni di $\cos(\alpha\pm\beta)$ sono discordi, in trigonometria iperbolica sono tutti concordi

$$\operatorname{senh}(u\pm v) = \operatorname{senh}(u)\cosh(v) \pm \cosh(u)\operatorname{senh}(v)$$

$$\cosh(u\pm v) = \cosh(u)\cosh(v) \pm \operatorname{senh}(u)\operatorname{senh}(v)$$

$$\tanh(u\pm v) = \frac{\tanh(u) \pm \tanh(v)}{1 \pm \tanh(u)\cdot\tanh(v)}$$

$$\operatorname{senh}(u+v)\operatorname{senh}(u-v) = \operatorname{senh}^2(u)\cosh^2(v) - \cosh^2(u)\operatorname{senh}^2(v)$$

$$= \operatorname{senh}^2(u) + \operatorname{senh}^2(u)\operatorname{senh}^2(v) - \operatorname{senh}^2(v) - \operatorname{senh}^2(u)\operatorname{senh}^2(v)$$

$$\operatorname{senh}(u+v)\operatorname{senh}(u-v) = \operatorname{senh}^2(u) - \operatorname{senh}^2(v) = \cosh^2(u) - \cosh^2(v)$$

$$\cosh(u+v)\cosh(u-v) = \operatorname{senh}^2(u) + \operatorname{senh}^2(v) = \cosh^2(u) + \cosh^2(v)$$

formule analoghe a quelle del Werner:

$$2\operatorname{senh}(u)\cosh(v) = \operatorname{senh}(u+v) + \operatorname{senh}(u-v)$$

$$2\,\mathrm{senh}(u)\cosh(v) = \mathrm{senh}(u+v) + \mathrm{senh}(u-v)$$

$$2\cosh(u)\,\mathrm{senh}(v) = \mathrm{senh}(u+v) - \mathrm{senh}(u-v)$$

$$2\cosh(u)\cosh(v) = \cosh(u+v) + \cosh(u-v)$$

$$2\,\mathrm{senh}(u)\,\mathrm{senh}(v) = \cosh(u+v) - \cosh(u-v)$$

- Da queste analogamente alla trigonometria circolare si ha:

formule analoghe di prostaferesi

$$\text{senh}(u) + \text{senh}(v) = 2\,\text{senh}\left(\frac{u+v}{2}\right)\cosh\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\text{senh}(u) - \text{senh}(v) = 2\cosh\left(\frac{u+v}{2}\right)\text{senh}\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\cosh(u) + \cosh(v) = 2\cosh\left(\frac{u+v}{2}\right)\cosh\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\cosh(u) - \cosh(v) = 2\,\text{senh}\left(\frac{u+v}{2}\right)\text{senh}\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

Le funzioni iperboliche inverse

Mentre nelle funzioni circolari l'inverso di: $\text{sen}\,\alpha = K$ si scrive: $\alpha = \text{arcsen}(K)$ e si legge: "l'arco il cui seno è K" intendendo per "arco" l'arco di raggio unitario che sottende l'angolo α cioè: α radianti; Invece la trigonometria iperbolica usa impropriamente il termine "trigonometria" perciò l'inverso di: $\text{senh}(u) = K$ si scrive: $u = \text{argsenh}(K)$ e si legge "l'argomento il cui seno iperbolico è K". Così per le altre funzioni.

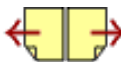
le altre funzioni.

$$\operatorname{senh}(u) = x = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \frac{e^{2u}-1}{2e^u} \;\Rightarrow\; \boxed{e^{2u} - 2x\,e^u - 1} = 0$$

equazione di 2° grado:

$$\boxed{e^u = x \pm \sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{u = \operatorname{argsenh}(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|}$$

si usa solo il segno(+) al radicale perché essendo: $\sqrt{x^2+1} > x$ col segno(−) avremmo il logaritmo di un numero negativo che non esiste.

Il valore di x può assumere tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$ cioè: $\operatorname{senh}(u)$ varia da $-\infty$ a $+\infty$.

consideriamo ora:

$\cosh(u) = x$ da cui:

$$u = \operatorname{arg}\cosh(x) = \ln\left|x \pm \sqrt{x^2-1}\right|$$

questa volta: $\sqrt{x^2-1} < x$ per cui davanti al radicale è possibile il doppio segno $(\pm)$, però x non può assumere valori negativi, né può assumere valori minori di 1, per cui $\cosh(u)$ varia da $+1$ a $+\infty$.

per $\tanh(u) = x$ ove: $x = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$ da cui:

$x = \dfrac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}$; $e^{2u}(x-1) + (x+1)$; $e^{2u} = \dfrac{(x+1)}{(1-x)}$

$$u = \operatorname{arg}\tanh(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$$

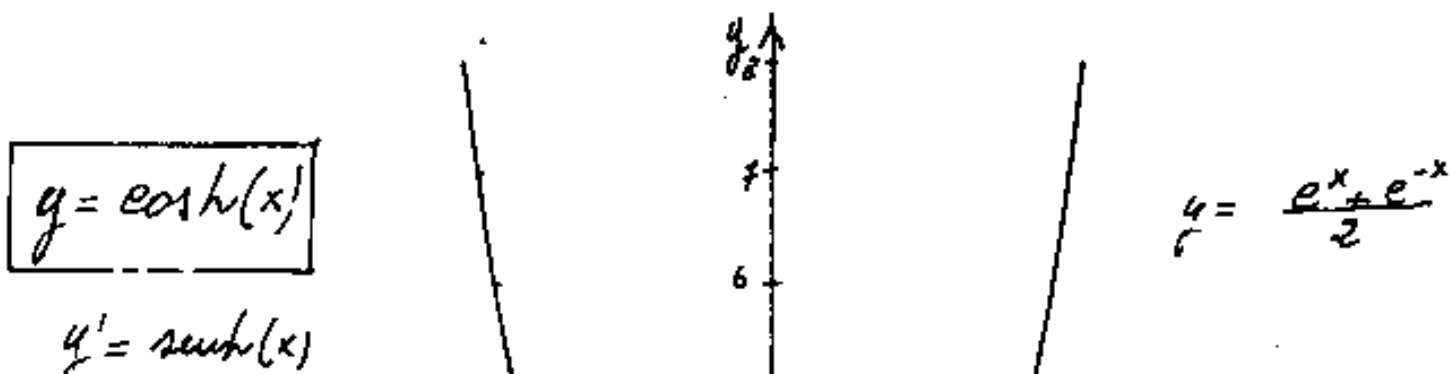
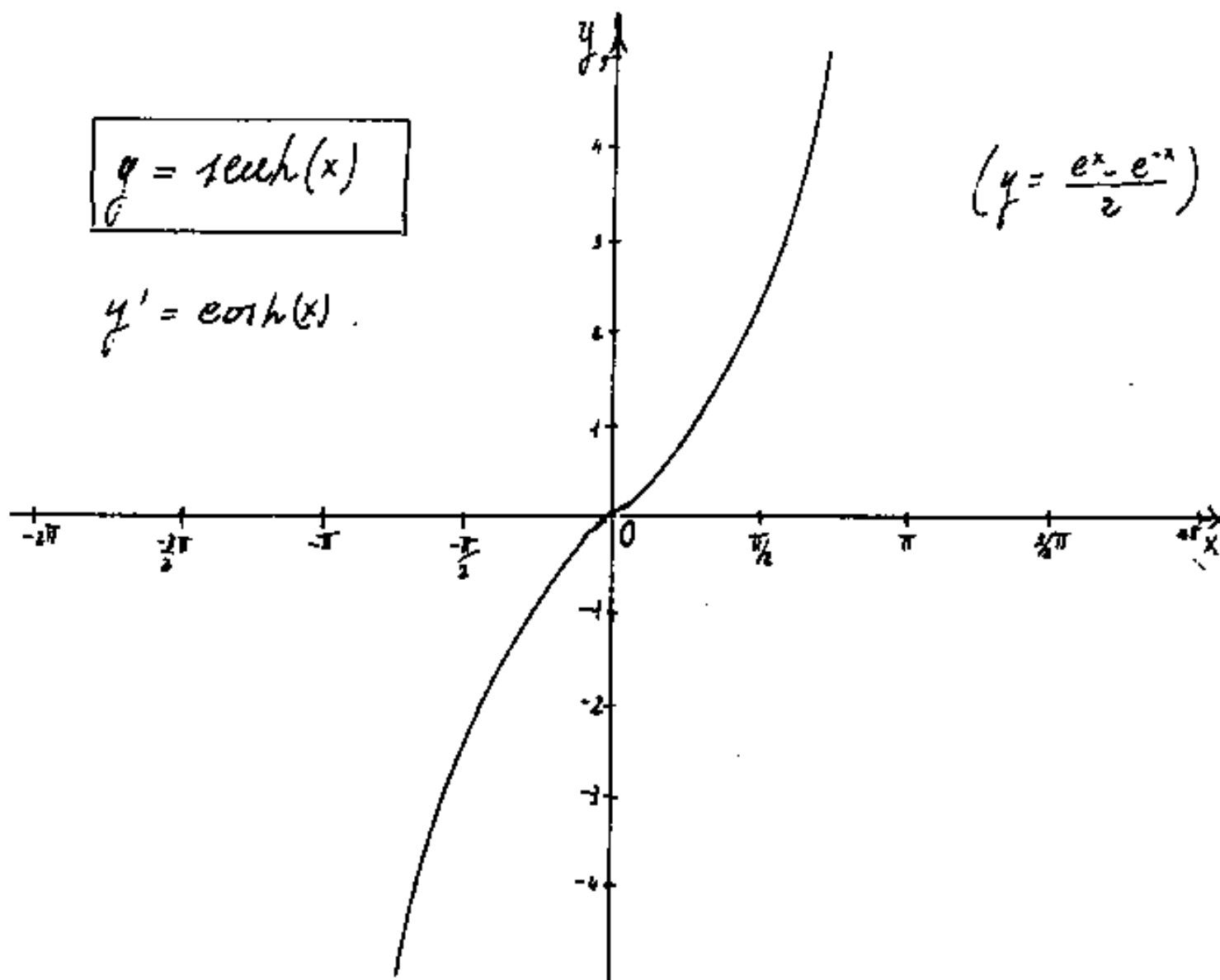
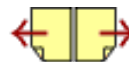
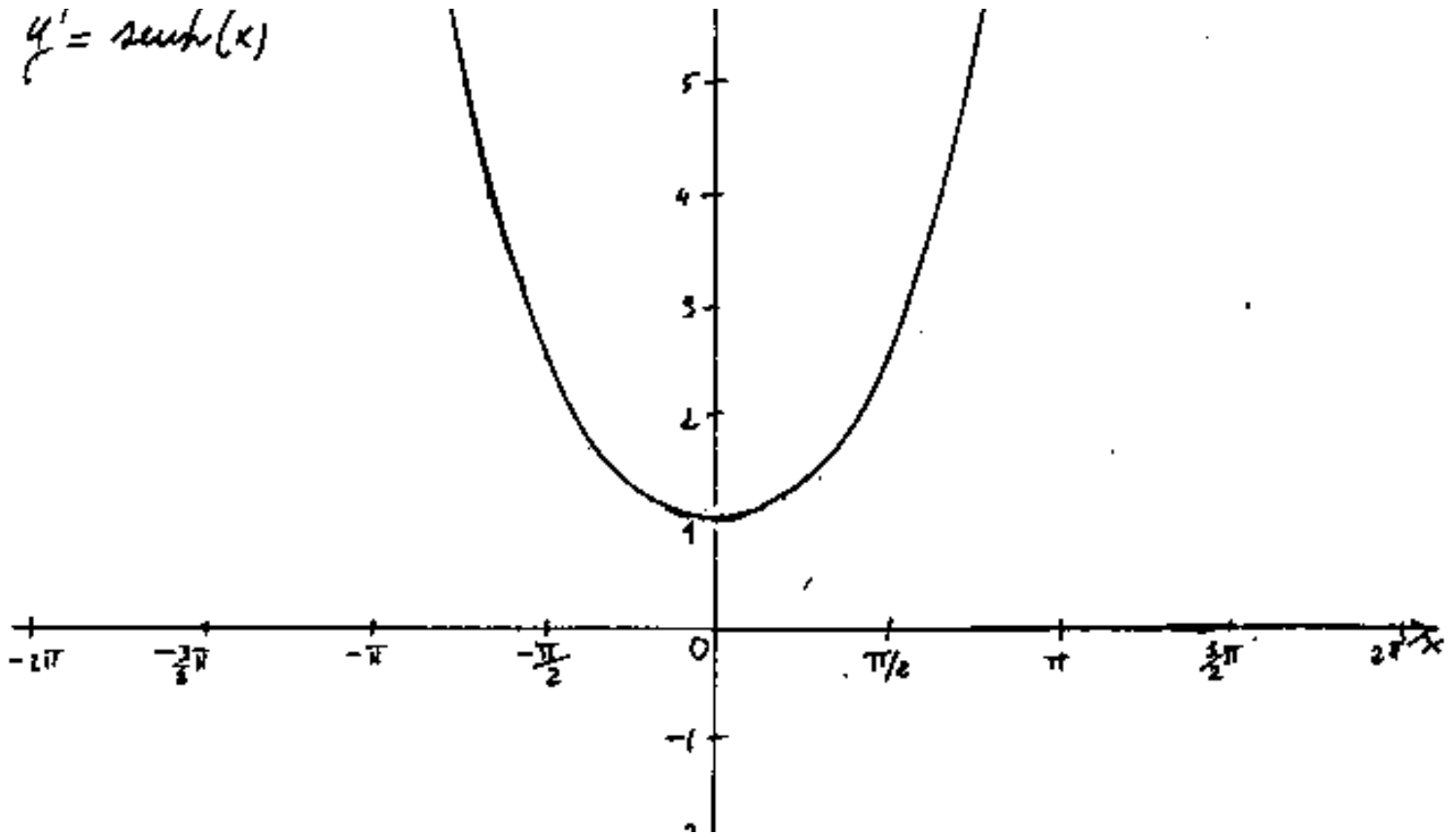
in questo caso la variazione $-1 < x < +1$, cioè i valori di $\tanh(u)$ sono compresi fra -1 e $+1$.

i valori di $\tanh(u)$ sono compresi fra -1 e $+1$.

per $\coth(u) = x$ $\quad x = \dfrac{e^{2u}+1}{e^{2u}-1}$ $\quad ; e^{2u}(x-1) = (x+1)$

$$u = \mathrm{arg}\coth(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)}{(x-1)}\right|$$

In questo caso i valori di $\coth(u)$ vanno da $-\infty$ a -1 poi saltano a $+1$ e vanno a $+\infty$.

Riportiamo i grafici delle funzioni iperboliche:

$y = \sinh(x)$

$y' = \cosh(x)$.

$\left(y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

$y = \cosh(x)$

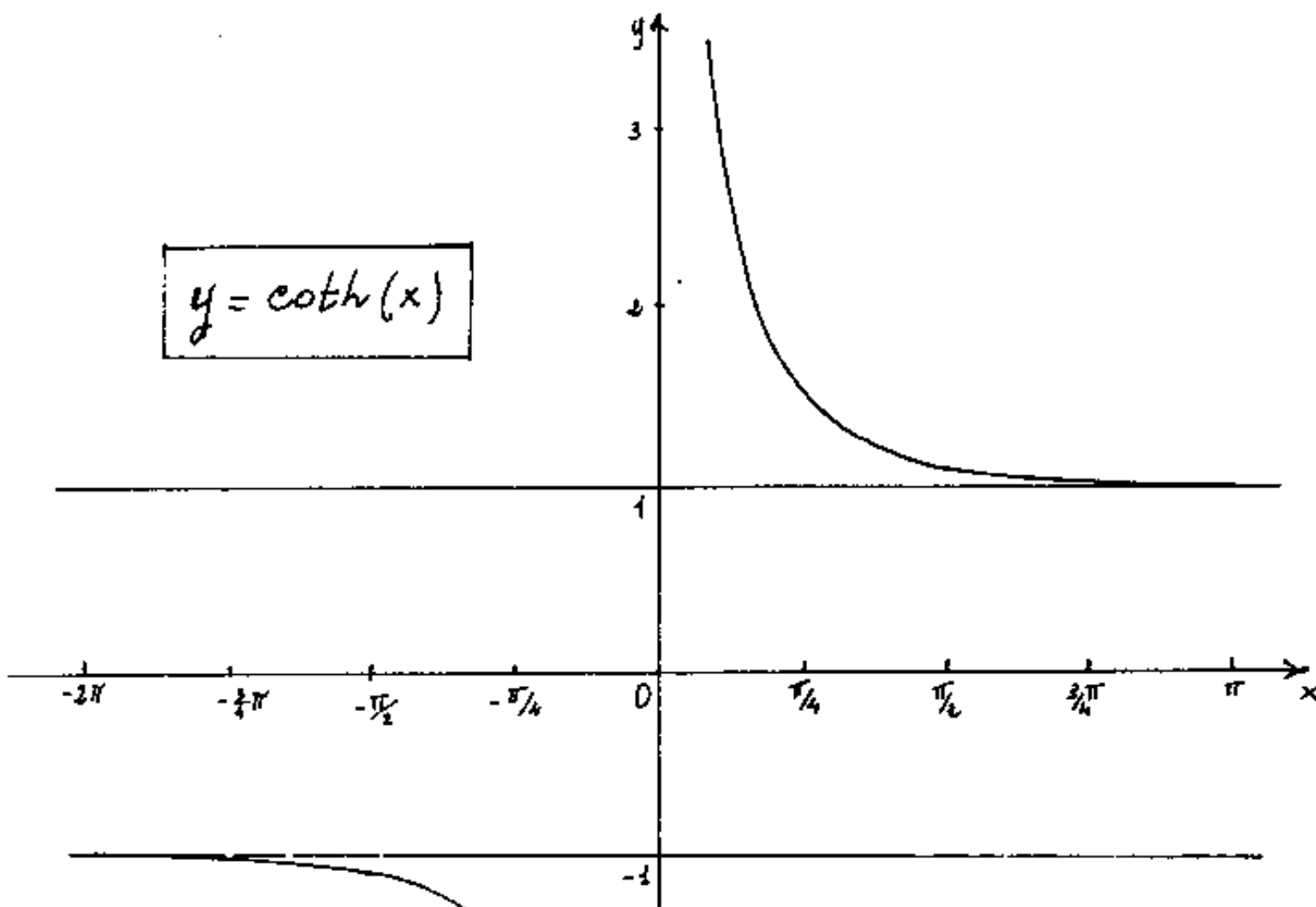
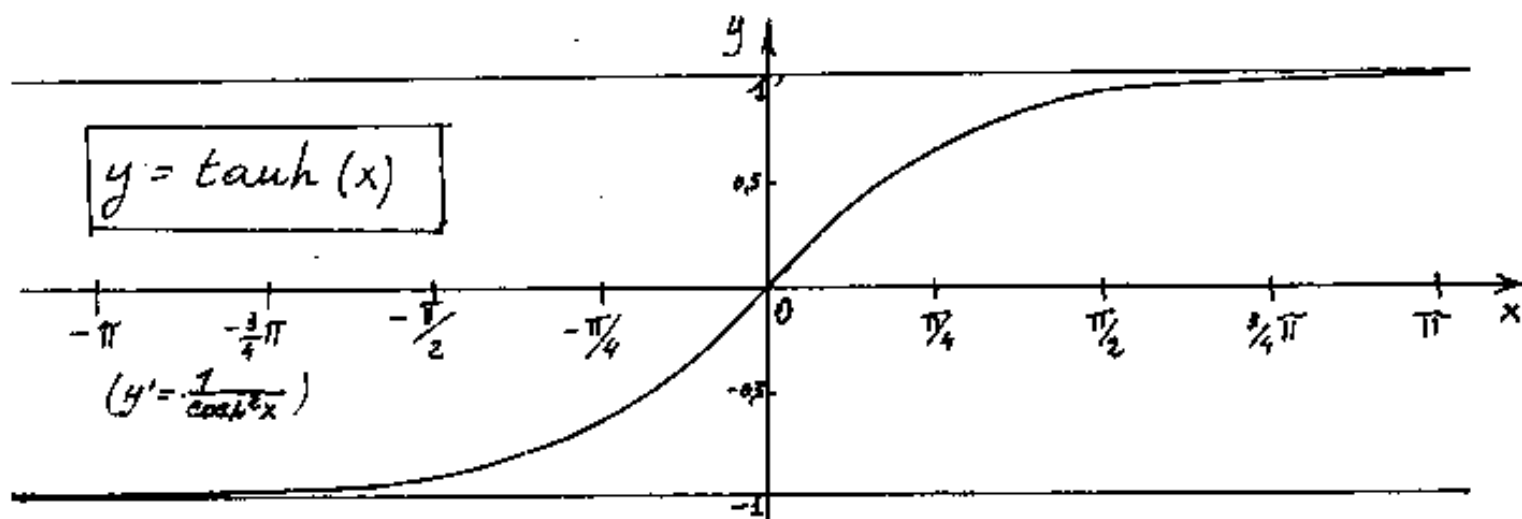
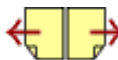
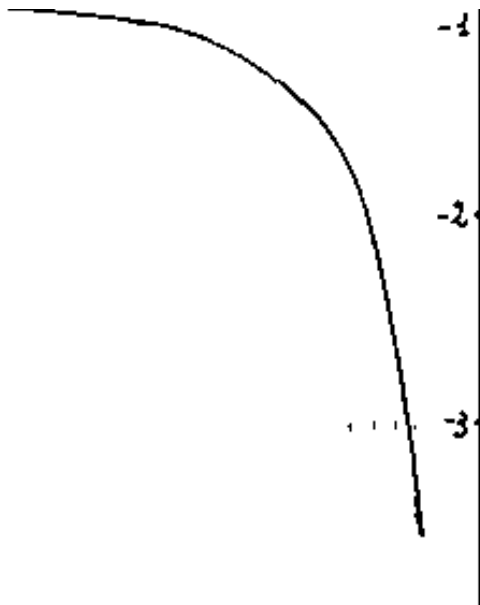
$y' = \sinh(x)$

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y' = senh(x)$

$y = \tanh(x)$

$\left(y' = \frac{1}{\cosh^2 x}\right)$

$y = \coth(x)$

Relazioni fra le funzioni circolari e le iperboliche

Dalle formule di Eulero:

$$\text{sen}(u) = \left(\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}\right) \quad ; \quad \text{senh}(u) = \left(\frac{e^{u} - e^{-u}}{2}\right)$$

$$\cos(u) = \left(\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}\right) \quad ; \quad \cosh(u) = \left(\frac{e^{u} + e^{-u}}{2}\right)$$

abbiamo:

$$\boxed{\cos(u) + i\,\text{sen}(u) = e^{iu}} \quad ; \quad \boxed{\cosh(u) + \text{senh}(u) = e^{u}}$$

$$\boxed{\cos(u) - i\,\text{sen}(u) = e^{-iu}} \quad ; \quad \boxed{\cosh(u) - \text{senh}(u) = e^{-u}}$$

$$\boxed{\text{senh}(iu) = i\,\text{sen}(u)} \quad ; \quad \boxed{\text{senh}(u) = -i\,\text{sen}(iu)}$$

$$\boxed{\cosh(iu) = \cos(u)} \quad ; \quad \boxed{\cosh(u) = \cos(iu)}$$

$$\text{tang}(u) = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{i(e^{iu} + e^{-iu})} \quad ; \quad \tanh(u) = \frac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}}$$

$$\boxed{\tanh(iu) = i\,\text{tang}(u)} \quad ; \quad \boxed{\tanh(u) = -i\,\text{tang}(iu)}$$

$$\boxed{\left[e^{(iu)} \cdot e^{-(iu)}\right] = (\cos(u) + i\,\text{sen}(u))(\cos(u) - i\,\text{sen}(u)) = 1}$$

$$[e^{u} \cdot e^{-u}] = \big(\cosh(u) + \operatorname{senh}(u)\big)\big(\cosh(u) - \operatorname{senh}(u)\big) = 1$$

Si noti che l'argomento in trigonometria circolare è un angolo (che figura essere l'immaginario dell'argomento della trigonometria iperbolica, se ci riferiamo solo alle formule di Eulero.). Ma, (e^{iu}) è un ope-

rotore capace di ruotare dell'angolo "u" rispetto alla direzione fondamentale (che tal volta abbiamo chiamato, poco propriamente, asse reale), cioè la "variazione di direzione" è operata da: (e^{iu})
Quì occorre introdurre una estensione al "concetto direzione". Mentre nelle quantità strettamente numeriche si ha una sola direzione positiva o negativa a seconda che la sequenza numerica sia crescente o decrescente; nel piano geometrico si hanno infinite direzioni che, rispetto ad una direzione fondamentale possono essere definite (o quantificate) dall'operatore: "e^{iu}". Come si vede al concetto di quantità numerica esprimibile con un segmento (rispetto ad un arbitrario segmento unitario) o con un numero, si aggiunge il concetto di quantità angolare piana esprimibile, in un piano arbitra=

rio rispetto ad una direzione arbitraria con un angolo geometrico (inferiore dell'angolo giro), con l'operatore: e^{iu} essendo "u" qualsiasi, pur limitandosi ad un angolo nel piano, si può esprimere anche il numero intero di giri e frazioni. (u è un numero reale).

Se estendiamo il campo al "tridimensionale" si ha ancora una direzione fondamentale am

comune di infiniti piani dello spazio tridimensionale, uno dei quali può essere assunto come fondamentale. La ruotazione dei piani intorno alla direzione principale è ancora un angolo piano misurabile sui piani di cui tale direzione principale è la retta di giacitura.

Poiché l'azione del ruotare implica un asse di rotazione, poiché nello spazio geometrico tridimensionale le rette angolarmente indipendenti, (cioè che hanno l'una sull'altra proiezione nulla) sono tre, fra loro ortogonali, assumeremo tali rette (x, y, z) (assi cartesiani ortogonali) anche come assi di rotazione. Avremo che tali assi si autogenerano: $y = x \cdot e^i$; $z = y \cdot e^j$ $x = z e^k$. Sostituendo: $x = e^i \cdot e^j \cdot e^k x$, perciò: $i + j + k = 0$ da cui: $i + j = -k$; ecc. Questa relazione ci dice che i tre operatori di rotazione non sono indipen=

denti, ma nello spazio tridimensionale geometrico bastano due angoli per definire una direzione rispetto a due direzioni arbitrarie fra loro ortogonali ed assi di rotazione.
(Banalmente pensiamo ai rilievi topografici col teodolite: (angolo azimutale col nord, zenitale con la verticale)

Come si vede, da queste brevi osservazioni, "i" (coefficiente immaginario), introdotto per risolvere una radice ($\sqrt{-1}$), inesistente nel campo dei numeri reali, assume l'aspetto (molto reale) di "operatore" nel campo delle quantità angolari, ed è quindi: "molto meno "immaginario" di quanto si possa immaginare".
Mentre un numero reale "n" implica una quantità numerica rispetto ad una unità qualificata e la qualificazione numerica non necessita di ulteriori precisazioni è quella che si dice: "quantità scalare", l'operatore i, ed i suoi analoghi, "j", "K", implicano quantità ed operazioni sulla "direzione" e sulle variazioni angolari, attenzione! è un pò di più di quelle che si dicono "grandezze vettoriali", infatti la variazione angolare può essere riferita all'unità di tempo, ed in tal senso si hanno le "frequenze"

ed il concetto di "periodo" come il tempo di un ciclo.
Nel VI volume vedremo come "la densitá" definita come la "massa" dell'unita' di "volume" equivalga al prodotto di due frequenze. Vedremo anche una più precisa correlazione fra le funzioni circolari e le funzioni iperboliche, ove qui abbiamo appena accennato all'apertura del problema.

La Gudermanniana

Consideriamo l'espressione: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$

e le forme equivalenti: $\dfrac{1 + tg(\theta/2)}{1 - tg(\theta/2)}$

od anche: $\dfrac{\left(\cos(\theta/2) + \operatorname{sen}(\theta/2)\right)}{\left(\cos(\theta/2) - \operatorname{sen}(\theta/2)\right)}$

moltiplicando numeratore e denominatore per $\left(\cos\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$ si ha: $\dfrac{\cos(\theta)}{1 - \operatorname{sen}(\theta)}$ se moltiplichiamo per $\left(\cos\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$: $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

cioè: $$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \sec\theta + tg\,\theta$$

poiché: $tg(\theta/2) = \left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}\right) = \left(\dfrac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$ sostituendo:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{(1 + \operatorname{sen}\theta) - \cos\theta}{\cos\theta - (1 - \operatorname{sen}\theta)} = \frac{\cos\theta + (1 + \operatorname{sen}\theta)}{(1 - \operatorname{sen}\theta) + \cos\theta}$$

che potevano ottenersi dalle $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

$\frac{}{\cos\theta}$ $\frac{}{1-\sin\theta}$

per somma o differenza di numeratori e denominatori (vedi vol I - l'equivalenza di due frazioni)

poniamo:

$$X = \ln\left|tg\left(\pi/4 + \theta/2\right)\right| = \ln\left|\sec(\theta) + tg(\theta)\right|$$

e possiamo sostituire in questa espressione tutte le forme equivalenti di $\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right)$.

Scriviamola nella forma:

$$e^{x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \left(\sec(\theta) + tg(\theta)\right)$$

si dice: "**θ è la gudermanniana di x**"

e si simboleggia: $\theta = gd(x)$

$$gd(x) = 2\left(\operatorname{arctg}(e^{x}) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$gd(x) = 2\operatorname{arctg}(e^{x}) - \frac{\pi}{2}$$

vediamo ora come la gudermanniana correlaziona le funzioni iperboliche e le funzioni circolari: dalla $e^{x} = \frac{1}{\cos\theta} + tg\,\theta = \sqrt{1+tg^{2}\theta} + tg(\theta)$

si ha:

$$(1 + tg^{2}\theta) = e^{2x} + tg^{2} - 2\,tg\theta \cdot e^{x}$$

$$tg\,\theta = \frac{e^{2x}-1}{2e^{x}} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

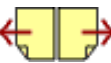
cioè:

$$tg(\theta) = \operatorname{senh}(x)$$

$tg(\theta) = \tanh(x)$

analogamente otteniamo:

$$\operatorname{senh}(x) = tg(\theta)$$
$$\tanh(x) = \operatorname{sen}(\theta)$$
$$\cosh(x) = \frac{1}{\cos(\theta)} = \sec(\theta)$$
$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = tg\left(\theta/2\right)$$

$\left(\operatorname{sen}\theta = tg\,\theta \big/ \sqrt{1+tg^2\theta} = \operatorname{senh}(x)/\cosh(x) = \tanh(x)\right).$

abbiamo visto: $\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)+1} = \frac{\tanh(x)}{1+\frac{1}{\cosh(x)}}$

perciò:

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{1+\cos\theta} = tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} = \frac{(e^x - 1)}{(e^x + 1)} = \frac{(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})}{i(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})} = \frac{(e^{i\theta} - 1)}{i(e^{i\theta} + 1)}$$

$$\left(\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}\right) = i\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$$

se $(\theta = gd(x))$: $\tanh\left(\frac{i\,gd(x)}{2}\right) = i\tanh\left(\frac{x}{2}\right)$

Si noti come "i" operi sull'argomento e sulla funzione.

La derivata della gudermanniana

$$d\theta = d(gd(x))\,dx = d\left(2\operatorname{arctg}(e^x) - \frac{\pi}{2}\right)dx$$

$$= \left(\frac{2e^x\,dx}{1+e^{2x}}\right) =$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$$

Si noti come la : $\theta = gd(x)$ riesca a correlare le grandezze angolari delle funzioni circolari con gli argomenti delle funzioni iperboliche senza avvalersi dell'immaginario.

Ch. Gudermann chiama l'angolo θ : "Longitudinalzahl di X".

Le coordinate parametriche dell'iperbole

Avvalendosi delle funzioni iperboliche si ha:

$$x = a\cosh(u)$$
$$y = b\,\mathrm{senh}(u)$$

coordinate parametriche dell'iperbole.

Infatti: $\frac{x^2}{a^2} = \cosh^2(u)$; $\frac{y^2}{b^2} = \mathrm{senh}^2(u)$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 = \cosh^2(u) - \mathrm{senh}^2(u)$$

Le equazioni parametriche, avvalendosi della gudermanniana possono scriversi:

$$x = a/\cos(\theta)$$
$$y = b \cdot tg(\theta)$$

ed essendo: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + tg^2$;

$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \tan^2(\theta) = tg^2\theta$;

sottraendo: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

sottraendo: $\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1$

ove: l'angolo $\theta = gd(u)$

Le coordinate polari e parametriche della parabola avvalendosi delle funzioni iperboliche.

dalla: $\rho = \frac{4a \, tg\,\theta}{\cos\theta} = \rho = 4a\, senh(u) \cosh(u)$

cioè: $\rho = 2a\, senh(2u)$ equazione in polari della parabola

dalla $x = 4a\, tg(\theta)$; $y = 4a\, tg^2\theta$ si ha: $x = 4a\, senh(u)$, $y = 4a\, senh^2(u)$ parametriche

Problema inverso sulle coniche

"Dato un qualsiasi polinomio di secondo grado, in due variabili, determinare l'equazione canonica della conica e la posizione degli assi a cui si riferisce."

Un polinomio completo di 2° grado può sriversi:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

e rappresenta l'equazione generale delle coniche.

I coefficienti: a_{11}; $2a_{12}$; a_{22}; $2a_{13}$; $2a_{23}$; a_{33} (non tutti nulli) rappresentano i valori numerici noti dell'equazione da esaminare.

Per il principio di inversione degli indici: $a_{ij} = a_{ji}$; abbiamo:

$a_{11} =$ (coefficiente di x^2)

$a_{11} =$ (coefficiente di x^2)

$a_{12} = a_{21} = \left(\frac{1}{2}\right.$ coefficiente di $\left.x \cdot y\right)$; $(2a_{12})$

$a_{22} =$ (coefficiente di y^2)

$a_{13} = a_{31} = \left(\frac{1}{2}\right.$ coefficiente della $\left.x\right)$; $(2a_{13})$

$a_{23} = a_{32} = \left(\frac{1}{2}\right.$ coefficiente della $\left.y\right)$; $(2a_{23})$

$a_{33} =$ (Valore numerico noto.)

Notiamo subito che l'equazione generale delle coniche, uguagliata a zero, non muta se viene moltiplicata per un qualsiasi $\pm K$ arbitrario. Perciò i coefficienti di una data equazione possono essere stati moltiplicati per un numero $\pm K$ (a noi incognito), tale da falsare il significato dei coefficienti stessi. Tuttavia, se di una data equazione, possiamo stabilire che un certo coefficiente: (per es. a_{11}, oppure a_{22}, oppure a_{33}) è certamente maggiore o minore di zero, mentre nell'equazione figura di segno opposto, in questi casi è opportuno moltiplicare l'intera equazione per (-1), in modo che i segni dei coefficienti corrispondano al loro significato.
(con ciò abbiamo reso l'eventuale $K > 0$).

- Il confronto delle equazioni date con quelle delle rispettive coniche: al centro, ad assi solo ruotati, o solo traslati, ad assi ruotati e traslati, che abbiamo già ricavate, ci consentirà di definire la conica

già ricavate, ci consentirà di definire la conica nella sua reale posizione ed i suoi parametri; e, volendo, si può trovare anche il valore dell'eventuale (±K).

Nel trattare le coniche abbiamo già puntualizzato come l'assenza o la presenza di certi coefficienti può dare informazioni preziose. Comunque tratteremo: passo-passo, il problema inverso.

Le equazioni canoniche e gli assi di riferimento

L'equazione canonica è l'equazione al centro di un sistema di assi, ricavata come luogo geometrico di punti che sottostanno o soddisfano una determinata legge. ——

Per l'ellisse

"Luogo dei punti per i quali la somma delle distanze da due punti detti fuochi è costante."

si ebbe l'equazione: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (canonica)

Attenzione:

abbiamo assunto l'asse x come asse focale e ciò, implica che $a > b$, non solo, ma che, se i fuochi giacciono sulla y (poiché l'asse y è l'asse x ruotato di $\pi/2$ rad. = 90°) l'equazione canonica rimane la stessa con l'avvertenza di specificare: "assi ruotati di $\pi/2$".

Cioè una equazione del tipo: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (ove $b > a$) non è l'equazione canonica, ma è l'equazione dell'ellisse:

l'equazione canonica, ma è l'equazione dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

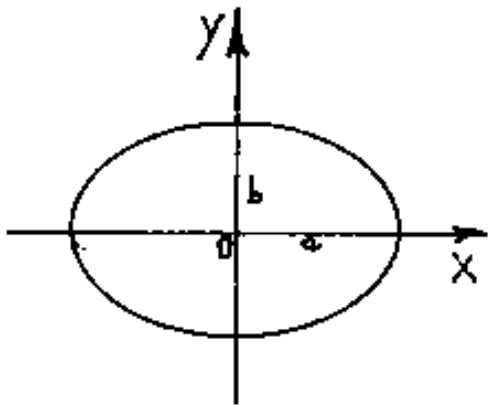
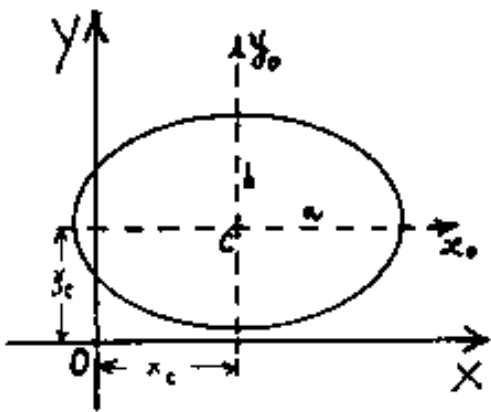
ruotato di $\pi/2$. Infatti ciò, è solo un caso particolare di assi ruotati ove $\alpha = \pi/2$.

Intendiamo per "α" l'angolo che l'asse focale dell'ellisse ha formato col semiasse positivo delle ascisse x, od anche l'angolo antiorario descritto dagli assi

---

La conica può essere al centro assi (equazione canonica), può essere riferita ad assi solo traslati, o solo ruotati, o ruotati e traslati. – Riportiamo ad esempio l'ellisse e gli assi cui si riferisce l'equazione canonica. –

Gli assi di riferimento

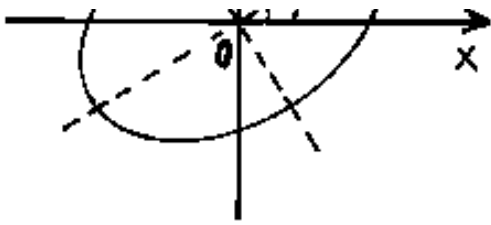
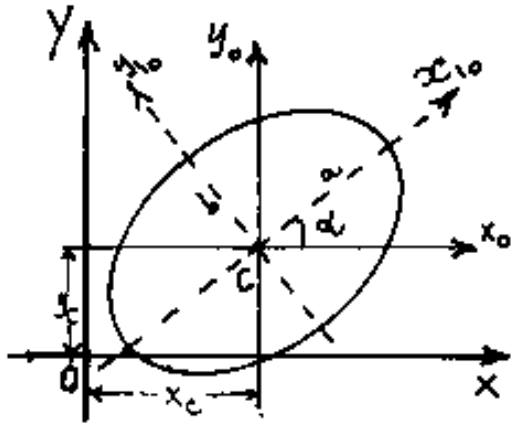
equazioni

assi dell'equazione data con ellisse al centro $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ (canonica)

assi solo traslati : $\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1\right)$

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2(x_c b^2)x - 2(y_c a^2)y + (b^2x_c^2 + a^2y_c^2 - a^2b^2) = 0$$

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0}$$

assi solo ruotati : $\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1\right)$

l'equazione data può presentarsi :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$$

assi ruotati e traslati: $\left(\frac{x_{10}^2}{a^2} + \frac{y_{10}^2}{b^2} = 1\right)$

L'equazione data: $f(x,y) = 0$

è in genere l'intero polinomio di 2° grado.

Avvertenza:

Per ottenere l'equazione di una conica ad assi ruotati e traslati occorre prima fare la ruotazione della conica al centro, e poi fare la traslazione. Se intendessimo di ruotare (applicando le note formule) una conica riferita ad assi traslati (cioè se facessimo prima la traslazione e poi la ruotazione) avverrebbe che la ruotazione non si verificherebbe intorno agli assi al centro della conica, ma intorno agli assi traslati, cui è riferita l'equazione; per cui, ruoterebbe anche il centro della conica e quindi risulterebbero variate le coordinate del centro C.

Chiariamo con un esempio. Ellisse: $a=3$; $b=2$; ruotato di 30°; traslato $x_c=+5$; $y_c=+3$. equazione canonica: $\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\right)$

ad assi solo traslati: $4(x-5)^2+9(y-3)^2-36=0 \rightarrow \boxed{4x^2+9y^2+0-40x-54y+145=0}$

ad assi solo ruotati: $\sin^2\alpha=\frac{1}{4}$; $\cos^2\alpha=\frac{3}{4}$; $a_{11}=\frac{9}{4}+\frac{12}{4}=\frac{21}{4}$; $a_{22}=\frac{4}{4}+\frac{27}{4}=\frac{31}{4}$;

$2a_{12}=\left(-5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $a_{33}=-36 \rightarrow \boxed{21x^2+31y^2-10\sqrt{3}\,xy+0+0-144=0}$

ad assi ruotati e traslati $21(x-5)^2+31(y-3)^2-10\sqrt{3}(x-5)(y-3)-144=0$

$21x^2-210x+31y^2-186y-10\sqrt{3}(xy-5y-3x+15)-144+525+279$

$$\boxed{0 = 21x^2 + 31y^2 - 10\sqrt{3}(xy) + (30\sqrt{3} - 210)x + (50\sqrt{3} - 186)y + (60 - 150\sqrt{3})}$$

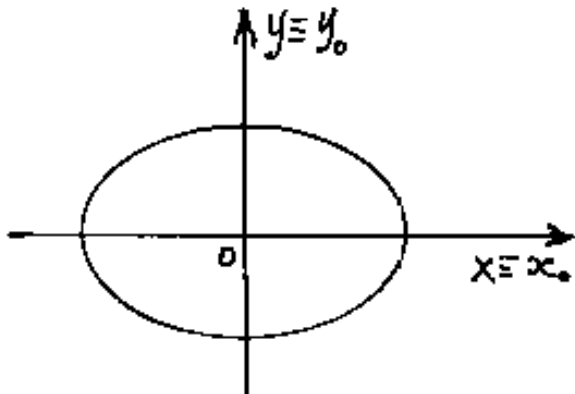
Se applicassimo le formule: $\begin{cases} x_1 = y \operatorname{sen}\alpha + x\cos\alpha \\ y_1 = y\cos\alpha - x\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$ all'equazione ad assi traslati avremmo:

$$4\left(\frac{y}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{3}\right)^2 + 9\left(\frac{y}{2}\sqrt{3} - \frac{x}{2}\right)^2 - 40\left(\frac{y}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{3}\right) - 54\left(\frac{y}{2}\sqrt{3} - \frac{x}{2}\right) + 145 = 0$$

$$y^2 + 3x^2 + (2\sqrt{3})xy + \frac{27}{4}y^2 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{2}\sqrt{3}xy - (20)y - (20\sqrt{3})x - 27\sqrt{3}\cdot y + 27\cdot x + 145 = 0$$

$$\boxed{21x^2 + 31y^2 - 10\sqrt{3}\,xy + (108 - 80\sqrt{3})x - (80 + 108\sqrt{3})y + 580 = 0}$$

Confrontiamo ora le due formule e le rispettive

rappresentazioni grafiche in scala 1:2cm. (cm 0,5 = unità)

indichiamo con x_0, y_0 gli assi cui si riferisce l'equazione canonica

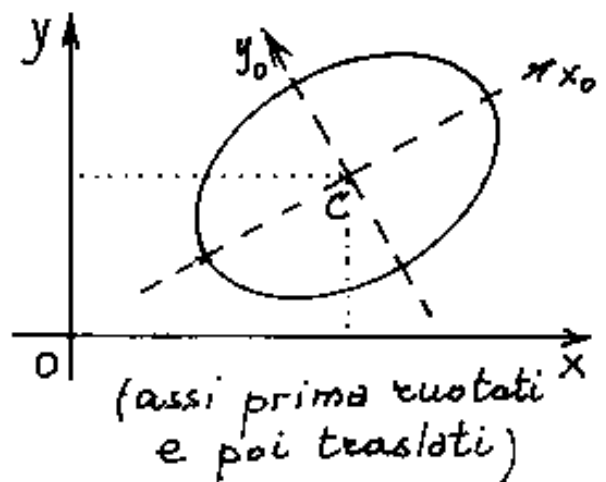
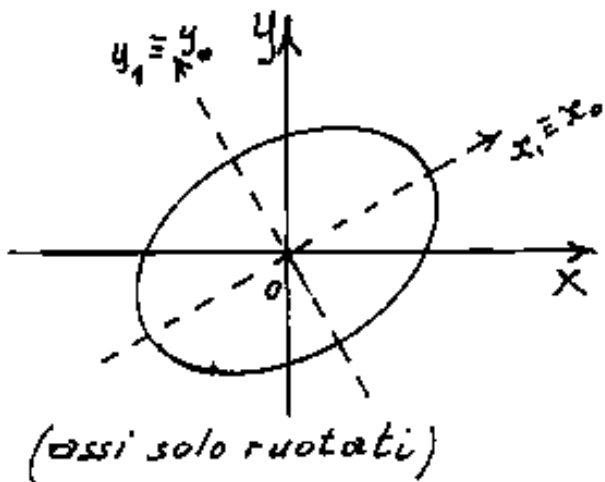
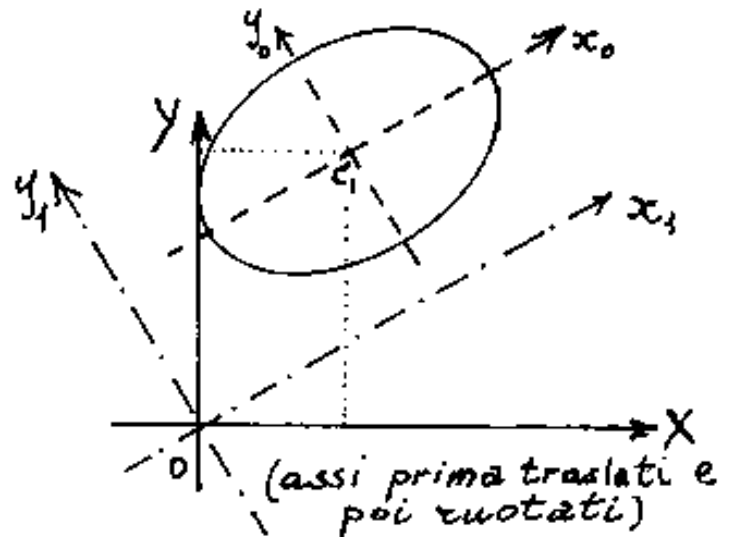
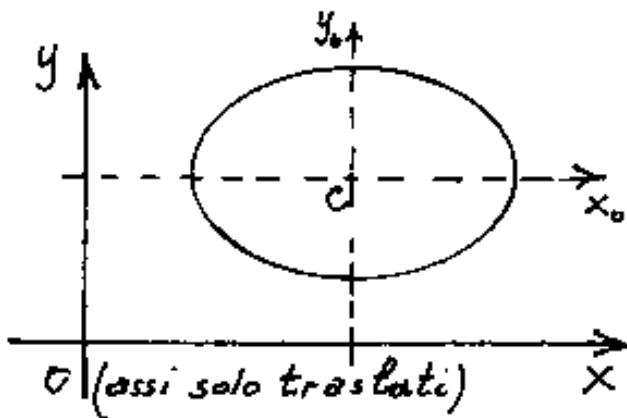
cioè: $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

$y \equiv y_0$, O, $x \equiv x_0$

y, y_0, C, x_0, O, X (assi solo traslati)

y_0, x_0, y, C, y_1, x_1, O, X (assi prima traslati e poi ruotati)

$y_1 \equiv y_0$, y, $x_1 \equiv x_0$, O, X (assi solo ruotati)

y, y_0, x_0, C, O, X (assi prima ruotati e poi traslati)

Le rispettive equazioni:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad = \quad \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1}$$ equaz. canonica

$$\boxed{4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145 = 0}$$ equaz. ad assi solo traslati $(x_c = 5 \; ; \; y_c = 3)$

$$\boxed{21x^2 + 31y^2 - (10\sqrt{3})xy - 144 = 0}$$ equaz. ad assi solo ruotati $\left(\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}\right)$

$$\boxed{21x^2 + 31y^2 + 2(-5\sqrt{3})xy + 2(15\sqrt{3} - 105)x + 2(25\sqrt{3} - 93)y + (660 - 150\sqrt{3}) = 0}$$ ad assi ruotati e traslati

$$\boxed{21x^2 + 31y^2 + 2(-5\sqrt{3})xy + 2(54 - 40\sqrt{3})x - 2(40 + 54\sqrt{3})y + 580 = 0}$$ eq ad assi prima traslati poi ruotati

E' bene aver presente che se una figura piana ruota, mantenendosi nello stesso piano, intorno ad un punto "P", tutti i punti della figura, escluso P, traslano; mentre tutti i segmenti della figura, ruotano dello stesso angolo e traslano coi punti che li compongono. Ciò implica che gli assi possono essere: "solo ruotati", ma le figure ad essi riferite, in effetti, hanno anche traslazioni. Una figura che trasla (assi solo traslati) non è affetta da ruotazione, e, sia prima che dopo la traslazione sia rispetto agli assi originari, sia rispetto agli assi solo traslati, i suoi segmenti si mantengono paralleli.

L'ellisse riferito prima ad assi traslati e poi ad assi ruotati ci aveva portato all'equazione:

$$21x^2+31y^2+2(-5\sqrt{3})xy+2(54-40\sqrt{3})x+2(40-54\sqrt{3})y+580=0$$

che differisce dall'equazione ad assi ruotati e traslati solo nei coefficienti: $2a_{13}$; $2a_{23}$; $2a_{33}$.

L'equazione generale dell'ellisse ad assi ruotati e traslati

L'equazione generale dell'ellisse ad assi ruotati e traslati

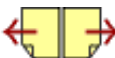
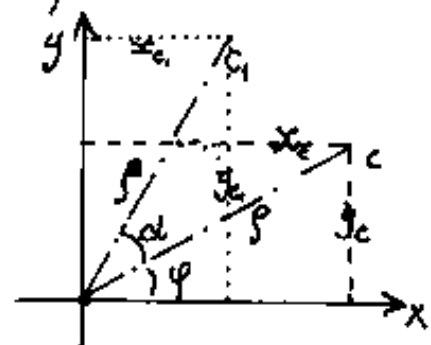
è: $a_{11} = (a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha) = 9\frac{1}{4} + 4\frac{3}{4} = \frac{21}{4}$

$a_{22} = (a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha) = 9\frac{3}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{31}{4}$

$2a_{12} = ((b^2 - a^2)\sin 2\alpha) = (4-9)\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{5}{2}\sqrt{3} = -\frac{10}{4}\sqrt{3}$

$2a_{13} = -2(x_c a_{11} + y_c a_{12}) = -2\left(5\frac{21}{4} + 3\left(-\frac{5}{4}\sqrt{3}\right)\right) = -2\left(\frac{105 - 15\sqrt{3}}{4}\right)$

$2a_{23} = -2(y_c a_{22} + x_c a_{12}) = -2\left(3\frac{31}{4} + 5\left(-\frac{5}{4}\sqrt{3}\right)\right) = -2\left(\frac{93 - 25\sqrt{3}}{4}\right)$

$a_{33} = (x_c^2 a_{11} + y_c^2 a_{22} + x_c y_c 2a_{12} - a^2 b^2) = \left(25\cdot\frac{21}{4} + 9\frac{31}{4} + 15\left(-\frac{10}{4}\sqrt{3}\right) - \frac{9\cdot 4\cdot 4}{4}\right) = \left(\frac{660 - 150\sqrt{3}}{4}\right)$

Se moltiplichiamo per 4 otteniamo i coefficienti della nostra equazione ad assi ruotati e traslati.

Calcoliamo ora le nuove coordinate del centro dell'ellisse, traslato di $x_c = 5$; $y_c = 3$ e successivamente riferito ad assi ruotati.

$$\rho = \sqrt{y_c^2 + x_c^2} \; ; \; \operatorname{sen}\varphi = \frac{y_c}{\rho} \; ; \; \cos\varphi = \frac{x_c}{\rho} \; ; \; y_{c_1}/\rho = \operatorname{sen}(\alpha+\varphi) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\operatorname{sen}\varphi)$$

$$y_{c_1}/\rho = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x_c}{\rho} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{y_c}{\rho}\right) \rightarrow \boxed{y_{c_1} = \frac{1}{2}\left(5 + 3\sqrt{3}\right)}$$

$$x_{c_1}/\rho = \cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{x_c}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{y_c}{\rho}\right) \rightarrow \boxed{x_{c_1} = \frac{1}{2}\left(5\sqrt{3} - 3\right)}$$

calcoliamo i coefficienti dell'equazione

$$2a_{13} = -2\left(x_{c_1}a_{11} + y_{c_1}a_{12}\right) = -2\left[\left(\frac{1}{2}5\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{21}{4} + \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\left(-\frac{5}{4}\sqrt{3}\right)\right] \rightarrow \frac{\left(-80\sqrt{3} + 108\right)}{4}$$

$$2a_{23} = -2\left(y_{c_1}a_{22} + x_c a_{12}\right) = -2\left[\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\frac{31}{4} + \left(\frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{4}\sqrt{3}\right)\right] \rightarrow -\left(\frac{80 + 108\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$a_{33} = \left(x_{c_1}^2 a_{11} + y_{c_1}^2 a_{22} + x_{c_1}y_{c_1}2a_{12} - a^2b^2\right) = \left[\left(\frac{84 - 30\sqrt{3}}{4}\right)\frac{21}{4} + \left(\frac{52 + 30\sqrt{3}}{4}\right)\frac{31}{4} + \left(\frac{16 + 60\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{-10\sqrt{3}}{4}\right) + 36\right]$$

$$a_{33} = \frac{1}{4}\left(441 - \frac{315}{2}\sqrt{3} + 403 + \frac{465}{2}\sqrt{3} - 120 - 75\sqrt{3} - 144\right) \rightarrow \left(\frac{580}{4}\right)$$

Ritorna l'equazione ottenuta per rotazione di assi di un ellisse non al centro, cioè già traslato.

Poiché, dato un polinomio di 2° grado in due variabili, dobbiamo trovare la posizione degli assi: x_0, y_0

bili, dobbiamo trovare la posizione degli assi: x_0, y_0 avendo in c il centro e rispetto ai quali l'ellisse ha l'equazione canonica; è evidente che i dati della traslazione x_c ed y_c si riferiscono al centro dell'ellisse e non possono essere mutevoli in funzione dell'angolo di rotazione. Ciò giustifica la nostra avvertenza.

La individuazione delle coniche

Data una equazione del tipo:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

dal determinante: (che già conosciamo)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{(conica degenere)} \\ \neq 0 \rightarrow \text{(conica non degenere)} \end{cases}$$

e dal minore:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ abbiamo:

$A = 0 \rightarrow A_{33}$:

- $> 0 \rightarrow$ (coppia di rette convergenti immaginarie coniugate)
- $= 0 \rightarrow$ (coppia di rette parallele) $(a_{11} \neq 0)$ A_{22}:
  - $< 0 \rightarrow$ (reali e distinte)
  - $= 0 \rightarrow$ (coincidenti)
  - $> 0 \rightarrow$ (immaginarie coniugate)
- $< 0 \rightarrow$ (coppia di rette reali e distinte)

A

1

$> 0 \rightarrow$ (ellisse / immaginario)

$\neq 0 \rightarrow A_{33}$

- $> 0 \rightarrow$ (caso ellittico) $\rightarrow$ $(A)(a_{11})$ ed $(A)(a_{22})$
  - $> 0 \rightarrow$ (immaginario)
  - $< 0 \rightarrow$ (ellisse reale)
- $= 0 \rightarrow$ (caso parabolico) $\rightarrow$ (Parabola)
- $< 0 \rightarrow$ (caso iperbolico) $\rightarrow$ (Iperbole) $\rightarrow$ $(a_{11} + a_{22} = 0)$ $\rightarrow$ (iperbole equilatera)

Attenzione! Poiché i coefficienti a_{ij} possono essere irrazionali o trascendenti, occorre avere attenzione al caso parabolico: $(A_{33}=0)$ (nei computer program. $|A_{33}| < 10^{-7}$).

Occorre inoltre avvertire che, prima di passare all'analisi dei singoli casi: (ellittico, parabolico, iperbolico), è necessario essere sicuri dei calcoli; pertanto, sia che si proceda algebricamente con calcoli "a mano", sia che si programmi in computer, il determinante A deve essere calcolato in due modi distinti:

I modo (Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A = (+a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{31}a_{21}a_{32}) + (-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})$$

II modo (sviluppo di minori)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} = (a_{11}a_{22}) - (a_{12}a_{21}) = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{32} = (a_{11}a_{23}) - (a_{13}a_{21})$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{31} = (a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22})$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

cioè $$\boxed{\underset{2}{A} = A_{33}a_{33} - A_{32}a_{32} + A_{31}a_{31}}$$

se la differenza: $\left|\underset{1}{A} - \underset{2}{A}\right| > 10^{-n}$ cioè della precisione prefissata occorre spingere i calcoli ad un maggior numero di cifre decimali, specie se trattasi del caso parabolico, ove A_{33} può risultare piccolissimo ed in effetti è zero o viceversa può risultare = zero ed invece è un caso ellittico o un caso iperbolico.

Il caso ellittico

$(A_{33} > 0)$; $(A a_{11} < 0)$; $(A a_{22} < 0)$. → (Ellisse reale)

l'equazione può presentarsi:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$ ellisse al centro $(a_{22} > a_{11})$ $(a_{22} < a_{11})$ (ruotato di $\pi/2$)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$$ ellisse traslato sull'asse x

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$ ellisse traslato sull'asse y

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$ ellisse ad assi traslati

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$$ ellisse ruotato (al centro assi)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{33} = 0$$ ellisse ruotato e traslato in x.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$ ellisse ruotato e traslato in y.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

ellisse ad assi ruotati e traslati

Si noti che la presenza dei coefficienti implica:

$2a_{12}(xy)$ che l'ellisse è ad assi ruotati

$2a_{13}(x)$ che l'ellisse è traslato in x

$2a_{23}(y)$ che l'ellisse è traslato in y

Ellisse al centro

L'equazione: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$ corrisponde

alla equazione: $K s_1^2 x^2 + K s_2^2 y^2 - K s_1^2 s_2^2 = 0$

Che sia un ellisse è già stato accertato, si noti che:
$a_{33} < 0$ è di segno opposto ad a_{11} ed a_{22} (Eventualmente si può moltiplicare per (-1) per avere $a_{33} < 0$).

$$\frac{-a_{33}}{a_{11}} = \frac{+K s_2^2 s_1^2}{+K s_1^2} = s_2^2 \Rightarrow \text{semiasse dell'ellisse} = \sqrt{s_2^2} = s_2$$

$$\frac{-a_{33}}{a_{22}} = \frac{+K s_2^2 s_1^2}{K s_2^2} = s_1^2 \Rightarrow \text{semiasse dell'ellisse} = \sqrt{s_1^2} = s_1$$

$$K = a_{11}/s_2^2 = a_{22}/s_1^2 = \text{costante moltiplicativa (arbitraria)}$$

Si considera "asse focale" e si indica con la lettera "a" il maggiore fra s_1 ed s_2

s_2:
- $> s_1 \rightarrow s_2 = a$; $s_1 = b$ ellisse al centro: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- $= s_1 \rightarrow$ cerchio al centro di raggio $R = s_1 = s_2$
- $< s_1 \rightarrow s_1 = a$; $s_2 = b$ ellisse al centro ruotato di

$< s_1 \rightarrow s_1 = a$; $s_2 = b$ ellisse al centro ruotato di

$\pi/2$, l'equazione canonica è ancora $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

cui corrisponde $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ ma l'equazione

da esaminare era: $Ka^2x^2 + Kb^2y^2 - Ka^2b^2 = 0$, ove $(Ka^2 = a_{11})$

quindi se: $(a_{11} < a_{22})$ l'equazione è di un ellisse al centro

con asse focale sull'asse x (come noi consideriamo l'equa-

zione canonica). Se $(a_{11} > a_{22})$ l'asse focale è sulle y (ruotato di $\pi/2$).

Ellisse ad assi solo traslati (in x)

l'equazione: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$ corrisponde alla equazione:

$$K s_1^2 x^2 + K s_2^2 y^2 + (-K 2 s_1^2 x_c) x + (K(s_1^2 x_c^2 - s_2^2 s_1^2)) = 0$$

ed è ad assi solo tralati in x se: $s_2 > s_1$, se invece $s_1 > s_2$ che implica $a_{11} > a_{22}$ l'asse focale è in direzione y, cioè l'ellisse è ruotato di π. Noi consideriamo i semiassi $a > b$; con a = asse focale, sull'asse delle x. Se $a_{11} > a_{22}$ l'asse focale è ruotato di $\pi/2$ sovrapponendosi alla y, e poiché la traslazione dovrà avvenire dopo la rotazione, il centro dell'ellisse sarà sull'asse x, ma l'asse focale sarà perpendicolare alle x.

$$\frac{-a_{13}}{a_{11}} = \frac{K s_1^2 x_c}{K s_1^2} = x_c = \text{ascissa del centro ellisse.}$$

dalla $K s_1^2 x_c^2 - K s_2^2 s_1^2 = a_{33} \Rightarrow a_{11}\left(\frac{-a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - a_{33} = K s_2^2 s_1^2 = \left(\frac{a_{13}^2}{a_{11}} - a_{33}\right)$

si ha:

$$\frac{(a_{13}^2/a_{11}) - a_{33}}{a_{11}} = \left(\frac{a_{13}^2 - a_{33} \cdot a_{11}}{a_{11}^2}\right) = \frac{K s_2^2 s_1^2}{K s_1^2} = s_2^2 \rightarrow \sqrt{s_2^2} = s_2 = (\text{semiasse del } \ldots)$$

$$\frac{\ldots}{a_{11}} = \left(\frac{\ldots}{a_{11}^2}\right) = \frac{\ldots}{K s_1^2} = s_2 \rightarrow \sqrt{s_2^2} = s_2 = \left(\frac{\text{semiasse del}}{\text{l'ellisse}}\right)$$

$$\frac{\left(\left(a_{13}^2 / a_{11}\right) - a_{33}\right)}{a_{22}} = \frac{K s_2^2 s_1^2}{K s_2^2} = s_1^2 \rightarrow \sqrt{s_1^2} = s_1 = \left(\text{semiasse dell'ellisse}\right)$$

detto "a" = asse focale il maggiore fra s_1 ed s_2; e "b" l'altro asse avremo l'equazione canonica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

se: $(s_2 > s_1) \rightarrow \boxed{b^2x^2 + a^2y^2 - 2(b^2x_c)x + (b^2x_c^2 - a^2b^2) = 0}$; (asse focale sulle x)

se: $(s_1 > s_2) \rightarrow \boxed{a^2x^2 + b^2y^2 - 2(a^2x_c)x + ((a^2x_c^2) - a^2b^2) = 0}$; (asse focale: $(x = x_c)$).

Ellisse ad assi solo traslati (in y)

L'equazione data: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

corrisponde alla: $K s_1^2 x^2 + K s_2^2 y^2 - 2(K s_2^2 y_c)\, y + (K s_2^2 y_c^2 - K s_1^2 s_2^2) = 0$

analogamente al caso precedente:

$$\frac{-a_{23}}{a_{22}} = \frac{K s_2^2 y_c}{K s_2^2} = y_c = \text{ordinata del centro ellisse}$$

$$K s_2^2 s_1^2 = K s_2^2 y_c^2 - a_{33} = a_{22}\left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - a_{33} \rightarrow K s_2^2 s_1^2 = (a_{23}^2/a_{22} - a_{33})$$

$$\frac{(a_{23}^2/a_{22}) - a_{33}}{a_{11}} = \frac{K s_2^2 s_1^2}{K s_1^2} = s_2^2 \rightarrow \sqrt{s_2^2} = \text{semidiametro dell'ellisse}$$

$$\frac{(a_{23}^2/a_{22}) - a_{33}}{a_{22}} = \frac{K s_2^2 s_1^2}{K s_2^2} = s_1^2 \rightarrow \sqrt{s_1^2} = \text{semidiametro dell'ellisse}$$

posto: "a" = (asse focale) il maggiore fra "s_1" ed "s_2", l'equazione canonica dell'ellisse è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; (b = altro asse)

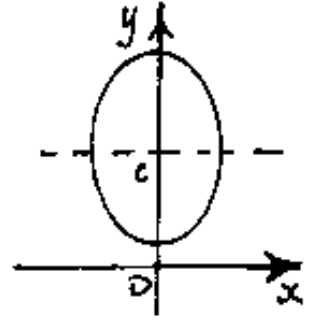
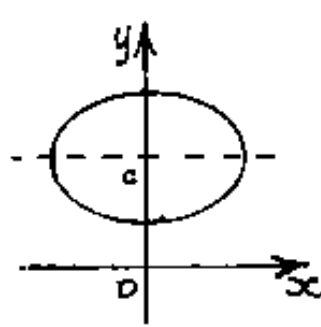
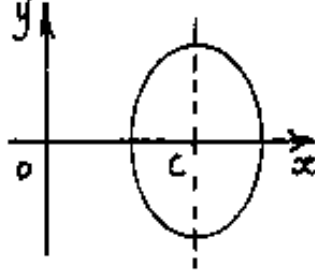
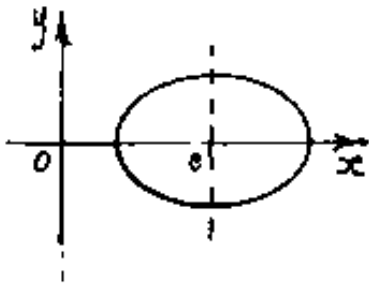
se: $s_2 > s_1$ l'equazione sarà: $b^2x^2 + a^2y^2 - 2(a^2y_c)\, y + a^2y_c^2 - a^2b^2 = 0$

e l'asse focale sarà la retta: $y = y_c$ ellisse non ruotato.

se:

se: $S_1 > S_2$ l'equazione sará: $a^2X^2+b^2y^2-2(b^2y_c)y+(b^2y_c^2-a^2b^2)=0$

L'asse focale sará sulle y e l'ellisse è ruotato di $\frac{\pi}{2}$ rad.

Schema dei casi trattati:

y O c x y O C x y c O x y c O x

Ellisse ad assi traslati (in x ed in y)

L'equazione data: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

corrisponde alla: $KS_1^2x^2 + KS_2^2y^2 - 2(KS_1^2x_c)x - 2(KS_2^2y_c)y + K(S_1^2x_c^2 + S_2^2y_c^2 - S_1^2S_2^2) = 0$

$\dfrac{-a_{13}}{a_{11}} = x_c$; $\dfrac{-a_{23}}{a_{22}} = y_c$ coordinate del centro ellisse

$$KS_1^2S_2^2 = \left(a_{11}\left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - a_{33}\right) = \left((a_{13}^2/a_{11}) + (a_{23}^2/a_{22}) - a_{33}\right)$$

$$\frac{(a_{13}^2/a_{11}) + (a_{23}^2/a_{22}) - a_{33})}{a_{11}} = S_2^2$$ → $\sqrt{S_2^2}$ = semiasse dell'ellisse.

$$\frac{((a_{13}^2/a_{11}) + (a_{23}^2/a_{22}) - a_{33})}{a_{22}} = S_1^2$$ → $\sqrt{S_1^2}$ = semiasse dell'ellisse

posto "a" (asse focale) il maggiore fra "S_1" ed "S_2", l'equazione canonica dell'ellisse è: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; (b = altro asse)

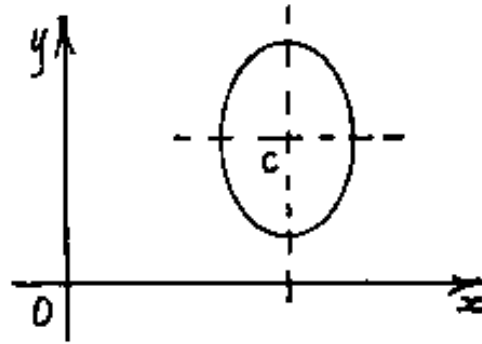
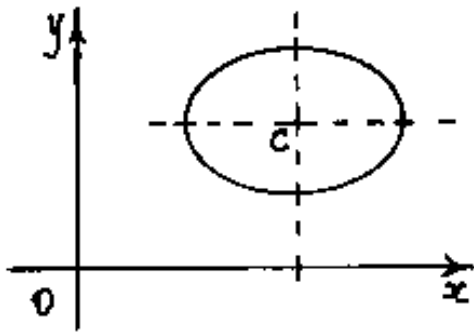
se $S_2 > S_1$ l'equazione è: $b^2x^2 + a^2y^2 - 2(b^2x_c)x - 2(a^2y_c)y + (b^2x_c^2 + a^2y_c^2 - a^2b^2) = 0$

l'asse focale è sulla retta: $y = y_c$. (l'ellisse non è ruotata)

se $S_1 > S_2$ l'equazione è: $a^2x^2 + b^2y^2 - 2(a^2x_c)x - 2(b^2y_c)y + (a^2x_c^2 + b^2y_c^2 - a^2b^2) = 0$

se $\boxed{s_1 > s_2}$ l'equazione è: $\boxed{a^2x^2+b^2y^2-2(a^2x_c)x-2(b^2y_c)y+(a^2x_c^2+b^2y_c^2-a^2b^2)=0}$

l'asse focale è sulla retta $x = x_c$ (l'ellisse è ruotato di $\frac{\pi}{2}$ rad)

Gli schemi dei due casi:

y
C
0
x

y
C
0
x

Ellisse al centro ad assi solo ruotati

L'equazione data: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$

corrisponde alla: (ridurre $a_{33} < 0$)

$$K(a^2 sen^2\alpha + b^2 cos^2\alpha)x^2 + K(a^2 cos^2\alpha + b^2 sen^2\alpha)y^2 + K((b^2-a^2)sen(2\alpha))xy - Ka^2b^2 = 0$$

$(a_{11} + a_{22}) = K(a^2 + b^2)$ (essendo $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$)

$(a_{11} - a_{22}) = K(-a^2 + b^2)cos(2\alpha)$ (essendo $cos^2\alpha - sen^2\alpha = cos(2\alpha)$)

$$\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})} = \frac{K(b^2-a^2)sen(2\alpha)}{K(b^2-a^2)cos(2\alpha)} = \boxed{tang(2\alpha) = \left(\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})}\right)}$$

$$\frac{1}{cos(2\alpha)}(a_{11} - a_{22}) = (a_{11} - a_{22})\sqrt{1 + tg^2(2\alpha)} = (a_{11} - a_{22})\sqrt{1 + \frac{(2a_{12})^2}{(a_{11} - a_{22})^2}} =$$

$$\boxed{K(-a^2 + b^2) = -\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}$$

sommando e sottraendo alla: $(a_{11} + a_{22}) = K(a^2 + b^2)$ si ha:

$$\boxed{2Kb^2 = (a_{11} + a_{22}) - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}} \quad ; \quad \boxed{2Ka^2 = (a_{11} + a_{22}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}$$

$2 \quad 2Ka^2b^2$ ... a^2 ...

$$a^2 = \frac{2K a^2 b^2}{-2K b^2}$$

$$b^2 = \frac{-2K a^2 b^2}{-2K a^2}$$

$$\left.\begin{matrix} a^2 \\ b^2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{-2a_{33}}{(a_{11}+a_{22}) \mp \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})}\right) = \begin{cases} (\alpha) \rightarrow (se: 2a_{12} < 0) \\ (90^\circ + \alpha) \rightarrow (se: 2a_{12} > 0) \end{cases}$$

Per comprendere come é possibile superare l'ambiguitá dei segni della radice, o la scelta dell'angolo da arctg, .

riportiamo una tavola di conti fatti per un ellisse: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

che per $\alpha=0$ ha l'asse focale sull'asse X e ruota antiorario.

avremo: $(b^2-a^2)=-16$; $a_{33}=-225$; $K=+1$

per simmetria dell'ellisse	funzioni angolari				$25\,sen^2\alpha+9\cos^2\alpha$	$25\cos^2\alpha+9\,sen^2\alpha$	$(-16)\,sen(2\alpha)$	$(a_{11}-a_{22}) = (-16)\cos(2\alpha)$	$\frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})}$	NOTE
	α	$sen^2\alpha$	$\cos^2\alpha$	$sen(2\alpha)$	a_{11}	a_{22}	$2a_{12}$		$tg(2\alpha)$	
180°	0	0	1	0	9	25	0	−16	0	asse focale nel I e III quadrante; $\cos(2\alpha)>0$
210°	30°	1/4	3/4	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	13	21	$-8\sqrt{3}$	−8	$+\sqrt{3}$	
225°	45°	1/2	1/2	1	17	17	−16	0	$\pm\infty$	$\cos(2\alpha)<0$
240°	60°	3/4	1/4	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	21	13	$-8\sqrt{3}$	+8	$-\sqrt{3}$	
270°	90°	1	0	0	25	9	0	+16	0	asse focale nel II e IV quadrante
300°	120°	3/4	1/4	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	21	13	$+8\sqrt{3}$	+8	$+\sqrt{3}$	
315°	135°	1/2	1/2	−1	17	17	+16	0	$\pm\infty$	$\cos(2\alpha)>0$
330°	150°	1/4	3/4	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	13	21	$+8\sqrt{3}$	−8	$-\sqrt{3}$	
360°	180°	0	1	0	9	25	0	−16	0	

poiche': $(a_{11}-a_{22})$ e $\cos(2\alpha)$ sono di segno opposto, il loro

poiché: $(a_{11}-a_{22})$ e $\cos(2\alpha)$ sono di segno opposto, il loro

prodotto $= K(-a^2+b^2)\cos(2\alpha) = -\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2} < 0$ (per $K>0$) cioè: $(a^2 > b^2)$.

$\tan(2\alpha)$:
- $> 0 \rightarrow 2a_{12}$:
  - $< 0 \rightarrow 0 \leq \alpha \leq 45°$
  - $> 0 \rightarrow 90 < \alpha < 135° \rightarrow$ (vale $90+\alpha$)
- $< 0 \rightarrow 2a_{12}$:
  - $< 0 \rightarrow 45° < \alpha < 90$
  - $> 0 \rightarrow 135 < \alpha < 180 \rightarrow$ (vale $90+\alpha$)

cioè: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})}\right) =$
- $(\alpha°) \longrightarrow 2a_{12} < 0$
- $(90°+\alpha) \longrightarrow 2a_{12} > 0$

Ellisse ad assi ruotati e traslati

L'equazione data sia completa:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Siano x_c ed y_c le coordinate del centro dell'ellisse rappresentato dall'equazione data, essa corrisponde:

$$\begin{cases} \overset{a_{11}}{K\left(s_2^2 \operatorname{sen}^2\alpha + s_1^2\cos^2\alpha\right)}x^2 + \overset{a_{22}}{K\left(s_2^2\cos^2\alpha + s_1^2\operatorname{sen}^2\alpha\right)}y^2 + \overset{2a_{12}}{K\left[(s_1^2 - s_2^2)\operatorname{sen}2\alpha\right]}xy + \\ -\overset{2a_{13}}{\left[2a_{11}x_c + 2a_{12}y_c\right]}x - \overset{2a_{23}}{\left[2a_{22}y_c + 2a_{12}x_c\right]}y + \\ + \overset{a_{33}}{\left[a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}x_c y_c - Ks_1^2s_2^2\right]} = 0 \end{cases}$$

I primi tre termini sono uguali a quelli dell'eq. ad assi ruotati

Il quarto e quinto termine (corrispondenti ad $2a_{13}x$ e $2a_{23}y$,) permettono il calcolo delle coordinate: x_c; y_c.

Il sesto termine (termine noto a_{33}) il K figura solo ove non vi sono fattori come a_{11}, a_{22}, $2a_{12}$ che hanno in se il K.

Considériamo il sistema:

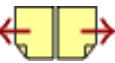
$$\begin{cases} 2a_{11}x_c + 2a_{12}y_c = -2a_{13} \\ 2a_{21}x_c + 2a_{22}y_c = -2a_{23} \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33}$$

$$A_{33} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \qquad \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = (-a_{13}a_{22} + a_{12}a_{23}) = A_{31}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix} = (-a_{11}a_{23} + a_{13}a_{12}) = -A_{32}$$

$$x_c = \frac{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{A_{31}}{A_{33}}$$

$$y_c = \frac{(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} = \frac{-A_{32}}{A_{33}}$$

coordinate del centro dell'ellisse

(centro assi traslati dopo la rotazione)

Sostituendo i valori di x_c ed y_c nell'espressione del coefficiente a_{33}, possiamo calcolare:

$$K s_1^2 s_2^2 = a_{11} x_c^2 + a_{22} y_c^2 + 2a_{12} x_c y_c - a_{33}$$

Rilevato che i primi tre coefficienti dell'equazione data, cioè: a_{11}, a_{22}, $2a_{12}$; corrispondono ai primi tre coefficienti dell'equazione dell'ellisse ad assi solo ruotati; e che il coefficiente a_{33} per assi solo ruotati è: $K s_1^2 s_2^2$ che abbiamo sopra calcolato, abbiamo l'equazione dell'ellisse prima che avvenisse la traslazione e cioè:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_{12} xy - K s_1^2 s_2^2 = 0$$

avremo:

$$\left.\begin{matrix}\alpha \\ \alpha + 90°\end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})}\right)$$ (angoli degli assi dell'ellisse)

$$\frac{2K s_1^2 s_2^2}{(a_{11} + a_{22}) \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 2a_{12}^2}} = \left\langle\begin{matrix} s_2^2 \\ s_1^2 \end{matrix}\right.$$ $s_2^2 = a^2 > b^2 = s_1^2$

che forniscono i parametri dell'ellisse $\frac{(x - x_c)^2}{\ldots} + \frac{(y - y_c)^2}{\ldots} = 1$

che fornisce i parametri dell'ellisse $\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$

se: $\boxed{2a_{12}<0} \rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})}\right)=(\alpha) \rightarrow$ l'asse focale è nel I e III quadr. degli assi traslati

se: $\boxed{2a_{12}>0} \rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})}\right)=(90^\circ+\alpha) \rightarrow$ l'asse focale è nel II e IV quadr. degli assi traslati

---

Esempio numerico

equazione data: $36x^2+29y^2+24xy+624x+458\cdot y+3149=0$

$$A=\begin{vmatrix} 36 & 12 & 312 \\ 12 & 29 & 229 \\ 312 & 229 & 3149 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{33}\cdot 3149 - A_{32}\cdot 229 + A_{31}\cdot 312 =$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 29 \end{vmatrix} = 36\cdot 29 - 12^2 = 900 \rightarrow A_{33}\cdot 3149 = 2.834.100$$

$$-A_{32}=\begin{vmatrix} 36 & 312 \\ 12 & 229 \end{vmatrix} = 36\cdot 229 - 12\cdot 312 = +4500 \rightarrow +A_{32}\cdot 229 = -1.030.500$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 12 & 312 \\ 29 & 229 \end{vmatrix} = 12\cdot 229 - 29\cdot 312 = -6300 \rightarrow A_{31}\cdot 312 = -1.965.600$$

$$A = -162.000$$

si controlla

$$\begin{vmatrix} 36 & 12 & 312 \\ 12 & 29 & 229 \\ 312 & 229 & 3149 \end{vmatrix}\begin{matrix} 36 & 12 \\ 12 & 29 \\ 312 & 229 \end{matrix} = \quad + 36\cdot 29\cdot 3149 + 12\cdot 229\cdot 312 + 312\cdot 12\cdot 229$$

$$= (5002308 - 5164308) = -162000$$

$A \neq 0$ quindi: conica non degenere

$A_{33} > 0$ quindi: ellisse $\quad \left(k = \frac{A_{33}^2}{-A}\right) = 5$

$A\cdot a_{11} < 0$; $A\cdot a_{22} < 0$ quindi: ellisse reale

$A \cdot a_{11} < 0$; $A \cdot a_{22} < 0$ quindi: ellisse reale

equazione completa → quindi: ellisse ruotato e traslato

$$\begin{cases} x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{-6300}{900} = -7 \; ; \\ y_c = \frac{A_{32}}{A_{33}} = \frac{-4500}{900} = -5 \; ; \end{cases}$$

coordinate del centro dell'ellisse

$(2a_{12} > 0)$ percio' l'asse focale è inclinato di $(90 + \alpha)$

$$\left.\begin{matrix} \alpha \\ 90° + \alpha \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{24}{7}\right) = \begin{cases} 36° \, 52' \, 12'' \\ 126° \, 52' \, 12'' \end{cases}$$

$\alpha = 36° 52' 12''$; (inclinazione dell'asse minore)

$(90° + \alpha) = 126° 52' 12''$; (inclinazione dell'asse focale)

calcoliamo: $K s_1^2 s_2^2 = (a_{11} x_c^2 + a_{22} y_c^2 + 2 a_{12} x_c y_c - a_{33}) =$

$K s_1^2 s_2^2 = (36 \cdot 49 + 29 \cdot 25 + 24 \cdot 35 - 3149) = 180{,}00$

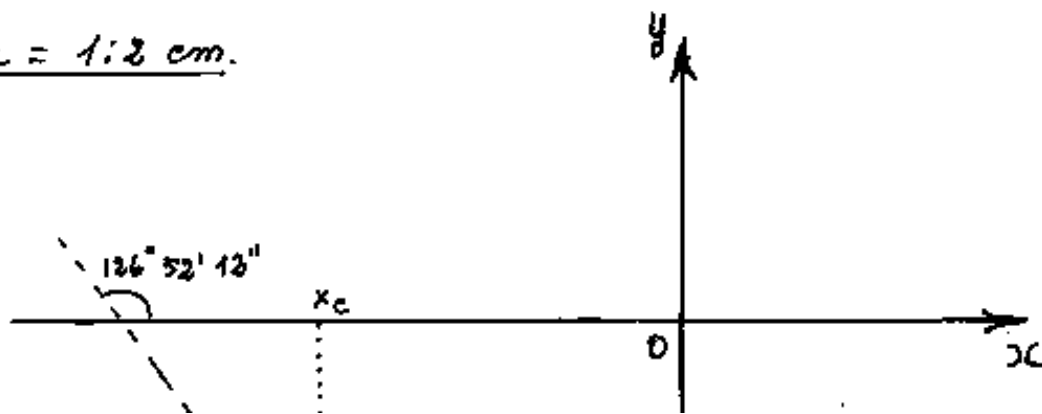
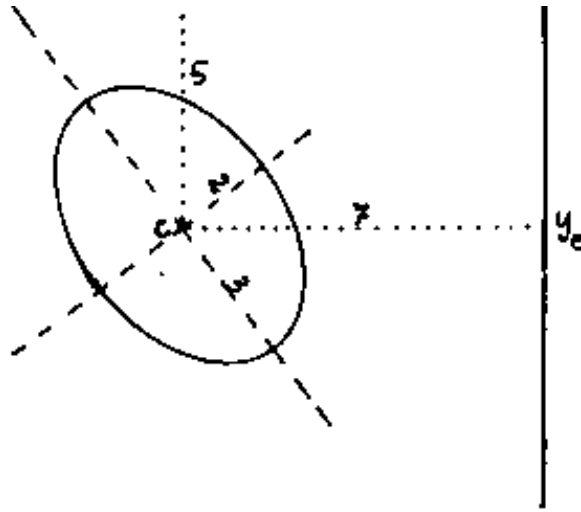
$$\left.\begin{matrix} s_2^2 \\ s_1^2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{2 K s_1^2 s_2^2}{\left((a_{11} + a_{22}) \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 2 a_{12}^2}\right)} = \frac{360}{(65 \pm 25)} \left\langle \begin{matrix} s_2^2 = 9 \rightarrow s_2 = 3 \\ s_1^2 = 4 \rightarrow s_1 = 2 \end{matrix}\right.$$

perciò: $a = 3$; $b = 2$ (parametri dell'ellisse)

equazione canonica al centro: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ellisse

ellisse ruotato di 126°52'12'' e traslato: $C \equiv (-7; -5)$

schema grafico

scala = 1:2 cm.

Caso Iperbolico

$(A_{33} < 0)$ se: $(a_{11} + a_{22}) = 0 \rightarrow$ iperbole equilatera

L'equazione può presentarsi

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

iperbole al centro $(a_{22} > a_{11})$
$(a_{22} < a_{11})$ (ruotata di $\pi/2$)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33}$$

iperbole traslata in x

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33}$$

iperbole traslata in y

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

iperbole ad assi traslati

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33}$$

iperbole su assi ruotati

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

Iperbole ad assi ruotati e traslati

Come per l'ellisse, l'iperbole che manca del termine: "$2a_{12}xy$", e quindi apparirebbe solo traslata o no, poiché: $(2a_{12})$ corrisponde a: $[K(s_1^2+s_2^2)\,sen(2\alpha)]$ e quando $\alpha = 90° \rightarrow (2\alpha)=(180°) \rightarrow sen(2\alpha) = sen(180°) = 0$, quindi se manca il termine $(2a_{12})$ l'iperbole può non essere ruotata, od anche essere ruotata di $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$. Però mentre nell'ellise il diametro (asse) focale "a" era sempre il maggiore fra s_1 e s_2;

nell'iperbole l'asse focale può essere sul maggiore o sul minore dei due diametri: 2a e 2b; ed occorre attenzione per non confondere l'iperbole ruotata di $\pi/2$, con l'iper= bole coniugata.

Noi consideriamo (nell'equazione canonica) che l'iperbole al centro abbia l'asse focale sulle ascisse, ed indichia= mo con "a" il semiasse focale e "b" l'altro semiasse.

L'equazione canonica risulta: $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = (1)$

l'equazione dell'iperbole coniugata: $\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) = (1)$

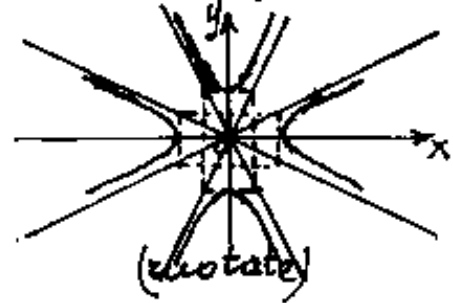
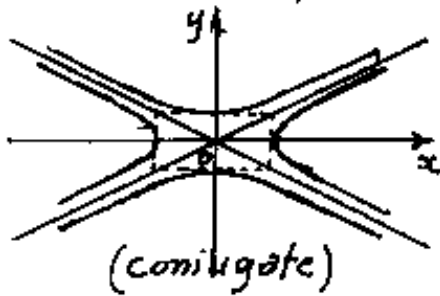
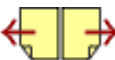
L'equazione dell'iperbole ruotata di $\pi/2$: $\left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}\right) = (1)$

Quindi nell'equazione dell'iperbole coniugata rispet= to all'equazione canonica si ha uno scambio dei segni dei parametri. (fermo restante il segno di una (+1).

Mentre nell'equazione dell'iperbole ruotata, rispetto all'equazione originaria canonica, si ha uno scambio dei quadrati delle coordinate variabili; (si ha uno scambio di assi)

quadranti delle coordinate variabili; (si ha uno scambio di assi)

Così che le iperboli coniugate hanno gli stessi asintoti con angoli supplementari. Le iperboli ruotate hanno asintoti diversi però formanti lo stesso angolo.

(coniugate) (ruotate)

Iperbole al centro

L'equazione data: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$

corrispondente alla: $\pm K s_1^2 x^2 \mp K s_2^2 y^2 \mp K s_1^2 s_2^2 = 0$

dal confronto si nota che a_{11} ed a_{22} hanno segni opposti, e che: $a_{33}/K < 0$ Perciò la prima cosa da fare è rendere $a_{33} < 0$. L'equazione è canonica se con $a_{33} < 0$ si ha:

$a_{11} > 0$; $a_{22} < 0$ ed avremo: $s_2 = a$; $s_1 = b$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Se invece con $a_{33} < 0$ si ha: $a_{11} < 0$ ed $a_{22} > 0$: $s_2 = b$; $s_1 = a$; l'eq. è: $\frac{-x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ possiamo anche dire: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ruotata di $90° = \frac{\pi}{2}$ rad.

l'equazione dell'iperbole coniugata sarebbe: $\left(\frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$

Si ha:

$$\frac{-a_{33}}{a_{11}} = \frac{K s_1^2 s_2^2}{K s_1^2} = s_2^2 \Rightarrow \sqrt{s_2^2} = a = \text{semiasse focale}$$

$$\frac{-a_{33}}{a_{22}} = \frac{K s_1^2 s_2^2}{K s_2^2} = s_1^2 \Rightarrow \sqrt{s_1^2} = b = \text{semiasse secondario}$$

volendo conoscere K

$$\left(\frac{a_{11} \cdot a_{22}}{-a_{33}}\right) = \frac{K^2 s_1^2 s_2^2}{K s_1^2 s_2^2} = K$$

Si noti che l'asse focale è sull'asse cartesiano che ha il coefficiente positivo; ed è quindi della massima importanza stabilire i segni giusti dell'equazione, ed eventualmente mutarli moltiplicando l'intera equazione per (-1).

Iperbole ad assi solo traslati (in x)

L'equazione data: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$

corrispondente alla:

$$\pm K s_1^2 X^2 \mp K s_2^2 y^2 \mp 2(K s_1^2 X_c)X + K(\pm s_1^2 X_c^2 - s_1^2 s_2^2) = 0$$

Si noti che la specificazione di a_{33} presenta un termine che non ha doppio segno; sappiamo che: $s_1^2 s_2^2 > 0$ (sono il prodotto di due quadrati), perciò volendo tendere: $K>0$, e quindi attribuire il vero segno ai coefficienti, si confrontano i termini noti delle due espressioni:

$$a_{33} = \pm K s_1^2 X_c^2 - K s_1^2 s_2^2$$

cioè:

$$K s_1^2 s_2^2 = \pm K s_1^2 X_c^2 - a_{33}$$

ma: $\dfrac{a_{13}}{a_{11}} = \dfrac{\mp K s_1^2 X_c}{\pm K s_1^2} = -X_c$; perciò sostituendo:

$> 0 \to K>0$

$K s_1^2 s_2^2 = \pm (a_{13}^2 \ldots - a_{33}$

$$\boxed{K s_1^2 s_2^2 = \pm \frac{(a_{13})^2}{a_{11}} - a_{33}} \quad < 0 \rightarrow K < 0$$

(se $K < 0$: moltiplichiamo per (-1) l'eq. data)

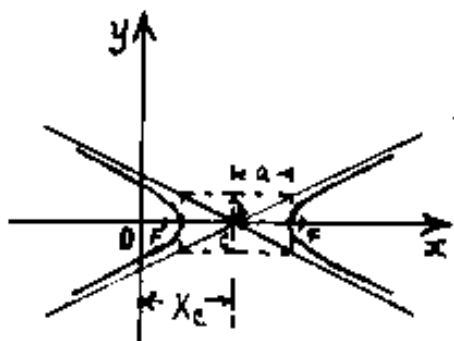
Si hanno quindi due casi:

I) $$\boxed{+(K s_1^2) x^2 - (K s_2^2) y^2 - 2(K s_1^2 x_c) x + (K(s_1^2 x_c^2 - s_1^2 s_2^2)) = 0}$$

II) $$\boxed{-(K s_1^2) x^2 + (K s_2^2) y^2 + 2(K s_1^2 x_c) x + (K(-s_1^2 x_c^2 - s_1^2 s_2^2)) = 0}$$

Nel I caso : $a_{11} > 0$

L'iperbole ha il semiasse "a" sull'asse focale coinci-dente con l'asse X; ed è traslata in X di $X_c = \left(-a_{13}/a_{11}\right)$

y, O, F, F, a, X_c, x

L'equazione:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sviluppata:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2(b^2x_c)x + (+b^2x_c^2 - a^2b^2) = 0$$

confrontata con:

$$(Ks_1^2)x^2 - (Ks_2^2)y^2 - 2(Ks_1^2x_c)x + K(s_1^2x_c^2 - s_1^2s_2^2) = 0$$

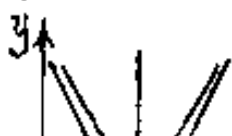
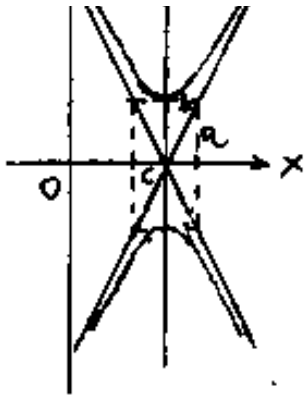
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33}$$

$$b^2 = s_1^2 \; ; \quad a^2 = s_2^2 \; ; \quad \frac{-(a_{11} \cdot a_{22})}{\left(+(a_{13})^2/a_{11} - a_{33}\right)} = \frac{-(Ks_1^2)(-Ks_2^2)}{K s_1^2 s_2} = K$$

$$(s_1^2 = a_{11}/K) \; ; \quad (s_2^2 = a_{22}/K)$$

Nel II caso $a_{11} < 0$

L'iperbole ha il semiasse "a" sull'asse focale ed è parallelo all'asse Y; ed è traslata in x di $X_c = \left(-a_{13}/a_{11}\right)$

y

L'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ è ruotata di

$90° = \frac{\pi}{2}$ rad e traslata in $x + x_c$:

$$-\frac{(x-x_c)^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

da cui:

$$-a^2x^2 + b^2y^2 + 2(a^2x_c)x + (-a^2x_c^2 - a^2b^2) = 0$$

confrontata con: $-(K s_1^2)x^2 + K s_2^2 y^2 + 2(K s_1^2 x_c)x + K(-s_1^2 x_c^2 - a^2b^2) = 0$

$a^2 = s_1^2$; $b^2 = s_2^2$;

$(s_1^2 = a_{11}/K)$; $(s_2^2 = a_{22}/K)$

$$\frac{-(a_{11} \cdot a_{22})}{(-a_{13}^2/a_{11} - a_{33})} = \frac{-(-K s_1^2)(K s_2^2)}{K s_1^2 s_2^2} = K$$

Esempio numerico:

L'equazione data: $-20x^2+45y^2+200x-320=0$

$$K s_1^2 s_2^2 = 10000/_{-20} + 320 = -500+320 = -180 < 0$$

quindi moltiplichiamo per (-1)

$$20x^2-45y^2-2(100)x+320=0 \rightarrow K s_1^2 s_2^2 = +180$$

$a_{11} > 0$ → (asse focale su x)

$$\frac{-(a_{11}\cdot a_{22})}{K s_1^2 s_2^2} = \frac{-(20)(-45)}{180} = K = +5$$

dividendo per "K"

$$4x^2-9y^2-2(20)x+64=0$$

$$(2^2)x^2-(3^2)y-[2(2^2)5]x+(2^2)(5)^2-(2^2)(3)^2=0$$

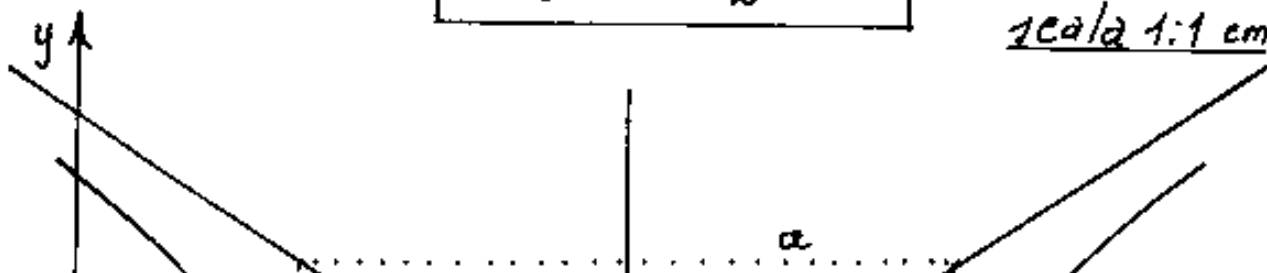
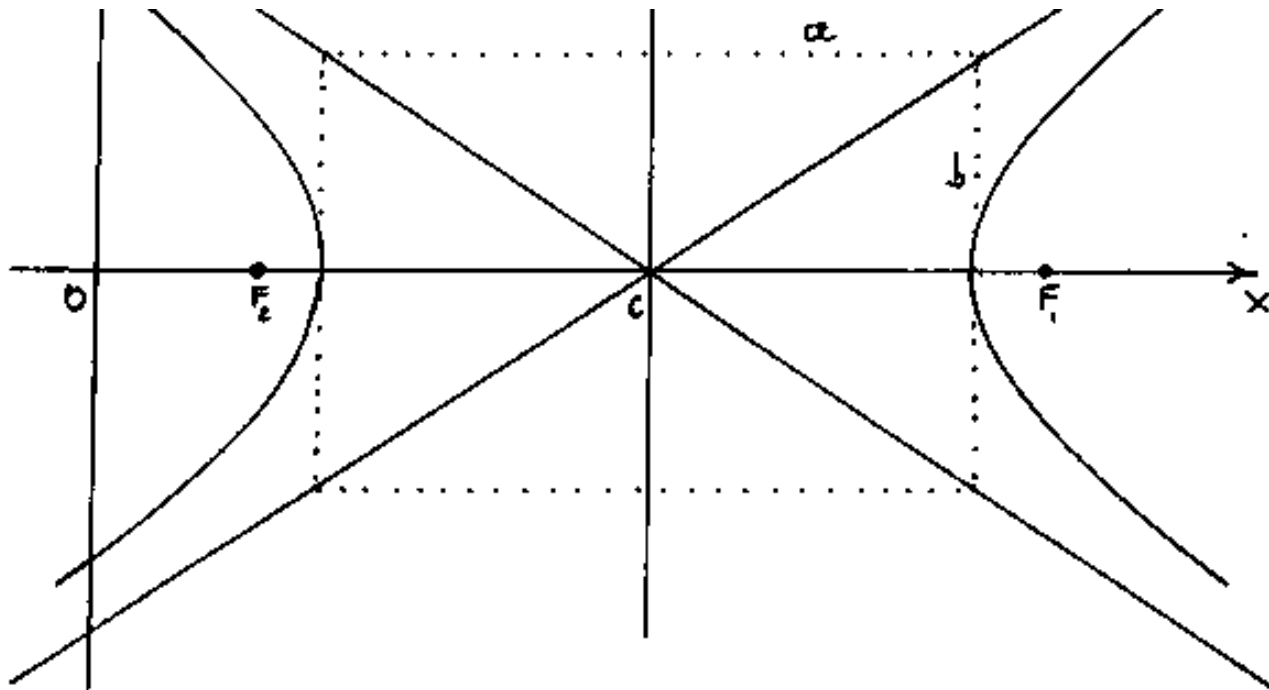
per cui:

$$a=3 \quad b=2 \quad x_c=5$$

L'equazione:

$$\frac{(x-5)^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$$

grafico

scala 1:1 cm.

y

a

a

b

O F2 C F1 X

Iperbole ad assi solo traslati (in y)

L'equazione data: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

corrisponde alla:

$$\pm(K\delta_1^2)x^2 \mp (K\delta_2^2)y^2 \pm 2(K\delta_2^2 y_c)y + K(\mp\delta_2^2 y_c^2 - \delta_1^2\delta_2^2) = 0$$

Confrontiamo i segni con l'equazione dell'iperbole traslata (in x): si nota che il coefficiente: $2a_{23}$ ha segno opposto ad a_{22} e concorde con a_{11}, mentre nell'eq. dell'iperbole traslata (in x). il coefficiente $2a_{13}$ ha segno opposto di a_{11} e concorde con a_{22}. (per $a_{11}>0$; $a_{22}<0$; $2a_{13}<0$; $2a_{23}>0$).

ciò significa di aver considerato $x_c>0$ ed $y_c>0$, e la risoluzione: $x_c = \frac{-a_{13}}{a_{11}}$; $y_c = \frac{-a_{23}}{a_{22}}$, risulta sempre valida qualunque siano i segni di x_c ed y_c.

I coefficienti a_{33}, nei due casi, sono:

$$K(\pm\delta_1^2 x_c^2 - \delta_1^2\delta_2^2) \quad ; \quad K(\mp\delta_2^2 y_c^2 - \delta_1^2\delta_2^2)$$

ove il doppio segno corrisponde rispettivamente a $K\delta_1^2$ e $K\delta_2^2$.

Avremo quindi:

$$\boxed{K J_1^2 J_2^2 = \mp K J_2^2 y_c^2 - J_1^2 J_2^2}$$

> 0 (segni giusti)

< 0 (moltiplicare per (-1))

si hanno due casi:

$$\boxed{+(K J_1^2) X^2 - (K J_2^2) y^2 + 2(K J_2^2 y_c) y + K(-J_2^2 y_c^2 - J_2^2 J_1^2) = 0} \quad \text{I) caso.}$$

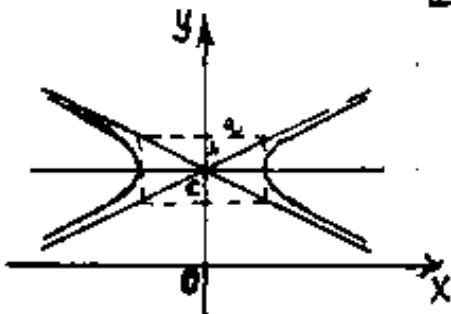
$$\boxed{-(K J_1^2) X^2 + (K J_2^2) y^2 - 2(K J_2^2 y_c) y + K(+J_2^2 y_c^2 - J_2^2 J_1^2) = 0} \quad \text{II) caso.}$$

I° Caso $a_{11} > 0$

L'iperbole ha il semiasse "a" sull'asse focale ed è parallelo all'asse x; l'iperbole è trastata in y di $y_c = \left(\frac{-a_{23}}{a_{22}}\right)$. L'equazione é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$$

che sviluppata:

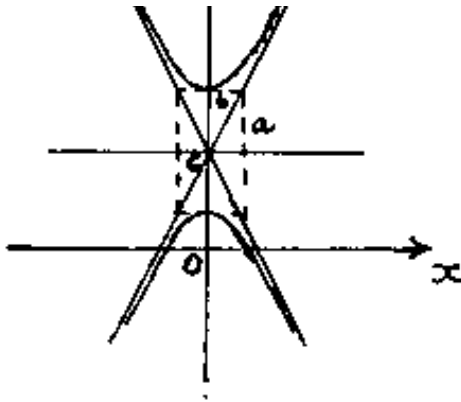
$$(b^2)x^2 - (a^2)y^2 + 2(a^2y_c)y - a^2y_c^2 - a^2b^2 = 0$$

$$K = \left(\frac{-(a_{11})(a_{22})}{\frac{a_{23}^2}{a_{22}} - a_{33}}\right);\ \left(s_1^2 = \frac{a_{11}}{K}\right);\ \left(s_2^2 = \frac{-a_{22}}{K}\right)$$

$$a = s_2;\quad b = s_1$$

II Caso $a_{11} < 0$

L'iperbole ha il semiasse "a" sull'asse focale e coincidente con l'asse y; (cioè ruotata di $\frac{\pi}{2} = 90°$) ed è traslata in y di $y_c = \left(\frac{(-a_{23})}{a_{22}}\right)$ L'equazione é:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-y_c)^2}{a^2} = 1$$

che sviluppata:

$\frac{\ldots}{b^2} + \frac{\ldots}{a^2} = 1$ che sviluppata:

$$(-a^2)x^2 + (b^2)y^2 - 2(b^2 y_c)y + b^2 y_c^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$K = \left(\frac{-(a_{11})(a_{22})}{\frac{a_{23}^2}{a_{22}} - a_{33}}\right); \quad s_1^2 = \left(\frac{-a_{11}}{K}\right);$$

$$s_2^2 = \left(\frac{a_{22}}{K}\right); \quad \boxed{s_1 = a}; \quad \boxed{s_2 = b};$$

Esempio numerico

L'equazione data : $-2X^2+4,5y^2-45y+94,5=0$

$K s_1^2 s_2^2 = \left(\frac{(\frac{1}{2}45)^2}{4,5} - 94,5 \right) = +18 > 0$ (segni giusti)

$a_{11} < 0$ asse focale sulle y. (Iperbole ruotata di $\frac{\pi}{2} = 90°$)

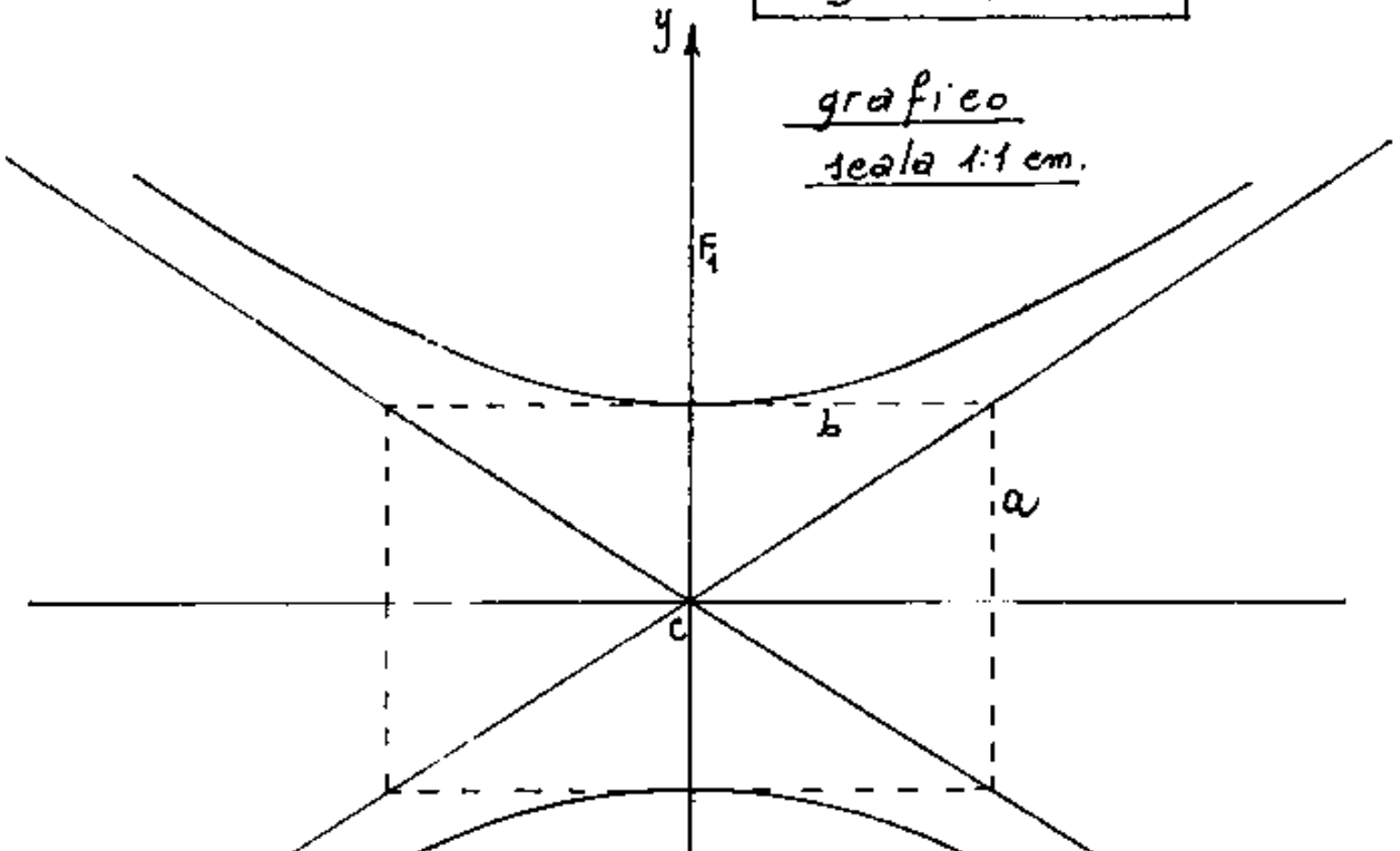
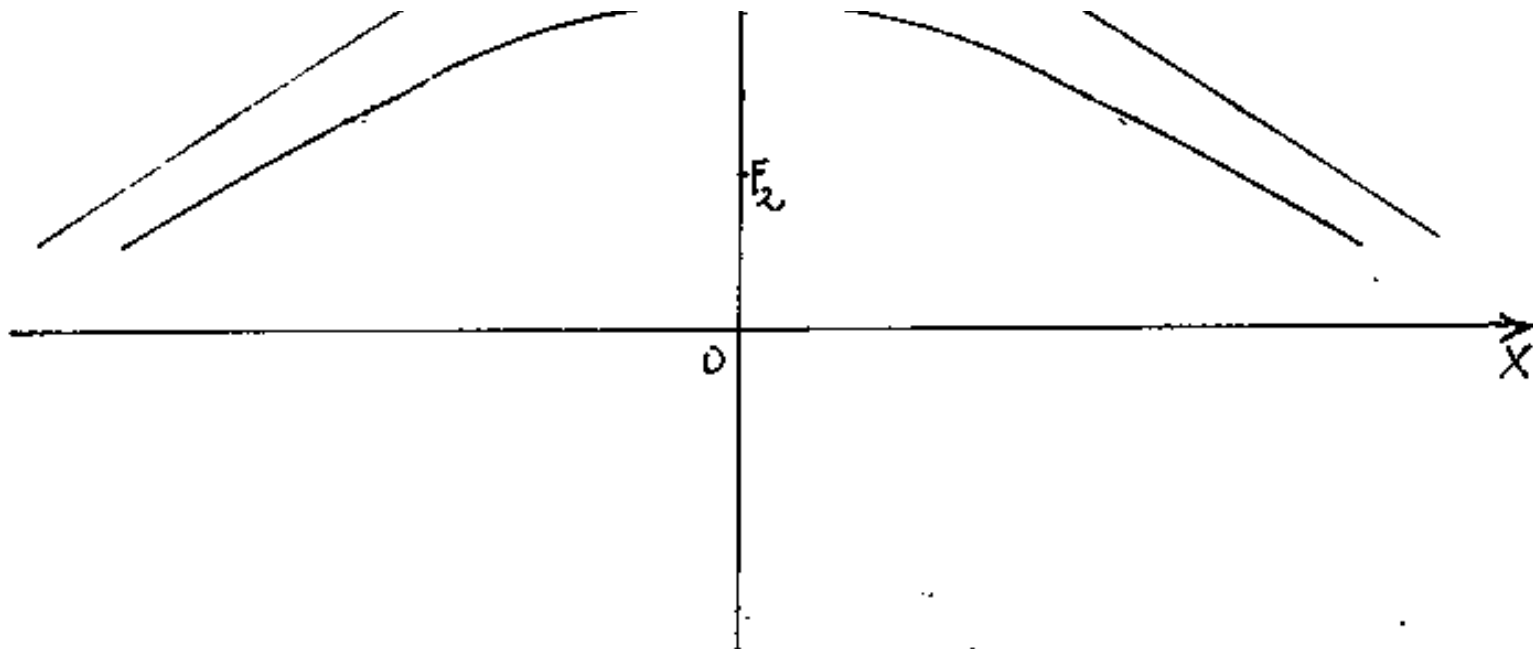
$\frac{-(-2)(4,5)}{18} = \frac{1}{2} = K \rightarrow -4X^2+9y^2-90y+189=0$

$-(2^2)X^2+(3)^2y^2-2(9)(5)y+(9)(25)-(4)(9)=0$

$b=2$; $a=3$; $y_c=+5$

$$-\frac{X^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{4}=1$$

grafico

scala 1:1 cm.

y, F_1, b, a, c

F_2

O

X

Iperbole ad assi traslati (in x ed in y)

L'equazione data:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

corrisponde alla:

$$\pm(K s_1^2)x^2 \mp (K s_2^2)y \mp 2(K s_1^2 x_c)x \pm 2(K s_2^2 y_c)y + K(\pm s_1^2 x_c^2 \mp s_2^2 y_c^2 - s_1^2 s_2^2) = 0$$

abbiamo già separatamente considerate le traslazioni in x ed in y

$$K s_1^2 s_2^2 = \pm K s_1^2 x_c^2 \mp K s_2^2 y_c^2 - a_{33}$$

cioè:

$$K s_1^2 s_2^2 = \left(\frac{a_{13}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}^2}{a_{22}} - a_{33}\right)$$

> 0 (segni giusti)

< 0 (moltiplicare per (-1))

$$K = \frac{-(K s_1^2)(K s_2^2)}{K s_1^2 s_2^2} = \qquad K = \frac{-(a_{11})(a_{22})}{(K s_1^2 s_2^2)}; \qquad s_1^2 = \frac{a_{11}}{K}; \qquad s_2^2 = \frac{a_{22}}{K}$$

$$x_c = \frac{a_{13}}{a_{11}}; \qquad y_c = \frac{a_{23}}{a_{22}}$$

Si hanno due casi:

$a_{11} > 0$ → asse focale parallelo ad x su cui giace "a"

$a = s_2$ $\quad$ $b = s_1$

$a_{11} < 0$ → asse focale parallelo ad y su cui giace "a"

$a_{11} < 0$ → asse focale parallelo all'y per cui risulta a

$$a = s_1 \quad ; \quad b = s_2$$

nel I° caso l'equazione è $\dfrac{(x-x_e)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_e)^2}{b^2} = 1$

nel II caso l'equazione è $\dfrac{-(x-x_e)^2}{b^2} + \dfrac{(y-y_e)^2}{a^2} = 1$

Esempio numerico

L'equazione data: $x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 27 = 0$

$$K\delta_1^2\delta_2^2 = \frac{25}{1} + \frac{144}{-4} + 27 = +16 > 0 \text{ (segni giusti)}$$

$$K = \frac{-(1)(-4)}{16} = \frac{1}{4}$$ dividendo per K si ha:

$$2^2x^2 - 4^2y^2 - 2(2^2)(5)x + 2(4^2)(3) - 108 = 0$$

corrisponde a: $$\frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

$a_{11} > 0$ iperbole con asse focale parallelo ad x.

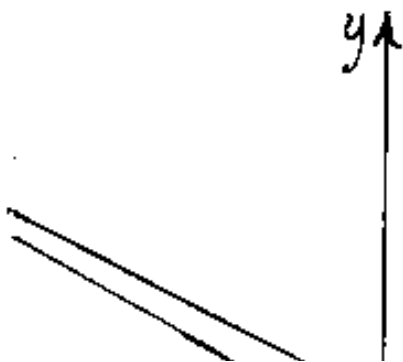
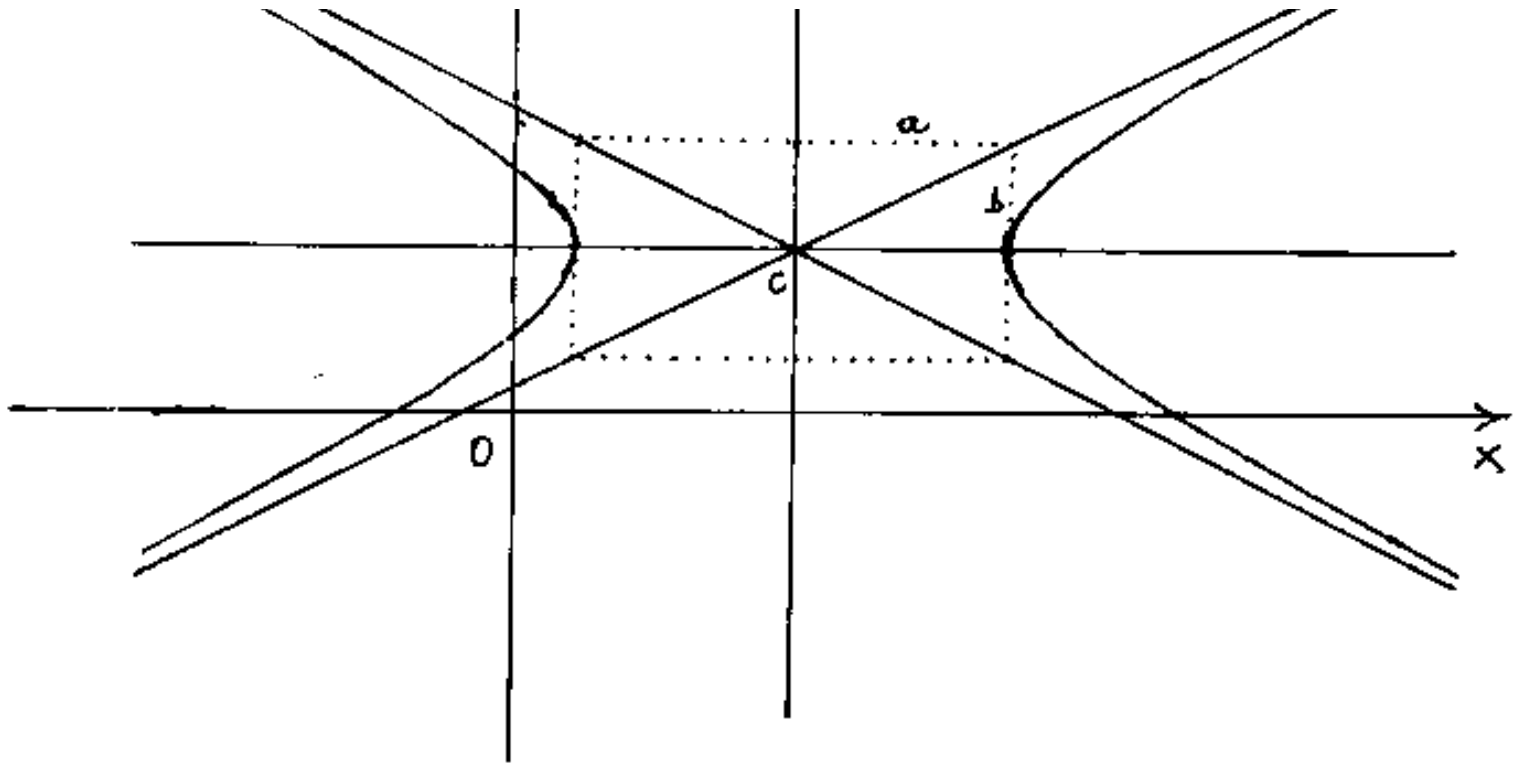
di semiassi: $a = 4$; $b = 2$

traslata rispetto al centro di $x_c = +5$ $y_c = +3$

y

grafico

scala 1:2 cm.

a
b
c
O
X

Iperbole ad assi solo ruotati

L'equazione data: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$

corrisponde alla:

$$K(s_1^2\cos^2\alpha - s_2^2\operatorname{sen}^2\alpha)x^2 + K(s_1^2\operatorname{sen}^2\alpha - s_2^2\cos^2\alpha)y^2 + K[(s_1^2+s_2^2)\operatorname{sen}(2\alpha)]xy = Ks_1^2 s_2^2$$

ove: "α" è l'angolo che l'asse focale dell'iperbole forma con l'asse x. (Si riduca $a_{33} < 0$).

Si noti la diversità di segno di a^2 (rispetto all'ellisse) nei coefficienti: a_{11} ; a_{22} ; $2a_{12}$.

$$((a_{11}) + (a_{22})) = K(s_1^2 - s_2^2)$$

- > 0 — $s_1^2 > s_2^2$
- $= 0$ — iperbole equilatera
- < 0 — $s_1^2 < s_2^2$

$$((a_{11}) - (a_{22})) = K(s_1^2 + s_2^2)\cos(2\alpha)$$

$$\left(\frac{(2a_{12})}{(a_{11}) - (a_{22})}\right) = \frac{K(s_1^2 + s_2^2)\operatorname{sen}(2\alpha)}{K(s_1^2 + s_2^2)\cos(2\alpha)} = tg(2\alpha)$$

$$\left.\begin{matrix}(\alpha) \\ (90^\circ + \alpha)\end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{arctang}\left(\frac{2(a_{12})}{((a_{11}) - (a_{22}))}\right)$$

Poiché con $a_{33} < 0$ si ha: $K > 0$ perciò: $K(a^2+b^2) > 0$

$$2a_{12} \begin{cases} > 0 \rightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) > 0 \rightarrow \boxed{0 < 2\alpha < 180°} \quad \boxed{0 < \alpha < 90°} \\ = 0 \quad (\text{con } s_1 \neq s_2):\ \alpha = 90° \\ < 0 \rightarrow \operatorname{sen} 2\alpha < 0 \rightarrow \boxed{180° < 2\alpha < 360} \quad \boxed{90° < \alpha < 180°} \end{cases}$$

quindi il segno di $2a_{12}$ ci consente di scegliere fra i due valori di (α) e $(90° + \alpha)$; (implicita la ruotazione di 90°)

Trovato l'angolo:

$$tg(2\alpha) = \left(\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})}\right) \; ; \; sen(2\alpha) = \left(\frac{2a_{12}}{\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}\right)$$

per cui: $(a_{33}<0)$

$$K(s_1^2+s_2^2) = +\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}$$

$$K(s_1^2-s_2^2) = (a_{11}+a_{22})$$

$$2Ks_1^2 = (a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}$$

$$2Ks_2^2 = +\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+2a_{12}^2} - (a_{11}+a_{22})$$

$$s_2^2 = \frac{-2a_{33}}{+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2} + (a_{11}+a_{22})} = \left(\frac{2Ks_1^2s_2^2}{2Ks_1^2}\right)$$

$$s_1^2 = \frac{-2a_{33}}{+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2} - (a_{11}+a_{22})} = \left(\frac{2Ks_1^2s_2^2}{2Ks_2^2}\right)$$

$> 0 \rightarrow (0 < \alpha < 90°)$

$$-2a_{12} \begin{cases} > 0 \rightarrow (0 < \alpha < 90^\circ) \\ < 0 \quad (90 < \alpha < 180^\circ) \end{cases} \Bigg\} \quad \boxed{s_2 = \text{"}a\text{"}} = \text{asse focale} \; ; \; \boxed{s_1 = \text{"}b\text{"}}$$

con "a" = asse focale e "b" l'altro asse.

L'equazione è:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \text{ (ruotata di } \alpha \text{)}.$$

Si noti che per $k > 0$; $(s_1^2 + s_2^2) >$ quindi il segno della radice è solo (+), mentre nell'ellisse partendo da (–) assumeva entrambi i segni.

Esempi numerici

L'equazione data: $6x^2 - 46y^2 + 52\sqrt{3}\,xy - 288 = 0$

$(a_{11} + a_{22}) = K(s_1^2 - s_2^2) = -40$;

$(a_{11} - a_{22}) = K(s_1^2 + s_2^2)\cos(2\alpha) = +52$;

$tg(2\alpha) = \frac{52\sqrt{3}}{52} = \sqrt{3}$ $\quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = $ 30° ← $(2a_{12} > 0)$; ~~120°~~ → no

$$s_2^2 = \frac{2\cdot(288)}{\sqrt{52^2 + (52\sqrt{3})^2} - 40} = \frac{2\,(288)}{2\cdot 52 - 40} = \frac{288}{32} = 9$$

$$s_1^2 = \frac{2(288)}{2\cdot(52+20)} = \frac{288}{72} = 4$$

$a = 3$

$b = 2$

$\left(K = \frac{288}{36} = 8\right)$

L'equazione è: $\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1\right)$ ruotata di 30°

L'equazione data: $-23x^2 + 3y^2 - 26\sqrt{3}\,xy - 144 = 0$

$(a_{11} + a_{22}) = K(s_1^2 - s_2^2) = -20$

$(a_{11} - a_{22}) = K(s_1^2 + s_2^2)\cos(2\alpha) = -26$

$\tan 2\alpha = \sqrt{3}$ $\quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = $ 30° → no ↓

$$\tan 2\alpha = \sqrt{3} \qquad \frac{1}{2}\arctan(\sqrt{3}) = \left< \begin{array}{l} \downarrow \\ 120^\circ \leftarrow (2a_{12} < 0) \end{array} \right.$$

$$s_2^2 = \frac{2 \cdot 144}{\sqrt{(-26)^2 + (26\sqrt{3})^2} - 20} = \frac{2 \cdot 144}{2(26-10)} = \frac{144}{16} = 9.$$

$$s_1^2 = \frac{2 \cdot 144}{2(26+10)} = \frac{144}{36} = 4$$

$a = 3$; $b = 2$; $\left(K = \frac{144}{36} = 4\right)$ l'equazione: $\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1}$ (ruotata di 120°)

Osservazioni sulla rotazione di assi

Consideriamo l'equazione, (non simmetrica rispetto ad O)

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0$$

e ruotiamola sostituendo:

$$\begin{cases} x = (\cos\alpha)x_1 - (\operatorname{sen}\alpha)y_1 \rightarrow x^2 = (\cos^2\alpha)x_1^2 + (\operatorname{sen}^2\alpha)y_1^2 - 2(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)x_1y_1 \\ y = (\operatorname{sen}\alpha)x_1 + (\cos\alpha)y_1 \rightarrow y^2 = (\operatorname{sen}^2\alpha)x_1^2 + (\cos^2\alpha)y_1^2 + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, x_1y_1 \end{cases}$$

avremo:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2R\cos\alpha\, x_1 + 2R(\operatorname{sen}\alpha)y_1 = 0$$

per $\alpha = 0$ torna l'equazione di partenza

$\alpha = 60°$: $X_1^2 + Y_1^2 - RX_1 + R\sqrt{3}\,Y_1 = 0$ — per $x = 0 \rightarrow y = -R\sqrt{3}$; per $y = 0 \rightarrow x = +R$

Il cerchio passante per O ha ruotato di 60° <u>in verso orario</u>

$\alpha = 90°$ $X_1^2 + Y_1^2 + 2RY_1 = 0$ — per $x_1 = 0 \rightarrow y = 2R$; per $y_1 = 0 \rightarrow x = 0$

continua a ruotare <u>orario</u>.

$\alpha = 120°$ $X_1^2 + Y_1^2 + RX_1 + R\sqrt{3}\,Y_1 = 0$ — per $x_1 = 0 \rightarrow y = -R\sqrt{3}$; per $y_1 = 0 \rightarrow x = -R$

Il centro del cerchio è nel III quadrante (antiorario)

$\alpha = 180°$ $X_1^2 + Y_1^2 + 2RX_1 = 0$ — per $X_1 = 0 \rightarrow y = 0$; per $y_1 = 0 \rightarrow x = -2R$

è col centro sul semiasse negativo delle x

$\alpha = 240$ [illegible] — $x_1 = 0 \rightarrow y = +R\sqrt{3}$

$\alpha = 240$ $\quad$ $\boxed{X_1^2 + y_1^2 + RX_1 - R\sqrt{3}\,y = 0}$

- $x_1 = 0 \rightarrow y = +R\sqrt{3}$
- $y_1 = 0 \rightarrow x = -R$.

$\alpha = 300$ $\quad$ $\boxed{X_1^2 + y_1^2 - RX_1 - R\sqrt{3}\,y = 0}$

- $x_1 = 0 \rightarrow y = R\sqrt{3}$
- $y_1 = 0 \rightarrow x = R$

per $\alpha = 360$ abbiamo l'iniziale. Se sostituiamo:

$$\begin{cases} x = (\cos\alpha)X_1 + (\operatorname{sen}\alpha)y_1 \rightarrow x^2 = (\cos^2\alpha)X_1^2 + (\operatorname{sen}^2\alpha)y_1^2 + (2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)x_1y_1 \\ y = (\cos\alpha)y_1 - (\operatorname{sen}\alpha)X_1 \rightarrow y_1^2 = (\operatorname{sen}^2\alpha)X_1^2 + \cos^2\alpha\, y_1^2 - (2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)x_1y_1 \end{cases}$$

dalla: $x^2+y^2-2Rx=0$ si ottiene:

$$x_1^2+y_1^2-2(R\cos(\alpha))x_1-2(R\,\text{sen}(\alpha))y_1=0$$

per $\alpha=0$ torna l'equazione iniziale.

per $\alpha=60°$ $x_1^2+y_1^2-Rx_1-R\sqrt{2}\,y_1=0$ $\begin{cases} x=0 \rightarrow y=+R\sqrt{2} \\ y=0 \rightarrow x=+R \end{cases}$

Il cerchio passante per O ha ruotato di 60° in verso antiorario

si vede che: 60° antiorari corrispondono a 300° orari

e continuando: 90°	"	"	a 270°
120°	"	"	240°
180°	"	"	180°
e viceversa. 240°	"	"	120°
300°	"	"	60°

Se una funzione $f(x,y)=0$ vogliamo farla ruotare in senso orario dobbiamo sostituire

$$\begin{cases} x=(\cos\alpha)x_1-(\text{sen}\,\alpha)y_1 \\ y=(\text{sen}\alpha)x_1+(\cos\alpha)y_1 \end{cases}$$

se vogliamo farla ruotare in senso antiorario

Se vogliamo farla ruotare in senso antiorario dobbiamo sostituire:

$$\begin{cases} X = (\cos\alpha)x_1 + (\operatorname{sen}\alpha)y_1 \\ Y = (\cos\alpha)y_1 - (\operatorname{sen}\alpha)x_1 \end{cases}$$

Iperbole ad assi ruotati e traslati

L'equazione completa:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2(a_{12})xy + 2(a_{13})x + 2(a_{23})y + a_{33} = 0$$

cui corrisponde:

$$\underbrace{\pm K(s_1^2\cos^2\alpha - s_2^2\sin^2\alpha)}_{a_{11}}x^2 + \underbrace{K(s_1^2\sin^2\alpha - s_2^2\cos^2\alpha)}_{a_{22}}y^2 + \underbrace{K[(s_2^2+s_1^2)\sin(2\alpha)]}_{2a_{12}}xy + \dots$$

$$\dots + \underbrace{(-2a_{11}x_c - 2(a_{12})y_c)}_{2a_{13}}x + \underbrace{(-2a_{12}x_c - 2a_{22}y_c)}_{2a_{23}}y + \dots$$

$$\dots + \underbrace{(a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}x_cy_c - K s_1^2 s_2^2)}_{a_{33}} = 0$$

consideriamo le uguaglianze:

$$\begin{cases} a_{11}x_c + a_{12}y_c = -a_{13} \\ a_{12}x_c + a_{22}y_c = -a_{23} \end{cases}$$

sistema risolvibile con Cramer:

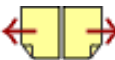
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} \quad ; \quad \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{31} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix} = -A_{32}$$

$$x_c = \frac{A_{31}}{\dots} \quad ; \quad y_c = \frac{-A_{32}}{\dots}$$

$$\boxed{x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}}} \quad ; \quad \boxed{y_c = \frac{-A_{32}}{A_{33}}}$$

Sostituiamo in a_{33} le coordinate di C ora trovate e risolviamo rispetto a $(K s_1^2 s_2^2)$, si ha:

$$\boxed{(K s_1^2 s_2^2) = a_{11}\left(\frac{A_{31}}{A_{33}}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{-A_{32}}{A_{33}}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{A_{31}}{A_{33}}\right)\left(\frac{A_{32}}{A_{33}}\right) - a_{33}}$$

$$\boxed{A_{33}^2 (K s_1^2 s_2^2) = a_{11} A_{31}^2 + a_{22}(-A_{32})^2 - 2a_{12}(A_{31})(A_{32}) - a_{33} A_{33}^2}$$

sviluppando:

$$A_{33}^2 K s_1^2 s_2^2 = \Big[a_{11}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 + a_{22}(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})^2 + 2a_{12}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}) - a_{33}A_{33}^2\Big]$$

$$= a_{11}(a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{13}^2 a_{22}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{22}a_{23}) + a_{22}(a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{11}^2 a_{23}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{13}a_{23}) + 2a_{12}(a_{12}^2 a_{13}a_{23} - a_{12}a_{13}^2 a_{22} - a_{11}a_{12}a_{23}^2 + a_{11}a_{13}a_{22}a_{23}) - a_{33}A_{33}^2$$

$$= + a_{11}a_{12}^2 a_{23}^2 + a_{11}a_{13}^2 a_{22}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{13}a_{22}a_{23} + a_{11}^2 a_{22}a_{23}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{13}a_{22}a_{23} + a_{12}^2 a_{13}^2 a_{22} + 2a_{12}^3 a_{13}a_{23} - 2a_{12}^2 a_{13}^2 a_{22} - 2a_{11}a_{12}^2 a_{23}^2 + 2a_{11}a_{12}a_{13}a_{22}a_{23} - a_{33}A_{33}^2$$

$$\Big(A_{33}^2 K s_1^2 s_2^2 = a_{11}a_{13}^2 a_{22}^2 + a_{11}^2 a_{22}a_{23}^2 + 2a_{12}^3 a_{13}a_{23} - a_{11}a_{12}^2 a_{23}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{13}a_{22}a_{23} - a_{12}^2 a_{13}^2 a_{22} - a_{33}A_{33}^2\Big)$$

$$= a_{11}a_{22}(a_{13}^2 a_{22} + a_{11}a_{23}^2) - a_{12}^2(a_{13}^2 a_{22} + a_{11}a_{23}^2) + 2a_{12}^3 a_{13}a_{23} - 2a_{11}a_{12}a_{13}a_{22}a_{23} - a_{33}A_{33}^2$$

$$A_{33}^2 K s_1^2 s_2^2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{13}^2 a_{22} + a_{11}a_{23}^2) - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(2a_{12}a_{13}a_{23}) - a_{33}A_{33}^2$$

$$A_{33}^2 K s_1^2 s_2^2 = A_{33}(a_{13}^2 a_{22} + a_{11}a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23}) - a_{33}A_{33}^2$$

$$A_{33}^2 K s_1^2 s_2^2 = A_{33}\left(a_{13}^2 a_{22} + a_{11} a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23}\right) - a_{33}A_{33}^2$$

$$K s_1^2 s_2^2 = \left(\frac{a_{13}^2 a_{22} + a_{11} a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23}}{A_{33}}\right) - a_{33}$$

$$K s_1^2 s_2^2 = \frac{a_{13}\left(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}\right) + a_{23}\left(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}\right)}{A_{33}} - a_{33}$$

$$K s_1^2 s_2^2 = \frac{a_{13}(-A_{31}) + a_{23}(A_{32}) - a_{33}(-A_{33})}{A_{33}}$$

$$\boxed{(K s_1^2 s_2^2) = \left(\frac{-A}{A_{33}}\right)}$$

$$(a_{11} - a_{22}) = K(s_1^2 + s_2^2)\cos(2\alpha) \rightarrow \frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})} = \frac{K(s_1^2+s_2^2)\,\mathrm{sen}(2\alpha)}{K(s_1^2+s_2^2)\cos(2\alpha)}$$

$$\boxed{\mathrm{tang}(2\alpha) = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}}$$

$$\frac{1}{\cos(2\alpha)} = \pm\sqrt{1 + \mathrm{tang}^2(2\alpha)} = \pm\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} \Big/ (a_{11} - a_{22})$$

Il radicale ha il segno di $tg(2\alpha)$.

$$K(s_1^2 + s_2^2)\frac{\cos(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{(a_{11} - a_{22})\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}{(a_{11} - a_{22})} = \boxed{K(s_1^2 + s_2^2) = \pm\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2}}$$

$$\left\{\begin{aligned} K(s_1^2 + s_2^2) &= \pm\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} \\ K(s_1^2 - s_2^2) &= (a_{11} + a_{22}) \end{aligned}\right\}$$

sommando e sottraendo:

$$K s_1^2 = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} + (a_{11} + a_{22})\right]$$

$$K s_2^2 = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} - (a_{11} + a_{22})\right]$$

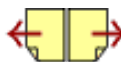
$$K^2 s_1^2 s_2^2 = \frac{1}{4}\left[(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2 - (a_{11} + a_{22})^2\right] = \frac{-1}{4}\left(4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\right)$$

$$K^2 s_1^2 s_2^2 = -A_{33}$$

$$K = \frac{K^2 s_1^2 s_2^2}{K s_1^2 s_2^2} = \frac{-A_{33}}{-A/A_{33}} = \quad K = \frac{+A_{33}^2}{A}$$

$$s_1^2 s_2^2 = \frac{K s_1^2 s_2^2}{K} = \frac{-A/A_{33}}{+A_{33}^2/A} = \frac{-A^2}{A_{33}^3} = \quad s_1^2 s_2^2 = \frac{-A^2}{A_{33}^3}$$

$$b^2 = s_1^2 = \frac{K s_1^2 s_2^2}{-K s_2^2} = \quad b^2 = \frac{\mp 2A/A_{33}}{\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + (2a_{12})^2} + (a_{11}+a_{22})}$$

$$a^2 = s_2^2 = K s_1^2 s_2^2 / K s_1^2 \qquad a^2 = \frac{+2A/A_{33}}{\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + (2a_{12})^2} + (a_{11}+a_{22})}$$

Esempio numerico (con risoluzione completa)

equazione data: $\boxed{4x^2 + 11y^2 - 24xy + 32x + 54y - 141 = 0}$

$a_{11} = 4$; $a_{22} = 11$; $a_{12} = -12$; $a_{13} = 16$; $a_{23} = 27$; $a_{33} = -141$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -12 & 16 \\ -12 & 11 & 27 \\ 16 & 27 & -141 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \\ 16 & 27 \end{matrix} = \begin{matrix} +(4)(11)(-141) + (-12)(27)(16) + (16)(-12)(27) \\ -(16^2)(11) - (27^2)(4) - (-12)^2(-141) \end{matrix} =$$

$$= +(-6204) + (-5184) + (-5184) = -16572$$

$$= -(+2816) - (2916) - (-20304) = +14572$$

$$\Delta = -2000$$

$\boxed{\Delta \neq 0 \text{ (conica non degenere)}}$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{vmatrix} = 44 - 144 = -100$$

$\boxed{A_{33} < 0 \text{ (iperbole)}}$

$$+a_{33}A_{33} = (-141)(-100) = +14100$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 16 \\ -12 & 27 \end{vmatrix} = 108 + 192 = +300$$

$$-a_{32}A_{32} = -(27)(300) = -8100$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -12 & 16 \\ 11 & 27 \end{vmatrix} = -324 - 176 = -500$$

$$+a_{31}A_{31} = +(16)(-500) = -8000$$

$$+a_{33}A_{33} - a_{32}A_{32} + a_{31}A_{31} = \Delta = -2000$$

$$x_c = \frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{-500}{-100} = \boxed{x_c = +5}$$

$$y_c = \frac{-A_{32}}{A_{33}} = \frac{-300}{-100} = \boxed{y_c = +3}$$

$$(a_{11} + a_{22}) = K(b^2 - a^2) = \boxed{(4 + 11) = 15} = K(b^2 - a^2)$$

$$(a_{11} - a_{22}) = K(b^2 + a^2)\cos(2\alpha) = \boxed{(4 - 11) = -7} = K(b^2 + a^2)\cos(2\alpha)$$

$$\frac{(2a_{12})}{(a_{11} - a_{22})} = \frac{K(b^2 + a^2)\,\mathrm{sen}(2\alpha)}{K(b^2 + a^2)\cos(2\alpha)} = \frac{-24}{-7} = \boxed{\mathrm{tang}(2\alpha) = 24/7}$$

$$\begin{matrix}(\alpha) \\ (90 + \alpha)\end{matrix} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{24}{7}\right) = \begin{matrix} 36{,}86989765 \sim 36^\circ\ 52'\ 12'' \\ 126{,}86989765 \sim 126^\circ\ 52'\ 12'' \end{matrix}$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2(2\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 24^2/7^2}} = \frac{7}{\sqrt{49 + 576}} = \frac{7}{\sqrt{625}}$$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \frac{7}{25}} = \frac{28}{100} = 0{,}28.$$

$$\frac{K(a^2 + b^2)\cos(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = -7 \cdot \frac{25}{7} = \boxed{K(b^2 + a^2) = -25}$$

$$\boxed{K(b^2 - a^2) = +15}$$

$$\boxed{Ka^2b^2 = a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}x_c y_c - a_{33}}$$

$$Ka^2b^2 = (4)(5)^2 + (11)(3)^2 + (-24)(5)(3) - (-141)$$

$$Ka^2b^2 = 100 + 99 - 360 + 141 = -20 \qquad \boxed{Ka^2b^2 = -20}$$

$$K(2b^2) = +(15) + (-25) = -10 \rightarrow \boxed{Kb^2 = -5}$$

$$K(2a^2) = (-25) - (15) = -40 \rightarrow \boxed{Ka^2 = -20}$$

$$a^2 = \frac{Ka^2b^2}{Kb^2} = \left(\frac{-20}{-5}\right) = +4 \quad ; \qquad \boxed{a = +2}$$

$$b^2 = \frac{Ka^2b^2}{Ka^2} = \frac{-20}{-20} = +1 \quad ; \qquad \boxed{b = +1}$$

$$K = \frac{Kb^2}{\;} = \frac{Ka^2}{\;} = \frac{-5}{\;} = \frac{-20}{\;} =$$

$$K = \frac{Kb^2}{b^2} = \frac{Ka^2}{a^2} = \frac{-5}{1} = \frac{-20}{4} = \boxed{K = -5}$$

Se: $\alpha \cong 36°,87 \qquad 2\alpha = 73°,74 \begin{cases} \text{sen}(2\alpha) > 0 = +0,96 \\ \cos(2\alpha) > 0 = +0,28 \end{cases}$

$\alpha \cong 126°,87 \qquad 2\alpha = 253,74 \begin{cases} \text{sen}(2\alpha) < 0 = -0,96 \\ \cos(2\alpha) < 0 = -0,28 \end{cases}$

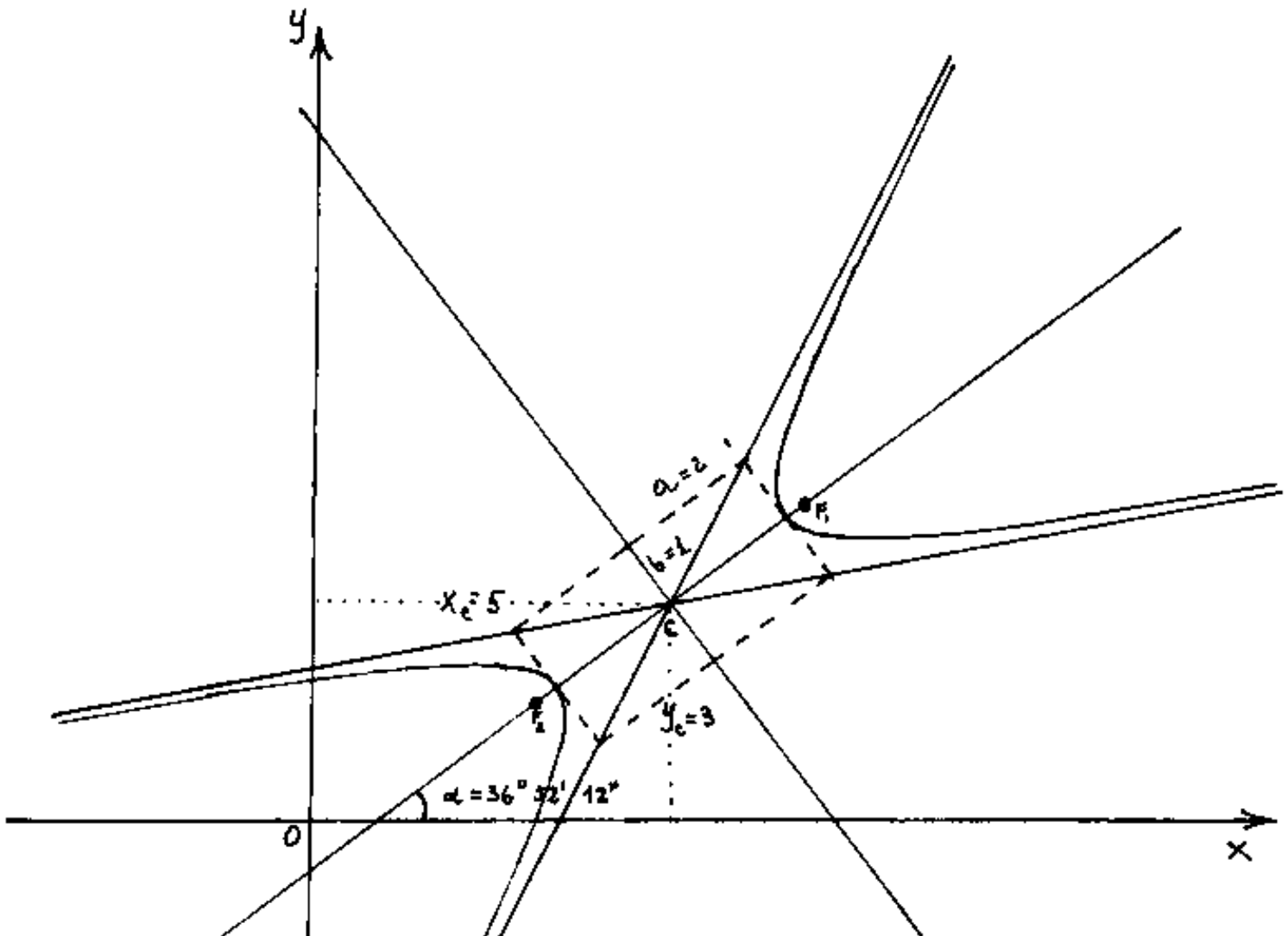
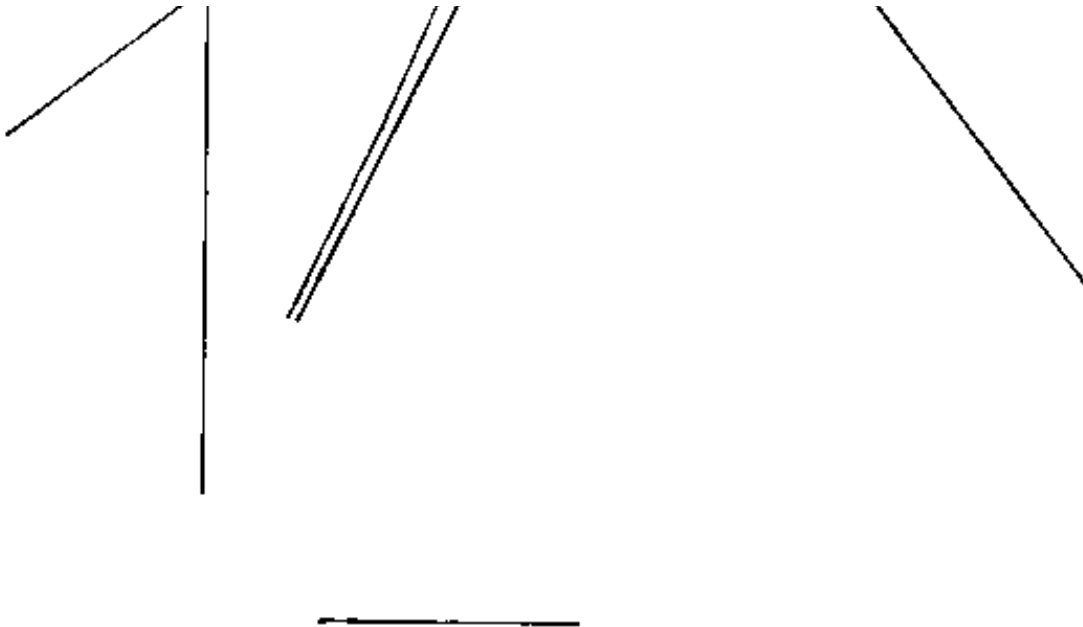
$$2a_{12} = -24 = K\left(b^2 + a^2\right)\text{sen}\,2\alpha \rightarrow \left(b^2+a^2\right)\text{sen}\,2\alpha = \frac{-24}{-5} \rightarrow \text{sen}(2\alpha) = \frac{24}{5}\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\text{sen}(2\alpha) = +\frac{24}{25} = \frac{(+24)4}{(25)4} = +\frac{96}{100} = +0,96$$

$$\boxed{\alpha = 36°\ 52'\ 12''}$$

Quindi è una iperbole di equazione canonica al centro: $\boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1}$ ruotata di: $\alpha=36°,86989765$ = $\alpha=0,6435011$ rad. e traslata $\boxed{x_c=+5}$; $\boxed{y_c=+3}$

Il grafico

scala 1:1,25 cm.

La parabola

Dall'equazione generale delle coniche:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

si ha il caso parabolico quando:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{cioè: } a_{12}^2 = (a_{11} \cdot a_{22})$$

$$a_{12} = \sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{22}}$$

Il caso parabolico è particolarmente delicato perché è il passaggio dal caso ellittico ($A_{33}>0$) al caso iperbolico ($A_{33}<0$); basta che $A_{33} = \pm\varepsilon$ piccolissimo perché sia escluso il caso parabolico. Lavorando con numeri irrazionali o trascendenti a infinite cifre, non è facile dire: "zero esatto": nel calcolatore lo "zero" si trova per valori inferiori a 10^{-n} ove: 10^{-n} è la "precisione" dei nostri calcoli; ma 10^{-n} non è zero!

Considerìamo il determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \end{vmatrix} = \begin{cases} = 0 & \text{conica degenere} \end{cases}$$

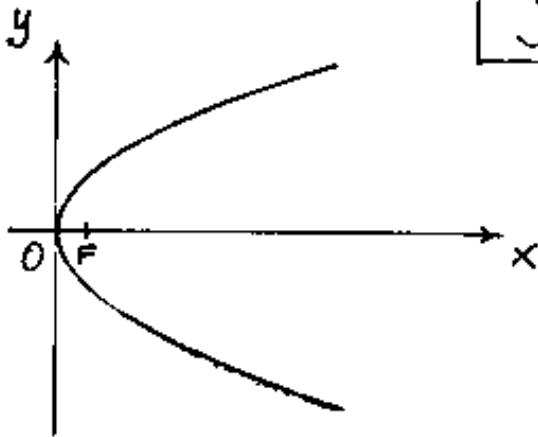
$$A = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \langle \neq 0 \quad \text{conica non degenere}$$

sviluppando per l'ultima riga e dovendo essere $A_{33} = 0$

$$\boxed{A = a_{31}A_{31} - a_{32}A_{32}} \quad \text{(caso parabolico)}$$

L'equazione canonica della parabola

In analogia con l'ellisse e l'iperbole, per la parabola al centro, poniamo l'asse focale coincidente con l'asse x, per cui l'equazione canonica della parabola diventa:

$$y = \sqrt{x(4a)}$$

può scriversi:

$$Ky^2 - K(4a)x = 0$$

ove sono nulli:

a_{11}, a_{12}, a_{23}, a_{33} per cui:

il determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2Ka \\ 0 & K & 0 \\ -2Ka & 0 & 0 \end{vmatrix} = A = -K^3(2a)^2$$

ed essendo: $K = a_{22}$ il modulo sarà: $4a = \frac{-2a_{13}}{a_{22}}$

quindi per la parabola al centro assi l'equazione data:

l'equazione data:

$$a_{22} y^2 + 2a_{13} x = 0$$

corrisponde a:

$$K y^2 - 2K(2a) x = 0$$

da cui:

$$K = a_{22}$$

$$4a = \frac{-2a_{13}}{a_{22}}$$

Caso parabolico

$$A_{33} = 0$$

L'equazione può presentarsi:

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}X = 0$$

parabola al centro con asse focale sulle X (equazione canonica)

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}X + a_{33} = 0$$

parabola traslata in X

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

traslata in y ed in X e y

$$a_{11}X^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}Xy + 2a_{13}X + 2a_{23}y = 0$$

solo ruotata non traslata (manca a_{33})

$$a_{11}X^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}Xy + 2a_{13}X + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Parabola ruotata e traslata.

La ruotazione degli assi della parabola, (come per le altre coniche) è la presenza del coefficiente

$2a_{12} = K \operatorname{sen}(2\alpha)$; se $\alpha = 90° \rightarrow \boxed{a_{11}x^2 + 2a_{23}y = 0}$ ($2a_{12} = 0$ per $\alpha = 90°; 180°; 270°$)

Mentre l'ellisse e l'iperbole sono affette da due parametri: "a", "b"; quindi nel caso generale le incognite sono 5: a, b, x_c, y_c, α; nella parabola le incognite sono solo quattro: a, x_c, y_c, α; perché è determinata da un solo parametro.

Parabola ad assi solo traslati (in x)

L'equazione data :

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$$

corrisponde alla:

$$Ky^2 + 2K(2a)x + 2K(2a)(-x_c) = 0$$

$$K = a_{22}$$

dividendo per K :

$$4a = \frac{2a_{13}}{a_{22}}$$

$$x_c = \frac{-a_{33}}{2a_{13}}$$

Parabola ad assi solo traslati (in y)

L'equazione data:

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

corrisponde alla :

$$Ky^2 + 2K(2a)x + 2K(-y_c)y + Ky_c^2 = 0$$

$$K = a_{22}$$

$$4a = \frac{2a_{13}}{a_{22}}$$

$$y_c = \frac{-a_{23}}{a}$$

$$y_C = \frac{-a_{23}}{a_{22}}$$

Nel caso di assi solo traslati in y si ha che $2a_{23}$ ed a_{33} sono correlate da: $(a_{23})^2 = a_{33}$

Parabola ad assi traslati (in x ed y)

L'equazione data:

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

corrisponde alla:

$$Ky^2 + 2K(2a)x + 2K(-y_c)y + K(-4ax_c + y_c^2) = 0$$

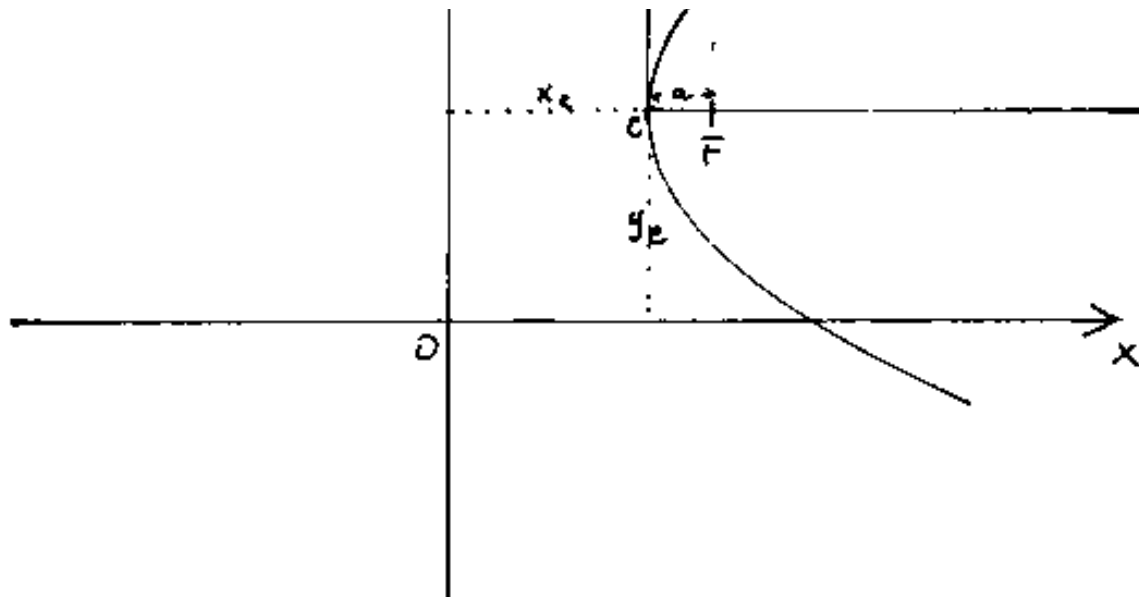
$$K = a_{22} \quad ; \quad 4a = \frac{2a_{13}}{a_{22}} \quad ; \quad y_c = \frac{a_{23}}{a_{22}}$$

$$x_c = -\left(\frac{a_{33}}{a_{22}} - \left(\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2\right) \cdot \frac{a_{22}}{2a_{13}} =$$

$$x_c = -\left(\frac{a_{33}}{2a_{13}} - \frac{(a_{23})^2}{a_{22}2a_{13}}\right)$$

$$x_c = \left(\frac{a_{23}^2}{a_{22}} - a_{33}\right)\frac{1}{2a_{13}}$$

$$x_c = \left(\frac{(a_{23})^2}{a_{22} \cdot 2a_{13}} - \frac{a_{33}}{2a_{13}}\right)$$

y

Parabola ad assi solo ruotati (non traslati)

L'equazione data: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$

corrisponde alla:

$$K(\operatorname{sen}^2\alpha)x^2 + K(\cos^2\alpha)y^2 - K(\operatorname{sen}(2\alpha))xy - K(4a\cos\alpha)x - K(4a\operatorname{sen}\alpha)y = 0$$

La ruotazione degli assi della parabola porta, nel problema inverso, la necessità di determinare in quale quadrante è l'asse della parabola. Abbiamo già visto, per l'ellisse e l'iperbole la formula: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}\right) < {\alpha \atop (90+\alpha)}$ e l'ambiguità era risolta dal segno di $2a_{12}$ in quanto, essendo l'ellisse e l'iperbole <u>curve simmetriche</u> rispetto ai due assi, basta una ruotazione di 180° per ripetere la figura di partenza. Per la parabola, <u>curva non simmetrica</u> rispetto alla retta tangente il vertice, occorre una ruotazione di 360° per ripetere la figura di partenza; ciò implica che la funzione inversa trigonometrica che fornisce l'angolo nel I° quadrante deve essere riportata al quadrante di

nel I° quadrante deve essere riportata al quadrante di appartenenza tenendo conto della funzione e se riferita ad: (α) o a: (2α). Nel caso di assi solo ruotati il problema è presto risolto: Calcolato $\boxed{K = a_{11} + a_{22}}$ e ridotto $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$,

$$arctg\left(\frac{a_{23}}{a_{13}}\right) = \begin{cases} (>0) \begin{cases} \overset{a_{13}}{-} \ \overset{a_{23}}{-} \ ) \rightarrow = \alpha & \rightarrow (\text{I quadrante}) \\ + \ + \ ) \rightarrow = (180° + \alpha) & \rightarrow (\text{III} \quad " \quad) \end{cases} \\ (<0) \begin{cases} + \ - \ ) \rightarrow = (180° - \alpha) & \rightarrow (\text{II} \quad " \quad) \\ - \ + \ ) \rightarrow = (360° - \alpha) & \rightarrow (\text{IV} \quad " \quad) \end{cases} \end{cases}$$

Abbiamo potuto fare questa semplificazione perché per assi <u>solo ruotati</u>: $2a_{13}$ e $2a_{23}$ non sono influenzati da x_c ed y_c.
Anche in questo caso è possibile utilizzare la stessa formula dell'ellisse e dell'iperbole: Ridotto $K > 0$; $K = (a_{11} + a_{22})$
a_{11} ed a_{22} debbono essere maggiori di zero. (non negativi)

$$(a_{11} - a_{22}) = K \operatorname{sen}^2\alpha - K\cos^2\alpha = -K\cos(2\alpha)$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})}\right)$$

- > 0
  - $2a_{12} < 0$
    - $0 < \alpha < 45°$ – I_1
    - $180 < \alpha < 225°$ – III_1
  - $2a_{12} > 0$
    - $90° < \alpha < 135°$ – II_1
    - $270° < \alpha < 315°$ – IV_1
- < 0
  - $2a_{12} < 0$
    - $45° < \alpha < 90°$ – I_2
    - $225 < \alpha < 270°$ – III_2
  - $2a_{12} > 0$
    - $135° < \alpha < 180°$ – II_2
    - $315 < \alpha < 360°$ – IV_2

Come si vede dal prospetto, quando sia invariata la figura ruotata di 180°, cioè I e III quadrante, II e IV quadrante; basta il segno del coefficiente $2a_{12}$ per identificare la conica (ellisse o iperbole). Nel caso della parabola, in quanto assume configurazioni diverse nei quattro quadranti, dobbiamo utilizzare il prospetto precedente.

II quadrante

I quadrante

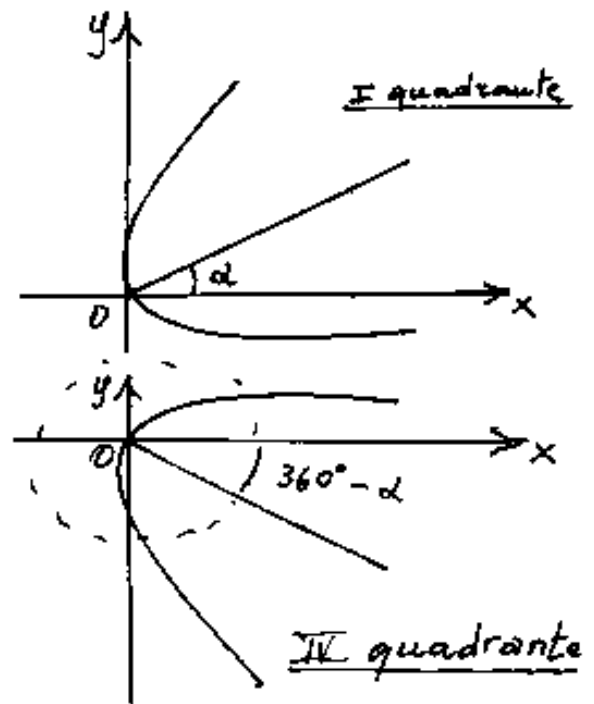
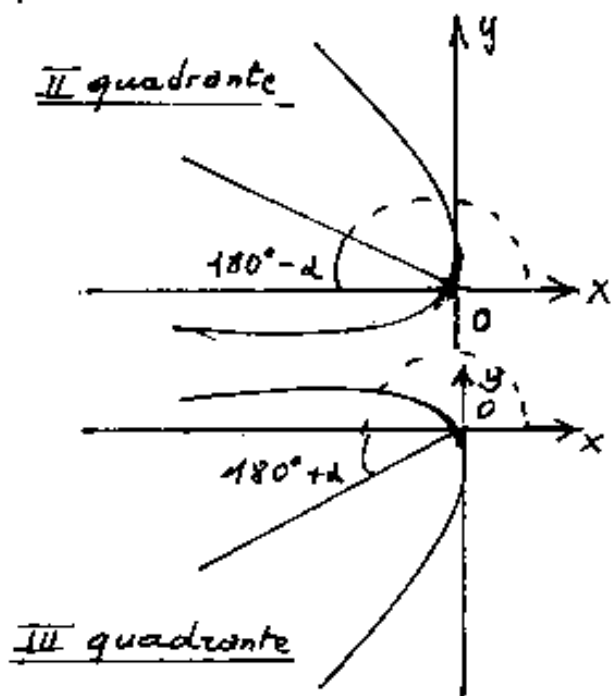
$180° - \alpha$

α

$180° + \alpha$

$360° - \alpha$

III quadrante

IV quadrante

Per il calcolo del parametro "4a", che figura solo nei coefficienti: "$2a_{13}$" e "$2a_{23}$"; non vi sono problemi una volta noto l'angolo:

$$"4a" = \frac{2a_{13}}{K \operatorname{sen} \alpha} = \frac{2a_{23}}{K \cos \alpha}$$

ed avremo:

$$4a = \frac{2a_{13}}{(a_{11}+a_{22})\sqrt{\frac{a_{22}}{(a_{11}+a_{22})}}} = \frac{2a_{23}}{(a_{11}+a_{22})\sqrt{\frac{a_{11}}{(a_{11}+a_{22})}}}$$

$$4a = \frac{\left(\sqrt{a_{11}+a_{22}}\right) 2a_{13}}{(a_{11}+a_{22})\sqrt{(a_{22})}} = \frac{\left(\sqrt{a_{11}+a_{22}}\right) 2a_{23}}{(a_{11}+a_{22})\sqrt{a_{11}}}$$

$$\boxed{4a = \frac{2a_{13}}{\sqrt{(a_{11}+a_{22})(a_{22})}}}$$

$$\boxed{4a = \frac{2a_{23}}{\sqrt{(a_{11}+a_{22})(a_{11})}}}$$

$$\sqrt{2a_{13}^2 + 2a_{23}^2}$$

$$4a = \frac{\sqrt{2a_{13}^2 + 2a_{23}^2}}{(a_{11} + a_{22})}$$

Però queste formule valgono nel caso di assi solo ruotati. Cercheremo le formule generali nel caso di assi ruotati e traslati.

Parabola ad assi ruotati e traslati

L'equazione data: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

corrisponde alla:

$$\underbrace{K(\operatorname{sen}^2\alpha)}_{a_{11}} X^2 + \underbrace{K(\cos^2\alpha)}_{a_{22}} y^2 - \underbrace{K(\operatorname{sen}(2\alpha))}_{2a_{12}} Xy +$$

(si noti che i primi tre coefficienti sono identici alla sola ruotata)

$$+ \underbrace{\left((-K\operatorname{sen}^2\alpha)(2x_c) + (K\operatorname{sen}(2\alpha))(y_c) - (K4a\cos\alpha)\right)}_{2a_{13}} X +$$

$$+ \underbrace{\left((-K\cos^2\alpha)(2y_c) + (K\operatorname{sen}2\alpha)(x_c) - (K4a\operatorname{sen}\alpha)\right)}_{2a_{23}} y +$$

$$+ \left[(K\operatorname{sen}^2\alpha)X_c^2 + (K\cos^2\alpha)y_c^2 - (K\operatorname{sen}2\alpha)X_c y_c + (K4a\cos\alpha)x_c + (K4a\operatorname{sen}\alpha)y_c = 0\right.$$

si nota che l'equazione corrisponde anche alla:

$$a_{11}X^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}Xy + \left(-2a_{11}x_c - 2a_{12}y_c - K4a\cos\alpha\right)X +$$

$$+\left((-2a_{22})y_c - (2a_{12})X_c - (K4a\operatorname{sen}\alpha)\right)y + \left[a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}X_c y_c + K4a\cos\alpha X_c + K4a\operatorname{sen}\alpha\, y_c\right] =$$

$$= 0$$

Si noti anche: $(-K4a\cos\alpha) = 2a^*_{13}$ della parabola solo ruotata

$(-K4a\,\text{sen}\alpha) = 2a^*_{23}$ della parabola solo ruotata

abbiamo asteriscato i due simboli per distinguerli.

$$2a_{13} = (-2a_{11}x_c - 2a_{12}y_c + a^*_{13})x$$

$$2a_{23} = (-2a_{22}y_c - 2a_{12}x_c + a^*_{23})y .$$

Calcoliamo ora il determinante A ed i minori A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}.

Calcolo dei determinanti della parabola.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & (-a_{11}x_c - a_{12}y_c + a_{13}^*) \\ a_{21} & a_{22} & (-a_{22}y_c - a_{12}x_c + a_{23}^*) \\ (-a_{11}x_c - a_{12}y_c + a_{13}^*) & (-a_{22}y_c - a_{12}x_c + a_{23}^*) & (a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}x_cy_c - 2a_{13}^*x_c - 2a_{23}^*y_c) \end{vmatrix}$$

od anche: $A =$

$$\begin{vmatrix} \left(K(\mathrm{sen}^2\alpha)\right) & \left(K\frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{2}\right) & \left[K\left(-\mathrm{sen}^2\alpha\, x_c + \frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{2}y_c - 2a\cos\alpha\right)\right] \\ \left(K\frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{2}\right) & \left(K(\cos^2\alpha)\right) & \left[K\left(-\cos^2\alpha\, y_c + \frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{2}x_c - 2a\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)\right] \\ \left(K\left[-\mathrm{sen}^2\alpha\, x_c + \frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{2}y_c - 2a\cos\alpha\right]\right) & \left(K\left[-\cos^2\alpha\, y_c + \frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{2}x_c - 2a\,\mathrm{sen}\,\alpha\right]\right) & \left(K\left[\mathrm{sen}^2\alpha\, x_c^2 + \cos^2\alpha\, y_c^2 - \frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{2}y_c x_c + 4a\cos\alpha\, x_c + 4a\,\mathrm{sen}\,\alpha\, y_c\right]\right) \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(a_{33}\cdot a_{22} - a_{23}^2\right) \quad ; \quad \left(\frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{2}\right)^2 = (\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha)^2 = (\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha)$$

$$= K^2\Big(+\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\, x_c^2 + \cos^4\alpha\, y_c - 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^3\alpha\, x_cy_c + 4a\cos^3\alpha\, x_c + 4a\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^2\alpha\, y_c$$

$$-\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\, x_c^2 - \cos^4\alpha\, y_c + 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^3\alpha\, x_cy_c + 4a\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha\, x_c - 4a\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos^2\alpha\, y_c - 4a^2\mathrm{sen}^2\alpha\Big)$$

$$A_{11} = K^2\left[4a\cos\alpha\, x_c(\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha) - 4a^2\mathrm{sen}^2\alpha\right]$$

$$A_{11} = K^2\left(4a\cos\alpha\, x_e - 4a^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right)$$

$$A_{11} = K^2 4a\left(\cos\alpha\, x_e - a \operatorname{sen}^2\alpha\right) = K^2 4a\left(\cos\alpha\, x_e - a - \cos^2\alpha\, a\right)$$

$$A_{11} = K^2 4a\left[\cos\alpha\left(x_e - \cos\alpha\, a\right) - a\right]$$

analogamente:

$$A_{11} = K^2\left(4aX_c\cos\alpha - 4a^2\operatorname{sen}^2\alpha\right)$$

$$A_{22} = K^2\left(4ay_c\operatorname{sen}\alpha - 4a^2\cos^2\alpha\right)$$

$$A_{12} = -K^2\left(2aX_c\operatorname{sen}\alpha + 2ay_c\cos\alpha + 4a^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right) = A_{21}$$

$$A_{13} = K^2\,2a\cos\alpha = A_{31}$$

$$A_{23} = -K^2\,2a\operatorname{sen}\alpha = A_{32}$$

$$A_{33} = 0$$

$A_{33} = 0$ implica: $(a_{11}a_{22} = a_{12}^2)$ infatti $\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2$

Calcoliamo il determinante $A = a_{11}A_{11} + a_{13}A_{13} - a_{12}A_{12}$

$K^3(4aX_c\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha - 4a^2\operatorname{sen}^4\alpha) +$

$K^3(-2aX_c\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha - 4a^2\cos^4\alpha \quad + 2ay_c\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha)$

$K^3(-2aX_c\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha - 4a^2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha \quad - 2ay_c\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha)$

$$\frac{K(\ldots y_c \ldots \cos\alpha \ldots a \, sen\alpha \cos\alpha \; - 2a y_c \, sen\alpha \cos\alpha)}{K^3\left(-4a^2\left[sen^2\alpha\,(sen^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha \right] \right)}$$

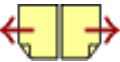
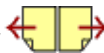
$$\boxed{A = -K^3 4a^2}$$

essendo $A_{33} = 0$

era più veloce sviluppando l'ultima riga: $A = a_{31}A_{31} - A_{32}A_{32}$

$$A = K^3\left(-2a\cos\alpha\, sen^2\alpha\, x_c + 2a\cos^2\alpha\, sen\alpha\, y_c - 4a^2\cos^2\alpha\right)$$

$$\frac{K^3\left(+2a\cos\alpha\, sen^2\alpha\, x_c - 2a\cos^2\alpha\, sen\alpha\, y_c - 4a^2 sen^2\alpha\right)}{-K^3\, 4a^2\,(sen^2\alpha + \cos^2\alpha)}$$

(che verifica).

Il Determinante e i minori della parabola $(a_{ij} = a_{ji})$

Parabola	A	A_{11}	A_{22}	$A_{12}=A_{21}$	$A_{13}=A_{31}$	$A_{23}=A_{32}$	A_{33}
al centro	$-K^3(2a)^2$	0	$-K^2(2a)^2$	0	$K^2(2a)$	0	0
traslata	$-K^3(2a)^2$	$K^2(4a\,x_c)$	$-K^2(2a)^2$	$-K^2(2a)y_c$	$K^2(2a)$	0	0
ruotata	$-K^3(2a)^2$	$K^2(4a^2\,sen^2\alpha)$	$-K^2(4a^2)\cos^2\alpha$	$-K^2(4a^2)(sen\alpha\cos\alpha)$	$K^2(2a)\cos\alpha$	$-K^2(2a)\,sen\alpha$	0
ruotata e traslata	$-K^3(2a)^2$	$K^2(4a)(x_c\cos\alpha - a\,sen^2\alpha)$	$K^2(4a)(y_c\,sen\alpha - a\cos^2\alpha)$	$-K^2(2a\,sen\alpha\,x_c + 2a\cos\alpha\,y_c + 4a^2\,sen\alpha\cos\alpha)$	$K^2(2a)\cos\alpha$	$-K^2(2a)\,sen\alpha$	0

I coefficienti dell'equazione della parabola

Parabola	a_{11}	a_{22}	$2a_{12}$	$2a_{13}$	$2a_{23}$	a_{33}
al centro	0	K	0	$-K4a$	0	0
traslata	0	K	0	$-K4a$	$-K2y_c$	$K(y_c^2 + 4a\,x_c)$
ruotata	$K\,sen^2\alpha$	$K\cos^2\alpha$	$-K\,sen(2\alpha)$	$-K4a\cos\alpha$	$-K4a\,sen\alpha$	0
ruotata e traslata	$K\,sen^2\alpha$	$K\cos^2\alpha$	$-K\,sen(2\alpha)$	$K(-2x_c\,sen^2\alpha + y_c\,sen2\alpha - 4a\cos\alpha)$	$K(-2y_c\cos^2\alpha + x_c\,sen2\alpha - 4a\,sen\alpha)$	$K(sen^2\alpha\,x_c^2 + \cos^2\alpha\,y_c^2 + sen(2\alpha)x_c y_c + 4a\cos\alpha\,x_c + 4a\,sen\alpha\,y_c)$

parabola canonica al centro assi con asse focale sul semiasse positivo delle x

formula generale: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

altre espressioni per calcolare 2a

$$2a = \frac{A_{13}}{K^2 \cos\alpha} = \frac{A_{13}}{(a_{11}+a_{22})^2 \sqrt{\frac{a_{22}}{(a_{11}+a_{22})}}} =$$

$$\boxed{2a = \frac{A_{13}}{(a_{11}+a_{22})^{3/2} \sqrt{a_{22}}}}$$

$$2a = \frac{A_{23}}{K^2 \operatorname{sen}\alpha} = \boxed{\frac{A_{23}}{(a_{11}+a_{22})^{3/2} \sqrt{a_{11}}} = 2a} \quad \boxed{2a = \frac{A_{23}}{(a_{11}+a_{22})\sqrt{a_{12}^2+a_{11}^2}}}$$

Calcolo le coordinate di traslazione del vertice "c"

$$\boxed{K = (a_{11}+a_{22})} \qquad \boxed{2a = \sqrt{\frac{-A}{K^3}}}$$

$$X_c = \left(\frac{A_{11}}{K^2} + 4a^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right) \frac{1}{4a\cos\alpha}$$

$$X_c = \frac{A_{11} + (K\,2a \operatorname{sen}\alpha)^2}{2(K^2\,2a\cos\alpha)} \qquad \boxed{X_c = \frac{A_{11} + (A_{23}/K)^2}{2A_{13}}}$$

$$y_c = \left(\frac{A_{22}}{K^2} + 4a^2 \cos^2\alpha\right) \frac{1}{4a \operatorname{sen}\alpha}$$

$$y_c = \frac{A_{22} + (K\,2a\cos\alpha)^2}{2(K^2\,2a \operatorname{sen}\alpha)} \qquad \boxed{y_c = \frac{A_{22} + (A_{13}/K)^2}{-2A_{23}}}$$

calcolo dell'angolo di rotazione

$$\tan(\alpha) = \frac{-a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{11}}{-a_{12}} = \boxed{\frac{-A_{23}}{A_{13}} = tg(\alpha)} \qquad \boxed{\tan\alpha = \frac{-a_{12}}{a_{22}}}$$

$\tan\alpha = \left(\frac{-a_{12}}{a_{22}}\right)$

> 0	I quadrante	$(A_{13} > 0)$		(α)
	III quadrante	$(A_{13} < 0)$		$(180° + \alpha)$
< 0	II quadrante	$(A_{13} < 0)$		$(180° - \alpha)$
	IV quadrante	$(A_{13} > 0)$		$(360° - \alpha)$

La sequenza delle operazioni da compiere

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} = 0$ (parabola) $K = (a_{11} + a_{22})$ zero $(K > 0)$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{23}$
- $= 0$
  - $2a_{13} < 0$ non ruotata
    - $a_{33} = 0$ al centro
    - $a_{33} \neq 0$ traslata
  - $2a_{13} > 0$ ruotata di π
- $\neq 0$
  - $a_{33} = 0$ ruotata
  - $a_{33} \neq 0$ ruotata e traslata

$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{13}$
- $= 0$
  - $A_{23} > 0$ ruotata di $\frac{3}{2}\pi$
  - $A_{23} < 0$ ruotata di $\frac{\pi}{2}$
- $\neq 0$ (vedi sopra)

$$A = A_{13}a_{13} - A_{23}a_{23}$$

$$2a = \sqrt{\frac{A}{K^3}} \quad \text{(modulo)}$$

$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11}$; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{22}$; $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{12}$

controllo:
$$A = A_{11}a_{11} + A_{22}a_{22} - A_{12}a_{12}$$

$$x_c = \frac{1}{2A_{13}}\left(A_{11} + \left(\frac{-A_{23}}{K}\right)^2\right)$$

$$y_c = \frac{-1}{2A_{23}}\left(A_{22} + \left(\frac{A_{13}}{K}\right)^2\right)$$

$(x_c ; y_c) =$ coordinate del vertice

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{-a_{12}}{a_{22}}\right)$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{-a_{12}}{a_{22}}\right)$$

(α = angolo del I quadrante)

$$tg\,\alpha = \left(\frac{-a_{12}}{a_{22}}\right) = \left(\frac{a_{11}}{-a_{12}}\right) = \left(\frac{-A_{32}}{A_{31}}\right)$$

- > 0:
  - $A_{13} > 0 \rightarrow \alpha$ → I quadrante $= (\alpha)$
  - $A_{13} < 0 \rightarrow \alpha$ → III quadrante $= (180^\circ + \alpha)$
- < 0:
  - $A_{13} > 0 \rightarrow 360 - \alpha$ → IV quadrante $= (360^\circ - \alpha)$
  - $A_{13} < 0 \rightarrow 360 - \alpha$ → II quadrante $= (180^\circ - \alpha)$

infatti: $A_{31} = A_{13} = K^2 2a \cos\alpha$ ha il segno di $\cos\alpha$.

Attenzione: per $\alpha = 90^\circ$; $\alpha = 270^\circ$; per cui $A_{13} = 0$ decide il segno di A_{23}

$$tg\,\alpha = \infty \quad \begin{cases} A_{23} > 0 \rightarrow \alpha = 270^\circ \\ A_{23} < 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ \end{cases}$$ (vedi anche sopra)

Il Determinante e i minori dell'ellisse

$(a_{ij} = a_{ji})$

Ellisse	A	A_{11}	A_{22}	$A_{12} = A_{21}$	$A_{13} = A_{31}$	$A_{23} = A_{32}$	A_{33}
al centro	$-K^3a^4b^4$	$K^2a^2b^2$	0	0	0	0	$K^2(a^2b^2)$
traslata	$-K^3a^4b^4$	$K^2(a^2b^2x_c^2-a^4b^2)$	$K^2(a^2b^2y_c^2-a^2b^4)$	$-K^2(a^2b^2x_cy_c)$	$K^2(a^2b^2x_c)$	$-K^2(a^2b^2y_c)$	$K^2(a^2b^2)$
ruotata	$-K^3a^4b^4$	$-K^2(a^2b^4\,sen^2\alpha+a^4b^2\cos^2\alpha)$	$K(a^2b^4\cos^2\alpha+a^4b^2\,sen^2\alpha)$	$-K(a^2b^4-a^4b^2)\,sen\alpha\cos\alpha$	0	0	$K^2(a^2b^2)$
ruotata e traslata	$-K^3a^4b^4$	$-K(a^2b^4\,sen^2\alpha+a^4b^2\cos^2\alpha)$	$-K(a^2b^4\cos^2\alpha+a^4b^2\,sen^2\alpha)$	$-K(a^2b^4-a^4b^2)\,sen\alpha\cos\alpha$	$K^2(a^2b^2x_c)$	$-K^2(a^2b^2y_c)$	$K^2(a^2b^2)$

I coefficienti dell'equazione dell'ellisse

Ellisse	a_{11}	a_{22}	$2a_{12}$	$2a_{13}$	$2a_{23}$	a_{33}
al centro	Kb^2	Ka^2	0	0	0	$-Ka^2b^2$
traslata	Kb^2	Ka^2	0	$-2Kb^2x_c$	$-2Ka^2y_c$	$K(b^2x_c^2+a^2y_c^2-a^2b^2)$
ruotata	$K(b^2\cos^2\alpha+a^2\,sen^2\alpha)$	$K(b^2\,sen^2\alpha+a^2\cos^2\alpha)$	$K((b^2-a^2)\,sen(2\alpha))$	0	0	$-Ka^2b^2$
ruotata e traslata	$K(b^2\cos^2\alpha+a^2\,sen^2\alpha$	$K(b^2\,sen^2\alpha+a^2\cos^2\alpha$	$K((b^2-a^2)\,sen(2\alpha)$	$-2K(a_{11}x_c+a_{12}y_c)$	$-2K(a_{22}y_c+a_{12}x_c)$	$K(a_{11}x_c^2+a_{22}y_c^2+2a_{12}x_cy_c-a^2b^2)$

equazione canonica al centro assi con asse focale sul semiasse positivo delle x

formula generale: $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$

La sequenza delle operazioni da compiere

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} > 0 \quad (\text{ellisse})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{23} \qquad \boxed{y_c = \frac{-A_{23}}{A_{33}}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{13} \qquad \boxed{x_c = \frac{A_{13}}{A_{33}}}$$

$$\boxed{A = A_{33}a_{33} - A_{23}a_{23} + A_{13}a_{13}}$$

$$\boxed{K = \frac{A_{33}^2}{-A}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \;;\quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{12} \;;\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{22}$$

si controlla: $\boxed{A = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}$

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right) \begin{cases} \alpha & (\text{se } 2a_{12} < 0) \\ (90^\circ + \alpha) & (\text{se } 2a_{12} > 0) \end{cases}$$

$\sqrt{-2A / A_{33}}$ ... $\sqrt{b^2}$ = (semiasse minore) = b

$$\sqrt{\frac{-2A / A_{33}}{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}} = \begin{matrix} \sqrt{b^2} = (\text{semiasse minore}) = b \\ \sqrt{a^2} = (\text{semiasse maggiore}) = a \end{matrix}$$

Si noti la semplicità delle operazioni utilizzando i minori del determinante delle coniche.

Il Determinante e i minori dell'iperbole

$(a_{ij} = a_{ji})$

Iperbole	A	A_{11}	A_{22}	$A_{12} = A_{21}$	$A_{13} = A_{31}$	$A_{23} = A_{32}$	A_{33}
al centro	$+K^3a^4b^4$	$K^2a^2b^2$	0	0	0	0	$-K^2(a^2b^2)$
traslata	$+K^3a^4b^4$	$K^2(a^4b^2 - a^2b^2x_c)$	$-K^2(a^2b^4 + a^2b^2y_c)$	$+K^2(a^2b^2x_cy_c)$	$-K^2(a^2b^2x_c)$	$+K^2(a^2b^2y_c)$	$-K^2(a^2b^2)$
ruotata	$+K^3a^4b^4$	$-K^2(a^2b^4\operatorname{sen}^2\alpha - a^4b^2\cos^2\alpha)$	$-K^2(a^2b^4\cos^2\alpha - a^4b^2\operatorname{sen}^2\alpha)$	$-K^2(a^2b^4 + a^4b^2)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$	0	0	$-K^2(a^2b^2)$
ruotata e traslata	$+K^3a^4b^4$	$-K^2(a^2b^4\operatorname{sen}^2\alpha - a^4b^2\cos^2\alpha)$	$-K^2(a^2b^4\cos^2\alpha - a^4b^2\operatorname{sen}^2\alpha)$	$-K^2(a^2b^4 + a^4b^2)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$	$-K^2(a^2b^2x_c)$	$+K^2(a^2b^2y_c)$	$-K^2(a^2b^2)$

I coefficienti dell'equazione dell'iperbole

Iperbole	a_{11}	a_{22}	$2a_{12}$	$2a_{13}$	$2a_{23}$	a_{33}
al centro	Kb^2	$-Ka^2$	0	0	0	$-Ka^2b^2$
traslata	Kb^2	$-Ka^2$	0	$-2Kb^2x_c$	$+2Ka^2y_c$	$K(b^2x_c^2 - a^2y_c^2 - a^2b^2)$
ruotata	$K(b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)$	$K(b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)$	$K((b^2+a^2)\operatorname{sen}(2\alpha))$	0	0	$-Ka^2b^2$
ruotata e traslata	$K(b^2\cos^2\alpha - a^2\operatorname{sen}^2\alpha)$	$K(b^2\operatorname{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)$	$K((b^2+a^2)\operatorname{sen}(2\alpha))$	$-2K(a_{11}x_c + a_{12}y_c)$	$-2K(a_{22}y_c + a_{12}x_c)$	$K(a_{11}x_c^2 + a_{22}y_c^2 + 2a_{12}x_cy_c - a^2b^2)$

equazione canonica al centro assi con asse focale sul semiasse positivo delle x

formula generale: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

La sequenza delle operazioni da compiere

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} < 0 \quad (\text{iperbole})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{23} \qquad\qquad y_c = \frac{-A_{23}}{A_{33}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{13} \qquad\qquad x_c = \frac{A_{13}}{A_{33}}$$

$$A = A_{33}\, a_{33} - A_{23}\, a_{23} + A_{13}\, a_{13}$$

$$K = \frac{-A_{33}^2}{A}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{12} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{22}$$

si controlla : $A = A_{11} a_{11} - A_{12} a_{12} + A_{13} a_{13}$

$\frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{\ldots}\right) \leftarrow (2a_{12} < 0) = \alpha$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})}\right) < \quad (2a_{12}>0) = (90^\circ+\alpha)$$

$$\boxed{\frac{-2A/A_{33}}{-(a_{11}+a_{22})+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}} = b^2}$$

$b=\sqrt{b^2}=$ (semiasse)

$$\boxed{\frac{-2A/A_{33}}{+(a_{11}+a_{22})+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}} = a^2}$$

$a=\sqrt{a^2}=$ (semiasse focale)

Conico per cinque punti.

Dall'equazione generale delle coniche sostituendovi le coordinate di cinque punti: A, B, C, D, E; otteniamo un sistema di cinque equazioni, nelle cinque incognite: a_{11}/a_{33}; a_{22}/a_{33}; $2a_{12}/a_{33}$; $2a_{13}/a_{33}$; $2a_{23}/a_{33}$; ovviamente possiamo dividere per a_{11} o qualunque altro coefficiente, anziché per a_{33}, basta sapere quale coefficiente si è ridotto ad "uno" (1)..

Una conica passante per un punto $A \equiv (x_A ; y_A)$ ha per equazione: $a_{11}(x-x_A)^2 + a_{22}(y-y_A)^2 + 2a_{12}(x-x_A)(y-y_A) + 2a_{13}(x-x_A) + 2a_{23}(y-y_A) + a_{33} = 0$. (che è l'equazione di traslazione se manteniamo fissi i coefficienti, e li trasformiamo: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2(a_{13} - a_{11}x_A - a_{12}y_A)x + 2(a_{23} - a_{22}y_A - a_{12}x_A)y + (a_{33} + a_{11}x_A^2 + a_{22}y_A^2 + 2a_{12}x_A y_A - 2a_{13}x_A - 2a_{23}y_A) = 0$.

Noi consideriamo un generico punto $P \equiv (x_P ; y_P)$ che sostituito nell'equazione la verifichi; dividiamo per a_{33} avremo la matrice completa ove con la regola

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}/a_{33} & a_{22}/a_{33} & 2a_{12}/a_{33} & 2a_{13}/a_{33} & 2a_{23}/a_{33} & = a_{33}/a_{33} \\ \left| \begin{array}{cccccc} x_A^2 & y_A^2 & x_A y_A & x_A & y_A & -1 \\ x_B^2 & y_B^2 & x_B y_B & x_B & y_B & -1 \\ x_C^2 & y_C^2 & x_C y_C & x_C & y_C & -1 \\ x_D^2 & y_D^2 & x_D y_D & x_D & y_D & -1 \\ x_E^2 & y_E^2 & x_E y_E & x_E & y_E & -1 \end{array} \right| \end{array}$$

di Cramer è possibile risolvere le incognite: cioè a_{11}/a_{33} ; a_{22}/a_{33} ; $2a_{12}/a_{33}$; $2a_{13}/a_{33}$; $2a_{23}/a_{33}$

Esempio numerico

I punti per i quali dovrà passare la conica, siano: $A \equiv (0;1)$; $B \equiv (1;3)$; $C \equiv (-1;-3)$; $D \equiv (2;1)$ $E \equiv (1,0)$. Sostituendo le coordinate di ciascuno di questi punti nell'equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = -a_{33}$$

che possiamo scrivere:

$$\left(\frac{a_{11}}{a_{33}}\right)x^2 + \left(\frac{a_{22}}{a_{33}}\right)y^2 + \left(\frac{2a_{12}}{a_{33}}\right)xy + \left(\frac{2a_{13}}{a_{33}}\right)x + \left(\frac{2a_{23}}{a_{33}}\right)y = -1$$

avremo 5 equazioni ove i coefficienti sono le cinque incognite (da moltiplicare per coefficienti arbitrari K essendo (−1) la colonna dei termini noti.)

Il determinante dei coefficienti sarà:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 12 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 1 \end{vmatrix}(2)$$

$$\Delta = -2(6-36) = 60$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \Delta = -2(6-36) = 60$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 3 & 1 & +3 \\ -1 & 9 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -6 \\ 3 & 7 & -12 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_{11} = 2(-48+24) = -96$$

$$a_{11} = \frac{-96}{60} = -1{,}6$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_{22} = 3(-12-4) = -48$$

$$a_{22} = \frac{-48}{60} = -0{,}8$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 9 & -2 & -12 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 4{,}5 & -6 \\ 2{,}5 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_{12} = -4(-54+15) = +156$$

$$2a_{12} = \frac{156}{60} = +2{,}6$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 9 & -6 \\ 3 & 9 & -12 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_{13} = -2(-36+18) = +36$$

$$2a_{13} = \frac{36}{60} = +0{,}6$$

$$2a_{13} = \frac{36}{60} = +0,6$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 9 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 9 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{23} = -2(18-12) = -12$$

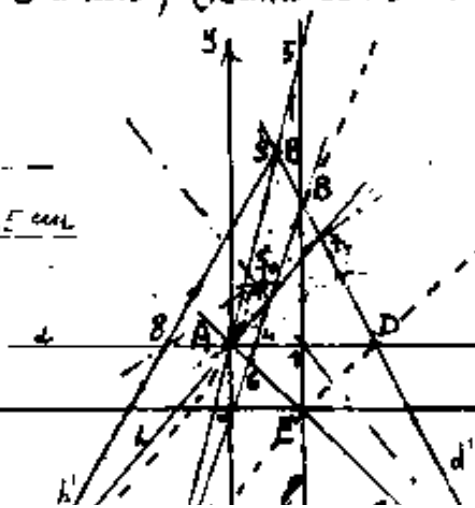
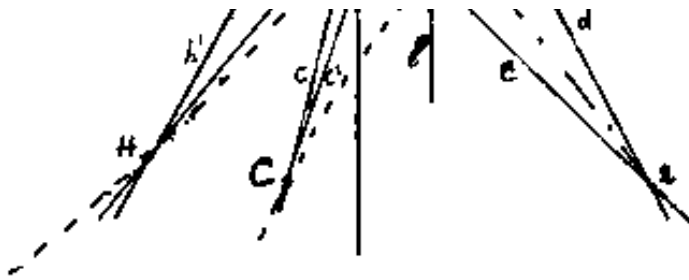
$$2a_{23} = \frac{-12}{60} = -0,2$$

Risoluzione grafica della conica per 5 punti

Questo problema può essere meglio trattato quando avremo esposto la geometria proiettiva (Teorema di Steiner - Chasles) che dice: "Il luogo dei punti comuni ai raggi corrispondenti in due fasci proiettivi, (S) ed (S'), (complanari distinti e non prospettivi) è una conica".

In questa sede utilizzeremo il teorema senza dimostrarlo. Scelti due dei cinque punti come poli di proiezione, per esempio sia A≡(S) e B≡(S₁), da A e da B si proiettano gli altri tre punti, e siano rispettivamente c, c'; d, d'; e, e'; i raggi corrispondenti da A(S) e da B(S') verso C, D, E. Avremo punti comuni: e'd in 1; e d' in 2; (sulla retta $\overline{1\text{-}2}$ dovrà essere il centro di collineazione S_o) d'c in 3; dc' in 4; (anche la retta $\overline{3\text{-}4}$ deve passare per S_o). ce' in 5 c'e in 6. (anche la $\overline{5\text{-}6}$ deve passare per S_o)

Grafico
scala 1:1,5 cm
(iperbole)

Tracciamo da A un generico

Tracciamo da A un generico raggio h che incontri in 7 il raggio d', se uniamo 7 con S₀ in 8 incontreremo d; perciò il raggio h' da B (S'₁) sarà l'unione di 8 con B il punto comune ad h e h' sarà H ulteriore punto della conica. E' così possibile tracciare per punti la conica (Il problema non ha risoluzioni in casi di punti allineati)

Calcolo dei semiassi

$$a^2 = \frac{-2A/A_{33}}{(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}$$

$$a^2 = \frac{-2(400)/-41}{(16+8)+\sqrt{(16-8)^2+(26)^2}} = \frac{800}{41(24+\sqrt{740})}$$

$$a^2 = \frac{800}{41\,(51,202941)} = 0,381076 \rightarrow \boxed{a = 0,617313268}$$

(asse focale)

$$b^2 = \frac{-2A/A_{33}}{-(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+(2a_{12})^2}}$$

$$b^2 = \frac{800}{41(-24+\sqrt{700})} = \frac{800}{41(3,20294101)} = 6,091962048$$

$$\boxed{b = 2,468190035}$$

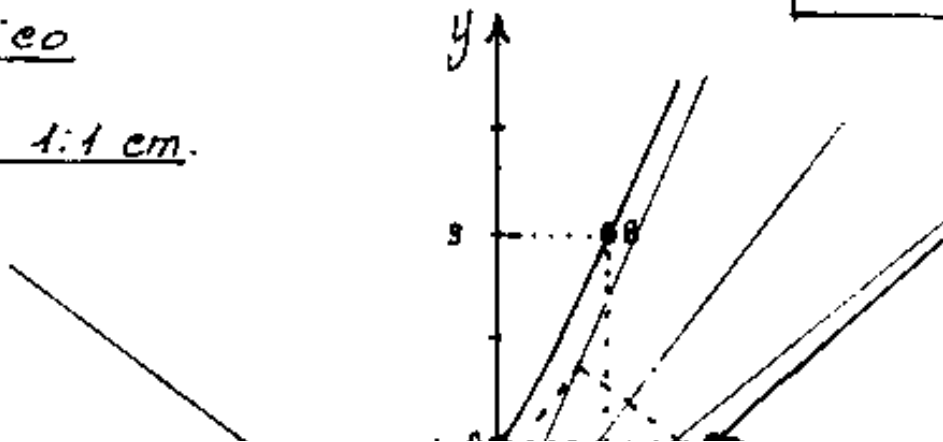
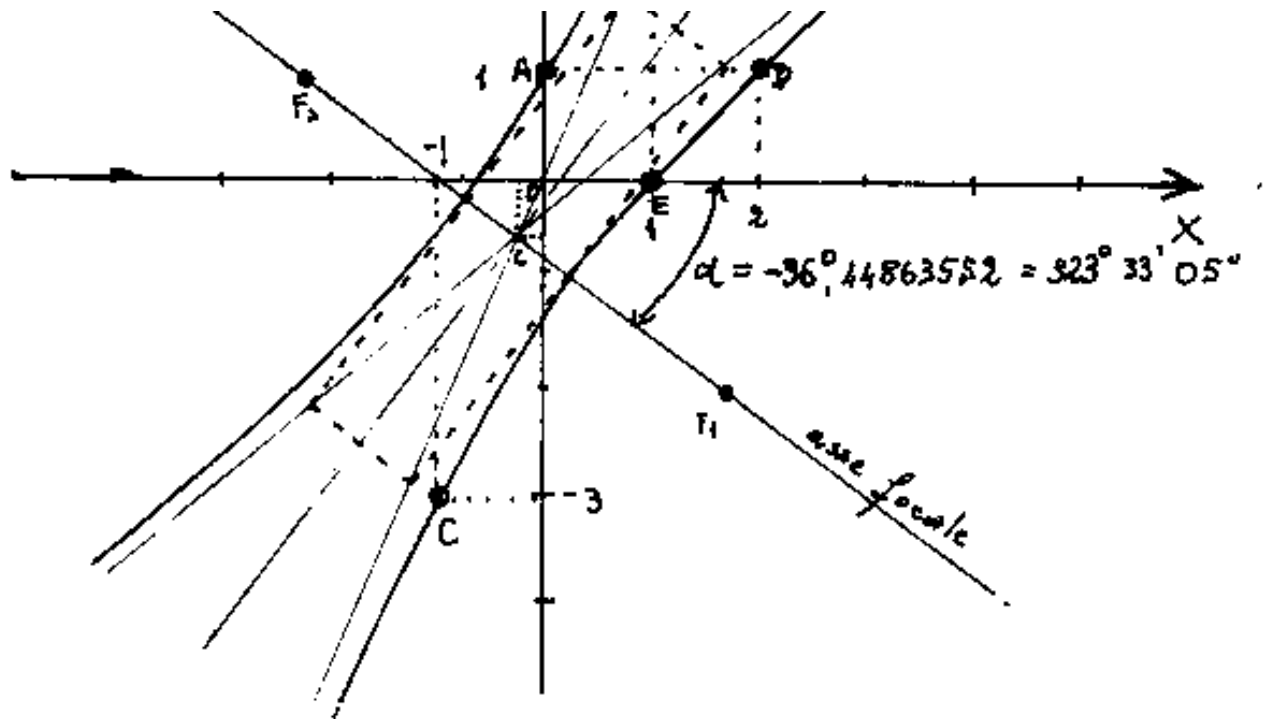
grafico

scala 1:1 cm.

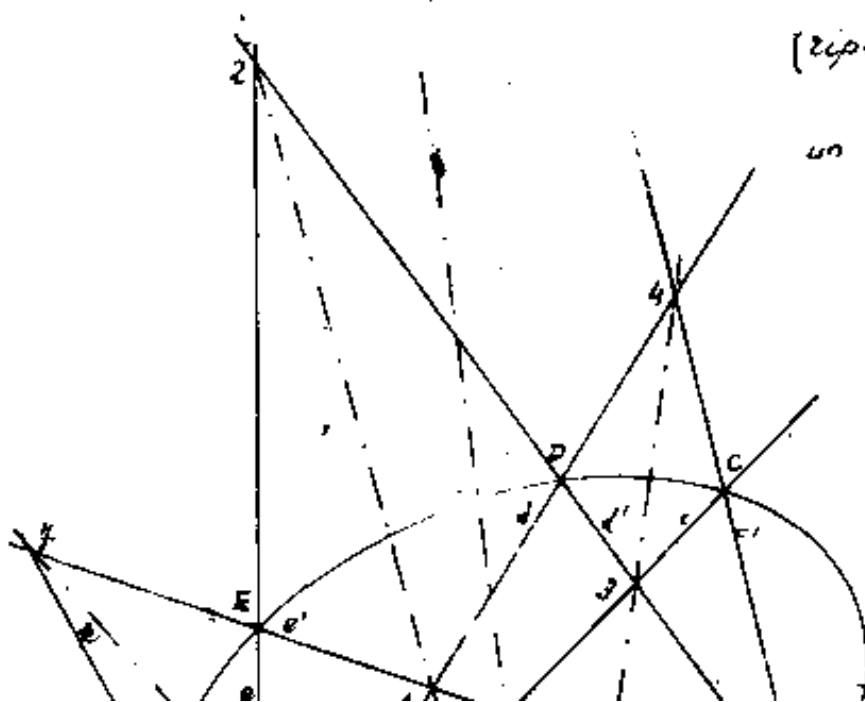
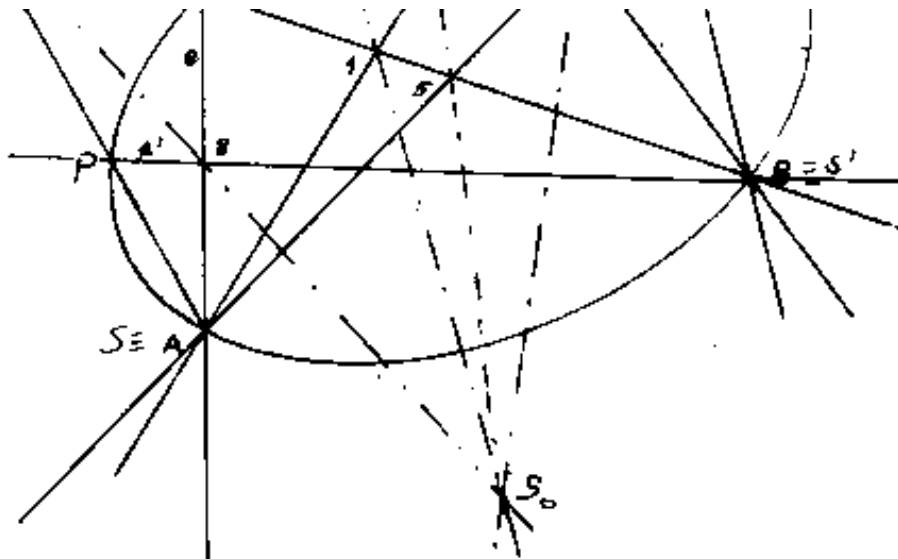
y

3

$\alpha = -36^\circ{,}44863552 = 323^\circ\ 33'\ 05''$

asse focale

In questo genere di costruzioni grafiche, è piuttosto importante la scelta dei due punti S ed S', centri dei fasci proiettanti. Infatti se ripetessimo la costruzione prendendo S in C anziché in A e lasciando S' in B avremo che S_0 si allontanerebbe dai cinque punti, e dovremmo fare una scala molto piccola perché non esca dal foglio. Per cinque punti A, B, C, D, E le possibili coppie sono: $\binom{5}{2} = 10$ e precisamente:

AB - AC - AD - AE - BC - BD - BE - CD - CE - DE.

Anche sulla scelta delle coppie (S), (S_1) rimandiamo l'argomento alla geometria proiettiva.

(ripetiamo la costruzione per un ellisse.)

Sequenza dei cubi

Abbiamo già visto che la sequenza dei numeri naturali al quadrato è data dalla somma progressiva dei numeri dispari. Ci domandiamo, se esiste, una espressione che ci dia la sequenza dei cubi.

Notiamo che la somma progressiva dei numeri interi, scalata di un posto, moltiplicata per 6, aumentata di 1 da una successione tale che le somme progressive (ridotte della serie) sono i cubi.

Osserviamo la seguente tabella:

n	$\Sigma(n-1)$	$6\cdot\Sigma(n-1)$	$\gamma=6\Sigma(n-1)+1$	$\Sigma\gamma=n^3$	Note
1	0	0	1	1	corrispondenza
2	1	6	7	8	
3	3	18	19	27	
4	6	36	37	64	

4	6	36	37	64	Per far tornare m^3 in ... di m.
5	10	60	61	125	
6	15	90	91	216	
7	21	126	127	343	
8	28	168	169	512	
9	36	216	217	729	
10	45	270	271	1000	
....	...	....	.....	....	....)

Sappiamo che la somma dei primi n numeri naturali è data da: $\Sigma = \frac{n+1}{2}(n)$, ma avendo scalato di 1 diventa: $\Sigma_{n-1} = \frac{(n-1)+1}{2}(n-1)$

$\Sigma_{n-1} = \frac{n^2-2n+1+-1+n}{2} = \frac{1}{2}(n^2-n)$ e moltiplicata per 6 avremo $\frac{6}{2}(n^2-n) = (3n^2-3n)$, che aumentata di 1 $= \gamma = 3n^2+3n+1$, ove facendo la $\sum_1^n \gamma$ si ha:

$$\sum_1^n 3n^2 = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{2}(2n^3+n^2+2n^2+n)$$

$$= \frac{1}{2}(2n^3+3n^2+n)$$

$$-\sum_1^n 3n = -3\frac{(n+1)}{2}n = -\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n\right) = \frac{1}{2}(3n^2-3n)$$

$$\sum_1^n 1 = n = \frac{2}{2}n$$

Sommando: $\frac{1}{2}(2n^3+3n^2-3n^2+n-3n+2n)$

$$= n^3$$

Le formule per le ridotte delle serie di potenze di numeri naturali sono in questo II° vol.

potenze di numeri naturali, sono in questo II vol.

Indice Enciclopedico Indice Pag. 462

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Indice: **A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z**

Volume: 1 2 3 4 5 6 7

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Indice: **A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z**

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Indice: **A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z**

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Indice: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Volume: 1 2 3 4 5 6 7

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Indice: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Volume: 1 2 3 4 5 6 7

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Indice: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Volume: 1 2 3 4 5 6 7

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Indice: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Volume: 1 2 3 4 5 6 7

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

lui scoperte America, nome che poi prevalse per entrambi i continenti. Si dice che il Vespucci era un uomo onesto e di cuore, amico ed ammiratore di Colombo, e che non avrebbe mai voluto sottrarre a Colombo i suoi meriti.

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Indice: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Indice: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Volume: 1 2 3 4 5 6 7

Corrado Brogi

Indice Enciclopedico

Il valore di un determinante di due sole righe e colonne, è dato dalla somma algebrica dei prodotti degli elementi diagonale, presi col segno che compete alla diagonale cioè:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = +[(1)(-3)] - [(1)(1)] = -3-1 = \Delta = -4 \qquad \boxed{\Delta = -4}$$

Se facciamo un nuovo determinante sostituendo alla colonna di una incognita la colonna dei termini noti, il valore di questo determinante diviso Δ è il valore dell'incognita.

$$\begin{vmatrix} 62 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = \Delta x = [(62)(-3)] - [(6)(1)] = -192 \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-192}{-4} = +48$$

$$\boxed{X = +48}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 62 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \Delta y = [(1)(6)] - [(62)(1)] = -56 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-56}{-4} = +14$$

$$\boxed{y = +14}$$

Qualora si abbiano tre equazioni in tre incognite, si usa la regola di Sarrus la quale dice di affiancare a destra del determinante le prime due colonne a sinistra e quindi fare la somma dei prodotti diagonale col segno previsto.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 7 \\ 2x - 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

sistema di equazioni da risolvere col metodo di Sarrus.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 7z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

risolvere col metodo di Sarrus.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & +2 \end{vmatrix} = \Delta = \begin{matrix} 3 & 2 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & +2 & 4 & -3 \end{matrix} =$$

$$+[(3)(-5)(2)] + [(2)(7)(4)] + [(-5)(2)(-3)] - [(-5)(-5)(4)] - [(3)(7)(-3)] - [(2)(2)(2)] = (-30) + (56) + (+30) - (100) - (-63) - (8) = \boxed{\Delta = 11}$$

Indice Enciclopedico Indice Pag. 167

4) Metodo di Cramer o dei determinanti

Dopo aver ordinato il sistema di equazioni in modo che ogni riga, che costituisce una equazione, abbia, incolonnate in verticale con le altre righe, le stesse incognite, i simboli di "=" e gli elementi noti; riportiamo, nello stesso ordine, i soli coefficienti delle incognite; otterremo così una tabella (o quadro) che delimiteremo con due barre verticali. Questa tabella (o quadro o prospetto) si chiama: "**determinante dei coefficienti**" (detta anche matrice incompleta) ed è costituita da tante righe quante sono le equazioni e da tante colonne quante sono le incognite, perciò, nel caso risolutivo, è un prospetto quadrato. (Matrice quadrata = determinante)

$$\begin{cases} x + y = 62 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \overset{(x)}{1} & \overset{(y)}{1} \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$ determinante dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 62 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$ matrice completa

Se al prospetto aggiungiamo la colonna dei termini noti si ottiene la cosiddetta **Matrice completa**.

si ottiene la cosiddetta <u>Matrice completa</u>.

Nei determinanti occorre considerare le diagonali del prospetto quadrato. La diagonale che dal punto in alto a sinistra scende al punto in basso a destra |⋱| si chiama diagonale <u>principale</u> (prodotti positivi degli elementi). L'altra |⋰| è detta <u>Seconda</u> diagonale (prodotti negativi degli elementi).

Abbiamo detto che ogni equazione è una correlazione fra le grandezze espressa in linguaggio matematico, cioè fra il testo di un problema esposto in lingua parlata ed il linguaggio matematico si può fare una traduzione, direi quasi interlineare. Per esempio

problema.

La somma di due numeri è sessantadue

$$x + y = 62$$

Il quoziente del maggiore per il minore è 3 e resto 6

si può scrivere: $\dfrac{x}{6}\Big|\dfrac{y}{3}$ oppure: $\dfrac{x}{y} = 3 + \dfrac{6}{y}$

ove moltiplicando per y si ottiene $x = 3y + 6$

avremo così il sistema ordinato:

$$\begin{cases} x + y = 62 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

che per riduzione:

$$4y = 56 \quad \supset \quad y = 14 \ ; \quad x = 62 - 14 = 48$$

possiamo verificare che i due numeri: 48 e 14

possiamo verificare che i due numeri: 48 e 14

soddisfano le correlazioni imposte:

$48 + 14 = 62$; 48 L 14 = 6 3 ;

Equazioni indipendenti

Notiamo che ogni equazione corrisponde a una correlazione che è espressa in una uguaglianza; e poiché moltiplicando o dividendo i due membri dell'uguaglianza per uno stesso numero l'uguaglianza non cambia, cioè la correlazione rimane la stessa, ed è graficamente rappresentata dalla stessa retta, cioè le due espressioni non sono indipendenti (sono la stessa equazione espressa in forma diversa). esempio:

(rette sovrapposte) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 10 \end{cases}$ (sistema indeterminato)

sono due rette sovrapposte ogni punto può essere una soluzione, ma resta indeterminato quale punto.

Notiamo anche che due correlazioni possono essere contraddittorie, e non pos=

<u>possono essere contraddittorie</u>, e non possiamo decidere quale di esse sia vera, ammesso che una delle due sia vera l'altra è certamente falsa. (Anche queste equazioni non sono indipendenti e non possono essere entrambe vere).

esempio:

(rette parallele non si incontrano)

$$\begin{cases} (x+y) = 7 \\ (x+y) = 9 \end{cases}$$ (<u>sistema impossibile</u>)

III° metodo detto di Confronto

Si esplicita la stessa incognita nelle due equazioni e si uguagliano (si confrontano) le espressioni:

$$x = (8-2y) \; ; \quad x = (y-1) \; ; \quad (8-2y) = (y-1)$$

$$3y = 9 \qquad y = \frac{9}{3} = 3 \qquad x = 3-1 = 2$$

Se avessimo esplicitata la y avremmo:

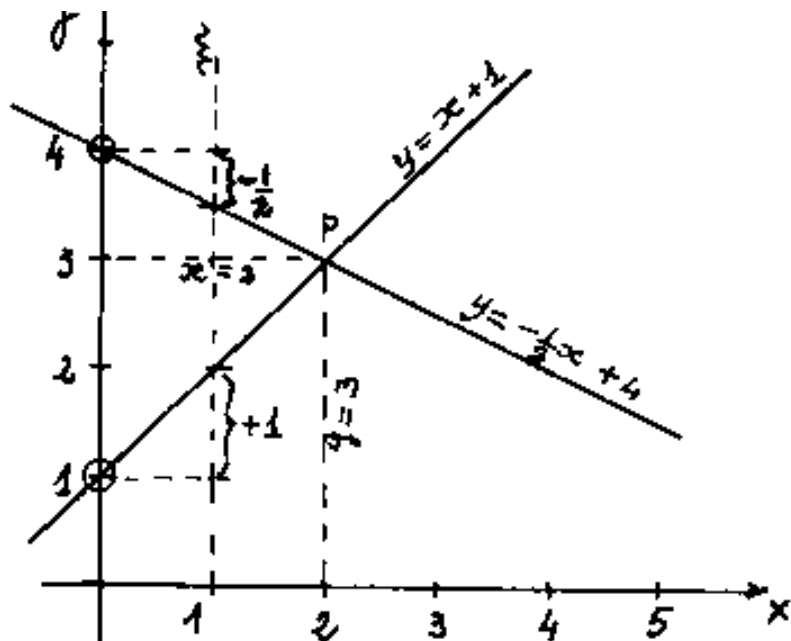
$$\begin{cases} y = \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \\ y = (x + 1) \end{cases} \qquad (x+1) = \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \qquad \frac{3}{2}x = 3$$

$$x = 2 \; ; \quad y = (2+1) = 3$$

questa forma consente la verifica grafica, infatti è facile disegnare le due rette espresse in forma esplicita:

"Fissato sulla y il punto di traslazione, ponendo zero la stessa quota sulla "m" si fissa la pendenza. Il punto comune alle due rette risolve il sistema."

y ξ_1

Il disegno a fianco di=

Il disegno a fianco dimostra che un sistema di equazioni in due incognite può essere facilmente risolto graficamente, o almeno, per via grafica, verificato.

Si abbia il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

conviene scriverlo nella forma:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

cioè conviene portare la colonna dei termini noti a secondo membro.

I°) metodo risolutivo detto di riduzione, o di somma e sottrazione. "Consiste nel moltiplicare o dividere le uguaglianze in modo che l'incognita che si vuole eliminare abbia coefficienti uguali e di segno opposto, cosicché sommando le due equazioni tale incognita si elide".

moltiplichiamo per -1 la seconda equazione e sommiamo:

$$\begin{array}{r} \not{x} + 2y = 8 \\ -\not{x} + y = 1 \\ \hline 3y = 9 \end{array}$$

da cui: $y = \frac{9}{3} = 3$

invece moltiplicando per $+2$ la seconda equazione e sommando si ha:

$$\begin{array}{r} x + \not{2y} = 8 \\ 2x - \not{2y} = -2 \\ \hline 3x \quad = 6 \end{array}$$

da cui $x = \frac{6}{3} = 2$

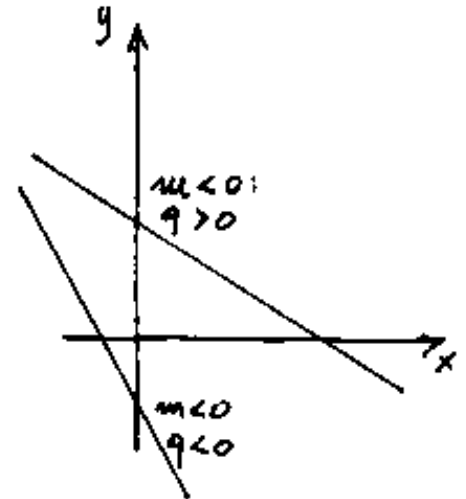
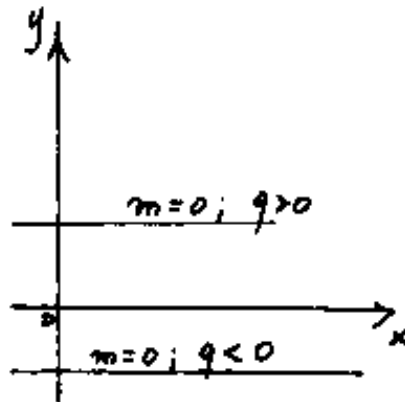
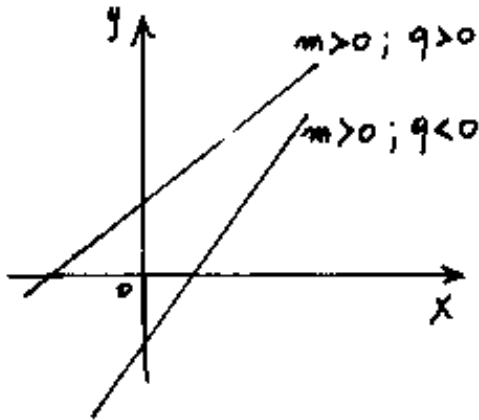
II° metodo detto di sostituzione

II° metodo detto di sostituzione

esplicitata una incognita si sostituisce nell'altra.

dalla 2ª equazione si ha: $x = -1+y$ e sostituendo nella 1ª equazione: $(-1+y)+2y=8$ da cui $3y=9$ $y=\frac{9}{3}=3$

e riportando y nella x esplicitata: $x=-1+3=2$.

È molto importante notare i segni di "m" e di "q"
Per: $m=0$ si hanno rette parallele ad x di equazione: $y=q$.

L'equazione della retta in <u>forma implicita</u>:
<u>$ax+by+c=0$</u> è la forma lineare generale per esprimere le equazioni lineari (o di I° grado) in due incognite.

Equazioni Lineari

La più semplice equazione lineare in una incognita è del tipo: $ax+b=0$ da cui: $x=-b/a$.
(Graficamente sarebbe l'ascissa p)

Ricordiamo che per equazioni lineari in più incognite occorrono tante equazioni "indipendenti" quante sono le incognite. Faremo in seguito la trattazione generale, ora studiamo i metodi risolutivi di due equazioni in due incognite, e la loro rappresentazione grafica.

Tutte le rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare "m", quindi se trasliamo in direzione $\pm y$ parallelamente a se stessa una retta per l'origine, e sia "q" l'entità della traslazione; tutti i punti della retta per l'origine manterranno la stessa ascissa x mentre l'ordinata varia di "$\pm q$". Il "q" è detto: <u>coefficiente di traslazione lineare</u>, e l'equazione della retta generica in <u>forma esplicita</u> diventa:

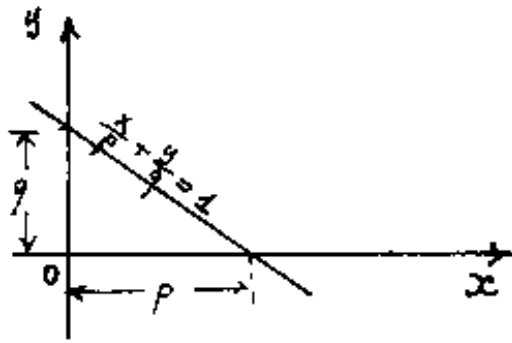
$$\boxed{y = mx + q}$$

Il valore di "q" si legge sulla retta delle y nel punto ove la retta interseca tale asse.

Se nell'equazione della retta poniamo: $y = 0$ e risolviamo "x" si ha: $x = -q/m$, posto: $-q/m = p$; $m = -q/p$ sostituendo: $y = -\frac{q}{p}x + q$ che può scriversi:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1} \qquad \left(\text{equazione della retta in forma segmentaria}\right)$$

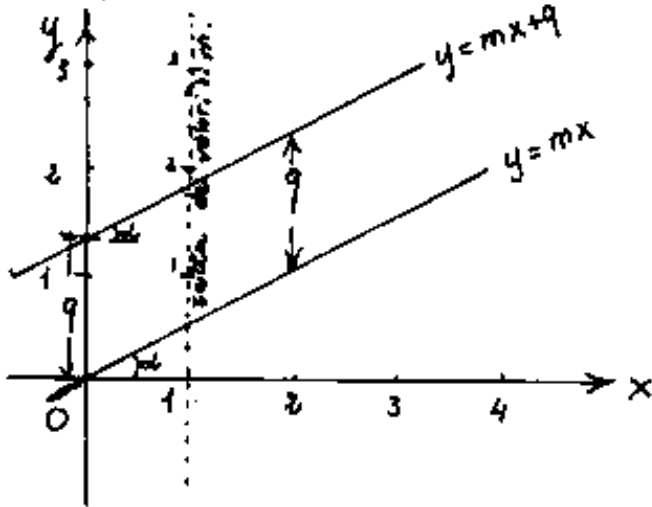
"p" e "q" rappresentano i segmenti intercettati dalla retta sugli assi x ed y. Moltiplicando l'equa-

dalla rettà sugli assi x ed y. Moltiplicando l'equazione segmentaria della retta per (p.q) abbiamo: $qx + py - qp = 0$

e posto: $q = a$; $p = b$; $-(qp) = c$

sostituendo:

$$ax + by + c = 0$$

equazione della retta in forma implicita.

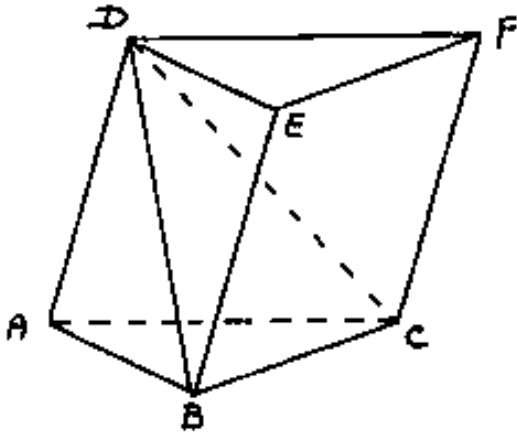
assi. Ove m è il coefficiente angolare e rappresenta la "pendenza della retta. I valori di m, (per rette passanti per l'origine O degli assi) si possono leggere sul la retta parallela ad y e passante per $x = 1$.

Ogni punto del piano x, y può essere individuato da due valori numerici detti: "Coordinate" di quel punto. Prima il valore "x" detto ascissa che misura (positivamente o negativamente) la distanza del punto dall'asse y. L'asse x è detta asse delle ascisse. Poi segue il valore "y" detto ordinata che misura (positivamente o negativamente) la distanza del punto dall'asse x. L'asse y è detta asse delle ordinate. (per es. $P \equiv (x_P ; y_P)$). L'ascissa "x_P" e l'ordinata "y_P", sono dette coordinate cartesiane del punto P. Ogni correlazione fra le variabili x ed y rappre

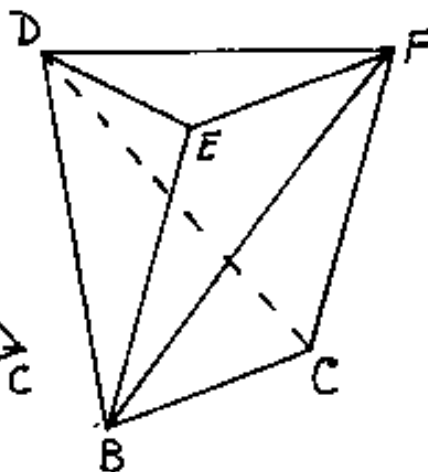
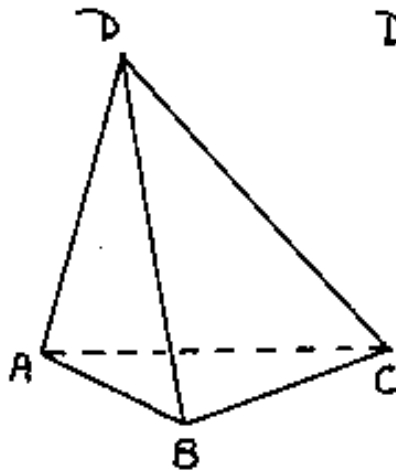
ogni correlazione fra le variabili x ed y rappre-senta un luogo geometrico, per esempio le rette per l'origine scritte nella forma: $\frac{y}{x} = m$, possono definirsi: "il luogo geometrico di tutti i punti le cui coordinate hanno rapporto costante". La retta dei valori di m, cioè: $x = 1$, sarà il "luogo geometrico di tutti i punti aventi la stessa ascissa $x = 1$".

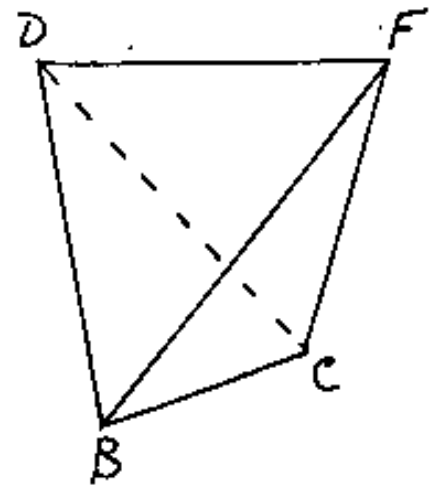
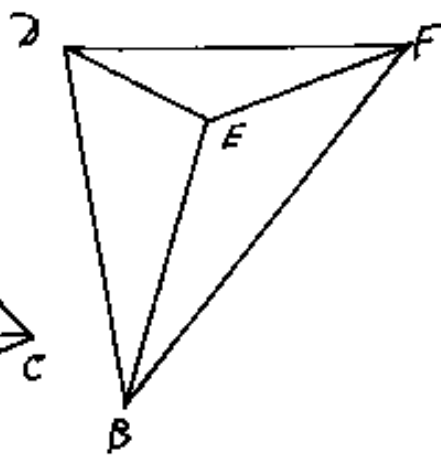
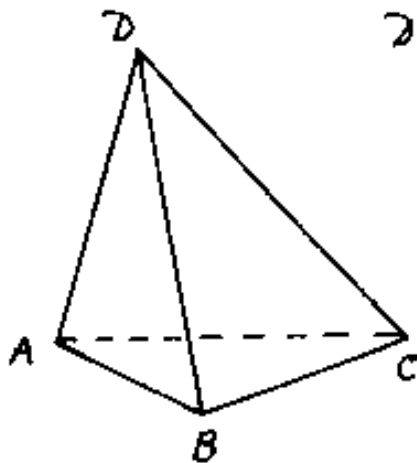
Le equazioni

Abbiamo visto che certe espressioni matematiche possono ridursi alla forma: $y = f(x)$ che si legge: "y = funzione della x.", cioè assegnato un valore numerico, arbitrario, definito alla variabile indipendente "x", risulta definito il corrispondente valore numerico della variabile dipendente "y". La parola: "funzione" è la "generalizzazione" di espressioni matematiche più o meno complesse contenenti almeno una variabile x, ove sostituendo alla x (o alle x) il prescelto valore numerico, ed effettuati i calcoli dell'espressione matematica, si ottiene un'altro valore numerico, che è quello della variabile dipendente (y). La parola "funzione" esprime quindi un concetto di dipendenza (la y dipende dalla x).

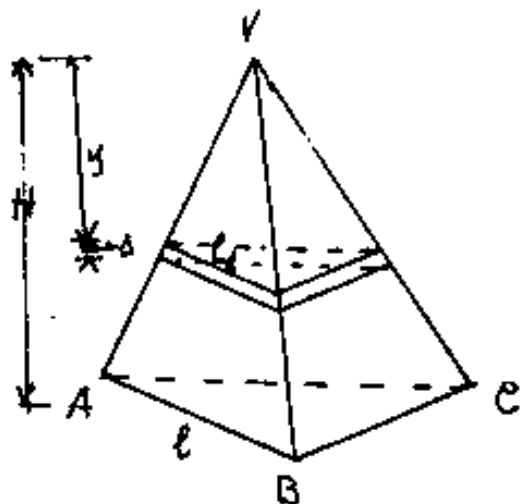
Fra le più semplici correlazioni fra x ed y è l'espressione: $y = mx$ che abbiamo già visto nella trattazione dei numeri razionali, ed abbiamo già detto che l'espressione sopra scritta é l'equazione di una retta in forma esplicita, passante per l'origine degli

D F E A B C

La piramide ABCD ha la stessa base e la stessa altezza del prisma ABCDEF.

D A B C D F E B C

La piramide a base quadrangolare BCFE e vertice D viene divisa in due parti dal piano DBF.

D A B C D F E B D F B C

B B B

Le piramidi ABCD e DEFB hanno lo stesso volume avendo uguali le basi ABC = DEF e stessa altezza.

Le piramidi BEFD e BFCD hanno lo stesso volume perché le aree di base BEF e BCF sono uguali a metà del parallelogramma BCFE e stessa altezza avendo in comune il piano di base ed il vertice. Perciò il volume uguale delle tre piramidi è un terzo del volume del prisma.

In una piramide le dimensioni lineari delle sezioni parallele alla base sono proporzionali alla distanza dal vertice:

$$l : l_1 = H : y$$

$$l_1 = \frac{ly}{H} = \rho l \quad \text{ove } \rho = \text{coefficiente di proporzionalità lineare.}$$

Le aree delle sezioni sono proporzionali al quadrato delle misure lineari, cioè sono proporzionali al quadrato della loro distanza dal vertice

$$S_b : S = H^2 : y^2$$

$$S = \frac{S_b y^2}{H^2} = S_b \rho^2$$

I volumi sono proporzionali ai cubi delle misure lineari.

possiamo scrivere $V_1 = V_b \rho^3 = K y^3$ (ove K = coeff. prop.)

Il volume di un foglio distante y dal vertice sarà:

$$K(y+s)^3 - Ky^3 = S_1 \cdot s = \frac{S_b}{H} y s$$

$$K(\cancel{y^3}+3y^2s+3ys^2+s^3)\cancel{-y^3}=\frac{Sb}{H}ys$$

$$K(3y^2+3ys+s^2)=\frac{Sb}{H}y=S_1$$

Se pensiamo che s è lo spessore di un indivisibile infinitamente più piccolo di y^2 avremo che $K3y^2=S_1$

e moltiplicando per y:

$$\boxed{Ky^3=V_1=\frac{S_1y}{3}}$$

cioè il volume di una piramide è un terzo del prodotto della base per la distanza dal vertice (altezza)

Bonaventura Cavalieri, milanese (1598 - 1647), gesuata, discepolo di Galileo, insegnó a Bologna e scoperse la: "teoria degli indivisibili", egli chiamó: "Indivisibile" ció che modernamente è il differenziale volume. Cioè, con discorso analogo a quello degli Eleati, egli pensó di dividere in due lo spessore di ció che noi abbiamo chiamato: fogli sottili, e metà la gettiamo e l'altra metà la dividiamo, il procedimento non ha fine, quando finirà l'ultimo spessore il nostro foglio diventerebbe una superficie piana priva di spessore, mentre l'attimo avanti l'ultimo taglio si ha il più piccolo volume possibile avente per base l'area del foglio e per spessore un infinitesimo che chiameremo differenziale. (Come si vede il calcolo infinitesimale aveva già gettato le sue basi, ben prima di Leibniz

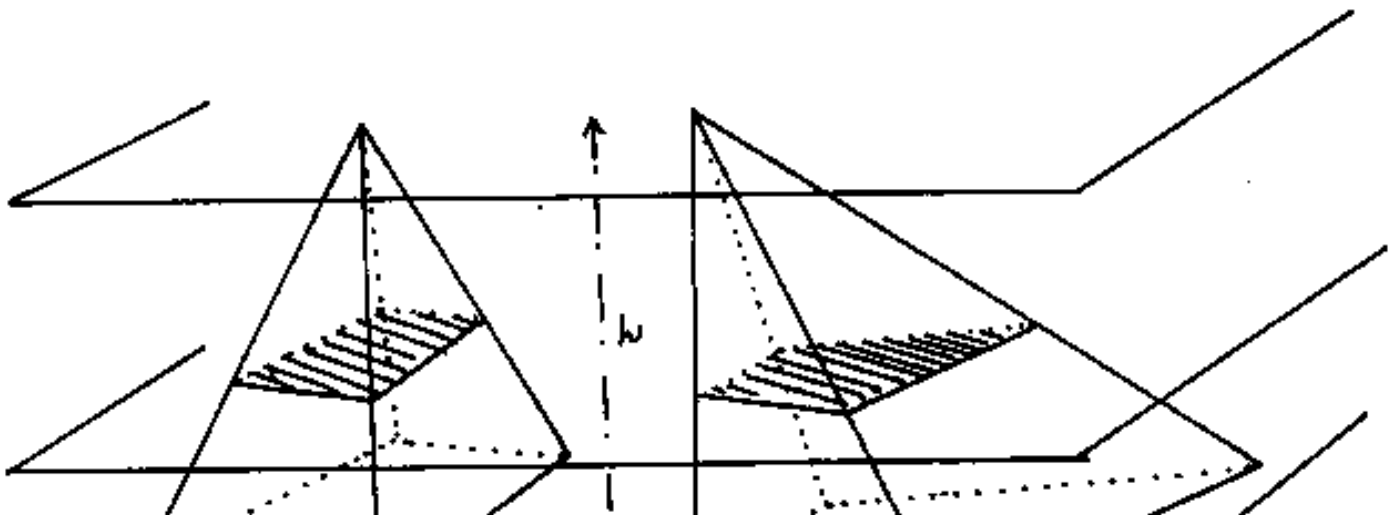
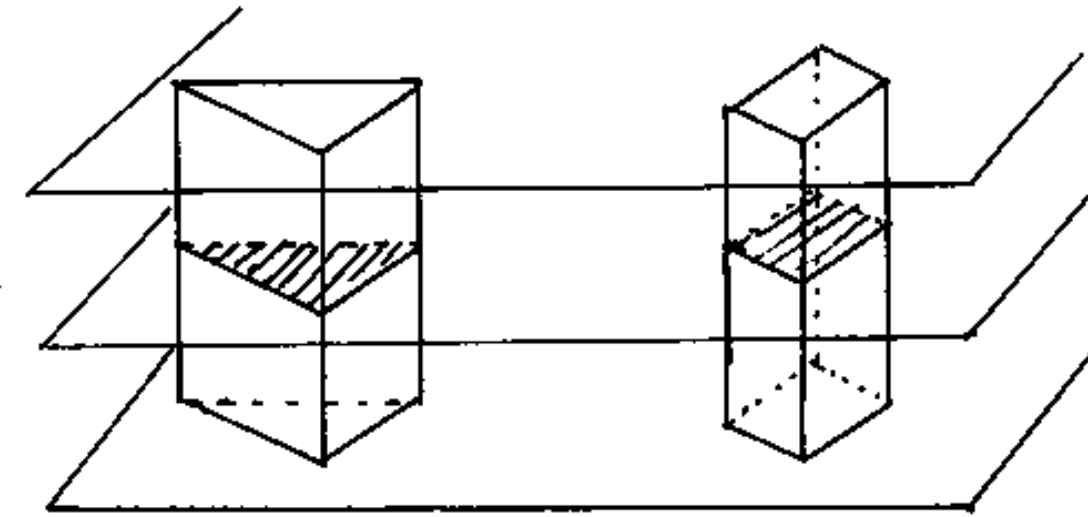
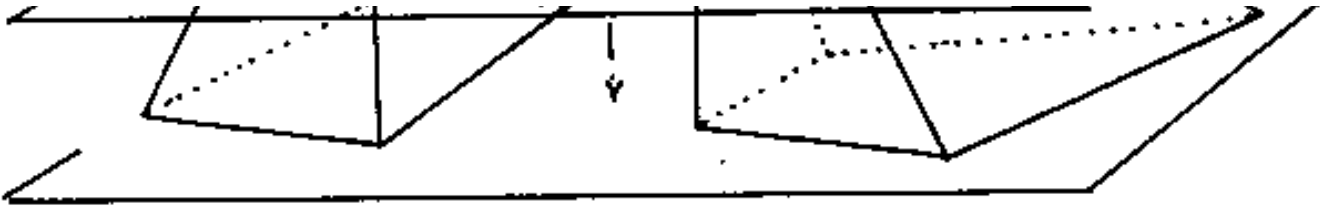
aveva già gettato le sue basi, assai prima di Leibniz e di Newton.)

Avremo occasione di mostrare che la somma di differenziali si indica con una esse allungata $\int$, che si chiama integrale, ed il volume sarà la somma degli indivisibili. Il principio di Cavalieri dice:

Due solidi compresi fra due stessi piani paralleli sono equivalenti quando si compongono degli stessi indivisibili.

Principio di Cavalieri

Dati due solidi, se esiste una giacitura di piani paralleli, tale che, ciascun piano di essa che tagli i due solidi formi sezioni equivalenti, i due solidi sono equivalenti

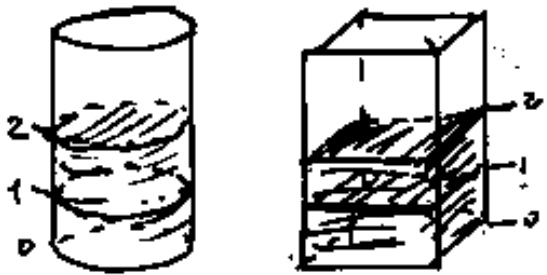
h

È come considerare un volume costituito da tanti fogli, sottili di spessore costante, sovrapposti. Ciascun foglio ha il suo volume piccolissimo costituito dalla sua area per lo spessore.

perciò, a parità di base, il volume è proporzionale al= l'altezza. Se mettiamo la stessa quantità di liquido in recipienti aventi area di base (e di sezione) doppia, tripla, ecc. vedremo che l'altezza del liquido risulta metà, un terzo, ecc. Ciò vuol dire che il volume è pro= porzionale all'area della sezione (o di base). Da ciò il volume di un cilindro o di un prisma risulta dal prodotto dell'area di base per l'altezza. Quindi dimensionalmente un volume è una lunghezza ele= vata al cubo. Se l = lunghezza lineare, avremo che: l^2 = area ; l^3 = volume. Cioè se $l = 1$ anche $l^3 = 1$ perciò l'unità di volume è un cubo di spigolo unita= rio. (La parola cubo ha due significati, uno è il solido esaedro, l'al= tro è la terza potenza cioè una base con esponente 3 si dice elevata al cubo). Per un errore di campionatura, gli scienziati dell'epoca, non riuscirono a farsì che un decimetro cubo di acqua distil= lata, a 4° C e 760 mm di pressione, fosse esattamente un Kg.

lata, a 4° C e 760 mm di pressione, fosse esattamente un Kg, ma risultó: 0,999972... ≃ 1 Kg, perció inventarono il "litro" ove un litro di acqua nelle suddette condizioni pesa esattamente 1 Kg. Un litro quindi equivale a 1,000028 dm^3. Per i calcoli ordinari si puó considerare 1 litro ≅ dm^3. (Fu scelta l'acqua alla massima densitá, in modo che si dilatasse sia aumentando che diminuendo la temperatura. Un Kg di tale acqua (Kgmassa) deve rappresentare l'unitá di massa.)

Le capacità, i volumi

La misura di capacità, è una misura di volume. Per rendersi conto dei volumi, facciamo una esperienza. Prendiamo una bottiglia, cilindrica o prismatica, (cioè che abbia la stessa figura di sezione a qualunque altezza si tagli perpendicolarmente), ed un bicchiere o misurino col quale si possa stabilire una stessa quantità di liquido. Mettiamo nella bottiglia il primo bicchiere di liquido, in trasparenza vedremo una certa altezza di liquido che segneremo con un tratto sulla superficie della bottiglia. Il liquido ha assunto la forma di un prismettino o cilindrino alto fino al tratto. Mettiamo ora un secondo bicchiere di liquido nella bottiglia vedremo innalzarsi il livello del liquido nella bottiglia e lo fisseremo tracciando un secondo tratto, se mettiamo

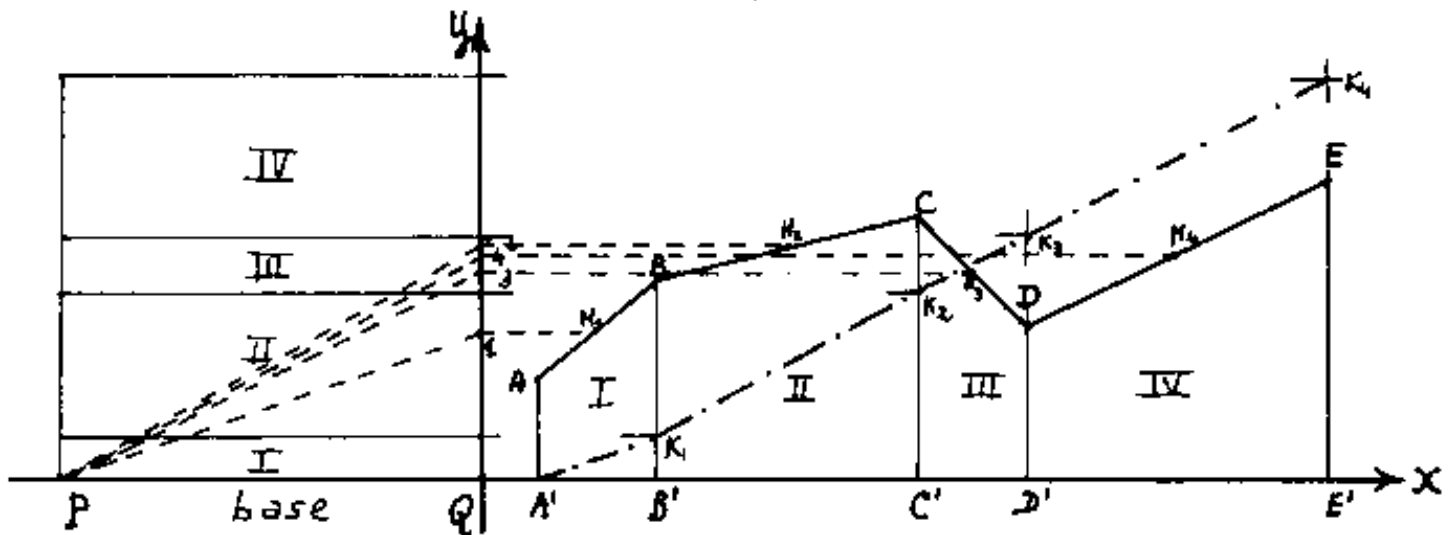
un terzo bicchiere avremo un terzo tratto e così via... se l'area delle sezioni della bottiglia è la stessa i tratti risultano equidistanti; è come se si fossero sovrap= posti tanti volumetti ele= mentari.

K in R ed avremo PQRS il rettangolo equivalente.

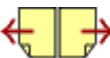
Infatti : $Area = \frac{a+b}{2} \cdot h = (\overline{QN})h = \ell m$, $\overline{QN} : \ell = m : h$.

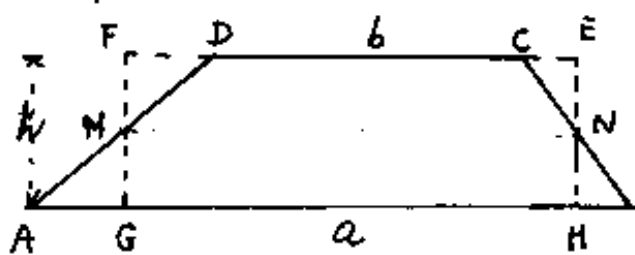
Questo metodo generalizzato viene chiamato integrazione grafica.

INTEGRAZIONE GRAFICA

Data una poligonale ABCDE riferita agli assi x,y Si vuole l'area (rettangolo equivalente) della porzione di piano delimitata dall'asse x, dalla poligonale e dalle ordinate dei punti estremi A ed E.

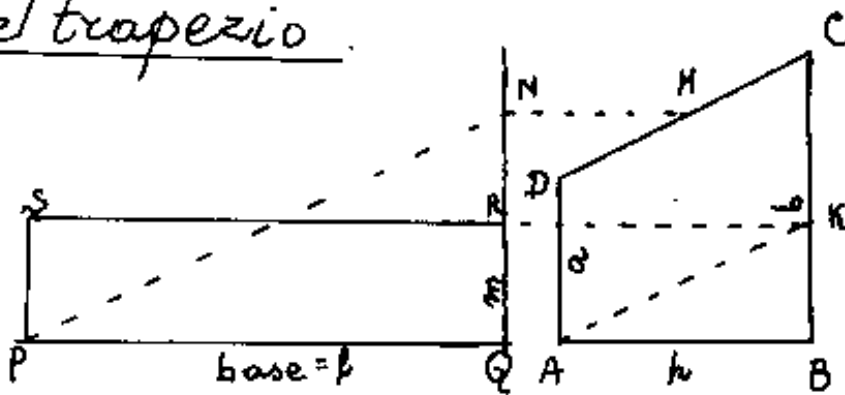
y
IV
III
II
I
P base Q A' B' C' D' E' X
A B C D E
M_1 M_2 M_3 M_4
K_1 K_2 K_3 K_4
1 2 3 4
I II III IV

La poligonale si suddivide in quattro trapezi, per base si

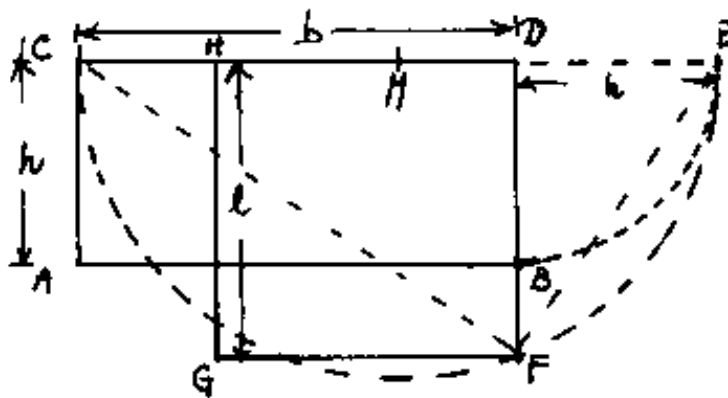
sceglie, in scala, un numero facile da moltiplicare (come uno, oppure dieci). Fatta la costruzione come l'esercizio precedente troviamo che l'altezza del primo rettangolo equivalente al primo trapezio è $\overline{B_1K_1}$. La parallela a $\overline{PN_2}$ sarà $\overline{K_1K_2}$ così l'altezza del secondo rettangolo sarà la differenza di ordinate fra K_1 e K_2, e la linea $AK_1K_2K_3K_4$ è detta <u>curva integrale</u>, le cui ordinate (per la base) sono le aree.

Dato un trapezio qualsiasi disegnare il rettangolo equivalente

Per i punti medi M ed N dei lati obliqui del trapezio ABCD, tracciamo le perpendicolari alle basi $\overline{AB}=a$ ed $\overline{CD}=b$, avremo così il rettangolo equivalente EFGH, infatti i triangoli MGA ed MFD sono uguali, ed anche i triangoli: NEC ed NHB sono uguali, perciò aggiungendo all'area comune: NCDMGH i triangoli MGA ed NHB si ottiene il trapezio, mentre aggiungendo all'area comune NCDMGH i triangoli MFD ed NEC (di uguale area dei precedenti, si ottiene il rettangolo EFGH.

Il segmento $\overline{MN}$ è medio fra le basi per cui l'area del trapezio $A_{ABCD}=\frac{a+b}{2}\cdot h$.

Dato un trapezio rettangolo disegnare il rettangolo equivalente di base assegnata $\overline{DQ}$

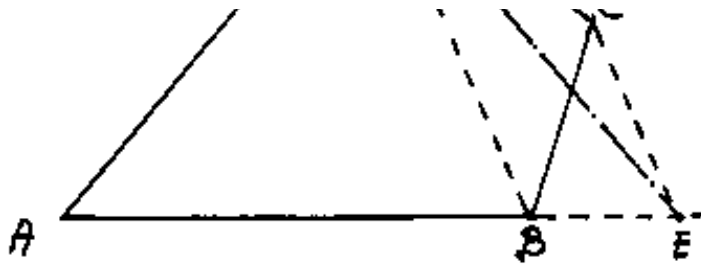
il rettangolo equivalente di base assegnata $\overline{PQ}$ e giacente sul prolungamento dell'altezza $\overline{AB}$ del trapezio

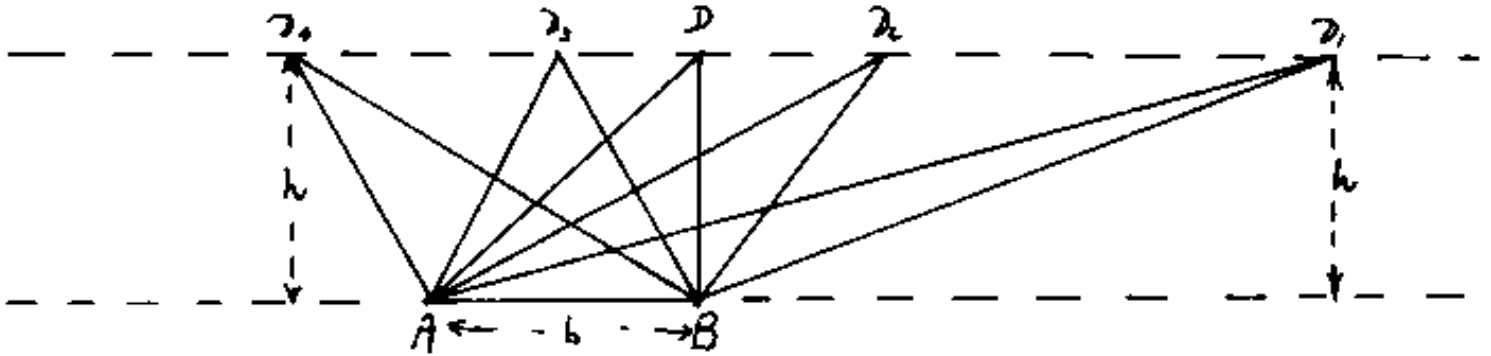
S R N M C D K E α P base = l Q A h B

Proiettiamo in N il punto medio M del lato obliquo $\overline{DC}$ e tracciamo $\overline{AK} // \overline{PN}$, proiettiamo

Dato un rettangolo b, h trovare il lato l del quadrato equivalente.

Ribaltato B su E, con $\overline{DB} = \overline{DE}$ si trova il punto medio M di $\overline{CE}$ ove: $\overline{CM} = \overline{CE}$; centro in M e raggio $\overline{CE} = \overline{CM}$ si traccia una semicirconferenza, quindi prolungando $\overline{DB}$ fino ad F avremo $\overline{DF} = l$ = lato del quadrato equivalente ed DFGH è il quadrato equivalente al rettangolo CDBA. In questo caso abbiamo utilizzato il 2° teorema di Euclide (vedi triangolo rettangolo CFE.

Dato un quadrilatero qualsiasi, trovare il triangolo equivalente

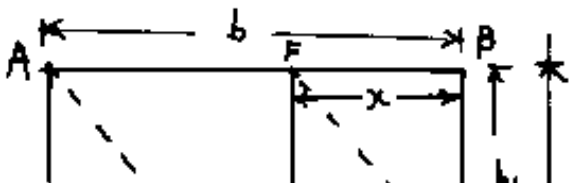
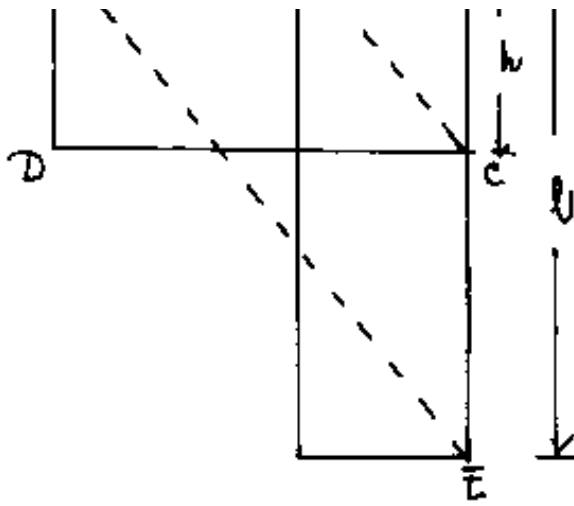
Se vogliamo che il triangolo abbia la base su AB ed il vertice in D, tracciamo la

A B E

vertice in D, tracciamo la diagonale $\overline{DB}$ e da C la parallela a $\overline{DB}$ fino ad E. La retta $\overline{CE}$ è il luogo dei vertici dei triangoli equivalenti aventi per base $\overline{DB}$ perciò i triangoli DCB e DEB sono equivalenti per cui il quadrilatero ABCD equivale al triangolo AED.
Ripetendo questa costruzione si riduce a triangolo equivalente ogni poligono.

di area $bh/2$. Perciò tutti i triangoli aventi la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti.

La retta passante per un vertice di un triangolo e parallela al lato opposto, è il luogo dei vertici di tutti i triangoli equivalenti aventi in comune il lato opposto, ed il vertice su tale retta.

Ciò consente varie costruzioni grafiche

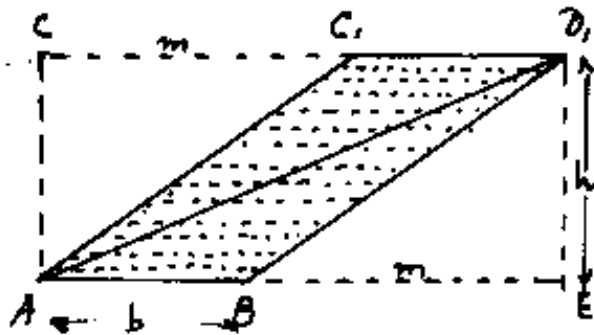
Dato un rettangolo di base b e altezza h disegnare il rettangolo equivalente di base l ed altezza incognita x.

Dovrà essere: $bh = lx \Rightarrow x = \frac{bh}{l} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{b}{l} \Rightarrow \boxed{b : l = x : h}$

la proporzione scritta è graficamente visibile nei triango

ficamente visibile nei triangoli $\overline{ABE}$ ed $\overline{FBC}$ nell'ordine. Unito $\overline{AE}$ da C la parallela fino ad F. ove $\overline{BF} = x$ l'incognita cercata. In questo caso abbiamo utilizzato la proporzionalità di triangoli simili

Si noti che tutto il segmento $\overline{AB}$ è scrivente, se fosse scrivente solo il punto che ha tracciato $\overline{AB}$ e le velocità in direzione $\overline{AB}$ ed in direzione $\overline{AC}$ sono uguali, la punta scrivente traccerebbe la diagonale $\overline{AD}$.

Se $\overline{AB} = \overline{AC} = l$; l^2 = area del quadrato di lato "l"

Se $l = 1$ = segmento unitario, $l^2 = 1^2 \times 1$ = unità di area.

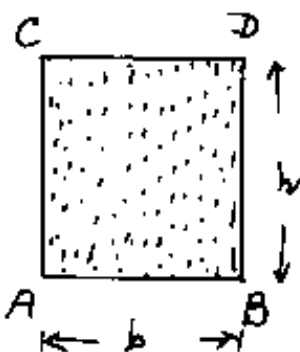
Supponiamo ora che il segmento $\overline{AB}$ si muova obliquamente, mantenendosi parallelo nelle varie posizioni; esso finirà per sovrapporsi ad un segmento $\overline{C_1D_1} \,//\, \overline{AB}$. Sia $\overline{CC_1} = \overline{BE} = m$ l'area del rettangolo AED_1C sarà: $A_{AED_1C} = (b+m)h = bh + hm$.

Ma se accostiamo A su B e C_1 su D_1 otteniamo l'accostamento dei due triangoli ACC_1 e BED_1 cioè otteniamo un rettangolo di base m ed altezza h di Area h·m., perciò se togliamo questa area al rettangolo AED_1C otteniamo l'area del

parallelogramma ABD_1C_1 : $A_{ABD_1C_1} = bh$; cioè anche l'area del parallelogramma equivale al rettangolo di pari base e pari altezza qualunque sia l'inclinazione del parallelogramma.

Tracciamo ora la diagonale $\overline{AD_1}$ che divide in due triangoli uguali il parallelogramma cioè

LE AREE

Supponiamo ora che il nostro segmento $\overline{AB}$ sia costituito dal segmento comune ad un tratto di mina di lapis, ed al foglio su cui, tale pezzetto di grafite è appoggiato. Se, mantenendo il contatto, (grafite - carta) muoviamo il tratto di mina perpendicolarmente ad $\overline{AB}$, avremo, dopo un certo tempo che A sarà arrivato in C, e B in D ove: $\overline{AB} // \overline{CD}$ $\overline{AC} // \overline{BD}$ ed $\overline{AC} \perp \overline{AB}$; $\overline{AC} \perp \overline{CD}$; $\overline{BD} \perp \overline{AC}$; $\overline{BD} \perp \overline{CD}$

C D h A b B

Poiché la grafite scrive sulla carta, tutta la superficie rettangolare ABCD risulta colorata. L'estensione di tale superficie (area) sarà tanto maggiore quanto maggiore è $\overline{AB}$ e quanto maggiore è $\overline{AC} = \overline{BD}$, posto: $\overline{AB} = b$; $\overline{AC} = \overline{BD} = h$
L'area di ABDC sarà: $b \cdot h$; ($A_{ABDC} = bh$).

e l'area di ABDC sarà: b·h, (A_{ABDC} = b·h).

Si noti che discorso identico si può fare facendo muovere $\overline{AC}$ in direzione perpendicolare, fino a sovrapporsi ad $\overline{BD}$. Le superfici generate da rette che si muovono perpendicolarmente a se stesse, si dicono <u>superfici rigate</u>. (anche se un punto della retta è fermo, gli altri punti si spostano perpendicolarmente alla retta)

segmento risulta avere un inizio ed una fine, cioé è orientato; noi indicheremo $\overline{AB}$ se si muove da A verso B, o viceversa $\overline{BA}$, se si muove da B verso A.
Il segmento può avere tutte le direzioni possibili. Se ponessimo 1 la velocità media, le grandezze del segmento e del tempo, sarebbero rappresentate dallo stesso numero, peró mancherebbe la direzione del segmento; non solo, ma ammessa costante la velocità media, la modulazione delle velocità istantanee nel tratto $\overline{AB}$, (a parità di punti A e B e di tempi: $t_{(A)}$; $t_{(B)}$; $t=(t_{(B)}-t_{(A)})$) implicherebbe una diversificazione capace di sostenere un'altra ipotetica dimensione fisica.
Se pensiamo tutti i segmenti uscenti da A in tutte le possibili direzioni, abbiamo una emissione spaziale, (a parità di segmenti) sferica. Quí interverrebbe un complesso concetto di: "contemporaneità" su cui torneremo; Per ora ci accontentiamo di notare come l'esame di due

cose distinte (anche due punti diversi), richieda tempi diversi. Notiamo inoltre come sia comodo misurare le lunghezze, in qualsiasi direzione, con lo <u>stesso segmento</u> posto "<u>per convenzione</u>" uguale ad <u>uno</u> (per es. un cm.)

Posta quindi una unità di lunghezza, da utilizzare anche per linee curve raddrizzate, vediamo le unità derivate.

anche molto diversi fra loro. La "variazione" di coordinate, ci ha portato il concetto di "differenziale". La variazione può essere continua o discontinua. Noi distinguiamo le cose, gli oggetti, per brusche variazioni di colore, di forma, ecc. Per capire meglio le variazioni, consideriamo il concetto di "tempo" come una estensione di un succedersi sequenziale ove l'inizio confina con l'ultimo "prima" e la fine col primo "dopo". (è un intervallo di tempo)

graficamente: - - - prima - - |——intervallo——| - - dopo - - - →

Ma noi abbiamo semplicizzato lo schema grafico con un segmento orientato, meglio sarebbe considerare sfere concentriche, per avere tutte le direzioni, ma anche ciò implicherebbe un centro delle sfere. Poiché la variazione di direzione implica anch'essa un tempo, questo fluire del tempo è pluridirezionale e abbastanza complesso.

completo.

Pensiamo ad una punta scrivente, la quale da un certo istante si muova in una certa direzione con velocità finita, dopo un certo lasso di tempo si fermi, essa ha tracciato un segmento che sarà tanto maggiore quanto maggiore è la velocità, e tanto maggiore quanto maggiore è il tempo del suo moto. Il

del cambiamento di data, non importa scomodare Einstein). Se dividete un cerchio in 24 parti e li considerate meridiani terrestri, noterete che il meridiano ore zero del giorno "n" corrisponde al meridiano ore 24 dello stesso giorno n, cioè ore zero del giorno (n+1).

Notato che il peso varia con l'attrazione di gravità, fu introdotto come invariante il concetto di massa, sotto intendendo: "quantità di materia", purtroppo l'equivalenza fra materia ed energia fa saltare quell'invariante.

Da queste tre dimensioni fondamentali i fisici si proponevano di dedurre tutte le altre, arrivando a compromessi assurdi come il concetto di forza su cui torneremo. Noi, "ripartendo da zero", non ci sentiamo di propagandare, come vangelo, le convenzioni dei fisici, preferiamo un esame critico che ci consenta di capire certi "assurdi" che da esse derivano.

Abbiamo già visto come un operatore immaginario

[illegible] già visto come un operatore immaginario
possa orientare i segmenti, abbiamo definito
l'angolo "una variazione di direzione" Abbiamo
dato risalto al concetto "direzione" che sarà ulte-
riormente sviluppato in seguito. Abbiamo bisogno
di vedere meglio il concetto: "Variazione".
Questo concetto si presta ad assumere aspetti

I Numeri - Le Misure - Le Dimensioni - L'equivalenza.

I numeri sono usati per esprimere la misura di un "qualcosa" rispetto ad una unità arbitraria di quel "qualcosa". (Il "qualcosa" spesso è una dimensione fisica). Cose di ugual misura nella stessa dimensione, si dicono equivalenti. (stessa area, stesso volume, stesso peso, stesso prezzo, stesso voltaggio, ecc.)

È bene ricordare che le dimensioni fisiche sono convenzioni umane; sono relative a certe condizioni legate a come appaiono all'uomo; nessuna di esse "esiste" in se, in assoluto, le poniamo noi col nostro pensiero. Il grande problema dei fisici era di fissare un "sistema assoluto di misure", partirono col: "c.g.s." elettrostatico, poi elettromagnetico, per arrivare al sistema Giorgi (M,K,S più una dimensione elettrica). "c.g.s" significa:

centimetro, grammo-massa, secondo; "M, K, S" significa metro, Kilogrammo-massa, secondo. Come si vede, con grande disinvoltura, fissarono la dimensione <u>lunghezza</u> come un <u>invariante con la direzione</u>; e da essa dedussero le aree ed i volumi. Altro assoluto: <u>il tempo</u>, (per togliere quell'"assoluto" basta il meridiano

TAVOLA dei NUMERI

- **NUMERI**
  - *ordinali*
  - *cardinali*
    - **REALI** assoluti e relativi
      - **RAZIONALI**
        - **INTERI**
          - *pari* – (sempre divisibili per 2)
          - *dispari*
            - *Multipli di altri numeri*
            - *Primi* (non divisibili)
          - (pari e multipli di altri numeri): Potenze di interi / non ricavabili da potenze di interi
        - **FRAZIONARI** – FRAZIONE
          - *propria* – (frazione di unità)
          - *impropria* – (intero + frazione propria)
          - *apparente* – (numero intero)
          - (propria e impropria): (numero decimale periodico, o numero decimale finito)
      - **IRRAZIONALI** – (ricavabili mediante estrazioni di radici, non ricavabili da frazioni)
      - **TRASCENDENTI** – (ricavabili da calcoli di sviluppi in serie, per es. π; e ecc.)
      - **COMPLESSI** – (non seguono la numerazione decimale)
    - **IMMAGINARI**
      - *puri* (composti dal prodotto di un numero reale per il coefficiente immaginario, ricavabili da radicandi negativi in radici ad indice pari.)
      - *complessi* (composti dalla somma algebrica di un numero reale, detto parte reale, e da un numero immaginario, detto parte immaginaria)

Ciò insegna come sia illusoria anche la visione delle cose, e come, cercando di capire la fenomenologia che ci circonda, si debba sempre fare una analisi critica dei dati acquisiti tramite una logica, ed un modello mentale, n-dimensionale, memorizzato, e via via perfezionato nell'ampliarsi della conoscenza. Resta sempre più valido il socratico: "So' di non sapere".

Torniamo ai numeri.

Un numero non ha senso se non è specificato a cosa si riferisce.

Si distingono due specie di numeri:

Ordinali (primo, secondo, ... ennesimo) che indicano: "sequenza" cioè un succedersi, ordinano la posizione

Cardinali (uno, due, ... enne) indicano: "quantità" della stessa specie o che hanno almeno un attributo comune.

attributo comune.

Facciamo una tabella dei numeri studiati

due fotogrammi sovrapposti o no, uno a linee rosse ed uno a linee verdi, che guardati con occhiali aventi da un lato vetro verde e dall'altro rosso, ci danno la sensazione del rilievo.

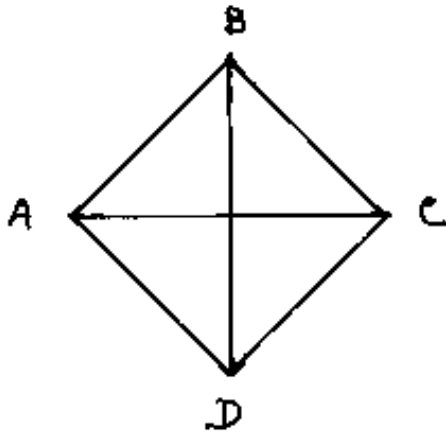
Una serie di fotogrammi proiettati con la stessa frequenza con cui sono stati ripresi, ci dà l'effetto Cinematografico del movimento, che può essere accelerato o rallentato, variando la frequenza di proiezione da quella di ripresa. (La frequenza è limitata dal tempo di ritensione dell'immagine nell'occhio umano). Le immagini cinematografiche hanno la quarta dimensione "tempo", non hanno la terza dimensione in quanto sono proiettate in piano. Ciò implica che due rette sghembe, che abbiano il segmento di minima distanza, giacente sull'asse dell'obiettivo della cinepresa, ci appariranno incidenti, se non si hanno altri elementi.

non si hanno altri elementi.

Riportiamo alcuni disegni in cui è impossibile determinare cosa rappresentano.

B

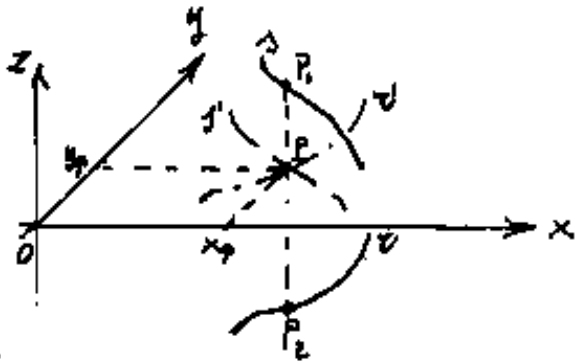
A C

D

Per es. il disegno a fianco cos'è?

1) Un quadrato con diagonali?

2) La proiezione di un ottaedro?

3) La proiezione di un tetraedro a facce trasparenti (in vetro)?

Questo discorso è analogo a quello che possiamo fare quando si passa da due a tre dimensioni nello spazio geometrico.

A due dimensioni due linee r ed s giacenti su due piani paralleli ad xy, le vediamo, su xy, incontrarsi in P. In effetti noi non vediamo le linee, ma le loro proiezioni su xy. Il vettore $(P-0) = \vec{V} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j}$, se P è comune diventa: $(P-0) = \vec{V} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{K}$.

Le due linee si incontrano, se sono tracciate sullo stesso piano alla stessa quota, e P sia contemporaneo.

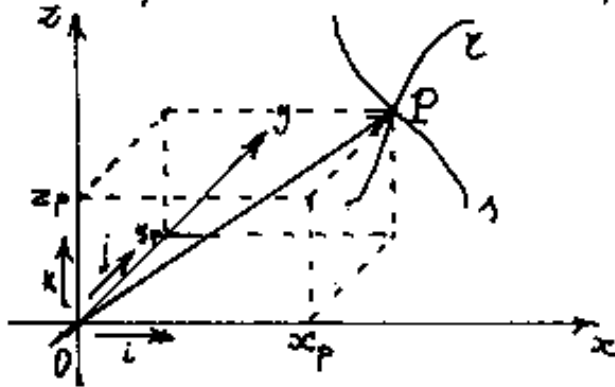
Con ciò si acquisisce il concetto di: "Proiezione" molto importante perché noi "vediamo" le cose come proiettate su un piano. Solo la visione "binoculare" ci dà il senso del rilievo spaziale; tale senso è tanto meno efficiente quanto più l'oggetto è lontano,

ciò è dovuto alla limitata distanza interpupillare.

Tuttavia questa inefficienza viene in parte corretta dalla messa a fuoco del cristallino, e dall'effetto della <u>Prospettiva</u> che ci fa vedere più piccoli gli oggetti più lontani. La fotografia in genere utilizza <u>solo</u> la <u>prospettiva</u>, tuttavia, vi sono macchine fotografiche a due obiettivi, che producono

Il concetto è estendibile anche a campi non geome=trici n-dimensionali. Supponiamo di avere tre assi: x, y, z; ortogonali fra loro, con origine in O ed orientati dai versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{K}$. (Dicesi "versore" un vettore di modulo unitario, determinante una direzione)

Il punto $P \equiv (x_p, y_p, z_p)$ determina il vettore:

$\vec{V} = (|x_p|\,\vec{i} + |y_p|\,\vec{j} + |z_p|\,\vec{K})$ i segmen=ti $|x_p|, |y_p|, |z_p|$ sono detti le com=ponenti cartesiane del vettore $\vec{V}$ di modulo: $|V| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$.

i vettori: $\vec{X} = x_p\vec{i}$; $\vec{Y} = y_p\vec{j}$; $\vec{Z} = z_p\vec{K}$, sono detti i componenti del vettore $\vec{V}$.

Consideriamo le linee "r" ed "s" passanti per P, e tracciate da due diverse penne scriventi. Può capita=re che le due punte scriventi passino per "P" nello stesso istante, ma, in generale passeranno per P in tempi diversi. Mentre in geometria possiamo dire che le due

diversi. Mentre in geometria possiamo dire che le due linee "r" e "s" si incontrano in P (le coordinate di P sono comuni alle due linee), non sempre possiamo dirlo per le pun-te scriventi; abbiamo così introdotto una quarta di-mensione: <u>il tempo</u> per definire: $\boxed{P \equiv (x_P, y_P, z_P, t_P)}$,

e quindi il vettore: $(P-O) = \vec{V} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k} + t_P\vec{t}$.

Un numero complesso in aritmetica è quindi composto da più numeri esprimenti ciascuno la quantità di una certa unità dimensionale, tutti riferiti ad una stessa dimensione, ove il primo numero rappresenta l'unità principale ed i successivi rappresentano via via sfrazionamenti dell'unità precedente.

Prima dell'introduzione del sistema metrico decimale, le grandezze erano rappresentate con numeri complessi.

Se per le misure lineari gli antichi avessero avuto il metro, il decimetro ed il centimetro e non fosse introdotta la numerazione a base decimale, per scrivere: metri 4,25, avrebbero scritto: 4m. 2dm 5cm, che in sostanza valeva dire 4 metri + 2 decimetri + 5 centimetri, però i numeri 4, 2, 5, pur essendo relativi alla stessa dimensione fisica (lunghezza), riflettendo unità diverse non è lecito scrivere il segno (+) 4 + 2 + 5 che comporterebbe errore.

Nell'immaginario complesso invece si usa scrivere: $(a \pm ib)$ sottointendendo che, in altra direzione la quantitá "b" ha lo stesso "modulo" (stessa unitá) della quantitá "a". Se $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, indicano tre direzioni del lo spazio geometrico, ortogonali fra loro, avremo: $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, cioé: un segmento orientato (vettore) nello spazio tridimensionale.

esempi di divisioni:

$$20^h\ 32'\ 15'' \ \big\lfloor\ 19$$

$1 \times 60 = 60'$

$92'$

76

$16' \times 60 = 960''$

$975''$

$\div 25$ (?)

$6''$

$$1^h\ 4'\ 51'' = 1^h\ 4'\ 51''\ e\ \left(\tfrac{6}{19}\right)''$$

$$93^{lt}\ 0^s\ 4^d{,}64 \ \big\lfloor\ 8^h\ 30'\ 40''$$

in questo caso conviene ridurre tutto alla minima unità cioè a denari ed a secondi

$$\left(22324^d{,}64 : 30640''\right)\left(3600\right) = 2623^{d/h} = \left(10^{lt}\ 18^s\ 7^d\right) \text{ all'ora.}$$

Si dicono: "Complessi" anche quei numeri che sono composti dalla somma o differenza fra un numero reale ed un numero immaginario, questi è meglio chiamarli: "immaginari-complessi"

$$\vec{N} = a \pm ib$$

ove a = parte reale ; b = reale ; i = coeff. immaginario

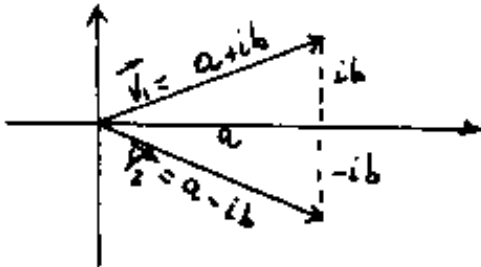
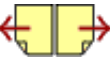
ib = parte immaginaria.

Siano $V_1 = (a + ib)$; $V_2 = (a - ib)$; V_1 e V_2 si dicono:

$V_1 = (a+ib)$, $V_2 = (a-ib)$, V_1 e V_2 si dicono:

"numeri immaginari complessi coniugati", la loro,

somma: $(\vec{V_1}+\vec{V_2}) = 2a$; differenza: $(V_1 - V_2) = 2ib$; prodotto: $(V_1 V_2) = a^2 + b^2$

quoziente: $V_1/V_2 = \frac{(a+ib)}{(a-ib)} \cdot \frac{(a+ib)}{(a+ib)} = \frac{a^2 - b^2 + 2aib}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + i\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)$.

Graficamente i numeri immaginari complessi coniugati, si presentano come in figura. La trattazione più estesa potrà farsi dopo aver trattato la trigonometria.

non seguono il sistema decimale. Per esempio:

1 Lira sterlina = 20 scellini

1 scellino = 12 pence

1 pence = 4 farthings.

oppure: 1 Lira antica toscana = 12 crazie

1 lira antica toscana = 20 soldi

1 soldo = 12 denari

1 Crazia = 1 soldo e 8 denari

Si noti una certa analogia fra lo sfrazionamento della lira toscana e quello della lira sterlina.

Antiche misure lineari toscane:

1 Braccio toscano =(0,58366 metri) = 20 soldi

1 soldo = (2,91830 cm.) = 12 denari

1 denaro = (0,24319) cm.).

1 canna agrimensoria (2,91830 m.) = 5 braccia.

1 braccio quadro = 0,3410 m^2.

Esempi di moltiplicazioni:

Esempi di moltiplicazioni:

$5^\circ\ 22'\ 31'' \times 7 = 35^\circ\ 154'\ 217'' = 37^\circ\ 37'\ 37''$

$(10\ \text{Lt}/h\ \ 18\ \text{soldi}/h\ \ 7\ \text{denari}/h) \times (8^h\ 30'\ 40'') = 93^{Lt}\ 0^s\ 4^d{,}64$

per le prime 8 ore competono: $80^{Lt}\ 144^s\ 56^d$ cioè: $87^{Lt}\ 8^s\ 8^d$

per $30' = \frac{1}{2}h$ competono $5^{Lt}\ 9^s\ 3^d{,}5$ → $5^{Lt}\ 9^s\ 3^d{,}5$

per $40'' = \frac{40}{3600} = \left(\frac{1}{90}h\right)(2623)^d/h = 29^d{,}14 =$ → $2^s\ 5^d{,}14$

$93^{Lt}\ 0^s\ 4^d{,}64$

I numeri complessi

"Si dicono complessi quei numeri che non seguono il sistema decimale".

In aritmetica sono numeri complessi i numeri che esprimono grandezze angolari, o misure di tempo, queste numerazioni seguono il sistema sessagesimale:
Cioè per gli angoli si ha:
1 giro = 360° (gradi); 1° (un grado) = 60' (sessanta primi); 1' (un primo) = 60" (sessanta secondi). Lo sfrazionamento del secondo è decimale. Esempio 30° 30' 42",375.
Per le misure di tempo si ha:
1 giorno = 24 ore; 1 ora = 60' minuti; 1' = 60" secondi. Es: $3^h\ 06'\ 20'',2$ queste grandezze sono facilmente riducibili a sessadecimali infatti: $3^h \times 3600 = 10800''$; $06' \times 60 = 360''$
$3^h\ 06'\ 20'',2 = 10800'' + 360'' + 20'',2 = 11180'',2 = \frac{11180,2}{3600} = 3^h,10561111$.
Le operazioni aritmetiche avvengono tenendo conto dei valori dei sottomultipli; facciamo degli esempi:

...radici dei sottomultipli, facciamo degli esempi:

$$\begin{array}{rrrl} 30^\circ & 50' & 30'' & + \\ 1^\circ & 40' & 40'' & \\ \hline 32^\circ & 31' & 10'' & \end{array}$$

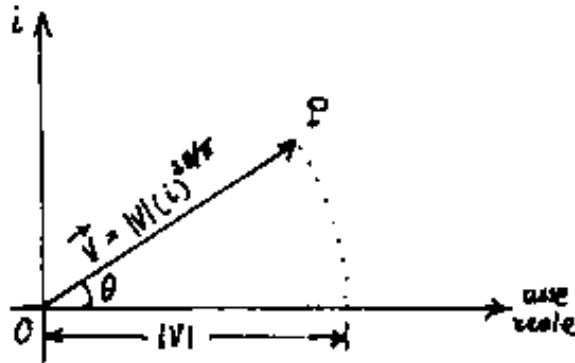
perché: $30'' + 40'' = 70'' = 10'' + 60'' = 10'' + 1'$

$60' + 40' + 1' = 91' = 31' + 60' = 31' + 1^\circ$

$$\begin{array}{rrrl} 30^\circ & 10' & 07'' & - \\ 10^\circ & 56 & 49'' & \\ \hline 19^\circ & 13' & 18'' & \end{array}$$

si considera: $30^\circ\ 10'\ 07'' = 30^\circ\ 09'\ 67'' = 29^\circ\ 69'\ 67''$

Analoghe operazioni per monete o grandezze che

Se il segmento è sull'asse reale ed ad esso equiverso, l'operatore: " $i^{2\theta/\pi}$ " l'orienterà secondo θ. Se il segmento avrà per modulo $|V|$ avremo:

$$|V|\cdot(i)^{2\theta/\pi} = \vec{V} = \overrightarrow{OP} = (P-O)$$

ove: $\vec{V}$ si legge: "vettore V"

$\overrightarrow{OP}$ " " : "vettore $\overline{OP}$"

$(P-O)$ " " : "vettore P meno O.

Quindi un vettore (dal latino vehor o anche vector) vuol dire: " operatore capace di trasportare il punto "O" in "P"."; oppure: " far muovere in direzione θ con intensità precisata da $|V|$ ";

Con ciò, geometricamente, abbiamo chiamato "Vettore" un segmento orientato, vedremo che il suo significato si estende ad una classe di grandezze fisiche. Vedremo anche l'estensione del concetto di vettore allo spazio tridimensionale ed n-dimensionale, ciò sarà possibile quando avre

ed n-dimensionale, ciò sarà possibile quando avre-
mo svolto gli algoritmi capaci di calcolarli.

Il verso di rotazione è quello che compie l'asse reale per sovrapporsi, in un quarto di giro, all'asse immaginario con segni direzionali concordanti. In figura appare il verso antiorario, (se guardassimo il disegno dal disotto controluce, apparirebbe orario. E' una relatività. La relatività fu esposta prima da Galileo, poi fu estesa ai fenomeni elettromagnetici da Einstein.)

Fissiamo sull'asse reale un segmento pari a (+1) operiamo la ruotazione dell'asse reale, (ruotazione continua) avremo che la nostra unità reale (+1), quadrante per quadrante si sovrapporrà, ordinatamente, alle potenze crescenti dell'immaginario (vedi figura)

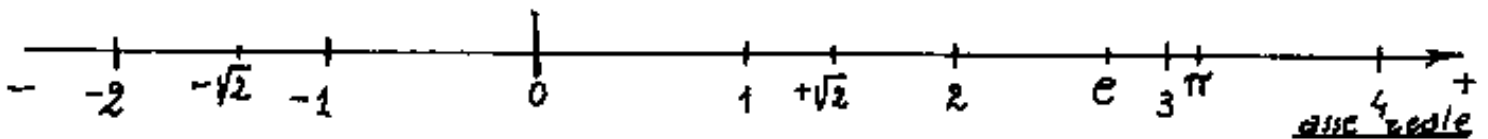
Cioè:

"Il coefficiente "i" è un operatore capace di ruotare di un angolo retto ($90° = \pi/2$ rad) un segmento il cui modulo sia moltiplicato per "i""

Ma il discorso può essere generalizzato; infatti consideriamo l'operatore: $i^{\theta/\frac{\pi}{2}} = i^{2\theta/\pi}$ (ove θ è un angolo qualsiasi). Se poniamo: $\theta = 0$; $\theta = \pi/2$; $\theta = \pi$; $\theta = \frac{3}{2}\pi$; $\theta = 2\pi$, le potenze diventano rispettivamente: i^0; i^1; i^2; i^3; i^4; . Allora per θ qualsiasi l'operatore: "$i^{2\theta/\pi}$" è capace di ruotare di θ un segmento qualsiasi.

in quanto rappresentabili in angoli, ove, ad ogni giro, il raggio ruotante ripete la stessa direzione.

Cominciamo col "graduare" una retta; cioè fissiamo un segmento unitario (modulo), (per esempio un centimetro, un pollice, o qualsiasi lunghezza), in modo che, posta una origine "O" sulla retta, ad ogni segmento staccato sulla retta a partire da "O", (a destra od a sinistra di "O", cioè in direzione positiva o in direzione negativa) corrisponda un numero reale, perciò, per la continuità di tale retta, essa può rappresentare l'insieme di tutti i numeri reali e sarà detta: ASSE REALE

− −2 −√2 −1 0 1 +√2 2 e 3 π 4 +
asse reale

Se assumiamo come asse reale, l'asse delle ascisse, potremo porre in ordinate l'asse immaginario; fissiamo i versi positivi e negativi dei due assi, e poiché si inten

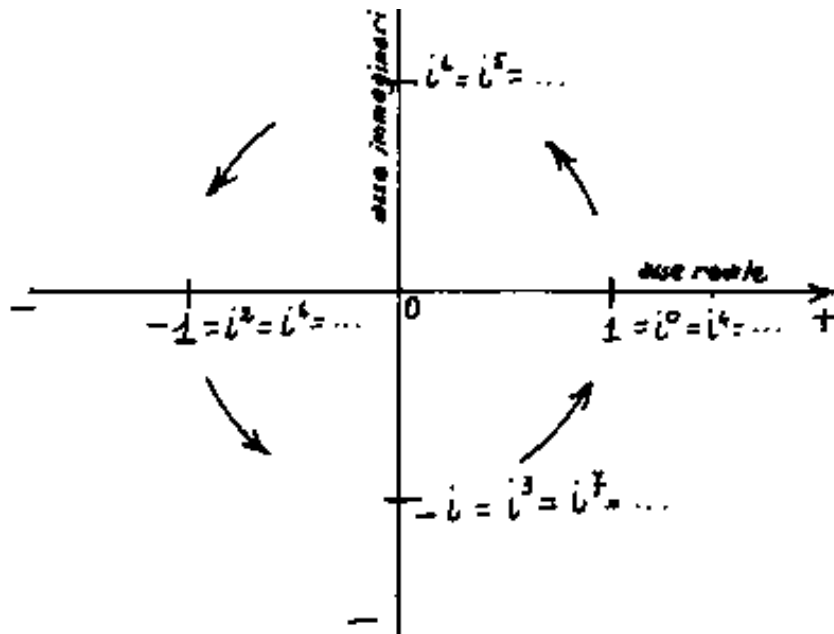
asse immaginario

$i^1 = i^5 = \dots$

asse reale

$-$ $\quad -1 = i^2 = i^6 = \dots$ $\quad 0 \quad$ $1 = i^0 = i^4 = \dots$ $\quad +$

$-i = i^3 = i^7 = \dots$

$-$

due assi, e poichè si inten=
de che l'asse reale preceda
l'asse immaginario, notiamo
che fissare i versi positivi
e negativi dei due assi
implica aver fissato un
verso alle rotazioni,

Se cerchiamo, nel campo dei numeri reali, la radi= ce quadrata di un numero negativo, (per es. $\sqrt{(-4)}$) non troviamo nessun numero reale che moltiplicato per se stesso dia il radicando :(-4).

Allora scriviamo: $\sqrt{(-4)} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(+4)} = \pm 2\sqrt{(-1)}$.

Il fattore radicale : $\sqrt{(-1)}$, in quanto inesistente nel campo dei numeri reali, lo chiamiamo: "unitá imma= ginaria" e lo simboleggiamo con la lettera "i" cioé : $\sqrt{-1} = \pm i$; $(\pm i)^2 = -1$; $\sqrt{(-4)} = \pm 2i$

Certamente incuriosisce saperne di piú su questo tipo di grandezze, ma andiamo per gradi.

L'operatore immaginario

Eseguiamo le successive potenze del coefficiente immaginario "i" ed avremo:

$$(i)^0 = 1 = (i)^4 = (i)^8 = \dots = (i)^{4n}$$

$$(i)^1 = i = (i)^5 = (i)^9 = \dots = (i)^{1+4n}$$

$$(i)^1 = i = (i)^5 = (i)^9 = \dots = (i)^{1+4n}$$

$$(i)^2 = -1 = (i)^6 = (i)^{10} = \dots = (i)^{2+4n}$$

$$(i)^3 = -i = (i)^7 = (i)^{11} = \dots = (i)^{3+4n}$$

$$(i)^4 = 1 = (i)^8$$

Si nota che il valore delle potenze si ripete di 4 in 4. Poichè fenomeni che tornano su se stessi, (ricorrenti) ordinariamente si dicono <u>ciclici</u> o <u>cicli</u>,

NUMERI REALI e NUMERI IMMAGINARI

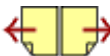
Si noti che il valore numerico di $e = 2,71828182 8...$ non può essere espresso né da una frazione, né dal l'estrazione di radici, cioè non appartiene né ai numeri "razionali", né ai numeri "irrazionali". Altro numero che non è né razionale, né irrazionale, è $\pi = 3,1415926535....$, vi sono anche valori di funzioni logaritmiche, trigonometriche, ecc.; che non appar= tengono a tali insiemi numerici.

Questo nuovo insieme di numeri si chiama: insieme dei "numeri TRASCENDENTI"

Tutte le grandezze numeriche, che abbiamo esa minato, razionali, irrazionali, trascendenti sono sot= toinsiemi del complessivo insieme dei numeri Reali, ai quali si aggiunge l'insieme dei numeri Immaginari.

Vediamo come nasce il concetto di numero im= maginario:

maginario:

Sappiamo che: $(+2)^2 = (+4)$ e che: $(-2)^2 = (+4)$ quindi, nel processo inverso: $\sqrt{(+4)} = \left\langle \begin{matrix} +2 \\ -2 \end{matrix} \right.$, cioè la radice quadrata di un numero positivo, ammette, come soluzione due valori numericamente uguali, ma di segno opposto.

Consideriamo ora un particolare operatore di una operazione monadica consistente nel prodotto successivo della serie naturale dei numeri fino al numero "n" considerato. Si indica con: $n!$ e si legge: "enne fattoriale". Quindi:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

$1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Questo operatore è fondamentale in analisi matematica: per esempio il numero "e" base dei logaritmi naturali è dato dalla serie:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} = 2,71828\dots$$

ed anche:

$$\exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Esprimere in serie di infiniti termini un numero, permette di calcolare il numero stesso con l'approssimazione che vogliamo. Per esempio: per "e" $= 2,718281828$ -

$1 + 1 = 2$; $2 + \frac{1}{2} = 2,5$; $2,5 + \frac{1}{6} = 2,67$; $2,67 + \frac{1}{24} = 2,70833$;

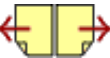
$2,70833 + \frac{1}{120} = 2,7166\overline{7}$; $2,71667 + \frac{1}{6!} = 2,71806$; $2,71806 + \frac{1}{7!} =$

$= 2,71825$ abbiamo già esatta la 4ª cifra decimale.

Il fattoriale è anche molto importante nel

calcolo combinatorio perché rappresenta il numero delle permutazioni di n oggetti diversi. (Per esempio a,b,c sono 3 lettere $3! = 6$ quindi possiamo avere: abc, acb, bac, bca, cab, cba, sei permutazioni

In analisi si trova anche il simbolo $n!!$ si legge: SEMIFATTORIALE ed è la sequenza dei prodotti della stessa parità di n.

esempio: $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$; $5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$.

Frazione generatrice di un numero periodico

Un numero decimale periodico è in genere distinguibile in tre parti: 1) La parte intera delimitata dalla virgola; 2) L'antiperiodo che sono quelle cifre che, dopo la virgola, non sono periodiche; 3) La parte periodica.

Per esempio: 4,3272727... si scrive: $4,3\overline{27}$ (La parte periodica si sopralinea) è composto da: 4 = parte intera; 3 = antiperiodo; 27 = periodo.

Scomponendo il numero dalla notazione decimale, alla notazione algebrica (che qualche testo impropriamente chiama "scientifica") si ha: $4,3\overline{27} = 4\cdot10^{0} + 3\cdot10^{-1} + 2\cdot10^{-2} + 7\cdot10^{-3} + 2\cdot10^{-4} + 7\cdot10^{-5}\ldots$

$$\text{cioè: } 4,3\overline{27} = 4,3 + 27\left(\frac{1}{10^{3}} + \frac{1}{10^{5}} + \frac{1}{10^{7}} + \cdots + \frac{1}{10^{2n+1}}\right); \ (n = 1,2,3\ldots)$$

La parte in parentesi è una progressione geometrica di ragione: $\frac{1}{10^{2}}$; e primo termine: $\frac{1}{10^{3}}$ per cui applicando la formula:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1/10^{3}}{1 - 1/10^{2}} = \frac{10^{2}}{10^{3}(10^{2}-1)} = \frac{1}{10(100-1)} = \frac{1}{990}.$$

quindi:

$$4,3\overline{27} = 4,3 + 27\left(\frac{1}{990}\right) = \frac{(4,3)(990) + 27}{990} = \frac{4,3(1000-10)+27}{990}$$

$$4,3\overline{27} = \frac{4300 - 43 + 27}{990} = \boxed{\frac{4327 - 43}{990} = 4,3\overline{27}}$$

L'espressione ora scritta è la regola: "La frazione generatrice di un numero periodico, ha per numeratore le cifre della parte intera seguite dalle cifre dell'antiperiodo e del periodo, diminuito del numero formato dalle cifre della parte intera e dell'antiperiodo e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti zero quante sono le cifre dell'antiperiodo."

9 periodico è solo apparente infatti: $4,399999.. = 4,3\overline{9} = 4,4$.

Facciamo ora un esempio "pratico":

Uno studente torna da scuola affamato e trova che in casa non c'è nessuno, mentre sul tavolo vi sono due torte molto appetibili. Il ragazzo ne mangia subito una, ha ancora fame e non arriva nessuno, allora mangia metà della seconda torta, lasciandone l'altra metà, ... poi ... mangia la metà della metà lasciata ... e così via fino all'ultimo briciolo.

(Il procedimento non ha fine perché anche il più piccolo briciolo può essere diviso a metà).

Il ragazzo ha agito secondo la serie:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \quad \dots + \frac{1}{2^n}$$

progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$

e primo termine $a_1 = 1$

Applicando la formula della somma di infiniti termini si ha:

di infiniti termini si ha:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2-1} = 2$$

$$\boxed{S_\infty = 2}$$

Infatti al limite infinito lo studente ha mangiato <u>interamente</u> le due torte!

Facciamo alcuni esempi per capire cosa significa sommare infiniti termini ed avere un risultato finito

Abbiamo già detto che si chiama serie la somma degli infiniti termini di una successione.

Lascia perplessi il fatto che infiniti addendi diano un valore finito.

Facciamo esempi molto semplici:

il numero razionale $\frac{10}{3}$ è indubitabile che è una quantità finita. Se però l'esprimiamo in numero decimale $\frac{10}{3} = 3,333333 \ldots\ldots 3$ diventa di infinite cifre che significano:

$\frac{10}{3} = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots + \frac{3}{10^{n-1}}$ e ponendo in evidenza 3 si ha:

$$\frac{10}{3} = 3\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

ove l'espressione in parentesi è una progressione ÷ di ragione $\frac{1}{10} = q$ e di primo termine $1 = a_1$. applicando la

formula : $S_\infty = \left(\frac{a_1}{1-q}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{10-1} = \frac{10}{9}$

e moltiplicando per 3 abbiamo:

$$S_\infty = 3 \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{3}$$

torna il valore numerico $10/3$, che il numero decimale non riuscirebbe mai ad esprimere esattamente.

"La somma di n termini di una progressione geometrica è data dall'ultimo termine moltiplicato per la ragione diminuito del primo termine tutto diviso la ragione meno l'unità"

sostituendo a_n abbiamo: $S_n = \frac{a_1 q^{n-1} q - a_1}{q-1}$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Se: $q > 1$ la progressione ÷ è crescente e S_∞ diverge a ∞.

Se $q < 1$ la ÷ è decrescente ed è possibile trovare S_n, infatti cambiando segni; e tenendo presente che per $q<1$; $q^n \ll 1$; $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ e che: $q^\infty = 0$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

In matematica per indicare la somma dei termini consecutivi di una successione dall'H^{mo} al K^{mo} termine

[illegible]

si usa il simbolo Σ (che è la sigma maiuscola dell'alfabeto greco); si legge "sommatoria", e si scrive:

$$\sum_{i=H}^{i=K} \{a_i\} = S_K - S_H = a_H + a_{H+1} + a_{H+2} + \dots a_K$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_i \dots a_n = \{a_n\}$

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} \{a_i\}}$$

ove "a_i" è il termine generico.

Progressioni geometriche

Sono dette: progressioni geometriche, quelle successioni nelle quali è costante il rapporto di due termini consecutivi. $a_{(K+1)}/a_K = q$ il quoziente q è detto ragione della progressione geometrica.

La progresione geometrica si indica col simbolo: "÷÷"

Se a_1 = primo termine si ha: $a_2 = a_1 \cdot q$; $a_3 = a_1 q^2$; $a_4 = a_1 q^3$

$$a_n = a_1 q^{(n-1)} \qquad a_1 = a_n q^{(1-n)}$$

dati due elementi $\left(\frac{\div\div}{\div\div}\right)$ $a_K = a_1 q^{(K-1)}$; $a_H = a_1 q^{H-1}$; dividendo membro a membro: $\frac{a_K}{a_H} = \frac{a_1 q^{(K-1)}}{a_1 q^{H-1}} = \frac{q^K}{q^H} = q^{K-H}$

è possibile trovare la ragione:

$$q = \left(\frac{a_K}{a_H}\right)^{(1/K-H)}$$

Se dalla somma di n termini moltiplicata per la

ragione q, sottraiamo la somma stessa si ha:

$$S_n \cdot q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \cdots + a_{n-2} q + a_{n-1} q + a_n q$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_{n-1} + a_n$$

$$S_n (q-1) = -a_1 + \qquad + a_n q$$

per cui:

$$S_n = \left(\frac{a_n q - a_1}{(q-1)} \right)$$

Dati due elementi: $a_K = a_1 + (K-1)r$ ed $a_H = a_1 + (H-1)r$

si può trovare la ragione sottraendo membro a membro:

$$r = \frac{(a_K - a_H)}{(K - H)}$$

Scriviamo la stessa progressione in ordine diretto ed in ordine inverso e sommiamo termine a termine

$$\begin{array}{l} a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots\ldots + (a_1 + (n-1)r) \\ (a_1 + (n-1)r) + (a_1 + (n-2)r) + (a_1 + (n-3)r) + \ldots + (a_1) \\ \hline (2a_1 + (n-1)r) + (2a_1 + (n-1)r) + (2a_1 + (n-1)r) + \ldots + (2a_1 + (n-1)r) \end{array}$$

abbiamo n termini uguali: $(2a_1 + (n-1)r) = (a_1) + (a_1 + (n-1)r) =$

$= (a_1 + a_n)$ e poiché abbiamo sommato i termini di due progressioni uguali, avremo:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

"La somma di n termini di una progressione aritmetica è data dalla media fra il primo e l'ultimo termine,

è data dalla media fra il primo e l'ultimo termine,

moltiplicata per il numero dei termini"

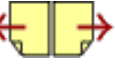
Interessante fare la somma di "n" numeri dispari dal primo.

$$S_n = \frac{1+(2n-1)}{2} n = \boxed{S_n = n^2}$$

(numeri dispari) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 .... + (2n-1)

$$\sum_1^n (2n-1) = 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad n^2$$

$$n = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad n$$

La somma dei primi n numeri dispari è il quadrato di n

"Dicesi successione un insieme ordinato di infiniti elementi, la cui sequenza è coordinata dall'insieme crescente di tutti i numeri naturali."

può indicarsi:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots a_n$$

o semplicemente: $\{a_n\}$ ove in parentesi graffa può mettersi la formula matematica che fissa la legge con la quale si susseguono i termini della successione

Dicesi: Serie la somma degli infiniti termini di una successione

Dicesi: ridotta di una Serie la somma dei primi "n" termini di una successione

Trattiamo ora due successioni particolarmente interessanti.

Progressione Aritmetica

La successione nella quale: "la differenza di due termini consecutivi è costante" è detta progressione aritmetica:

$$a_{k+1} - a_k = r$$

la differenza costante: "r" è detta ragione

la progressione aritmetica si indica col simbolo: "÷"

. Se a_1 è il primo termine: $a_2 = a_1 + r$; $a_3 = a_1 + 2r$; ecc

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

LE SUCCESSIONI

Prima di entrare nel vivo della questione, conviene ampliare la conoscenza del simbolismo usato in matematica.

Con enne minuscolo "n" si indica in generale un numero intero assoluto che può assumere tutti i valori da 1 a ∞ (il simbolo: ∞ si legge: infinito).

Spesso "n" è indice di un altro simbolo ed indica il termine ennesimo.

Per esempio, se vogliamo un numero pari basterà scrivere: $\{2 \cdot n\}$ che vuol dire la successione di tutti i numeri pari. cioè:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \ldots\ldots \quad a_n$$

$$\underset{(2\cdot 1)}{2} \quad \underset{(2\cdot 2)}{4} \quad \underset{(2\cdot 3)}{6} \quad \underset{(2\cdot 4)}{8} \quad \ldots\ldots \quad (2\cdot n)$$

Cioè l'indice "n" sostituito numericamente rappresenta il valore del termine ennesimo.

Analogamente per la successione dei numeri dispari:

Analogamente per la successione dei numeri dispari: basta scrivere $\{2n-1\}$

a_1	a_2	a_3	a_4	......	a_n
1	3	5	7		$\{2n-1\}$
$(2\cdot1-1)$	$(2\cdot2-1)$	$(2\cdot3-1)$	$(2\cdot4-1)$		

Abbiamo così introdotto il concetto di <u>successione</u>

Immaginiamo una espressione composta da una sequenza di molte operazioni, in alcune delle quali, o in tutte, figura la x variamente disposta; e noi diamo un nome a questa espressione, la chiamiamo per esempio "oper". Supponiamo di disporre di una macchina la quale effettua tutte le operazioni previste dall'espressione e ne dà il risultato, quando trovi la parola "oper" che precede o segue un valore numerico. Abbiamo cioè: $y = oper(x)$ ad ogni valore di x corrisponde un valore di y. (in questo caso "oper" è un operatore a sinistra) mentre: $y = f(x)$ si legge: "y funzione di (x)" può essere anche $y = oper(x)$ ma può anche essere un complesso di operatori.

Il complesso delle operazioni che sono semplicemente sintetizzate dal "nome" dell'operatore ("nome" che diventa simbolo operativo) può essere di varia natura, in generale è una operazione monadica. In un calcolatore diamo un solo numero ed il "nome" (simbolo) dell'operatore per avere il risultato.

. Si noti che dare un "nome" "sintetico" ad un complesso di operazioni è una semplificazione.

Un procedimento matematico composto di varie operazioni di varia natura, che si susseguono in sequenza preordinata, e destinato ad ottenere certe risoluzioni, si chiama Algoritmo

Importantissima la sequenza con la quale vengono effettuate le operazioni aritmetiche: per esempio: $5 \times 8 - 6 : 2$ può essere interpretata:

$(5 \times 8) - (6 : 2) = 37$ (ove le operazioni in parentesi hanno

$5 \times (8 - 6) : 2 = 5$ priorità di effettuazione).

$5 \times [8 - (6 : 2)] = 25$ In matematica c'è una regola: "prima si

$[(5 \times 8) - 6] : 2 = 17$ effettuano le moltiplicazioni e le divisioni, poi le somme e le sottrazioni". Però sono preferibili le parentesi

---

Passiamo ora ad un'altro tipo di operatori, cioè agli operatori monadici: essi trasformano un numero in un altro numero. Possono essere: operatori a sinistra, come: "$\sin(x)$; $\log(x)$ ecc." oppure operatori a destra come: "$(x)^2$; $(x)!$ ecc". Oltre gli operatori monadici che operano su numeri, vi sono gli operatori funzionali che operano su funzioni: per esempio la derivata di $f(x) = f'(x)$, o l'integrale di $f(x) = \int f(x)\,dx$: oltre questi

che operano ancora su funzioni vi sono gli operatori del Brogi: $ra\, f(x) = f(x)/f(x)$; $p^{-1} f(x) = (x) f(x)$; $\delta^{-1} f(x) = f(x) - (x)$; $\int f(x) = f(x) + x$.

Per capire gli operatori, è necessario riferirsi al concetto di funzione. Consideriamo un valore, che indicheremo con y, il quale risulta determinato quando, in una espressione algebrica, ove oltre i numeri e le costanti letterali figura la X, attribuiamo un valore ad x. Cioè: $y = f(x)$.

Nella matematica applicata, ove figurano valori numerici, (in numeri o lettere) e valori dimensionali (in numeri o lettere) (questi ultimi quantificano dimensioni, per esempio: 3 centimetri; 3 metri; 3 Watt; oppure: "l" cm.; "a" Watt. ecc; ove il numero da solo non può quantificare la grandezza), conviene far precedere i valori numerici come coefficienti dei valori dimensionali, non solo, ma conviene eseguire affiancato il calcolo dimensionale. [L'analisi dimensionale, su cui avremo occasione di tornare, è utilissima nel campo della sperimentazione, evidenziando, nelle formule, numeri adimensionali che consentono una più precisa interpretazione del fenomeno in esame, ed una più rapida verifica sperimentale.

Per la divisione in matematica conviene riguardare il divisore come il reciproco di un moltiplicatore, cioè ad esempio $4:3 = \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4 = 4 \cdot \frac{1}{3}$, in tal modo si rende indipendente la sequenza dei termini, dividendo, divisore, diventano tali da poter esprimere altri

dividendo, divisore, diventano tali da poter esprimere altri contenuti: per esempio, dire: Un terzo di quattro, oppure; quattro volte un terzo, oppure: quattro terzi, hanno diverse sfumature di significato. Quando il dividendo non è multiplo del divisore, aritmeticamente, avremo un <u>resto</u>, costituito dalla differenza fra il dividendo ed il prodotto fra il quoziente ed il divisore. $(R = N - QD)$ cioè: $\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$.

contrapposto ai numeri o valori chiamati:
"Assoluti" i quali sono privi di segno e sono
da considerarsi solo positivi. Per evidenziare
che un valore, simboleggiato con una lettera, o con
una espressione algebrica, è un valore assoluto
si include il simbolo o l'espressione algebrica fra
due barrette verticali; per es. $|K|$; $|x-3|$ e si
leggono K in valore assoluto, x - 3 in valore assoluto.
(Purtroppo le barrette verticali sono anche usate nel
calcolo matriciale con diverso significato e nel calcolo vetto-
riale per indicare il "modulo" che in effetti è un valore assoluto)
I numeri relativi quindi, indipendentemente dall'essere
prima o dopo, sono quantità operatrici: eseguendo per
esempio: $-5+3$ si ottiene che l'operatore -5 e l'operatore
$+3$ equivalgono all'operatore -2 che è il risultato
dell'operazione.

Per la moltiplicazione, in matematica basta affiancare

due simboli relativi a due valori perchè ciò equivalga al loro prodotto. Però vi sono prodotti di due entità che mutano se scambiamo fra loro i fattori. (Sono detti prodotti non Abeliani) Ciò avviene, per esempio, per il prodotto vettoriale ed altri.

ad indicare una situazione, (un preesistente, l'operazione ed il risultato contingente), è evidente che i due casi indica= no situazioni diverse, anche se arrivano allo stesso risultato.
Un altro caso banale si ha con la proprietà commuta= tiva del prodotto: 3×4 ; 4×3 ; se il primo simbolo numerico è considerato: "coefficiente", cioè molti= plicatore del secondo, se gli oggetti sono 12 palline, il 3×4 esprime: tre mucchietti di 4 palline, mentre 4×3 esprime: quattro mucchietti di 3 palline. Completamente opposta è la significazione se il primo termine è il preesi= stente ed il secondo il quantificatore dell'operazione.

Particolarmente delicato è il concetto che si cela dietro l'operazione della sottrazione.
Il primo termine (detto minuendo) è considerato come il preesistente, il secondo termine (detto diminutore) è considerato quantificatore dell'operazione.
Nella scuola primaria, alle elementari, insegnano

nella scuola primaria, che diminuendo, insegnano
che se il diminuendo è minore del diminutore, l'operazione "non si può effettuare". Perché se in un vaso vi sono 3 caramelle, non possiamo toglierne 5.

In matematica le cose sono viste diversamente: vengono introdotti i numeri con segno + o − e vengono chiamati: "numeri relativi" in

aritmetiche:

5 + 2 ; 5 − 2 ; 5 × 2 ; 5 : 2 .

Nella calcolatrice comune si batte il primo numero, poi si batte il segno dell'operazione, poi si batte il secondo numero, quindi premendo il tasto = si ottiene il risultato.

Nella calcolatrice con notazione inversa polacca, si batte il primo numero, quindi si preme il tasto: "ENTER", poi si batte il secondo numero, ed infine si preme il tasto dell'operazione e si ottiene il risultato.

Nel computer P.C. I.B.M. in Basic. Si batte per primo il punto interrogativo, quindi si scrive l'operazione come scritta sopra, (per es: ? 5+2) quindi, accertato di aver scritto giusto, si preme il tasto "invio" che è simboleggiato: ⏎ (è una specie di enter, o di fai) e si ottiene il risultato.

Ci domandiamo: se il primo numero è considera=

Ci domandiamo: se il primo numero è considera-
to il preesistente, ed il secondo il quantificatore del-
l'operazione, che diverso significato hanno queste due
espressioni: 5+2 ; 2+5, ? Il risultato è lo stesso (per
la proprietà commutativa dell'operazione), però nel primo ca-
so il contributo dell'incremento (secondo termine) è ben mino-
re che nel secondo caso. Se poi il tutto è destinato

Gli operatori

In matematica il concetto di "operatore" é molto delicato. Si deve considerare un qualcosa che opera su entitá per produrre altre entitá. Le entitá possono essere numeriche, geometriche, o di altra natura. Se l'operatore opera su una sola entitá per produrne altre, l'operazione si dice: "monadica". Se l'operatore opera su due entitá per produrne altre, l'operazione si dice: "diadica".

In aritmetica abbiamo solo operazioni diadiche. Occorre distinguere bene fra: operatore, operando ed operazione. E' di fondamentale importanza la sequenza dei simboli. Si suol dire: "operatore a sinistra", quando il simbolo dell'operatore precede l'operando. Si suol dire: "operatore a destra", quando il simbolo dell'operatore segue l'operando.

Queste dizioni, tal volta, possono falsare il significa=

Queste dizioni, talvolta, possono falsare il significato di una espressione. Per chiarire meglio questi concetti, consideriamo tre macchine da calcolo: una calcolatrice comune, una calcolatrice con notazione inversa polacca, un computer con linguaggio Basic; e supponiamo di voler eseguire le seguenti operazioni

I RADICALI DOPPI

I radicali doppi sono del tipo $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ essi possono o meno ridursi da biquadratici a quadratici.

Consideriamo l'espressione:

$$\sqrt{\left(\sqrt{a+\sqrt{c}} \pm \sqrt{a-\sqrt{c}}\right)^2} = \boxed{\sqrt{a+\sqrt{c}} \pm \sqrt{a-\sqrt{c}}}$$

$$= \sqrt{a+\sqrt{c}+a-\sqrt{c} \pm 2\sqrt{a^2-c}} = \boxed{\sqrt{2\left[a \pm \sqrt{a^2-c}\right]}}$$

per cui:

$$\boxed{\left(\sqrt{a \pm \sqrt{a^2-c}}\right) = \sqrt{\frac{a+\sqrt{c}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{c}}{2}}}$$

posto: $(a^2-c)=b$; cioè: $c=(a^2-b)$; abbiamo:

$$\boxed{\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$

Cioè un radicale doppio equivale a due radicali doppi separati dallo stesso segno, il primo termine è per entrambi uguale al primo termine a cui prima (+) e poi (−) il sottoradicale che è la differenza dei quadrati dei due termini del radicando dato: tutto diviso per $\sqrt{2}$ ...

dicando dato; tutto diviso per $\sqrt{2}$. Se (a^2-b) = quadrato perfetto i due radicali diventano semplici ed il radicale doppio si dice biquadratico. Esempio: $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+2}{2}} - \sqrt{\frac{3-2}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

Si noti anche la possibile semplificazione inversa.

$$\sqrt{a+\sqrt{c}} \pm \sqrt{a-\sqrt{c}} = \sqrt{2}\sqrt{a \pm \sqrt{a^2-c}}$$

esempio: $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}\right) = \sqrt{2}\sqrt{4+3} = \sqrt{14}$

$\left(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}\right) = \sqrt{2}\sqrt{4-3} = \sqrt{2}$

RAZIONALIZZAZIONE del DENOMINATORE

Ricordiamo: $(a-b)(a+b)=(a^2-b^2)$ per cui: $\frac{N}{(a+\sqrt{b})}\cdot\frac{(a-\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})}=\frac{N(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$

$$\boxed{\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}\cdot\frac{(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})}=\frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3}{4-3}=\boxed{(3+\sqrt{3})}\;;\quad\boxed{\frac{2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}}\cdot\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=\boxed{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

Qualora al denominatore vi sia un trinomio con due o tre radici, occorre ripetere due volte il procedimento.

METODI PER CALCOLARE LE RADICI

Oggi il metodo più sbrigativo è di avvalersi di calcolatori elettronici. In mancanza di calcolatori, un metodo rapido è quello di usare i logaritmi: $\sqrt[n]{R}=X$ $\quad\log X=\frac{1}{n}\log R$ quindi dalle tavole ricavare l'antilogaritmo. $x=\sqrt[7]{5}$; $x=\exp\left(\frac{1}{7}\ln(5)\right)$ (ove exp è l'antilogaritmo di ln). $x=\exp\left(\frac{1}{7}(1{,}60944)\right)=\exp(0{,}22992)=1{,}25850$;

$1{,}25850=e^{0{,}22992}=e^{\frac{1{,}60944}{7}}=\sqrt[7]{e^{1{,}60944}}=\sqrt[7]{5}$.

Per le radici quadrate abbiamo visto un veloce metodo grafico; <u>il metodo aritmetico</u> anch'esso per radici quadrate,

```
√47.27,49 | 68,75
-36       | 6
 1127     | 6
-1024     | 128
 10349    |   8
          | 1367
```

Consiste nel separare, a gruppi di due cifre, a partire dalla virgola, il radicando. Quindi

```
 10349   |  8
- 9569   |1367
   78000 |   7
  ...    |13745
         |    5
         | ...
```

per l'ultimo gruppo a sinistra (di una o due cifre) si cerca il quadrato più vicino inferiore. (Nel nostro caso: 47 è 36 = 6² il più vicino. Si segna 6 tre volte come in figura si moltiplica l'ultima con la penultima (6×6=36) e si sottrae a sinistra, mentre si somma (6+6=12) a destra. Si affiancano al resto 11 le due cifre adiacenti (27) e si separa l'ultima cifra (11 2 7); si divide 112/12 = 9.. e si prova il 9 affiancando a 12 cioè 129×9 = 1161 > 1127 non va bene, si prova 8 cioè: 128×8 = 1024 < 1127, va bene; si scrive 8 come in figura, si moltiplica per sottrarre a sinistra e si somma con la precedente a destra. Si abbassano le due cifre 49:.. e così via.

PRODOTTI NOTEVOLI

Scopo preciso dell'analisi matematica è quello di semplificare i calcoli. Cioè, le frazioni ridurle ai minimi termini, i radicali renderli il più semplice possibile, così le uguaglianze ed ogni altro calcolo. A questo scopo, in matematica sono detti "NOTEVOLI" quei prodotti che frequentemente consentono semplificazioni. I prodotti notevoli sono in genere binomi, essi sono:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a^2+b^2+2ab)$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = (a^2+b^2-2ab)$$

$$(a-b)(a+b) = (a^2-b^2)$$

$$(a^2+b^2-ab)(a+b) = (a^3+b^3)$$

$$(a^2+b^2+ab)(a-b) = (a^3-b^3)$$

DIVISIBILITÀ di BINOMI

Gli ultimi tre prodotti notevoli suggeriscono una regola generale sulla divisibilità dei binomi, cioè se sono scomponibili in fattori.

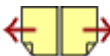
(a^n+b^n); n pari: non è divisibile mai

(a^n+b^n); n dispari: è divisibile per $(a+b)$ (stesso segno)

(a^n-b^n); n pari è divisibile sia per $(a+b)$, sia per $(a-b)$ sempre

(a^n-b^n); n dispari è divisibile per $(a-b)$ (stesso segno)

si può scrivere:

esponente n
- Pari
  - segno (+) = non divisibile mai
  - segno (−) = divisibile per entrambi $(a+b)$ e $(a-b)$
- dispari
  - segno (+) divisibile per $(a+b)$ } (stesso segno)
  - segno (−) " " $(a-b)$ }

LE RADICI, I RADICALI, LE POTENZE ad ESPONENTE FRAZIONARIO

Il simbolo di radice: $\sqrt{\ }$ deriva dalla deformazione della lettera "r". Sia: $\sqrt[n]{a}$, si legge: "ennesima radice di a" ove "a" è il radicando ed "n" l'indice di radice. Il valore numerico della radice ennesima di un radicando "a" è un numero "b" tale che: $(b)^n = a$. cioè: $\boxed{b = \sqrt[n]{a}}$ ed elevando all'ennesima potenza ambo i membri si ha: $b^n = (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$. cioè per la 5ª proprietà delle potenze: $\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$ ed anche: $\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$

Cioè una potenza ad esponente frazionario è un radicale che ha per indice di radice il denominatore della frazione "esponente" e per esponente il numeratore della stessa frazione.

Con ciò ogni radicale può scriversi come potenza ad esponente frazionario: $\sqrt[i]{R^e} = R^{e/i}$. Si hanno le seguenti operazioni sui radicali:

1) Portare sottosegno di radice: $\boxed{b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a}} = b \cdot a^{\frac{1}{n}} = (b^n \cdot a)^{\frac{1}{n}}$

2) Portare fuori radice: Se $a = b^n \cdot c \cdot d^n$ si ha $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot c \cdot d^n} = bd\sqrt[n]{c}$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3} \; ; \; \sqrt[3]{1080} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} = 6\sqrt[3]{5}.$$

3) Ridurre allo stesso indice di radice, (che equivale a ridurre allo stesso denominatore l'esponente frazionario.)

$$\left(\sqrt[3]{4}\right) \cdot \left(\sqrt{2}\right) = \left(4^{\frac{1}{3}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \left(2^{\frac{4}{6}}\right)\left(2^{\frac{3}{6}}\right) = 2^{7/6} = 2^{1+\frac{1}{6}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2\sqrt[6]{2}$$

Per praticità di calcolo, usando i logaritmi di Briggs, anziché scrivere la caratteristica negativa si usava il complemento a 10, cosicché: 9 significava caratteristica $\bar{1}, \dots$; $8, \dots = \bar{2}, \dots$ ecc. . Ciò era possibile non essendo, specie in topografia, interessate misure ad elevato esponente del 10, e quindi non ambiguo il significato.

$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(0,5) = 9,69897$ perciò l'antilogaritmo in base 10 di 9,69897 era da interpretare: 0,5 da non confondere con: 5000000000 . (occorre sottrarre 10 alla caratteristica)

Abbiamo chiarito questi "metodi pratici" per chi nel tempo, consultando vecchie scartoffie di calcoli non rimanga dubbioso sul loro significato.

Facciamo un esempio numerico su una espressione:

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{(127)(742)}{220}\right)^5} \; ; \; \log(x) = \frac{5}{3}\left(\log(127) + \log(742) + \operatorname{colog} 220\right)$$

dalle tavole logaritmiche:
(a 7 decimali)

$\log(127) = 2,1038037$

$\log(742) = 2,8704039$

$\log(742) = 2,8704039$

$\log(220) = 2,3424227 \quad \text{colog}(220) = 7,6575773$

sommando : $= 12,6317849$
$- (10)$

si interpreta : $= 2,6317849$

$2,6317849 \times 5$

$13,1589245 \; \lfloor 3$

$4,3863082 = \log\left(\sqrt[3]{\left(\frac{(427)(742)}{(220)}\right)^5}\right)$

$\text{antilog}(4,3863082) = \underline{24339,31} = \sqrt[3]{\left(\frac{(427)(742)}{(220)}\right)^5}$

Ma se noi conosciamo il logaritmo di un numero e vogliamo risalire al numero, occorre conoscere la base. Se: $\log_a(N) = x$, avremo: $N = a^x$, ed il numero N è detto: "Antilogaritmo" del logaritmo "x" in base "a".

Se i logaritmi sono in base "e" (come avviene ordinariamente in algebra), l'antilogaritmo in base "e" si indica con "exp(x)".

Cioè: $e^x = N = \exp(x) \quad ; \quad \ln(N) = x$

Supponiamo di voler calcolare numericamente una espressione del tipo:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^m}$$

logaritmicamente:

$$\log\left(\sqrt[n]{\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\log(a) + \log(b) - \log(c)\right)$$

Poiché dividere per un numero è moltiplicare per il suo inverso: $\frac{a}{c} = (a)\left(\frac{1}{c}\right)$; $\log\left(\frac{1}{c}\right) = \log(1) - \log(c)$

ma: $\log(1) = 0$ (in qualunque base), in base dieci

ma: $\log(1) = 0$ (in qualunque base); in base dieci

$\log\left(\frac{1}{c}\right) = 0 - \log(c) = \operatorname{colog}(c)$ è detto "cologaritmo"

di c, si indica: $\operatorname{colog}(c)$. per esempio: $\log\left(\frac{1}{2}\right) =$

$\log(1) - \log(2) = (0{,}00000 - 0{,}30103) =$ $\boxed{\operatorname{colog}(2) = \bar{1},69897}$ in

tal modo la nostra espessione si riduce ad unica somma

$$\boxed{\log\left(\sqrt[n]{\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\log(a) + \log(b) + \operatorname{colog}(c)\right)}$$

In particolare se abbiamo da trasformare logaritmi naturali in logaritmi decimali avremo:

$$\log(N) = \ln(N) \cdot \log(e)$$

poiché $\log(e) = (0,434294482)$

$$\log(N) = \ln(N) \cdot (0,434294482)$$

(per es.)

$\log(2) = \ln(2)(0,434294482) = (0,693147..)(0,434294482) = 0,30103$

Inversamente:

$$\ln(N) = \log(N) \cdot \ln(10)$$

cioè:

$$\ln(N) = \log(N) \cdot (2,302585093)$$

notiamo che:

$$\ln(10) = 2,302585093 = \frac{1}{0,434294482} = \frac{1}{\log(e)}$$

cioè in generale che:

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$$

Infatti l'equazione esponenziale:

$$a^{x} = b \quad ; \quad a = b^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad \text{cioé: } x = \log_{a}(b) \; ; \; \frac{1}{x} = \log_{b}(a)$$

Applicazione dei logaritmi al calcolo

Molti testi di analisi matematica usano la parola "log" in generale anche se trattasi di logaritmi naturali.

Se i logaritmi hanno base diversa da "e" oppure da "10", per esempio se hanno base "a" questa deve essere indicata e scriveremo: $\log_a(N)$

cioè se: $\boxed{\log_a(N) = x}$ allora: $\boxed{a^x = N}$

ricordando che:

$$\boxed{\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)}$$

$$\boxed{\log(a/b) = \log(a) - \log(b)}$$

$$\boxed{\log(a^m) = m \log(a)}$$

(valide per qualunque base.)

ci proponiamo il problema: "Dato il logaritmo di un numero in una certa base "a", trovare il logaritmo dello stesso numero nella nuova base "b"."

Cambio di base logaritmica

Applichiamo i logaritmi in base "b" alla espressione: $\boxed{a^x = N}$ si ha: $\log(a^x) = \log(N) = x \log(a)$

ne: $\boxed{a^x = N}$ si ha: $\log_b(a^x) = \log_b(N) = x \log_b(a)$

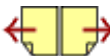
ma per definizione sappiamo che $x = \log_a(N)$ per cui:

$$\boxed{\log_b(N) = \log_a(N) \cdot \log_b(a)}$$

(Il logaritmo di un numero N nella nuova base "b" è dato dal logaritmo dello stesso numero N nella vecchia base "a", moltiplicato per il logaritmo della vecchia base "a" nella nuova base "b")

uso, specie nei calcoli trigonometrici prima dell'av=
vento dei calcolatori elettronici. Si simboleggiano con
log (N). I logaritmi con base decimale o di Briggs:
$\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$; $\log(100) = 2$; ecc. mo=
strano che, i logaritmi in base 10, possono distin=
guersi in due parti: 1) le cifre prima della virgola
sono dette: "caratteristica"; 2) le cifre dopo la vir=
gola sono dette: "mantissa". Infatti se prendiamo
$\log(2) = 0,30103$ (con 5 cifre decimali) e vogliamo $\log(20) =$
$= \log[(2)\cdot(10)] = \log(2) + \log(10) = (0,30103) + (1) = 1,30103$;
analogamente $\log(2000) = \log(2) + \log(1000) = 3,30103$.
Cioè la "mantissa" resta invariata, mentre
la "caratteristica" è data dal numero di
cifre prima della virgola meno una. In altre
parole la "mantissa" è il logaritmo invariato di
un insieme di cifre; la "caratteristica" indica
la posizione della virgola in tali cifre. Notare

la posizione della virgola in tali cifre. Notare che: $\log(0,2) = \bar{1},30103$; $\log(0,002) = \bar{3},30103$.

Questa proprietà vale solo per logaritmi in base 10, non vale per i logaritmi naturali in base "e", infatti: $\ln(2) = 0,693147$; $\ln(2000) = 7,600902$ $\ln(0,2) = -1,609438$; $\ln(5) = +1,609438$.

e per esponente quello capace di dare quel numero. Si faranno delle tavole ove, accanto a ciascun numero porremo l'esponente capace di rappresentarlo (in una certa base)

Definiamo quindi Logaritmo di un numero "l'esponente da dare ad una determinata base per ottenere quel numero."

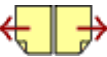
Ma, quale base? La scelta non era facile, Nepero scelse un numero importantissimo in analisi matematica, (lo vedremo a suo tempo) e cioè il numero $e = 2,718281828459045\ldots$ che risulta espresso dal limite: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ per n tendente all'infinito. Facciamo una tabella per vedere cosa succede al crescere di n nell'espressione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	NOTE
1	2	
2	2,25	(cresce) di 1/100
3	2,37..	
4	2,44..	
5	2,49..	
6	2,52...	
7	2,55...	
8	2,57 ...	
9	2,58...	cresce di 1/100
10	2,59...	

Nepero produsse le sue tavole logaritmiche e scrisse un trattato: "Mirifici logaritmorum canonis descriptio". I logaritmi neperiani (base "e") detti anche "logaritmi naturali" si indicano col simbolo: ln(...).

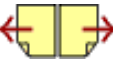
Il Briggs (Briggs Enrico - inglese,

10	2,59 ...	
20	2,65 ...	
50	2,69 ...	
100	2,70 ...	
1000	2,71692	l'incremento di crescita è sempre più piccolo, e non muta più le prime cifre
10 000	2,71815	
10^6	2,71828182	
...	......	
∞	"e"	

Il Briggs (Briggs Enrico - inglese, 1556-1630) pubblicò: "Arithm. logarithmica; Trigonom. britann." Scelse come base dei logaritmi il n° 10. sono detti logaritmi di Briggs, sono stati di grande

I LOGARITMI

Le cinque proprietà delle potenze sono d'importanza fondamentale; meritano di essere esaminate con maggiore attenzione. Iniziando dalla prima proprietà, si nota che il prodotto di due numeri, espressi in forma di potenza, si riduce ad una somma, (quando non esistevano calcolatori, è chiaro che era, ed è, preferibile fare a mano una somma piuttosto che una moltiplicazione; specie se con molte cifre). La seconda proprietà riduce ad una sottrazione l'operazione della divisione ....(mica male come risparmio). La 5ª proprietà riduce ad una moltiplicazione l'elevazione a potenza, ed ad una divisione l'estrazione di radici, con qualsiasi indice di radice, o qualsiasi esponente.

Queste osservazioni fecero nascere in Nepero (Napier John, scozzese, 1550-1617) il concetto di <u>logaritmo</u>, (parola che deriva dal greco, ove, logos era chiamata la base di una potenza, ed aritmo il suo esponente). Noi supponiamo, (non possiamo in effetti sapere quali fossero i suoi pensieri), noi supponiamo che Napier abbia formulato per prima questa idea: "Poiché un numero qualsiasi può essere sempre espres=

so da una potenza, se teniamo fissa la base, varierà l'esponente, se teniamo fisso l'esponente varierà la base. Ma le operazioni avvengono sull'esponente; quindi se teniamo fissa la base, nel sistema di quella base, ad ogni esponente corrisponde un numero e viceversa. Cioè ogni esponente rappresenta un numero, il cui valore è appunto fornito dalla potenza che ha per base quella scelta, (nota e costante).

esempio numerico

$$(2^3)^2 = 2^6 = 8^2 = 64 = \underbrace{\left(\underset{1}{2}\cdot\underset{2}{2}\cdot\underset{3}{2}\right)}_{1}\cdot\underbrace{\left(\underset{1}{2}\cdot\underset{2}{2}\cdot\underset{3}{2}\right)}_{2} = \left(\underset{1}{2}\cdot\underset{2}{2}\cdot\underset{3}{2}\cdot\underset{4}{2}\cdot\underset{5}{2}\cdot\underset{6}{2}\right)$$

Implicazioni della V^a proprietà:

Se eleviamo ad $\left(\frac{1}{m}\right)$ la potenza a^m si ha:

$$(a^m)^{\frac{1}{m}} = a^{m\cdot\frac{1}{m}} = a.$$

Poiché per definizione di "radice" ennesima di un numero N è quel numero R che elevato ad n riproduce N cioè: $R^n = N$ elevando ambo i termini ad $\frac{1}{n}$

$$(R^n)^{\frac{1}{n}} = N^{\frac{1}{n}} = R = N^{\frac{1}{n}} \Rightarrow R = \sqrt[n]{N}.$$

Queste osservazioni portano alla considerazione di potenze ad esponente frazionario ove:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

OSSERVAZIONE

Si confronti la sintesi del linguaggio matematico: (espressioni matematiche) espresso dalle formule a

(espressioni matematiche) espresso dalle formule a sinistra; con la laboriosità della lingua parlata (espressioni in lingua) esposte a destra in corrispondenza delle rispettive formule. È un invito ad esercitare la traduzione di formule matematiche in lingua parlata e viceversa. Renderà semplice tradurre in simboli un problema.

IV^a Proprietà:

espressione matematica

$$(a^m):(b^m) = (a/b)^m$$

espressione in lingua

Il quoziente di due potenze di diversa base e di uguale esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente

dimostrazione:

$$\frac{\underset{1}{a}\cdot\underset{2}{a}\cdots\cdots\underset{m}{a}}{\underset{1}{b}\cdot\underset{2}{b}\cdots\cdots\underset{m}{b}} = \left(\underset{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}\cdot\underset{2}{\left(\frac{a}{b}\right)}\cdots\cdots\underset{m}{\left(\frac{a}{b}\right)}\right)$$

esempio numerico:

$$(4^3):(2^3) = (4/2)^3 = 2^3 = 8 = \frac{4\cdot 4\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{4}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{4}{2}$$

V^a Proprietà:

espressione matematica

espressione in lingua

La potenza di una potenza è

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

dimostrazione:

$$\underbrace{\left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdots \underset{m}{a}\right)}_{1}\underbrace{\left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdots \underset{m}{a}\right)}_{2}\left(\cdots\cdots\right)\underbrace{\left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdots \underset{m}{a}\right)}_{n} =$$

$$= \left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdots \underset{m}{a}\right)\left(\underset{m+1}{a} \cdot \underset{m+2}{a} \cdots \underset{2m}{a}\right)\left(\cdots\cdots \underset{(n-1)m}{a}\right)\left(a \cdot a \cdots \underset{m \cdot n}{a}\right)$$

Sostituendo la colonna dei termini noti alla colonna di una incognita:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \Delta x = [(7)(-5)(4)] + [(2)(7)(4)] + [(-5)(0)(-3)] - [(-5)(-5)(4)] - [(7)(7)(-3)] - 0$$

$\Delta x = (-140) + (56) - (100) + (147) = +33$; $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$; $x = \frac{33}{11}$

$x = 3$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 2 & 0 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \Delta y = +[0] + [(7)(7)(4)] + [(-5)(2)(4)] - [0] - [(3)(7)(4)] - [(7)(2)(2)]$$

$\Delta y = 196 - 40 - 84 - 28 = 44$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{44}{11} = 4$

$y = 4$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad \Delta z = +[(3)(-5)(4)] + [0] + [(7)(2)(-3)] - [(7)(-5)(4)] - [0] - [(2)(2)(4)]$$

$\Delta z = (-60) - (42) + (140) - (16) = +22$; $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{22}{11}$

$z = 2$

Questi procedimenti applicano la regola di Cramer la quale dice:

"Dato un sistema lineare di n equazioni in n incognite, col determinante dei coefficienti diverso da zero, il sistema ha una ed una sola soluzione, ed il valore di ciascuna incognita è il rapporto fra il determi

nante che si ottiene sostituendo alla colonna dell'incognita la colonna dei termini noti, ed il determinante dei coefficienti."

C'è una osservazione da fare sul calcolo dei determinanti: "Se una o più righe (colonne) sono combinazioni lineari di più altre righe (colonne), (intendendo per combinazione lineare la somma o differenza di una o più righe (colonne) moltiplicate per coefficienti arbitrari), allora il determinante è identicamente nullo"

. In altre parole, le correlazioni espresse per righe (o per colonne) non sono indipendenti. Abbiamo visto che la combinazione lineare nei coefficienti (cioè la non indipendenza delle relazioni) porta a sistemi di equazioni indeterminati: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 10 \end{cases}$ oppure impossibili: $\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=7 \end{cases}$ Quindi se il determinante dei coefficienti è nullo ($\Delta = 0$) il sistema o è indeterminato, o è impossibile. Se sono nulli anche i determinanti $\Delta x_i = 0$ allora $x_i = \frac{0}{0}$ indeterminato se invece $\Delta x_i \neq 0$ allora $x_i = \frac{N}{0}$ ∴ il sistema è impossibile

---

Nei sistemi di equazioni con numero di incognite superiore a tre, non è più applicabile il metodo di Sarrus, pur restando valida la regola di Cramer; si può usare il metodo di Gaus o per successive sostituzioni. Esso consiste nell'esplicitare una incognita in una equazione e sostituirla in tutte le altre, avremo $(n-1)$ equazioni in $(n-1)$ incognite. Quindi si ripete il procedimento fino ad arrivare ad una equazione in una incognita il

cui valore sostituito a ritroso permette la risoluzione di tutte le incognite. Però il metodo classico resta quello dei determinanti. Vediamo quindi come si può risolvere un determinante con più di tre equazioni. Premettiamo alcune definizioni:

Chiamasi matrice rettangolare un quadro di m righe ed n colonne ($m \neq n$) ove l'elemento generico: $|a_{i,k}|$ è affetto da due indici: $i = 1, 2, 3 \dots m$; $k = 1, 2, 3 \dots n$

Dicesi determinante di ordine n una matrice quadrata di n righe ed n colonne : $|a_{i,k}|$; $i=1,2 \ldots n$; $k=1,2 \ldots n$.

Se in un determinante sopprimiamo la riga e la colonna dell'elemento $a_{i,k}$, otteniamo un nuovo determinante di ordine $(n-1)$ che è detto minore che indicheremo con $A_{i,k}$. Il prodotto di $A_{i,k}$ per $(-1)^{(i+k)}$ è detto Aggiunto o complemento algebrico dell'elemento $a_{i,k}$.

Si può dimostrare che lo sviluppo di un determinante è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una riga per i rispettivi complementi algebrici

(per esempio il determinante già calcolato con Sarrus)

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & +2 \end{vmatrix} = +(7)\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -3 & +2 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 4 & +2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 7(-10+21) - 2(-28) - 5(20) =$$

$$77 \quad +56 \quad -100 \quad = 33$$

Poiché sommando o sottraendo ad una riga una o più righe moltiplicate per coefficienti arbitrari il valore del determinante non cambia conviene ridurre una riga (o colonna) ad un solo elemento

ridurre una riga (o colonna) ad un solo elemento diverso da zero, in tal caso lo sviluppo per riga (colonna) si riduce ad un solo prodotto. Per esempio nel determinante svolto sopra, alla I riga sottraiamo la terza ed sommiamo la seconda avremo:

$$= \begin{vmatrix} 3 & +5 & -7 \\ 0 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 33$$

Questo metodo consente abbastanza spesso di semplificare notevolmente il calcolo di determinanti anche notevoli.

<u>Se in un determinante si scambiano due righe o due colonne, cioè due linee parallele, il determinante cambia segno.</u>

<u>Due elementi</u> <u>$a_{i,k}$ ed $a_{k,i}$</u> simmetrici rispetto alla diagonale principale <u>si dicono Coniugati</u>

Se: $i_1, i_2 \dots i_k$ indicano le righe e: $j_1 . j_2 \dots j_k$ le colonne, dei I° i due minori di ordine k.

$a_{i_1 i_2 \dots i_k , j_1 j_2 \dots j_k}$ e $a_{j_1 j_2 \dots j_k , i_1 i_2 \dots i_k}$ si dicono <u>coniugati</u>

Diremo complemento algebrico o aggiunto di un minore il minore ottenuto sopprimendo le righe e le colonne occupate dal primo minore, moltiplicato per $(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k}$.

<u>I° Teorema di Laplace</u>

"Ogni determinante è uguale alla somma dei prodotti

"Ogni determinante è uguale alla somma dei prodotti di tutti i minori di ordine K che si possono estrarre da K linee parallele moltiplicati per i rispettivi complementi algebrici"

Se $K = 1$ si ha lo sviluppo per riga (o colonna) che abbiamo già esposto.

Sistemi lineari in n incognite

Sistemi lineari – con numero di equazioni pari al numero delle incognite

Sia: Δ = determinante dei coefficienti delle incognite.

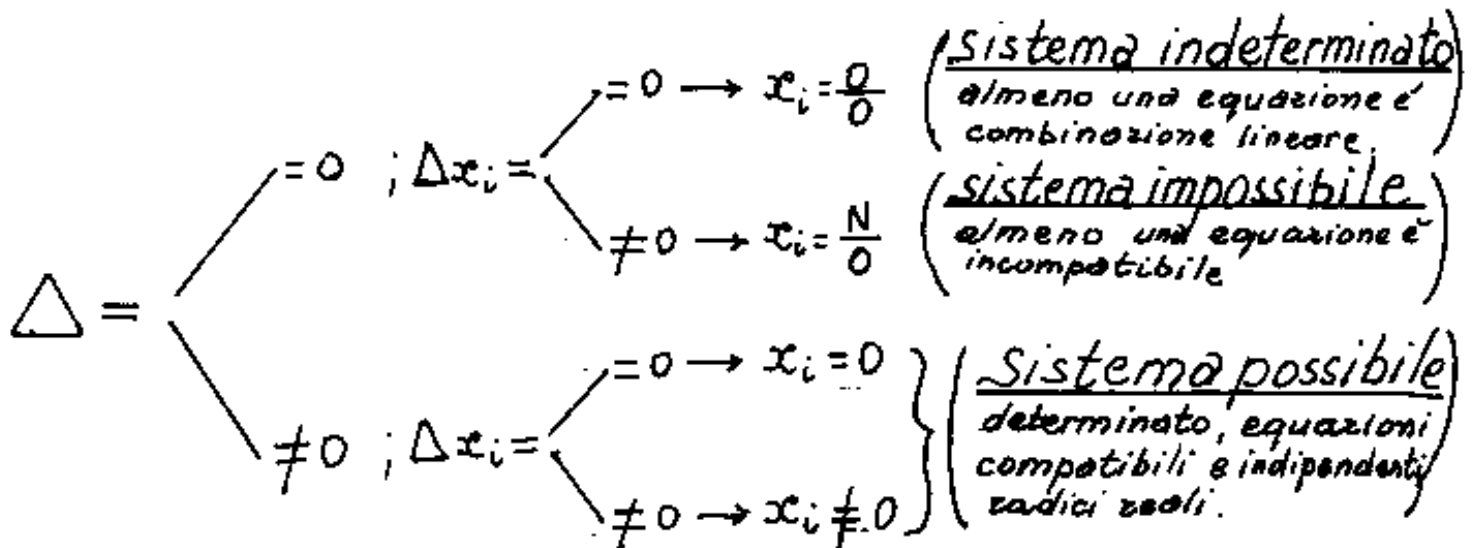
Δx_i = determinante in cui si è sostituita la colonna dei termini noti alla colonna dei coefficienti della x_i.

$$\left(x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta} \; ; \; (\text{Cramer}) \right)$$

Avremo:

- $\Delta = 0$; $\Delta x_i =$
  - $= 0 \rightarrow x_i = \frac{0}{0}$ (sistema indeterminato: almeno una equazione è combinazione lineare.)
  - $\neq 0 \rightarrow x_i = \frac{N}{0}$ (sistema impossibile: almeno una equazione è incompatibile)
- $\Delta \neq 0$; $\Delta x_i =$
  - $= 0 \rightarrow x_i = 0$
  - $\neq 0 \rightarrow x_i \neq 0$

  (Sistema possibile: determinato, equazioni compatibili e indipendenti, radici reali.)

$\neq 0 \rightarrow x_i \neq 0$) (...

Se nel sistema figura un parametro (per es. K), risolviamo: $\Delta = f_{(K)}$ e poniamo; $f_{(K)} = 0$, da cui possiamo trovare i valori : $K = K_{01}, K_{02}, K_{03} \dots K_{0n}$, che annullano: $f_{(K)}$ e quindi Δ. Per $K \neq K_{01}, K_{02}, K_{03}, \dots K_{0n}$, cioè per $f_{(K)} = \Delta \neq 0$, il sistema ammette soluzioni, e

si ha un gruppo di radici per ogni valore di $K \neq K_{0_i}$.
Tali radici sono in funzione di un parametro. I valori del parametro sono anche detti Autovalori, o Valori caratteristici, o parametri.

Il concetto di Autovalore è più complesso e vedremo che discende dalle Equazioni Integrali (Vedi equazioni di Volterra e di Fredholm) ove gli eventuali valori del parametro per cui una equazione integrale è omogenea sono detti appunto autovalori, e le funzioni soluzione della equazione omogenea sono dette autofunzioni.

Sostituendo a K uno dei valori trovati che annullano $\Delta_i (K_{0_1}, K_{0_2}, \dots K_{0_n})$, avremo due casi:

$$x_i = \begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases} \text{ che ci dicono: sistema } \begin{cases} \text{indeterminato} \\ \text{impossibile} \end{cases}$$

Sistemi lineari - con numero di equazioni minore del numero delle incognite

del numero delle incognite.

Nel caso in esame, si portano al secondo membro, nella colonna dei termini noti, tante incognite quante sono le equazioni mancanti. Queste incognite si fanno funzionare come parametri (Autovalori).

Si risolve e si discute il sistema, come nel caso precedente.

Sistemi lineari - con numero di equazioni maggiore del numero delle incognite

E' evidente che se le equazioni sono tutte compatibili, e si hanno tante equazioni indipendenti quante sono le incognite, cioé le equazioni eccedenti sono combinazione lineare delle altre, queste possono essere soppresse senza che muti il sistema. Peró si tratta di individuare quali siano le equazioni che possono essere soppresse. Se, per esempio si hanno: $(n+1)$ equazioni in (n) incognite e l'equazione eccedente è combinazione lineare di una sola equazione, o comunque di un numero di equazioni minore di "n"; se sopprimiamo una

equazioni ... di n, se sopprimiamo una qualsiasi delle equazioni coinvolte nella combinazione lineare, il sistema ammette soluzioni e non cambia, ma se sopprimiamo una equazione indipendente dalla combinazione lineare, avremo: $\Delta = 0$.

Occorre quindi molta attenzione per decidere quali equazioni possono essere soppresse.

Se invece il sistema contiene equazioni incompa=
tibili, allora il sistema è impossibile, salvo indi=
viduare quali equazioni sono incompatibili e discute=
re su di esse il sistema.

Per trattare questi casi, ci si avvale del
teorema di Rouché-Capelli.

Definizione: Dicesi caratteristica di una matrice l'ordi=
ne massimo dei minori non nulli estraibili
da essa.

È evidente che in una matrice (per es) 4×7 l'ordine
massimo dei minori non può superare 4 e se i minori di
ordine 4 sono tutti nulli, si prova quelli di ordine 3, e così via.

Teorema di Rouché-Capelli

"Condizione necessaria e sufficiente
affinché un sistema lineare ammetta soluzio=
ni è che la matrice incompleta (ottenuta
dai soli coefficienti delle incognite) e la ma=

dai soli coefficienti delle incognite) <u>e la matrice completa</u> (ottenuta aggiungendo alla precedente la colonna dei termini noti) <u>abbiano la stessa caratteristica.</u>

Nel caso semplice che l'equazione eccedente sia una sola (per es. 4 equaz. per tre incognite) l'aggiunta della colonna dei termini noti rende quadrata la matrice, e questa calcolata come determinante deve essere zero perché i minori estraibili dalla incompleta sono al massimo di ordine $(n-1)$. Se tale matrice fosse diversa da zero non potrebbe verificarsi la condizione posta dal teorema di Rouché-Capelli. Infatti tornando all'esempio di 4 equazioni in tre incognite, supponiamo che una sola equazione sia sopprimibile. Avremo che se questa equazione è combinazione lineare (e lo è anche nella colonna dei termini noti) la matrice (4×4) (completa) è nulla e l'ordine massimo dei minori decade a tre. Ma se l'equazione eccedente ha i coefficienti delle incognite combinazione lineare di altre, mentre non lo è il termine noto (cioè l'equazione è incompatibile) la matrice 4×4 sarà $\neq 0$ ed il sistema è impossibile.

sarà $\neq 0$ ed il sistema è impossibile.

Facciamo un esempio:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 7 \\ 2x - 5y + 7z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \\ 9x - 6y + 4z = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y - 5z = 7 \\ 2x - 5y + 7z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \\ 9x - 6y + 4z = 9 \end{cases}$$

l'ultima riga è la somma delle altre salvo i termini noti nel secondo sistema.

La prima matrice completa è: (di ordine 3)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 2 & -5 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & +2 & 4 \\ 9 & -6 & +4 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

perché se si sottrae le prime tre righe dall'ultima, questa riga diventa di elementi tutti nulli per le prime tre righe si è già risolto il sistema (Sarrus): $x = \frac{33}{11} = 3$; $y = \frac{44}{11} = 4$; $z = \frac{22}{11} = 2$.

Se invece sopprimiamo una qualsiasi delle prime tre righe (per esempio la I^a) abbiamo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & -6 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -5 \\ 4 & -3 \\ 9 & -6 \end{matrix} = \begin{matrix} -24 & +80 \\ -90 & +189 \\ -168 & +24 \\ \hline -282 & +293 \end{matrix} \qquad (293-282) = \Delta = 11$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \\ 11 & -6 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -5 \\ 4 & -3 \\ 11 & -6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & +231 \\ -110 & 0 \\ -168 & +80 \\ \hline -278 & +311 \end{matrix} \qquad (311-278) = \Delta_x = 33 ; \; x = \frac{33}{11} = 3$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 4 & 4 & 2 \\ 9 & 11 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \\ 9 & 11 \end{matrix} \quad \begin{matrix} +32 & -252 \\ 0 & -44 \\ +308 & 0 \\ \hline 340 & -296 \end{matrix} \qquad (340-296) = \Delta_y = 44 ; \; y = \frac{44}{11} = 4$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & 4 \\ 9 & -6 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -5 \\ 4 & -3 \\ 9 & -6 \end{matrix}$$

−66	0
−180	+48
0	+220
−246	+268

$(+268-246)=\Delta_z=22;\ z=\frac{22}{11}=2$

come si vede il sistema dà sempre gli stessi valori qualunque siano le equazioni scelte.

I Limiti

Paradosso di Achille e la tartaruga

Un giorno, una tartaruga sfidó Achille (il pié veloce) in una gara di corsa dicendogli: " Se tu o Achille mi dai un vantaggio alla partenza io vinceró la corsa." E spiegó la sua teoria: " Infatti quando tu parti io avró giá fatto un tratto di pista, e nel tempo che tu impieghi a fare quel tratto, io avró percorso un'altro tratto di pista (sia pure piú piccolo), quindi anche per percorrere questo tratto impiegherai del tempo durante il quale io non saró lí ad attenderti, e questo procedimento non ha fine, per cui non potrai mai raggiungermi ed io vinceró la corsa".

L'algebra elementare risolve cosí il problema:

Sia V_A = Velocità di Achille ; V_T = Velocità tartaruga .

Se il vantaggio consiste in un tratto "a" di percorso (ed in questo caso la partenza è contemporanea), oppure se il vantaggio consiste nel fatto che Achille parte dopo che è trascorso il tempo "t_0", permane lo stesso vantaggio essendo: $\boxed{a = V_T \cdot t_0}$, ma occorre fare attenzione all'origine dei tempi.

poter tagliare il nostro "ds" avremo non più una strisciolina, ma un segmento. (E' difficile pensare un foglio non di strisciolime affiancate, ma di soli tagli).

Cerchiamo di fare altri esempi.

La grandezza 1/3 è finita, eppure espressa in numero decimale: 0,333333 .... non si finirebbe mai di scrivere la cifra: $3/10^n$ con n variabile da uno ad infinito.

Ebbene finché n è reale, grande a piacere, la sequenza della cifra 3 sarebbe grandissima, ma il valore del numero scritto sarebbe sempre inferiore ad $\frac{1}{3}$.

Solo infinite cifre 3 (dopo 0,..) ci darebbero il valore di $\frac{1}{3}$. Questo esempio ci mostra che l'irraggiungibile infinito, può dare un valore finito.

Dobbiamo però fare una notevole distinzione, fra l'attimo prima del limite, ed il passaggio al limite. Cioè se considerassimo l'infinito e lo zero "condizioni limite" dobbiamo esaminare i due aspetti come le facce di un piano. La grandezza che ten-

[illegible]
de a zero è un differenziale è la faccia destra o sinistra del piano zero.
È una specie di zero + (o zero −), che ci dà il differenziale; <u>lo zero è
il nulla, il punto, è lo spessore di un piano o di un segmento</u>. Lo stesso
discorso vale per l'infinito, in campo reale posso parlare di punti
fino alla faccia di qua di infinito. Passato il limite un
punto all'infinito non ha senso.

"∞" è la più grande possibile delle nostre dimensioni oltre la quale non v'è più dimensione e "zero" la più piccola possibile delle nostre dimensioni oltre la quale non v'è più dimensione. Cerchiamo di capire meglio la questione: consideriamo questo foglio, esso è delimitato da segmenti privi di spessore. Essi non "esistono" "in sè" materialmente, dove finisce il foglio inizia l'aria e viceversa.

Infiniti segmenti affiancati, in quanto privi di spessore, si sovrappongono e danno luogo ad un segmento privo di spessore. Ma questi segmenti, privi di spessore, hanno una lunghezza finita, (per es. 21 cm.) cioè mancano di una dimensione. (Altre dimensioni possono averle).

Supponiamo di dividere in due il foglio, in modo da dividere in due anche il nostro segmento e ripetiamo l'operazione (è il discorso degli Eleati) finchè c'è foglio da dividere, l'ultima strisciolina sarà veramente sottile, ma avrà la

lunghezza dell'altro lato del foglio, (e il suo spessore). Quando l'operazione è stata ripetuta un numero di volte indefinitamente grande, la larghezza della strisciolina è un differenziale ds ; (si noti che un numero comunque grande di volte è sempre duplicabile e <u>nella realtà i numeri non finiscono mai</u>), quindi il cosiddetto "infinito" è fuori del reale ; se col pensiero "idealmente" pensiamo di raggiungerlo e di

Si noti che:

$$\frac{(f(x_0+h) - f(x_0))}{(h)} \quad \frac{= \Delta(y)}{= \Delta(x)} \quad \text{(incremento finito)}$$

che:

$$\frac{\lim_{h \to 0} (f(x_0+h) - f(x_0))}{\lim_{h \to 0} (h)} \quad \frac{=}{=} \quad \frac{dy}{dx} \quad$$

= incremento differenziale in y. = $d(f_{(x)})$
= incremento differenziale in x.

Quest'ultima uguaglianza: ($\lim_{h \to 0} = dx$) può apparire come una contraddizione perchè essendo h = o anche dx dovrebbe essere nullo contraddicendo l'ipotesi che sia "la più piccola dimensione..." Però dobbiamo considerare "h" tendente a zero cioè si sia fermata l'attimo avanti di essere zero. L'errore, al solito, stà nel considerare lo zero, cioè il "nulla" un simbolo quantitativo nel dimensionale continuo. Anche su questo argomento grandi matematici come Peano e come Cantor avevano "opinioni" opposte. Un giorno che parlavamo col prof. Sansone (insigne matematico), gli domandammo se considerava lo zero un numero, rispose: "certo è un numero e di grandissima importanza!"

se: zero è un numero e di grandissima importanza:

– "e l'infinito?" – "No l'infinito non è un numero"...

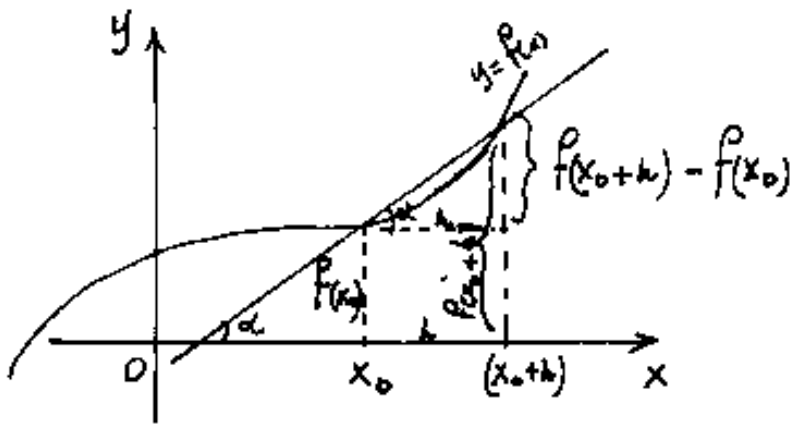
– "Scusi professore allora come possiamo fare: $\frac{1}{0} = \infty$?, ed $\frac{1}{\infty} = 0$?". In effetti il problema è aperto.

Noi consideriamo due ipotesi: o entrambi numeri: ove ∞ è il numero dei tagli effettuabili in qualsiasi segmento e zero lo spessore di ciascun taglio. O entrambi limiti (irraggiungibili) ove

Derivate

Abbiamo già visto (pag.83) che il limite del rapporto fra l'incremento della variabile dipendente e l'incremento della variabile indipendente, cioè il rapporto dei differenziali, si chiama "derivata" ed indica la "pendenza" della grafica della funzione. O meglio, possiamo ora dire che: "la derivata, in un punto di una funzione, è la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta tangente in quel punto alla curva rappresentativa della funzione, forma con l'asse delle ascisse".

Ordinariamente nei testi di analisi si indica con "h" l'incremento Δx, per cui la derivata come "limite del rapporto incrementale" diventa:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \boxed{\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right)} = \tan(\alpha).$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right)$$

Nell'equazione di una retta: $y = mx + q$, il coefficiente angolare m è la sua derivata, $y' = m$ cioè la sua pendenza. Se tale pendenza l'uguagliamo a quella di una $y = f(x)$ avremo: $y = f'(x)\,x + q$.

$dV = A ds$. Qualora si pensasse uno spessore minore di ds (il che non è possibile per definizione), sparirebbe ds e non vi sarebbe più spessore, e quindi non vi sarebbe più volume; resterebbe la porzione di superficie di area A. Analogamente se pensiamo l'area infinitesima $dA = l ds$ data dal prodotto della lunghezza finita l di un segmento per lo spessore infinitesimo ds; decadendo ds, decade lo spessore, decade dA, non esiste più una superficie, ma esiste una lunghezza l. del segmento. A sua volta il segmento di lunghezza l può ridursi ad un dl, oltre dl non v'è più segmento. Ma non siamo ancora al nulla, infatti esistono grandezze fisiche non dimensionabili con misure di lunghezze, aree, o volumi, in cui il "dividere per metà" non è più nello spazio geometrico, è nello spazio n dimensionale. Una carica elettrica non ha volume; una caloria non è dimensionabile in misure di

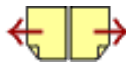
me; una caloria non è dimensionabile in misure di lunghezza, area, o volume, così altre forme energetiche come il KWh; però le forme energetiche possono riportarsi a Joule cioè a (Newton)(metri) oppure a (Kgm); ove si reintroduce una misura di lunghezza geometrica che fa intravedere una connessione fra lo spazio geometrico e l'ennedimensionale. (V. IV volume)

mettono. Quindi la somma di infiniti punti, per noi è ancora un punto; e non esiste "in sé"!

Questa troppo lunga esposizione, vuol solo evidenziare che la cosiddetta "certezza" della matematica, quando esce dal concreto, sfocia in una problematica non risolta, che è poi lo stesso problema dell'uomo. Ogni "perché?" ne richiede sempre altri, fino ad uscire dai limiti umani; oltre "la siepe" e lì, (come dice il Leopardi) "si annega il pensier mio e il naufragar m'e' dolce in questo mare".

I Differenziali

Abbiamo gia' introdotto il concetto di "differenziale" come limite infinitesimo di un segmento al capitolo "I diagrammi e il concetto di funzione; noi definiamo, in generale, il differenziale "Come la più piccola

grandezza di una dimensione fisica". Avremo così la più piccola lunghezza, il più piccolo intervallo di tempo, la più piccola area, il più piccolo volume, e così via, oltre il quale non esiste più la dimensione fisica rappresentata. Se per esempio consideriamo una superficie di area finita (come un foglio), però avente uno spessore differenziale: ds, il suo volume infinitesimo sarà:

un nulla alla n; più nulla del nulla. Perchè dovrebbe aver senso che ∞^n sia più grande di ∞? Quando diciamo: "infinito", meglio sarebbe chiamarlo "indefinito"; non possiamo pensare che esista un infinito sergente o caporale che sbatte sugli attenti l'infinito soldato. Ne tanto meno possiamo pensare che, essendo ormai fuori del nostro campo dimensionale, ci si permetta di asserire che $\infty \pm N = \infty$, che: $(N)\infty = \infty$, ma che $\infty \cdot \infty = \infty^2$, è uno entità superiore, quando per N si accetti qualsiasi grandezza, comunque grande, purchè finita.

Per noi zero (0) ed infinito (∞) sono "limiti" del nostro campo e non usabili come semplici simboli di grandezze algebriche finite. Se zero è un "numero" ed infinito non lo è come possiamo accettare: $\frac{N}{0} = \infty$?

Il punto non ha dimensioni, perciò possiamo considerare infinite rette per esso, senza fare "spessore". Per noi i punti, le rette, i piani, non esistono "in se",

siamo noi che li pensiamo; il punto dello spigolo di questo foglio di carta, nessuno può dire è carta, oppure è aria, e neppure può dire è elemento limite perchè ammesso un intorno superficiale piano, piccolo a piacere, attraverso di esso si trasmette la pressione dell'aria e le radiazioni luminose, termiche, elettromagnetiche, che i due corpi reali si tras

Non ci sentiamo evidentemente così preparati da poter sostenere la nostra "opinione", possiamo solo riportare come noi vediamo l'intera questione. "Il Cantor, sostiene decisamente che l'intera teoria è errata" dice il Russell.

Noi cerchiamo di esaminare i due aspetti:

1) Accettando la teoria noi vediamo le più piccole particelle di un atomo abitate da esseri umani, l'atomo è già il loro universo e quell'atomo non è altro che parte di una molecola, di una cellula organica di un pelo di un altro essere umano il quale vive su un pianeta, ha il suo universo che a sua volta ..... È evidente che le dimensioni non sono paragonabili fra i due esseri umani, l'uno ha il suo infinito nell'infinitesimo dell'altro; le dimensioni del primo "sono trascurabili" rispetto alle dimensioni del secondo. Come un segmento può essere suddiviso in infiniti segmenti più piccoli e questi a loro volta essere divisi in infiniti segmenti anco

za più piccoli, e così via.

2) Non accettando la teoria, per prima cosa notiamo che si usa il simbolo ∞ come fosse una qualsiasi grandezza finita. Mentre le potenze dei tre simboli: 0^n; 1^n; ∞^n debbono necessariamente essere uguali a se stesse. $0^n = 0$; $1^n = 1$; $\infty^n = \infty$: se: $\left(\frac{1}{0}\right)^n = \infty^n = \left(\frac{1}{0^n}\right)$ ... non ha senso che zero alla enne sia più piccolo di zero! Cioè

Analizziamo meglio la questione: "Punto". Dato un segmen-
to è possibile proiettarlo in modo che la proiezione sia
più corta, uguale, o più lunga del segmento proiettato,
anzi la proiezione può ridursi ad un punto e può diventare
una semiretta. Eppure a ciascun "punto" del segmento
corrisponde uno ed un sol punto nella proiezione. Cosa im-
plica tuttociò? Implica che un segmento comunque
piccolo, <u>ha lo stesso infinito</u> numero di punti di un
segmento comunque grande. Cioè dire infinito od n
volte infinito è sempre lo stesso infinito (indefinito).
La cosa diventa più sconcertante se pensiamo che
una retta è composta di <u>infiniti</u> segmenti; allora,
contrariamente alla dizione che una retta possiede in-
finiti punti, ne possederebbe infiniti al quadrato (∞^2),
e poiché un segmento può essere diviso in infiniti segmenti
avremmo ∞^3 e così via, il che nega l'esistenza di infiniti
e quindi di infinitesimi di ordine superiore.

e quindi di infinitesimi di ordine superiore.

Il problema sull'ordine degli infiniti e degli infinitesimi, che, come dice Russell: "..Giungo ora ad un problema molto difficile, di cui farei volentieri a meno di parlare:......" (B. Russell - I principi della matematica - ediz. Longanesi - Milano - 1970 - Pag 468) fu trattato da Cantor, da Du Bois Reymond, da Stolz ed altri, dissentendo fra loro.

Se guardiamo, con la conoscenza attuale, il procedimento eleatico diremmo: "granello di sabbia = biossido di silicio SiO_2, dividendo si arriva alla molecola, dividendo questa, però, si perde la caratteristica: "Sabbia = SiO_2", si avrà ossigeno o silicio, si arriva all'atomo (al cosiddetto atomo) di ossigeno o di silicio dividendo il quale si perde la caratteristica: "elemento chimico" avremo un nucleo e degli elettroni, dividendo il nucleo si hanno neutroni e protoni, siamo nell'ordine delle cariche elettriche, si arriva a stati di transizione fra materia ed energia, non ha più senso il castello di attributi che abbiamo dato alla materia, cade anche il concetto di spazio geometrico (un Coulomb non è misurabile in lunghezze, aree, o volumi) continuando cade anche il concetto di tempo, si arriva ad una mutua influenza, una specie di Soffio Creativo, fuori del tempo, che è sempre il presente, che è spirito di

vita, il tutto e il niente, capace di assumere tutti gli aspetti, assai più simile ai sentimenti che alla materia. Come dice Dante: "L'amor che move il sole e le altre stelle". Purtroppo l'uomo è appena arrivato un po' più in là del "Quark" ed è ben lontano dalla soluzione.

Eppure l'uomo ha il coraggio di formulare leggi e norme di etica, di religione, di ogni attività umana. Povere presuntuose formulazioni di chi crede di possedere la Verità.

IL calcolo infinitesimale

Fin dai tempi più remoti il problema degli anti=
chi filosofi era: "Quid est natura rerum?" Cioè: "di
cosa sono fatte le cose?" Si pensò ad un elemento co=
mune, indistruttibile, indivisibile (atomo) che ap=
punto in greco significa "indivisibile". L'atomismo di
Leucippo prima, e di Democrito poi, fissò i cardini
di quella scienza, che diramatasi ad albero, si
scisse in varie branche; dalla geometria all'ana=
lisi matematica, dall'alchimia alla chimica ed alla
chimica-fisica, fino all'attuale atomistica.

La scuola di Elea (attuale Velia a sud di Napoli) definì
gli enti geometrici (600 anni a.C.). Gli Eleati definiro=
no il punto: "Ciò che non ha parti" cioè: non parti=
tabile = indivisibile = atomo.

Il loro ragionamento era estremamente semplice: "Prendiamo un gra=
nello di sabbia e dividiamolo a metà, metà la gettiamo, metà la

teniamo; questa metà dividiamola ancora in due parti, metà la gettiamo, metà la teniamo, e questa metà dividiamola ancora in due parti ...... e così procediamo, quand'è che il processo termina? Evidentemente quando non v'è più parti da dividere!" Da ciò la definizione di punto. (si confronti quanto già detto nel cap. progressioni geometriche a proposito di due torte)

Si ha così l'approssimazione numerica del valore cercato. Gli elementi delle due classi contigue costituiscono due successioni convergenti nell'elemento separatore. Tutti gli elementi di una classe contigua sono minori dell'elemento separatore, gli elementi dell'altra classe contigua sono maggiori, perciò le due classi non possono sovrapporsi e non hanno nessun elemento comune poiché l'elemento separatore non fà parte di nessuna delle due classi, essendo per esse irraggiungibile.

Abbiamo già visto una coppia di classi contigue per determinare π, dedotte da semiperimetri di poligoni inscritti e circoscritti al cerchio di raggio unitario. La loro convergenza era lentissima, infatti per $n = 100$

$$3{,}141075902\ldots < \pi < 3{,}14262598$$

Una coppia di classi contigue che converga più velocemente su π potrebbe essere:

$$3 < \pi < 4$$

$3 < \pi < 4$

$3{,}1 < \pi < 3{,}2$

$3{,}14 < \pi < 3{,}15$

$3{,}141 < \pi < 3{,}142$

$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$

$3{,}14159 < \pi < 3{,}1416$ (notare che si ripete)

$3{,}141592 < \pi < 3{,}141593$ (già molto più approssimata)

Le classi contigue

La determinazione approssimata per eccesso e per difetto di un numero, porta alla concezione delle classi contigue, cioè due classi di numeri una crescente, l'altra decrescente, che tendono ad avvicinarsi indefinitamente al numero da determinare. e che è detto: "elemento separatore delle classi contigue". Per esempio per $\sqrt{2}$ possiamo scrivere:

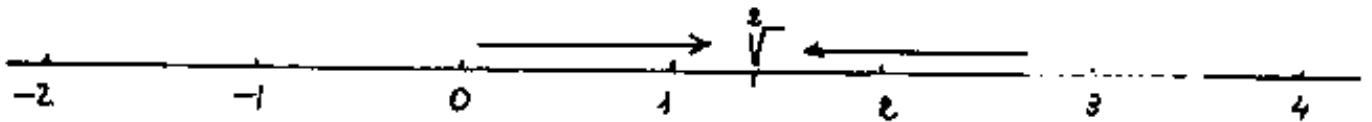
$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

ove: 1; 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ...è la classe crescente

2; 1,5 ; 1,42 ; 1,415 ; 1,4143 ...è la classe decrescente

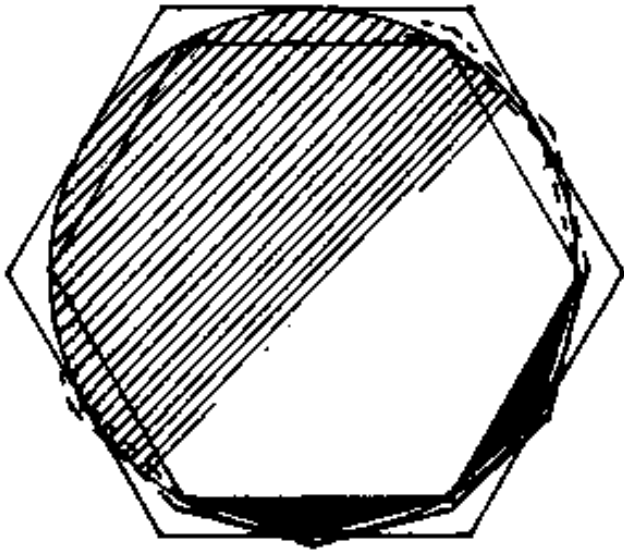
Se sull'asse reale graduato pensiamo il punto $\sqrt{2}$

vediamo le due classi convergere verso $\sqrt{2}$, senza per altro che numericamente possano raggiungerlo.

Un altro esempio di classi contigue si ha calcolando i

Un altro esempio di classi contigue si ha calcolando i semiperimetri dei poligoni inscritti e circoscritti ad un cerchio di raggio unitario facendo crescere con legge qualsiasi il numero dei lati; l'elemento separatore è π, cioè un numero trascendente:

$$n \,\mathrm{sen}(\pi/n) < \pi < n \,\mathrm{tg}(\pi/n)$$

per n crescente da >1 ad ∞ si hanno le due classi contigue.

del poligono e con i punti di tangenza al cerchio, perciò: l'area del poligono circoscritto ad un cerchio è sempre maggiore dell'area del cerchio. Analogamente: l'area del poligono inscritto ad un cerchio è sempre minore dell'area del cerchio. 2) Se raddoppiamo il numero dei lati dei due poligoni; avremo che l'area dei poligoni inscritti aumenta dell'area dei triangoli isosceli aventi per base il lato del primo poligono inscritto e per lati obliqui quelli del poligono di numero doppio di lati. Perciò l'area del nuovo poligono inscritto, pur restando inferiore a quella del cerchio vi si è avvicinata. Analogamente l'area del nuovo poligono circoscritto, pur restando superiore a quella del cerchio vi si è avvicinata. Raddoppiando nuovamente il numero dei lati avremo un

ulteriore avvicinamento delle aree per difetto e per eccesso a quella del cerchio ... "per esaustione" coincideranno. Quindi si riguarda la circonferenza come il perimetro di un poligono avente un infinito numero di lati, la cui "apotema" è il raggio. L'area dei poligoni regolari è: "il perimetro per metà apotema"; l'area del cerchio: "la circonferenza per la metà del raggio. (Vedasi anche il capitolo: "poligoni regolari")

Il processo di esaustione

La parola: "esaustione", ormai pressoché in disuso nella lingua italiana, ha lasciato la parola: "esausto"= "che ha esaurito le proprie energie", può farci capire meglio il concetto. "Esaustione" è un procedimento matematico introdotto da Eudosso di Cnido, usato anche da Euclide ed esteso da Archimede. Esso consiste in una successione di preposizioni false evidentemente da usare come assurde per dimostrare una verità.

Euclide con questo procedimento dimostrò che l'area del cerchio è proporzionale al quadrato del raggio.

Nell'introdurre i poligoni regolari noi abbiamo accennato come gli antichi delimitassero il valore di π calcolando i perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti ad una circonferenza; (è un esempio di processo di esaustione). Poiché ciò può servire come introduzione al concetto di limite ed al cal-

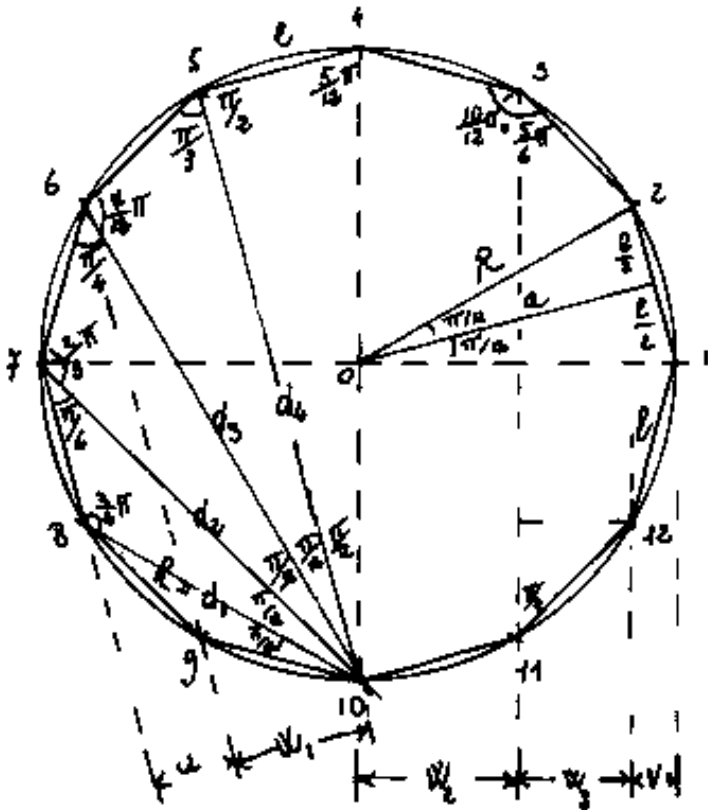
come introduzione al concetto di limite ed al cal-
colo infinitesimale, ripetiamo il ragionamento per
il calcolo dell'area del cerchio.

1) È assurdo che l'area del cerchio equivalga quella
di un suo poligono circoscritto, perché se coloriamo
l'area del cerchio restano da colorare i triangoli
curvilinei aventi i vertici coincidenti con i vertici

Relazioni fra gli elementi del dodecagono

	ℓ	$R = d_1$	$a = r$	h	d_2	d_3	d_4	u	w_1	w_2	w_3	V
$\ell =$	ℓ	$R(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,5176380902	$a(2-\sqrt{3})2$ 0,535898385	$h(2-\sqrt{3})$ 0,267949192	$d_2(\sqrt{3}-1)/2$ 0,366025404	$d_3\sqrt{2}(3-\sqrt{3})/6$ 0,298858491	$d(2-\sqrt{3})$ 0,267949192	$u \cdot 2$ 2.000000	$w_1 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 1,154700538	$w_2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ 1,035276180	$w_3 \cdot \sqrt{2}$ 1,414213562	$V \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ 3,863703302
$R = d_1 =$	$\ell(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851653	$R = d_1$	$a(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}$ 1,035276180	$h(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,5176380902	$d_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707106781	$d_3/\sqrt{3}$ 0,577350269	$d_4(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,5176380902	$u(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$ 3,863703305	$w_1\sqrt{2}(3+\sqrt{3})/3$ 2,230710143	$w_2 \cdot 2$ 2.000000	$w_3(\sqrt{3}+1)$ 2,732050808	$V\,2(2+\sqrt{3})$ 7,464101615
$a = r$	$\ell(\sqrt{3}+2)/2$ 1,866025404	$R(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}$ 0,965925827	$a = r$	$h \cdot \frac{1}{2}$ 0,5000000	$d_2(\sqrt{3}+1)/4$ 0,683012702	$d_3(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{6}$ 0,557677536	$d_4 \cdot \frac{1}{2}$ 0,5000000	$u(\sqrt{3}+2)$ 3,732050808	$w_1(1+2/\sqrt{3})$ 2,154700538	$w_2(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851653	$w_3(\sqrt{3}+2)/\sqrt{2}$ 2,638958435	$V(5+3\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 7,209748520
$h =$	$\ell(\sqrt{3}+2)$ 3,732050808	$R(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851653	$a \cdot 2$ 2,000000	h	$d_2(\sqrt{3}+1)/2$ 1,366025404	$d_3(\sqrt{3}+1)/\sqrt{6}$ 1,115355072	d_4	$u(\sqrt{3}+2)2$ 7,464101616	$w_1(1+2/\sqrt{3})2$ 4,309401069	$w_2(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$ 3,863703305	$w_3(\sqrt{3}+2)\sqrt{2}$ 5,277916867	$V(5+3\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}$ 14,41953703
$d_2 =$	$\ell(\sqrt{3}+1)$ 2,732050808	$R\sqrt{2}$ 1,414213562	$a(\sqrt{3}-1)2$ 1,464101616	$h(\sqrt{3}-1)$ 0,732050808	d_2	$d_3(\sqrt{2}/\sqrt{3})$ 0,816496581	$d_4(\sqrt{3}-1)$ 0,732050808	$u(\sqrt{3}+1)2$ 5,464101616	$w_1(3+\sqrt{3})2/3$ 3,154700539	$w_2 \cdot 2\sqrt{2}$ 2,828427124	$w_3(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$ 3,863703305	$V(2+\sqrt{3})2\sqrt{2}$ 10,55583373
$d_3 =$	$\ell(3+\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 3,346065216	$R\sqrt{3}$ 1,732050808	$a(3-\sqrt{3})\sqrt{2}$ 1,793160944	$h(3-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 0,896575472	$d_2(\sqrt{3}/\sqrt{2})$ 1,224744871	d_3	$d_4(3-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 0,896575472	$u(3+\sqrt{3})\sqrt{2}$ 6.692130439	$w_1(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$ 3,863703304	$w_2 \cdot 2\sqrt{3}$ 3,464101616	$w_3(\sqrt{3}+3)$ 4,732050808	$V(2+\sqrt{3})2\sqrt{3}$ 1*
$d_4 =$	$\ell(2+\sqrt{3})$ 3,732050808	$R(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851653	$a \cdot 2$ 2,000000	h	$d_2(\sqrt{3}+1)/2$ 1,366025404	$d_3(\sqrt{3}+1)/\sqrt{6}$ 1,115355072	d_4	$u(\sqrt{3}+2)2$ 7,464101616	$w_1(1+2/\sqrt{3})2$ 4,309401065	$w_2(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$ 3,863703305	$w_3(2+\sqrt{3})\sqrt{2}$ 5,277916867	$V(5+3\sqrt{3})\sqrt{2}$ 14,41953703
$u =$	$\ell/2$ 0,5000000	$R(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$ 0,258819045	$a(2-\sqrt{3})$ 0,267949192	$h(2-\sqrt{3})/2$ 0,133974596	$d_2(\sqrt{3}-1)/4$ 0,183012702	$d_3(3-\sqrt{3})/6\sqrt{2}$ 0,149429245	$d_4(2-\sqrt{3})/2$ 0,133974596	u	$w_1(1/\sqrt{3})$ 0,577350269	$w_2(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,517638091	$w_3(1/\sqrt{2})$ 0,707106781	$V(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851653
$w_1 =$	$\ell\sqrt{3}/2$ 0,866025404	$R(3-\sqrt{3})/2\sqrt{2}$ 0,448287736	$a(2\sqrt{3}-3)$ 0,464101616	$h(2\sqrt{3}-3)/2$ 0,232050808	$d_2(3-\sqrt{3})/4$ 0,316987298	$d_3(3-\sqrt{3})/2\sqrt{6}$ 0,258819045	$d_4(2\sqrt{3}-3)/2$ 0,232050808	$u \cdot \sqrt{3}$ 1,732050808	w_1	$w_2(3-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 0,896575472	$w_3(\sqrt{3}/\sqrt{2})$ 1,224744871	$V(3+\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 3,346065216
$w_2 =$	$\ell(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}$ 0,965925827	$R \cdot \frac{1}{2}$ 0.5000000	$a(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,517638090	$h(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$ 0,258819045	$d_2(\sqrt{2}/4)$ 0,353553391	$d_3(\sqrt{3}/6)$ 0,288675135	$d_4(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$ 0,258819045	$u(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$ 1,931851651	$w_1(3+\sqrt{3})/3\sqrt{2}$ 1,115355072	w_2	$w_3(\sqrt{3}+1)/2$ 1,366025404	$V(2+\sqrt{3})$ 3,732050808
$w_3 =$	$\ell(\sqrt{2}/2)$ 0,707106781	$R(\sqrt{3}-1)/2$ 0,366025404	$a\sqrt{2}(2-\sqrt{3})$ 0,378937382	$h(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 0,189468691	$d_2(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$ 0,258819045	$d_3(3-\sqrt{3})/6$ 0,211324865	$d_4(2-\sqrt{3})/\sqrt{2}$ 0,189468691	$u \cdot \sqrt{2}$ 1,414213562	$w_1(\sqrt{2}/\sqrt{3})$ 0,816496580	$w_2(\sqrt{3}-1)$ 0,732050808	w_3	$V(\sqrt{3}+1)$ 2,732050808
$V =$	$\ell(\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$ 0,258819045	$R(2-\sqrt{3})/2$ 0,133974596	$a(3\sqrt{3}-5)/\sqrt{2}$ 0,138700708	$h(3\sqrt{3}-5)/2\sqrt{2}$ 0,069350354	$d_2(2-\sqrt{3})/2\sqrt{2}$ 0,094734346	$d_3(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2})$ 0,07735027	$d_4(3\sqrt{3}-5)/2\sqrt{2}$ 0,069350354	$u(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ 0,517638090	$w_1(3-\sqrt{3})/6\sqrt{2}$ 0,298858491	$w_2(2-\sqrt{3})$ 0,267949192	$w_3(\sqrt{3}-1)/2$ 0,366025404	V

Dodecagono

Dividere il cerchio in dodici parti uguali (e quindi in 24 parti uguali) è facile data la facile costruzione grafica dell'esagono. Quindi le fasi cicliche, fin dall'antichità, usarono tale suddivisione: l'anno in dodici mesi, il giorno e la notte in dodici ore (quando il giorno = la notte). Per costruirlo graficamente, basta far centro, (con lo stesso raggio del cerchio) agli estremi di due diametri ortogonali.

Abbiamo: $2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}51763809$

$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}931851653.$

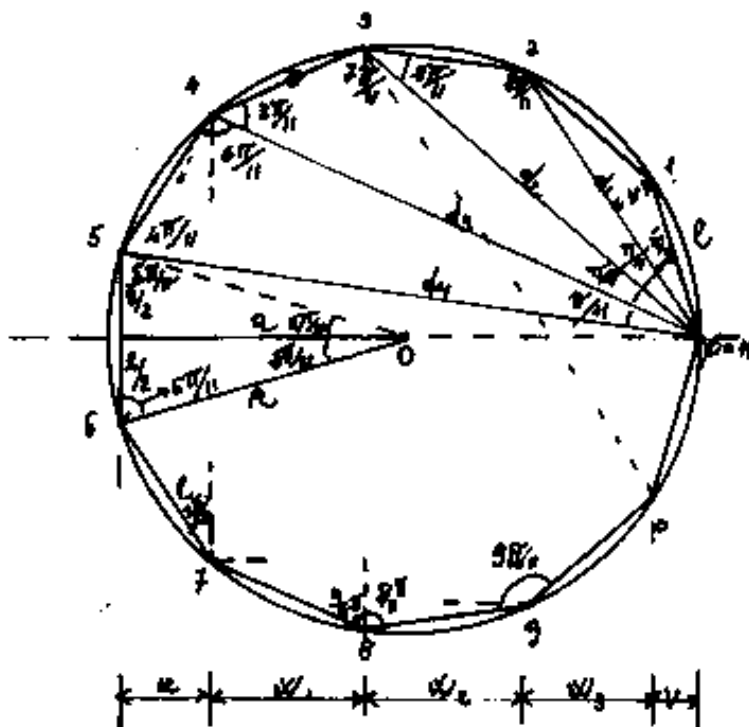
Si noti inoltre che: $d_1 = R$ è il lato dell'esagono inscritto; d_2 = lato del quadrato inscritto; d_3 = lato del triangolo equilatero inscritto; $d_4 = \sqrt{(2R)^2 - \ell^2}$; $u = \frac{\ell}{2}$

$w_1 = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}$; $w_2 = R/2$; $w_3 = \frac{\ell}{2}\sqrt{2}$; $v = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$; Queste relazioni

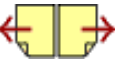
$W_1 = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}$; $W_2 = \ell/2$; $W_3 = \frac{\ell}{2}\sqrt{2}$; $V = \sqrt{\ell^2 - (\frac{\ell}{2})^2}$; Queste relazioni consento di correlare gli elementi senza ricorrere alla trigonometria.

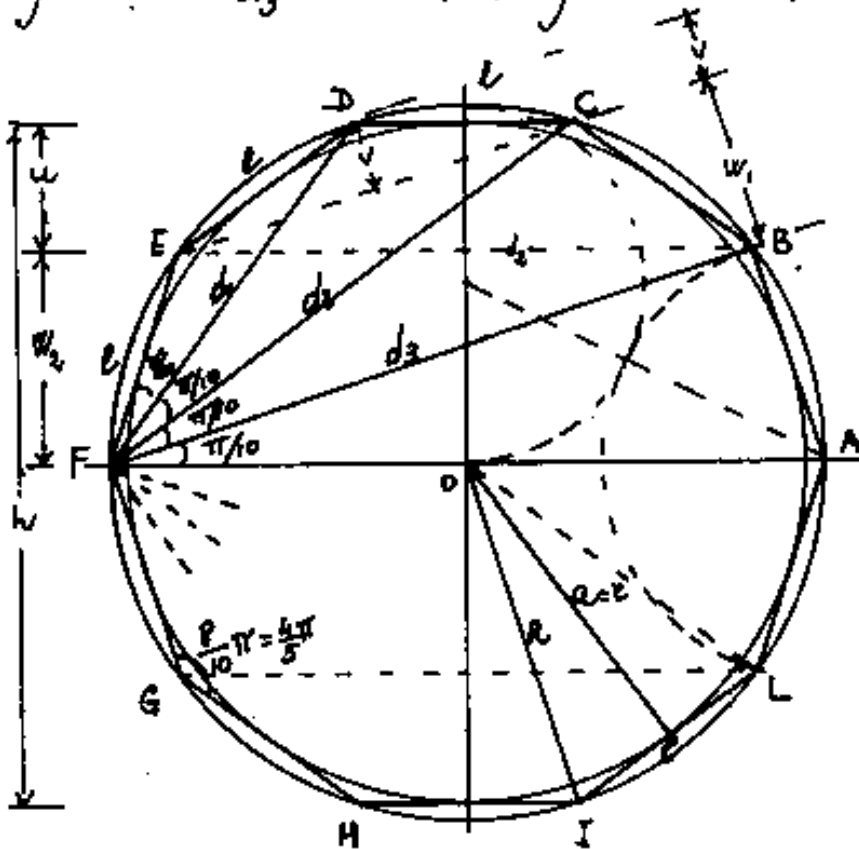
undecagono

Anche questo poligono non può essere costruito col solo ausilio della riga e del compasso; pertanto si costruisce il poligono dividendo il cerchio in 11 parti uguali mediante l'ausilio di un rapportatore, e verificando con la trigonometria ($sen(360°/11) = 0,540640817$; da cui: $d_1 = 2R\ sen(360°/11)$; $cos(360°/11) = 0,841253533$; da cui: $a = R\ cos(360°/11)$; ecc. Ricordiamo che gli antichi approssimavano π alla frazione $22/7 = 3,142857143...$ al posto di $3,141592653$...

Prendendo il diametro pari a 7 unità, quindi il raggio = 3,5 unità, l'arco di $\pi/11 = R\frac{\pi}{11} = \frac{3,5}{11}\pi \simeq 1 = (0,99597663...)$. Cioè archi di 11 corrsi sono tali che la larghezza media di ciascun con

di 11 conci sono tali che la larghezza media di ciascun con-
cio è ≃ $\frac{1}{7}$ del diametro medio d'imposta; od anche l'intra-
dosso dell'arco a tutto sesto è $\frac{11}{7}$ della luce netta l_0.
Cioè se i conci sono tutti uguali e sono 11 di altezza h, in
intradosso sono larghi: $\frac{1}{7} l_0$, mentre in estradosso sono larghi
$\frac{1}{7}(l_0+2h)$. Questa regola talvolta modificata costruendo
l'arco in 9 o 13 conci, verrà meglio trattata studiando l'arco.

Relazioni fra gli elementi del decagono

$i \backslash n$	l	R	$a = r$	h	d_1	d_2	d_3	v	W_1	u	W_2
$l =$	l	$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ 0,618033988	$a \cdot 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ 0,6498393925	$h \cdot \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$ 0,3249196962	$d_1 \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ 0,5257311121	$d_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ 0,3819660113	$d_3\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$ 0,3249196962	$v\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ 3,236067977	$W_1(\sqrt{5}-1)$ 1,236067978	$u \cdot \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}$ 1,701301617	$W_2\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$ 1,051462224
$R =$	$\frac{l}{2}(\sqrt{5}+1)$ 1,618033989	R	$a\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{5}}}$ 1,051462224	$h\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ 0,525731112	$d_1\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ 0,8506508084	$d_2\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ 0,6180339887	$d_3\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ 0,525731112	$v(3+\sqrt{5})$ 5,236067977	$W_1 \cdot 2$ 2,0000000	$u \cdot 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 2,752763841	$W_2 \cdot 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ 1,701301617
$a = r =$	$\frac{l}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ 1,538841769	$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 0,9510565163	$a = r$	$h/2$ 0,5000000	$d_1\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}$ 0,8090169944	$\frac{d_2}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 0,5877852523	$d_3/2$ 0,5000000	$v\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{2}}$ 4,97979657	$W_1\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 1,902113033	$\frac{u}{2}(3+\sqrt{5})$ 2,618033989	$\frac{W_2}{2}(\sqrt{5}+1)$ 1,618033989
$h =$	$l\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ 3,077683537	$R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 1,902113033	$a \cdot 2$ 2,000000	h	$d_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ 1,618033989	$d_2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 1,175570505	d_3 1,000000	$v\sqrt{50+22\sqrt{5}}$ 9,959593139	$W_1 \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}$ 3,804226065	$u \cdot (3+\sqrt{5})$ 5,236067977	$W_2(\sqrt{5}+1)$ 3,236067977
$d_1 =$	$l\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 1,902113033	$R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 1,175570505	$a(\sqrt{5}-1)$ 1,236067977	$h\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ 0,6180339887	d_1	$d_2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ 0,726542528	$d_3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ 0,6180339887	$v\,2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ 6,155367074	$W_1\sqrt{2(5-\sqrt{5})}$ 2,351141009	$u(\sqrt{5}+1)$ 3,236067977	$W_2 \cdot 2$ 2,000000
$d_2 =$	$l\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ 2,618033989	$R\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ 1,618033989	$a \cdot 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ 1,701301617	$h\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ 0,8506508084	$d_1\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 1,37638192	d_2 1,000000	$d_3\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ 0,8506508084	$v\,2\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ 8,472135955	$W_1(\sqrt{5}+1)$ 3,236067977	$u\sqrt{\frac{2(25+11\sqrt{5})}{5}}$ 4,454065458	$W_2 \cdot 2\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$ 2,752763841
$d_3 =$	$l\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ 3,077683537	$R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 1,902113032	$a \cdot 2$ 2,00000000	$h \cdot 1$ 1,0000000	$d_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ 1,618033989	$d_2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 1,175570505	d_3	$v\sqrt{50+22\sqrt{5}}$ 9,959593139	$W_1\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ 3,804226065	$u(3+\sqrt{5})$ 5,236067977	$W_2(\sqrt{5}+1)$ 3,236067977
$v =$	$l\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ 0,3090169944	$R\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$ 0,1909830056	$a\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}$ 0,2008114159	$\frac{h}{2}\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}$ 0,1004057079	$\frac{d_1}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ 0,162459848	$\frac{d_2}{2}\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ 0,1180339887	$\frac{d_3}{2}\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}$ 0,1004057079	v	$W_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ 0,3819660112	$u\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ 0,5257311121	$W_2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ 0,3249196963
$W_1 =$	$l\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$ 0,8090169944	$R \cdot \frac{1}{2}$ 0,5000000	$a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ 0,5257311121	$\frac{h}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ 0,2628655556	$\frac{d_1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ 0,4253254042	$d_2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ 0,3090169944	$\frac{d_3}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ 0,2628655556	$v\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ 2,618033989	W_1	$u\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 1,37638192	$W_2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ 0,8506508084
$u =$	$\frac{l}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 0,5877852523	$\frac{R}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ 0,3632712640	$a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ 0,3819660113	$h\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$ 0,1909830056	$d_1\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ 0,3090169944	$\frac{d_2}{2}\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{2}}$ 0,2245139883	$d_3\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$ 0,1909830056	$v\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 1,902113032	$W_1\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ 0,726542528	u	$W_2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ 0,6180339887
$W_2 =$	$\frac{l}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 0,9510565163	$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 0,5877852523	$a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ 0,6180339887	$h\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ 0,3090169944	$d_1\left(\frac{1}{2}\right)$ 0,5000000	$\frac{d_2}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ 0,3632712664	$d_3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ 0,3090169944	$v\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ 3,077683537	$\frac{W_1}{2}\sqrt{2(5-\sqrt{5})}$ 1,175570505	$u\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ 1,618033989	W_2

Il Decagono

Abbiamo già trattato del decagono nel capitolo della sezione aurea, ed abbiamo già calcolato molti elementi trattando il pentagono. (Le diagonali "d_1" consecutive del decagono, sono i lati del pentagono inscritto nella stessa circonferenza, la diagonale "d_3" del decagono è la "d" del pentagono, ecc)

Abbiamo visto che il lato del decagono è la parte aurea del raggio, perciò:

$$\boxed{l = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)}$$

$$a = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{a = \frac{R}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}$$

$h = 2a$; $\boxed{h = \frac{R}{2}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}$; $\frac{l}{a} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}$

$$\ldots 2\sqrt{2(5+\sqrt{5})} \quad ; \quad a \ldots \sqrt{2(5+\sqrt{5})}$$

$$\boxed{\frac{\ell}{a} = \frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}} = 0{,}649839353 \quad ; \quad \boxed{a = \ell \cdot 1{,}538841769}$$

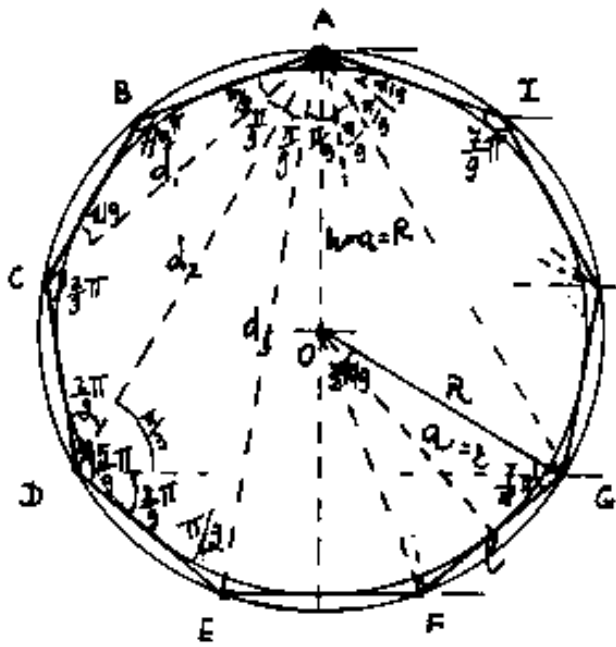
$$\boxed{h = d_3 = 2a} \; ; \; \boxed{d_4 = 2R} \; ; \; \boxed{R = 2W_1} \; ; \; \boxed{d_1 = 2W_2}$$

Relazioni fra gli elementi dell'ennagono

i \ n	ℓ	R	$a = r$	h	d_1	d_2	d_3	u	W_1	W_2	V
$\ell =$	ℓ	$2\,sen(\pi/9)$ 0.684040287	$2\,tg(\pi/9)$ 0.727940468	$2\,tg(\pi/18)$ 0.352653961	$1/2\cos(\pi/9)$ 0.532088886	$2sen(\pi/9)/\sqrt{3}$ 0.394930844	$2\,sen(\pi/18)$ 0.347296355	$1/sen(2\pi/9)$ 1.555723827	$1/\cos(\pi/18)$ 1.015426612	$2/\sqrt{3}$ 1.154700538	$1/sen(\pi/9)$ 2.923804400
$R =$	$1/2\,sen(\pi/9)$ 1.461902200	R	$1/\cos(\pi/9)$ 1.064177773	$1/2\cos^2(\pi/18)$ 0.515545602	$1/2\,sen(2\pi/9)$ 0.777861914	$1/\sqrt{3}$ 0.577350269	$1/2\cos(\pi/18)$ 0.507713206	$1/2sen(\pi/9)sen(2\pi/9)$ 2.274316085	$1/2sen(\pi/9)\cos(\pi/18)$ 1.484451498	$1/\sqrt{3}\,sen(\pi/9)$ 1.688059237	$1/2sen^2(\pi/9)$ 4.274316083
$a = r =$	$1/2\,tg(\pi/9)$ 1.373738710	$\cos(\pi/9)$ 0.939692621	a	$\cos(\pi/9)/2\cos^2(\pi/18)$ 0.484454398	$1/4\,sen(\pi/9)$ 0.730951100	$\cos(\pi/9)/\sqrt{3}$ 0.542531787	$\cos(\pi/9)/2\cos(\pi/18)$ 0.477094447	$1/4\,sen^2(\pi/9)$ 2.137158042	$1/2\,tg(\pi/9)\cos(\pi/18)$ 1.394930844	$1/\sqrt{3}\,tg(\pi/9)$ 1.586256828	$\cos(\pi/9)/2sen^2(\pi/9)$ 4.016543287
$h =$	$1/2\,tg(\pi/18)$ 2.835640912	$2\cos^2(\pi/18)$ 1.939692621	$2\cos^2(\pi/18)/\cos(\pi/9)$ 2.064177772	h	$1/4sen(\pi/9)tg(\pi/18)$ 1.508813015	$2\cos^2(\pi/18)/\sqrt{3}$ 1.119882056	$\cos(\pi/18)$ 0.984807753	$1/2sen(2\pi/9)tg(\pi/18)$ 4.411474130	$1/2\,sen(\pi/18)$ 2.879385244	$1/\sqrt{3}\,tg(\pi/18)$ 3.274316085	$1/4\,sen^2(\pi/18)$ 8.290859385
$d_1 =$	$2\cos(\pi/9)$ 1.879385241	$2\,sen(2\pi/9)$ 1.285575219	$4\,sen(\pi/9)$ 1.368080574	$4\cos(\pi/9)tg(\pi/18)$ 0.662772650	d_1	$2\,sen(4\pi/9)/\sqrt{3}$ 0.742227199	$sen(2\pi/9)/\cos(\pi/18)$ 0.652703645	$1/sen(\pi/9)$ 2.923804400	$2\cos(\pi/9)/\cos(\pi/18)$ 1.908377778	$4\cos(\pi/9)/\sqrt{3}$ 2.170127150	$2/tg(\pi/9)$ 5.494954840
$d_2 =$	$\sqrt{3}/2\,sen(\pi/9)$ 2.532088886	$\sqrt{3}$ 1.732050808	$\sqrt{3}/\cos(\pi/9)$ 1.843209971	$\sqrt{3}/2\cos^2(\pi/18)$ 0.893951176	$\sqrt{3}/2\,sen(2\pi/9)$ 1.347296355	d_2	$\sqrt{3}/2\cos(\pi/18)$ 0.879385242	$\sqrt{3}/2sen(\pi/9)sen(2\pi/9)$ 3.939231013	$\sqrt{3}/2sen(\pi/9)\cos(\pi/18)$ 2.571150439	$1/sen(\pi/9)$ 2.923804400	$\sqrt{3}/2\,sen^2(\pi/9)$ 7.403332624
$d_3 =$	$1/2\,sen(\pi/18)$ 2.879385244	$2\cos(\pi/18)$ 1.969615506	$2\cos(\pi/18)/\cos(\pi/9)$ 2.096021042	$1/\cos(\pi/18)$ 0.984807753	$\cos(\pi/18)/sen(2\pi/9)$ 1.532088886	$2\cos(\pi/18)/\sqrt{3}$ 1.137158042	d_3	$1/2sen(4\pi/9)sen(\pi/18)$ 4.479528833	$1/sen(\pi/9)$ 2.923804400	$1/\sqrt{3}\,sen(\pi/18)$ 3.324827683	$1/2sen(\pi/9)sen(\pi/18)$ 8.418359248
$u =$	$sen(2\pi/9)$ 0.642787610	$2sen(\pi/9)\cos(4\pi/9)$ 0.439692621	$4\,sen^2(\pi/9)$ 0.467911114	$2sen(2\pi/9)tg(\pi/18)$ 0.226681591	$sen(\pi/9)$ 0.342020143	$2sen(\pi/9)sen(2\pi/9)/\sqrt{3}$ 0.253856653	$2sen(4\pi/9)sen(\pi/18)$ 0.223237794	u	$4\cos(4\pi/9)sen(\pi/9)$ 0.653703644	$2sen(2\pi/9)/\sqrt{3}$ 0.742227199	$2\,sen(\pi/9)$ 1.879385241
$W_1 =$	$\cos(\pi/18)$ 0.984807753	$2sen(\pi/9)\cos(\pi/18)$ 0.673648178	$2\,tg(\pi/9)\cos(\pi/18)$ 0.716881417	$2\,sen(\pi/18)$ 0.347296355	$\cos(\pi/18)/2sen(2\pi/9)$ 0.524005261	$2sen(\pi/9)\cos(\pi/18)/\sqrt{3}$ 0.388930957	$sen(\pi/9)$ 0.342020143	$1/4sen(\pi/18)\cos(\pi/9)$ 1.532088886	W_1	$2\cos(\pi/18)/\sqrt{3}$ 1.137158042	$1/2\,sen(\pi/18)$ 2.879385244
$W_2 =$	$\sqrt{3}/2$ 0.866025404	$\sqrt{3}\,sen(\pi/9)$ 0.592396265	$\sqrt{3}\,tg(\pi/9)$ 0.630414938	$\sqrt{3}\cdot tg(\pi/18)$ 0.305407289	$\sqrt{3}/4\cos(\pi/9)$ 0.460802493	$sen(\pi/9)$ 0.342020143	$\sqrt{3}\,sen(\pi/18)$ 0.300767466	$\sqrt{3}/2\,sen(2\pi/9)$ 1.347296356	$\sqrt{3}/2\cos(\pi/18)$ 0.879385242	W_2	$\sqrt{3}/2\,sen(\pi/9)$ 2.532088886
$V =$	$sen(\pi/9)$ 0.342020143	$2\,sen^2(\pi/9)$ 0.233955557	$2tg(\pi/9)sen(\pi/9)$ 0.248970303	$4\,sen^2(\pi/18)$ 0.120614758	$tg(\pi/9)/2$ 0.181985117	$2\,sen^2(\pi/9)/\sqrt{3}$ 0.135074304	$2sen(\pi/9)sen(\pi/18)$ 0.118782349	$1/2\cos(\pi/9)$ 0.532088886	$2\,sen(\pi/18)$ 0.347296355	$2\,sen(\pi/9)/\sqrt{3}$ 0.394930844	V

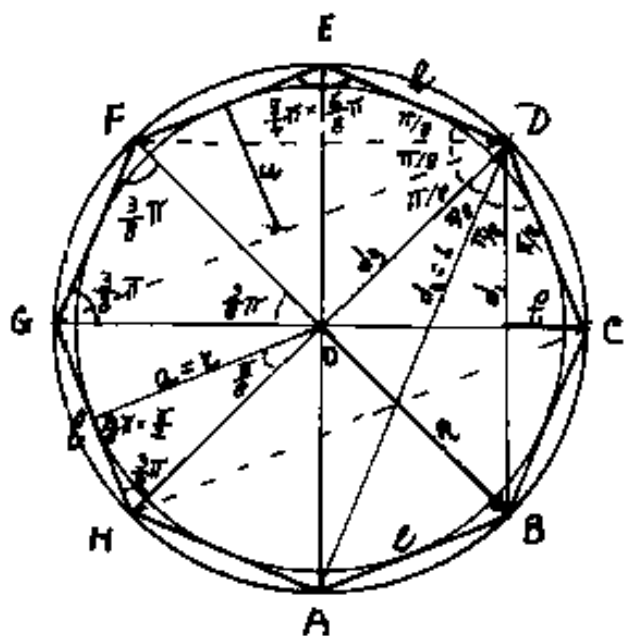
$$\left(\sqrt{3} = tg(\pi/3) = tg\left(\tfrac{3}{9}\pi\right) = 2\,sen\left(\tfrac{3\pi}{9}\right) = 2\,sen\left(\tfrac{4\pi}{9}\right)\right) \; ; \; \left(1 + \cos\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\right) = 2\cos^2(\pi/18)$$

Ennagono

Il problema dell'ennagono si riallaccia diret-tamente al problema della "trisezione dell'angolo" problema famoso fin dall'antichità e a tutt'oggi non risolto. Sappiamo dividere in tre parti l'angolo giro, l'angolo piatto e l'angolo retto, non sappiamo dividere in tre parti $120° = \frac{\pi}{3}$ infatti: $\frac{360°}{9} = \frac{120°}{3} = 40° = 2\pi/9$ rad; cioè non sappiamo costruire graficamente l'angolo $\alpha/3$ quando è noto α, usando solo la riga ed il compasso. Per la trisezione di un angolo generico possiamo avvalerci dei goniometri, della trigonometria, di curve speciali dette trisettrici. Nel caso dell'ennagono cercheremo, per quanto possibile, trovare delle correlazioni fra gli elementi, ma fondamentalmente useremo la trigonometria. (Il disegno è stato eseguito usando un goniometro-rapportatore) Si noti che tre diagonali d_2 consecutive formano un triangolo

tive formano un triangolo equilatero (come ADG) e pertanto tutti gli angoli alla circonferenza di corda d_2 saranno $\pi/3 = 60° = \frac{3}{9}\pi$ da banda opposta $\frac{2}{3}\pi = 120° = \frac{6}{9}\pi$.

Quindi avremo: $d_2 = R\sqrt{3}$.

Ottagono

Anche l'ottagono è un poligono di notevole interesse scientifico; di facile costruzione grafica (bisecando gli angoli retti al centro di un cerchio) e di facile calcolo. (Il prisma di Wollaston è $\frac{1}{4}$ di ottagono).

ℓ = lato ; a = apotema = r = raggio del cerchio inscritto ; h = altezza = d_2 = seconda diagonale ; d_1 = prima diagonale o diagonale minore ; d_3 = diagonale maggiore = diametro del cerchio circoscritto ; R = raggio del cerchio circoscritto ; f_1 = freccia = distanza di un vertice da d_1 ; u = distanza di un lato da d_2.

Poiché : $h = 2a = d_2$; $d_3 = 2R$; possiamo ridurre le :

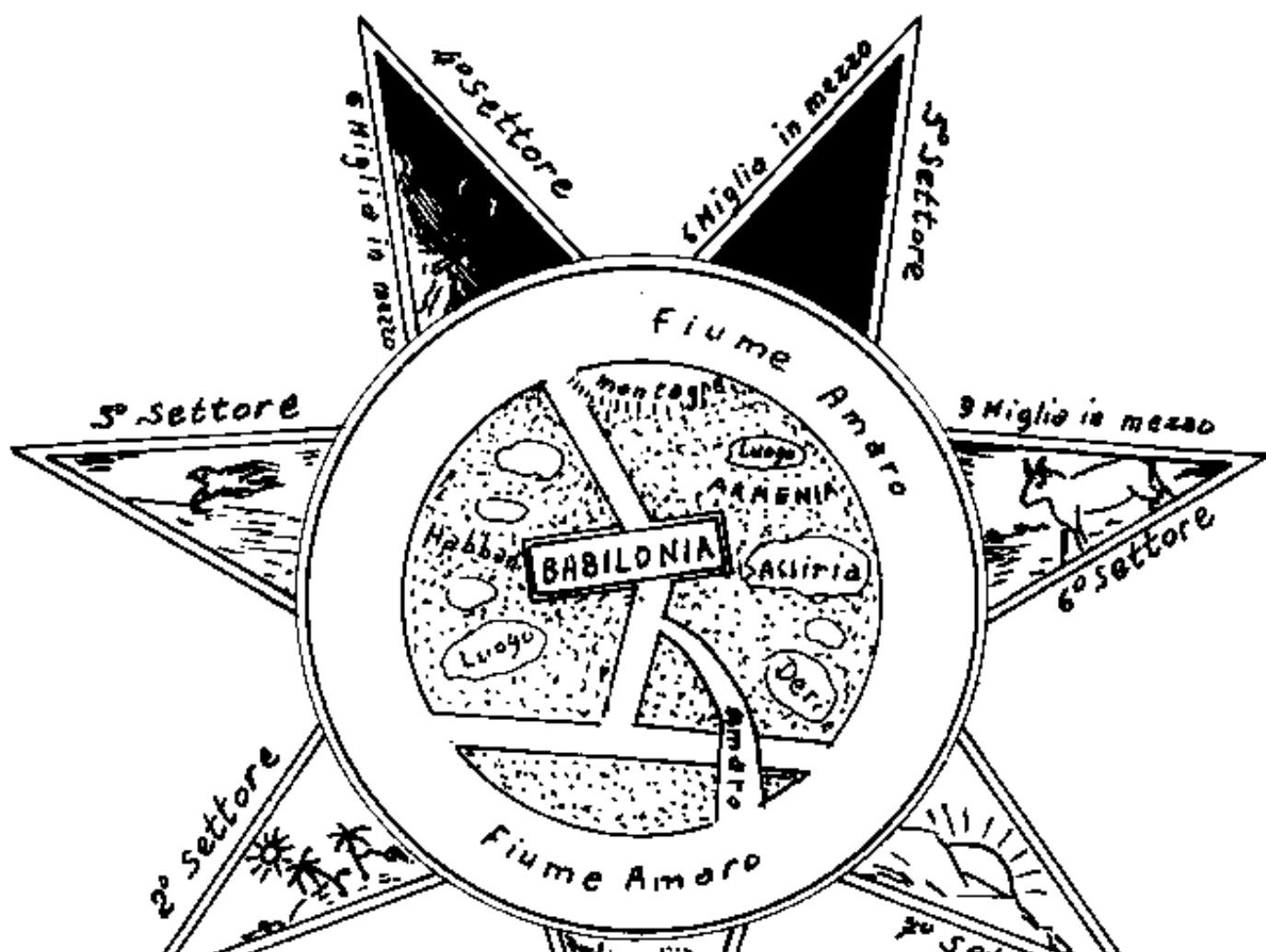
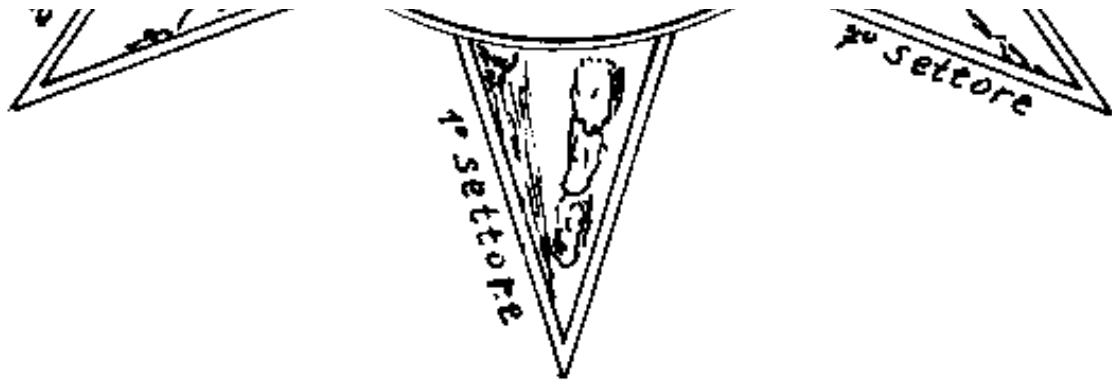
Relazioni fra gli elementi dell'ottagono

noti / incogniti	ℓ	$R = d_3/2$	$a = r = \frac{h}{2} = \frac{d_2}{2}$	d_1	u	f_1

incogniti	l	$R = d_1/2$	$a = r = \frac{h}{2} = \frac{d_2}{2}$	d_1	u	f_1
l	l	$= R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 0,765366865·R	$= a(2(\sqrt{2}-1))$ 0.828427124·a	$= d_1\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$ 0,541196100·d_1	$= u(\sqrt{2})$ 1,4142135·u	$= f_1\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$ 2,613125929·f_1
$R = d_1/2$	$= l\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ 1.306562965·l	R	$= a\sqrt{2(2-\sqrt{2})}$ 1.0823922·a	$= d_1(1/\sqrt{2})$ 0,70710678·d	$= u\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 1.847759065	$= f_1(2+\sqrt{2})$ 3,414213545
$a = r = \frac{h}{2} = \frac{d_2}{2}$	$= l\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ 1.20710678·l	$= R\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 0,92387953·R	a	$= d_1\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{8}}$ 0,653281482·d	$= u(1+1/\sqrt{2})$ 1.70710678·u	$= f_1\sqrt{\frac{10+7\sqrt{2}}{2}}$ 3,154321989·f_1
d_1	$= l\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 1,847759065·l	$= R(\sqrt{2})$ 1.4142135·R	$= a(2\sqrt{2-\sqrt{2}})$ 1.53073373·a	d_1	$= u\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$ 2,61312592·u	$= f_1(2)(\sqrt{2}+1)$ 4,828427124·f_1
u	$= l(1/\sqrt{2})$ 0,70710678·l	$= R\sqrt{1-1/\sqrt{2}}$ 0.5411961·R	$= a(2-\sqrt{2})$ 0,585786438·a	$d_1(\frac{1}{2}$ 0,3826834·d_1	u	$= f_1\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 1,847759065 f_1
f_1	$= l\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$ 0,382683433·l	$= R(1-1/\sqrt{2})$ 0,2928932·R	$= a\sqrt{10-7\sqrt{2}}$ 0,31702534·a	$= d_1\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ 0,20710678·d_1	$= u\sqrt{1-1/\sqrt{2}}$ 0,5411961·u	f_1

E' interessante ricordare che nella prima metà, o primi anni del I° Millennio a.C. gli astronomi Babilonesi avevano rappresentato il cosmo con una stella ettagonale su una tavoletta di argilla, oggi conservata nel British Museum di Londra. Di tale tavoletta ne è stata fatta la ricostruzione, di cui noi schematizziamo un bozzetto a vista:

2° settore

1° settore

Le punte sembrano rappresentare la giornata, dalle prime luci dell'alba, al sorgere del sole, al mattino, il meriggio, la sera, l'inizio della notte, e la notte fonda.

- Se vogliamo calcolare quanto tempo impiega Achille a raggiungere la tartaruga avremo nei due casi:

I) Achille deve percorrere lo spazio $(S+a)$, la tartaruga solo lo spazio S:

$$V_A \cdot t = S + a \quad ; \quad V_T t = S \quad \text{da cui:}$$

$$V_A t = V_T t + a \qquad \boxed{t = \frac{a}{V_A - V_T}} \; ; \; \boxed{t = \frac{V_T t_0}{V_A - V_T}}$$

(Il tempo t è computato iniziando dalla partenza di Achille.)

Se invece vogliamo lo spazio S oltre il vantaggio a che la tartaruga riesce a percorrere senza essere raggiunta:

$$t = \frac{S}{V_T} \; ; \quad \frac{V_A \cdot S}{V_T} = (S + a) \; ; \; V_A S = V_T S + a V_T$$

$$\boxed{S = \frac{a V_T}{(V_A - V_T)}} \; ; \; \boxed{S = \frac{V_T^2 t_0}{(V_A - V_T)}}$$

<u>Vediamo ora di tradurre in simboli matematici il discorso della tartaruga:</u>

Il tempo che Achille impiega per percorrere il tratto "a"

Il tempo che Achille impiega per percorrere il tratto "a"
sia: $t_1 = \frac{a}{V_A} = \frac{V_T t_0}{V_A}$. Durante t_1 la tartaruga
percorre il tratto: $s_1 = t_1 V_T = \frac{a V_T}{V_A} = \frac{V_T^2 t_0}{V_A}$. Per percorrere
s_1 Achille impiega il tempo $t_2 = \frac{s_1}{V_A} = \frac{t_1 V_T}{V_A} = \frac{a V_T}{V_A^2} = \frac{V_T^2 t_0}{(V_A^2)}$
ma in questo tempo t_2 la tartaruga avrà percorso il
tratto: $s_2 = t_2 \cdot V_T = \frac{s_1 V_T}{V_A} = \frac{V_T^2 t_1}{V_A} = \frac{a V_T^2}{V_A^2} = \frac{V_T^3 t_0}{V_A^2}$ ed
Achille per coprire s_2 impiegherà $t_3 = \frac{s_2}{V_A} = \frac{a V_T^2}{V_A^3} = \frac{V_T^3 t_0}{V_A^3}$.

Quindi dobbiamo sommare gli infiniti termini:

$$t^* = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots t_n$$

(attenzione: Achille è partito dopo il tempo "t_0", quindi t^* è il tempo di partenza della tartaruga allineata con Achille, trascorso il tempo t_0 la tartaruga ha in vantaggio il tratto "a" e parte Achille).

Sostituendo ed evidenziando t_0 si ha:

$$t^* = t_0\left(1 + \frac{V_T}{V_A} + \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^2 + \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^3 + \ldots\ldots + \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^n\right)$$

progressione geometrica di ragione $q = \left(\frac{V_T}{V_A}\right)$; (pag 123)

di cui sappiamo fare la somma: $S_\infty = a_1\left(\frac{1}{1-q}\right)$

$$t^* = t_0\left(\frac{1}{1 - \frac{V_T}{V_A}}\right) = \frac{t_0 V_A}{V_A - V_T} \quad \text{(tempo della tartaruga)}$$

$$t = t_0\left(\frac{V_T}{V_A}\,\frac{1}{1-\left(\frac{V_T}{V_A}\right)}\right) = \frac{t_0 V_T}{V_A - V_T} = \boxed{t = \left(\frac{a}{V_A - V_T}\right)} \quad \text{(tempo di Achille.)}$$

Il risultato concorda con l'algebra elementare.

Evidente che la tartaruga non sapeva che sommando infiniti termini può venire un valore finito.

Cioè la progressione geometrica per $q < 1$ ha

cioè la progressione geometrica per $q < 1$: ha per somma di "n" termini, con "n" tendente all'infinito, un valore finito. Ovvero la serie che esprime t^*, o $t = t^* - t_0$, è convergente.

Torniamo ai limiti.

Operazioni di passaggio al limite

Ritenuto ovvio che, la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente dei limiti (allo stesso limite) equivale al limite della somma, della differenza, del prodotto, del quoziente delle espressioni che hanno generato i singoli limiti. Cioé se: $\lim_{x \to k} (f(x)) = m$; e $\lim_{x \to k} (\varphi(x)) = n$ si ha: $\lim_{x \to k} \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) = m \pm n$; $\lim_{x \to k} \left(f(x) / \varphi(x) \right) = m/n$ $\lim_{x \to k} \left(\varphi(x) f(x) \right) = n \cdot m$. Osserviamo anche che: $\varphi(\lim f(x)) =$ $= \lim (\varphi(f(x)))$ (funzione di funzione).

Consideriamo la frazione: $1/n$, il suo valore diventa tanto piú piccolo quanto maggiore è "n". Pensiamo quindi di far crescere "n" a numeri grandissimi, anzi per avere una visione migliore poniamo $n = 10^m$ avremo: $\frac{1}{n} = \frac{1}{10^m}$ e facciamo crescere "m" a numeri grandissimi; il valore della frazione tradotto in numero decimale sará una unitá posta all'm-esima cifra decimale; per $m=1$: $\frac{1}{10} = 0,1$; per $m=5$

mesima cifra decimale: per $m=1$; $\frac{1}{10^m}=0,1$; per $m=6$ $\frac{1}{10^m}=\frac{1}{10^6}=0,000001$ (un milionesimo); se pensiamo $m=$ = un miliardo, la miliardesima cifra decimale è fuori della approssimazione dei nostri calcoli numerici, perciò:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

si usa scrivere: $\boxed{\frac{1}{\infty}=0}$ $\boxed{\frac{1}{0}=\infty}$

Se moltiplichiamo queste uguaglianze per un numero finito N si ha:

$$\boxed{\frac{N}{\infty} = 0} \quad ; \quad \boxed{\frac{N}{0} = \infty}$$

<u>Sono i limiti fondamentali base dei limiti notevoli</u>

Da queste uguaglianze si deduce:

$$\boxed{0 \cdot \infty = N}$$

Cioè qualsiasi grandezza finita N può considerarsi il prodotto fra zero ed infinito.

"Ogni cosa (compreso l'uomo) è il nulla permeato di infinito" (è come una creazione).

Matematicamente le forme:

$$\boxed{\frac{0}{0}} \; ; \; \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \; ; \; \boxed{0 \cdot \infty} \; ; \; \boxed{\infty - \infty} \; ;$$

sono dette: <u>"FORME INDETERMINATE"</u> in quanto possono dar luogo a numeri finiti in dipendenza delle funzioni di cui si cerca il limite. Oltre i metodi che esponiamo negli esempi

limite. Oltre i metodi che esponiamo negli esempi che seguono, per le forme indeterminate vale il teorema di l'Hospital e certi artifizi che tratteremo più avanti.

Alcuni autori considerano "forme indeterminate le espressioni: $\boxed{0^0}$; $\boxed{1^\infty}$; $\boxed{\infty^0}$ che possono presentarsi per una troppo semplicistica sostituzione dei valori limite.

per esempio: $\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828\ldots$

sostituendo senza riflettere avremo $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty = 1^\infty$; ma in effetti non è 1^∞, ma $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty$ e pur sapendo che si pone: $\frac{1}{\infty}=0$, non possiamo riguardare $\frac{1}{\infty}$ come il nulla, ma come "qualcosa" di non confrontabile con le grandezze finite, ma che, infinite volte ripetuto, può dare "qualcosa" di finito (è come un differenziale).

Facciamo alcuni esempi di passaggi al limite.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 - x + 5}{x^3 - 6} \right) =$$ sostituendo alla $x = \infty$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \text{forma indeterminata.}$$

Se, prima di sostituire, dividiamo ambo i termini della frazione per la x al massimo esponente (nel nostro caso per x^3) abbiamo:

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 - \frac{6}{x^3}} \right)$$ e sostituendo ora $x = \infty$

e rilevando che $\frac{N}{\infty} = 0$ (meglio: trascurabile rispetto ad 1)

avremo:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 - x + 5}{x^3 - 6} \right) = 2$$

Questo procedimento è utilizzabile quando si ha una frazione costituita dal rapporto di due polinomi dello stesso grado con limite tendente ad infinito. Se il grado del numeratore ≷ del denominatore il limite tende ad ∞, oppure a zero.

Se l'espressione precedente la x tende a zero:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{2x^3 - x + 5}{x^3 - 6}\right) = -\frac{5}{6}$$

(ottenuta ponendo: $x = 0$)

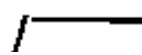
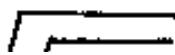
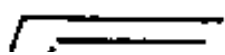
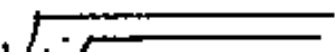
Cerchiamo ora di memorizzare i seguenti limiti:

Sia $a > 1$ e quindi: $\frac{1}{a} < 1$

$$\lim_{n \to \infty}(a^n) = \infty \quad \cdot \quad \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = 1 \qquad \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

Poiché: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, gli ultimi due limiti esprimono il fatto che, essendo radici con indice n tendente all'∞, per numeri $a > 1$ il valore, via via diminuisce al crescere di n; invece per $\frac{1}{a} < 1$ il valore via, via, cresce al crescere di n e tendono entrambi ad uno. (Per esempio)

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1{,}20}}}} \simeq \sqrt{\sqrt{\sqrt{1{,}10}}} \simeq \sqrt{\sqrt{1{,}05}} \simeq \sqrt{1{,}02} \simeq 1{,}01 \to 1$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{0,80}}}} \simeq \sqrt{\sqrt{\sqrt{0,89}}} \simeq \sqrt{\sqrt{0,95}} \simeq \sqrt{0,97} = 0,99 \rightarrow 1$$

Come si vede già con n=16 si può apprezzare il convergere ad 1 delle radici con indice tendente all'infinito.

Limiti notevoli (trigonometrici)

sen(x) cos x 0 1 tang(x) vers(x)

Notiamo che:

$$\operatorname{sen}(x) < x < \operatorname{tang}(x)$$

ed anche:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tang}(x)}$$

moltiplicando per sen(x), si ha

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} > \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} > \frac{\operatorname{sen} x \cos(x)}{\operatorname{sen} x}$$

$$1 > \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} > \cos(x)$$

passando al limite per $x \to 0$, si ha:

$$1 > \frac{0}{0} > \cos(0)$$

cioè:

$$1 > \lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen}(x)}{x}\right) > 1$$

in quanto non maggiore e non minore di 1 si ha

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\frac{1}{\cos(x)}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) \cdot \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) =$$

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{tg(x)}{x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{1}{cos(x)}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right) \cdot \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{cos(x)}\right) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{cos(0)} = 1 \qquad \boxed{\lim_{x \to 0}\left(\frac{tg(x)}{x}\right) = 1}$$

Quando il limite di una frazione, tende ad un numero o all'unità, la velocità di avvicinamento al limite per i due termini della frazione è dello stesso ordine. (vedasi figura) $(x \to 0)$.

vediamo ora:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{(x)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{(x)} \cdot \frac{(1 + \cos(x))}{(1 + \cos(x))} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x\,(1 + \cos(x))} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right) \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \cos(x)} \right) =$$

$$= 1 \cdot \frac{0}{2} \; ; \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x} \right) = 0}$$

che può scriversi: $\boxed{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{vers}(x)}{x} \right) = 0}$

Se il limite di una frazione tende a zero vuol dire che la velocità di avvicinamento al limite dell'espressione al numeratore è maggiore di quella del denominatore (tendendo a zero la variabile). I libri di matematica usano dire che il numeratore è infinitesimo di ordine superiore al denominatore. (vedasi la figura, mentalmente imma=

ginandosi che il raggio ruoti diminuendo x $(x \to 0)$.

Abbiamo evidenziato passaggi algebrici elementari, per far vedere come nel passaggio al limite di una espressione si cerchi di ridurla a limiti già noti.

Sappiamo che <u>le funzioni trigonometriche non esistono per $x \to \infty$</u> infatti all'infinito x è contemporaneamente infinite volte $(\frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi)$ e quindi non è deter=

minabile la funzione trigonometrica. Al più si dirà che il sen(x), (o cos(x)) si manterrà nel campo:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq +1$$

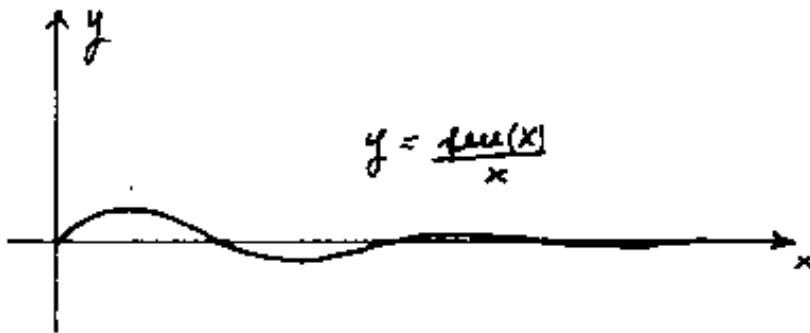
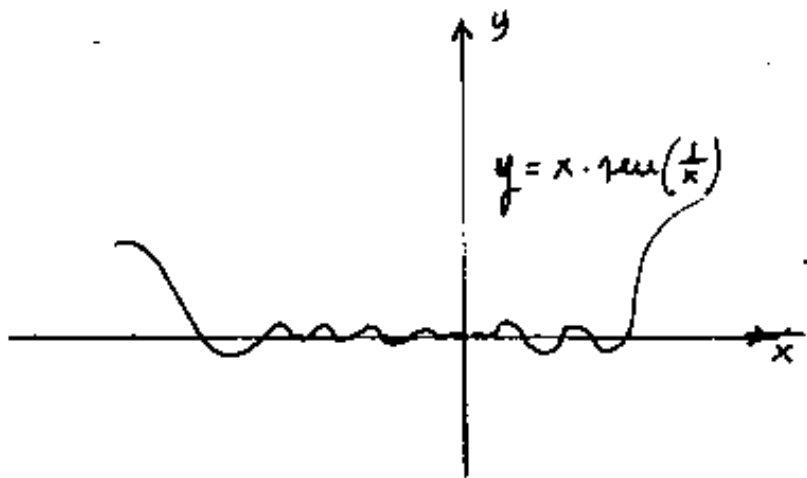
Esistono invece i limiti:

$y = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 0$$

(essendo: $N/\infty = 0$)

$y = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$$

mentre: $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq +1$ il moltiplicatore x tendendo a zero moltiplica per zero $(N \cdot 0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)} \right) = \frac{a}{b}$$

si dimostra con l'Hospital (vedi in seguito)

$$\lim_{x \to 0} \left(x \cdot tg\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \text{indeterminato}$$

Limiti notevoli (derivati da "e")

Abbiamo già parlato del numero "e" al capitolo dei logaritmi, abbiamo già visto come l'espressione: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ al crescere di "n" si avvicina sempre più ad un valore numerico finito, che per $n \to \infty$, è chiamato "e", ma "e" è un numero trascendente ad infinite cifre decimali e quindi non rappresentabile esattamente. Quando "n" = 1000 sono giuste solo le prime due cifre decimali, con "n" = 1 000 000 sono giuste le prime otto cifre decimali. Il calcolo più veloce delle cifre di "e" può farsi: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots . \frac{1}{n!}$ con $n \to \infty$.

$e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699995 \ldots\ldots$

Accettiamo la validità del limite: $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ne daremo, a suo tempo, la dimostrazione.

1) $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

2) $$\lim \left(1 + \frac{x}{\ldots}\right)^n = e^x$$

2) $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Da questi due limiti può dedursi: (ponendo $n = \frac{1}{\varepsilon}$)

3) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 + \varepsilon\right)^{1/\varepsilon} = e$$

(prendendo i logaritmi naturali)

4) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = 1$$ (importante!)

ed anche:

5) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln(1+\varepsilon) \right) = 0$$

Se poniamo: $\varepsilon = (a^\theta - 1)$; ove $a > 0$ ma $a \neq 1$

poiché: $$\lim_{\varepsilon \to 0} (\theta) = 0$$ cioè: $(\theta \to 0)$ per $(\varepsilon \to 0)$

sostituendo nella 4) abbiamo:

$$\frac{\ln(\varepsilon+1)}{\varepsilon} = \frac{\ln(a^\theta)}{a^\theta - 1} = \frac{\theta \ln(a)}{a^\theta - 1}$$

per cui

6) $$\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\theta \ln(a)}{a^\theta - 1} \right) = 1$$

ma $\ln(a)$ è costante al variare di θ e si può mettere in evidenza:

7) $$\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\theta}{a^\theta - 1} \right) = \frac{1}{\ln(a)}$$

ed anche:

8) $$\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{a^\theta - 1}{\theta} \right) = \ln(a)$$ (importante)

se poniamo $(1+\varepsilon) = (1+\alpha)^\mu$ (con μ = reale)

se poniamo $(1+\varepsilon) = (1+a)^{\mu}$ (con μ = reale)

dovrà essere: $\lim_{\varepsilon \to 0} (a) = 0$ cioè: $(a \to 0)$ per $(\varepsilon \to 0)$

sostituendo nella 4) abbiamo:

$$\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\ln(1+a)^{\mu}}{(1+a)^{\mu} - 1} = \frac{\mu \ln(1+a)}{(1+a)^{\mu} - 1}$$

cioè:

$$\lim_{a \to 0} \left(\frac{\mu \ln(1+a)}{(1+a)^{\mu} - 1} \right) = 1$$

$$\lim_{a \to 0} \left(\frac{\ln(1+a)}{(1+a)^{\mu} - 1} \right) = \frac{1}{\mu}$$

$$9) \quad \boxed{\lim_{a \to 0} \left(\frac{(1+a)^{\mu} - 1}{\ln(1+a)} \right) = \mu}$$

$$\frac{(1+a)^{\mu} - 1}{\ln(1+a)} \frac{\cdot a}{\cdot a} = \left(\frac{(1+a)^{\mu} - 1}{a} \right) \cdot \left(\frac{a}{\ln(1+a)} \right)$$

avremo che:

$$\lim_{a \to 0} \left(\frac{(1+a)^{\mu} - 1}{\ln(1+a)} \right) = \lim_{a \to 0} \left(\frac{(1+a)^{\mu} - 1}{a} \right) \lim_{a \to 0} \left(\frac{a}{\ln(1+a)} \right) = \mu$$

ma per il limite 4) $\lim_{a \to 0} \left(\frac{a}{\ln(1+a)} \right) = 1$

avremo:

$$10) \quad \boxed{\lim_{a \to 0} \left(\frac{(1+a)^{\mu} - 1}{a} \right) = \mu}$$

10) $\lim_{a \to 0} \left(\frac{[illegible]}{a} \right) = [illegible]$

Quest'ultimo limite serve per dimostrare la convergenza delle serie col criterio di Kummer (vedi II vol)

Facciamo una tavola riepilogativa sostituendo le variabili $n, \varepsilon, \theta, a$ con la variabile x.

Tabella dei limiti notevoli

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$; $\frac{1}{\infty} = 0$; $\frac{N}{\infty} = 0$; $0 \cdot \infty = N$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right) = \infty$; $\frac{1}{0} = \infty$; $\frac{N}{0} = \infty$;

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right) = 1$; $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\text{sen}(x)}\right) = 1$; $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right) = 0$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{tg}(x)}{x}\right) = 1$; $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\text{tg}(x)}\right) = 1$; $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\cos(x)}{x}\right) = 0$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x}\right) = 0$; $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{1 - \cos(x)}\right) = \infty$; $\lim_{x \to 0} \left(x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}(ax)}{\text{sen}(bx)}\right) = \frac{a}{b}$; $\lim_{x \to 0} \left(x \cdot \text{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \text{indeter.}$

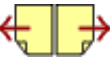
$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$; $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln|1+x|}{x}\right) = 1$; $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\ln|1+x|}\right) = 1$; $\lim_{x \to 0} \left(\ln|1+x|\right) = 0$

$\lim_{x \to 0} \left(x \ln(x)\right) = 0$; $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x \cdot \ln|a|}{a^x - 1}\right) = 1$; $\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x - 1}{x \ln|a|}\right) = 1$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)=\ln|a| \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{a^x-1}\right)=\log_a(e) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^a-1}{\ln|1+x|}\right)=a$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln|1+x|}{(1+x)^a-1}\right)=\frac{1}{a} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^a-1}{x}\right)=a \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{(1+x)^a-1}\right)=\frac{1}{a}$$

Si veda anche nel seguito il teorema di l'Hospital sulle forme indeterminate.

Ordine degli infiniti e degli infinitesimi.

Nell'introduzione al capitolo "Calcolo infinitesimale" abbiamo trattato questo argomento. I sostenitori dell'ordine degli infiniti e degli infinitesimi dicono:
"Dato il rapporto di due funzioni in x, se il limite di tale rapporto, per x tendente a zero, è zero; la funzione al numeratore è infinitesimo di ordine superiore al denominatore. Viceversa se il limite è ∞. Invece le funzioni al numeratore ed al denominatore sono dello stesso ordine se il limite è un numero finito" (Esempio)

Abbiamo già visto che per $x \to 0$, x, $sen(x)$, $tg(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine: $\lim_{(x\to 0)}\left(\frac{sen(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{tg(x)}{x}\right) = 1$ mentre: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{vers(x)}{x}\right) = 0$; cioè $(1-\cos x) = vers(x)$ sono infinitesimi di ordine superiore ad x. Ricordando che: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$ si ha che: $(1-\cos x) = vers(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine di x^2 (cioè del secondo ordine).

A questo proposito, nel calcolare il limite abbiamo giá parlato di velocitá di impiccolimento.

Quindi per $x \to 0$ vengono dette infinitesimo del 1°, 2°, 3°...n° ordine quelle funzioni che risultano rispettiva= mente dello stesso ordine di $x, x^2, x^3 \ldots x^n$. Analogamente se il limite della frazione, per $x \to \infty$, risulta ∞ in questo caso il numeratore è un infinito di ordine superiore

al denominatore.

Ma tornando agli infinitesimi, ove si suol dire che si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore rispetto agli infinitesimi di ordine inferiore. (Attenzione l'infinitesimo di ordine superiore è ritenuto più piccolo di quello di ordine inferiore).

Purtroppo questi criteri sono applicati anche ai differenziali ove: $(dx)^2$ è detto infinitesimo di ordine superiore a (dx) e pertanto trascurabile!. Ciò senza rendersi conto che il differenziale ha dimensioni fisiche e quindi se dx è la più piccola dimensione lineare, $(dx)^2$ ha le dimensioni di un'area e non sono certamente confrontabili come non sono confrontabili misure in cm e misure in cm².

Se una stecca è lunga due metri e pesa 3 Kg, il fatto che pesi 3 Kg è irrilevante ai fini della misura della lunghezza. Ed ai limiti sarebbe assurdo dire che il differenziale peso è di ordine superiore al differenziale lunghezza o viceversa.

Però i sostenitori degli ordini degli infinitesimi obiettano

Però i sostenitori degli ordini degli infinitesimi obiettano che questo metodo semplifica i calcoli, ciò è vero, in moltissimi casi, in altri si hanno informazioni ridotte. Ma ciò che può in qualche modo chiarire la questione è che gli infiniti e gli infinitesimi, in effetti non hanno superato il campo reale, non sono l'Infinito (che non può esistere in campo reale neppure come limite), od il "nulla", sono solo quantità molto piccole o molto grandi.

Metodi di calcolo dei limiti

Oltre ai metodi esposti, ed al metodo che esporremo al teorema di l'Hospital, per eseguire il calcolo di un limite è spesso necessario trasformare l'espressione, tal volta invertendo la variabile e quindi il punto limite: $\left(\lim_{x\to 0}\left(f(x)\right) = \lim_{\frac{1}{x}\to\infty}\left(f(x)\right) = \lim_{t\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right); \text{con } t=\frac{1}{x}\right)$ Artifizi vari di moltiplicare e dividere, o, di aggiungere e togliere stesse espressioni; trasformate trigonometriche, logaritmiche, ecc; in modo da ridurre la espressione di cui si cerca il limite, alla somma o differenza, o prodotto, o quoziente di espressioni di limiti notevoli (già calcolati). Per esempio:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(ax)\left(\frac{\operatorname{sen}(ax)}{(ax)}\right)}{(bx)\frac{\operatorname{sen}(bx)}{(bx)}}\right) = a/b\ .$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-\cos(2x)}{\cos(x)-\cos(5x)}\right) = (\text{per la prostaferesi}) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}(3x)\cdot\operatorname{sen}(2x)}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)}{\operatorname{sen}(3x)} \right) \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}(2x)} \right) = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1/2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}$$

Ricordando che: $\log_x(a) = \frac{1}{\log_a x}$ si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\log_a(x) \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\log_x a \right) = 0$$

Calcolo di Derivate

Sulla base dei limiti calcolati possiamo calcolare le principali derivate.

consideriamo la funzione: $y = x^n$

indichiamo la sua derivata: $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^n)}{dx} = y'$

Il rapporto incrementale sarà:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left[\frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \right]$$

ponendo in evidenza (x_0^n) si ha:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(x_0^n \frac{(1 + h/x_0)^n - 1}{h} \right)$$

essendo: $\lim_{h \to 0} = \lim_{\frac{h}{x_0} \to 0}$

$$y' = \lim_{(h/x_0) \to 0} \left(\frac{(1 + h/x_0)^n - 1}{h/x_0} \cdot x_0^{n-1} \right)$$

ma, dalla tabella dei limiti notevoli si ha:

$$\lim \left((1 + (h/x_0))^n - 1 \right)$$

$$\lim_{(h/x_0)\to 0}\left(\frac{\left(1+\left(\frac{h}{x_0}\right)\right)^n-1}{\left(\frac{h}{x_0}\right)}\right)=n$$

perciò se: $\boxed{y = x^n}$ → $\boxed{y' = n\,x^{n-1}}$

<u>formula fondamentale</u> ove ad n può darsi qualsiasi valore, intero o frazionario, positivo o negativo ed anche nullo. Per esempio se C = costante $= C\cdot x^0 = y$ → $y' = C\cdot 0\, x^{-1} = 0$ cioè <u>la derivata di una costante è zero</u>!

$$y = f(x) = (x^1)a; \quad y' = 1 \cdot x^{1-1} \cdot a = x^0 \cdot a = a$$

$$y = 3x^5 \rightarrow y' = 3 \cdot 5\, x^{5-1} = y' = 15x^4$$

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} \longrightarrow y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{x}} = a\, x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{-a}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -a/2\, x^{-3/2} = \frac{-a}{2x\sqrt{x}}$$

$$y = x^{m/n} \rightarrow y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}}$$

Dalla funzione: $\boxed{y = sen(x)}$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{sen(x_0+h) - sen(x_0)}{h} \right) \quad \text{(rapporto incrementale)}$$

sviluppando:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{sen(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)sen(h) - sen(x_0)}{h} \right)$$

ponendo in evidenza $sen(x_0)$ e scindendo la frazione:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\cos(x_0) \left(\frac{sen(h)}{h} \right) - sen(x_0) \left(\frac{1 - \cos(h)}{h} \right) \right)$$

cioè: $y' = \lim_{h \to 0}\left(\frac{\sin(h)}{(h)}\right) \cdot \cos(x_0) - (\sin x_0) \lim_{h \to 0}\left(\frac{1-\cos(h)}{(h)}\right)$

dalla tabella dei limiti notevoli:

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{\sin(h)}{(h)}\right) = 1 \;;\; \lim_{h \to 0}\left(\frac{1-\cos(h)}{(h)}\right) = 0$$

perciò:

se: $\boxed{y = \sin(x)} \rightarrow \boxed{y' = \cos(x)}$

Notare che l'indice o alla x cioè x_0 stà ad indicare che la derivata è valida per tutte le x, punto per punto fissato.

quanti simboli diversi possiamo disporre, la loro sequenza, la loro corrispondenza a numeri, questi simboli sono detti <u>cifre numeriche</u>. Ciascun numero ha anche un nome e puó essere espresso sia in cifre che in simboli fonetici del suo nome: uno, due, ..ecc. Importantissimo lo "zero" che gli indiani chiamavano Sunia = nulla e gli arabi: as-sifr, (ne abbiamo giã parlato), infatti l'unitá abbinata allo zero, nella nostra numerazione, fa ripartire una nuova unitã 10 volte piũ grande.

Consideriamo una cassetta composta di tanti scomparti affiancati, ogni scomparto puó contenere una sola cifra che viene moltiplicata per il valore dello scomparto che occupa. I valori degli scomparti sono i valori delle potenze della base.

$\ldots \quad 10^4 \quad 10^3 \quad 10^2 \quad 10^1 \quad 10^0 \quad 10^{-1} \quad 10^{-2} \quad 10^{-3} \quad 10^{-4}$

...	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	...
		3	4	2	6	5	0	7		

nella figura abbiamo rappresentato negli scomparti della numerazione decimale il numero: 3426,507 ; si noti la virgola che separa la parte intera dalla parte decimale, e si noti il valore:

$$\underbrace{3\cdot 10^3}_{\text{tremila}} + \underbrace{4\cdot 10^2}_{\text{quattrocento}} + \underbrace{2\cdot 10^1}_{\text{venti}} + \underbrace{6\cdot 10^0}_{\text{sei}} + \underbrace{5\cdot 10^{-1} + 0\cdot 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3}}_{\text{cinquecentosettemillesimi}}$$

5 decimi + 0 centesimi + 7 millesimi

Considerazioni di aritmetica razionale. detta anche aritmetica ragionata

Abbiamo già, sinteticamente accennato, nel primo volume, ai criteri di divisibilità, alle notazioni numeriche, agli operatori ed alle operazioni comprese quelle aritmetiche, abbiamo classificato le frazioni; ma lo scopo era di raggiungere velocemente la notazione algebrica da usarsi nelle matematiche applicate.

Qui vogliamo evidenziare alcune proprietà del calcolo numerico, premettendo cenni sui sistemi numerici.

Che, per esprimere una piccola quantità numerica, si mostri il corrispondente numero di dita delle mani; è un fatto, direi, istintivo comune a popoli di ogni tempo e di ogni lingua o cultura.

Se pensiamo ai numeri romani per es. VII è molto

Se pensiamo ai numeri romani per es. VII è molto più espressivo di: 7 o di: 5 o di ⊞, e molto più vicino a: ✋✌. I numeri romani sono <u>a notazione additiva</u>, ma a noi interessa <u>la notazione posizionale</u>, com'è la nostra numerazione decimale.

La prima osservazione è quella di stabilire di:

Di particolare interesse è il braccio toscano
per il grande numero di monumenti progettati
su tale unità di misura.

Nell'opera di Cesare Guasti: "SANTA MARIA DEL FIORE"
a pag. LIX del "discorso analitico su' documenti viene riporta=
to: « Le braccia fiorentine .... sono rimaste fino ai nostri anni
quali erano nel Milletrecento, il doppio dell'antico piede romano,
forse una vetusta misura degli Etruschi: in somma, qualcosa di più
di 58 centimetri ». Boito, pag 196.

Però Antonio Alberti ed altri distinguono il braccio
di Firenze in: 1) braccio da terra ≃ 0,548 m. 2) braccio
da stoffa ≃ 0,582 – (come la misura citata da Cammillo
Boito per le costruzioni.)

L'antico catasto toscano fatto eseguire dal Granduca
sulla base del Catasto Austriaco di Maria Teresa, ma come
unità di misura usò il braccio toscano ≃ 0,58366 m.
e come unità di superficie il braccio quadro = 0,3406 me=
tri quadri. (misure che corrispondono al braccio da stoffa.

tri quadri. (misure che corrispondono al braccio da stoffa e da costruzioni, ma non corrispondono al braccio da terra)

Il catasto unico in Italia fu stabilito nel 1886 con base metrica: Ha = ettari, are, centiare. – 1 Ha = 10 000 metri quadri; 1 ara = 100 metri quadri; 1 centiara = 1 metro quadro.

Tavola di Ragguaglio

ZONA	Piede	Braccio	Palmo	Passo	canna o (pertica)	Miglio	oncia	punto	/
Bolognese	0,380098	(o auna) 0,640039			3,80098	1900,49 500 pertiche	0,031675 1/12 di piede	0,00264	
Genovesato			0,249095		2,49095	1488	0,0207579 1/12 palmo	0,001729826	2,98914 (cannella)
Lombardia	0,435185 (12 pollici)	0,594936				1784,8 3000 braccia	0,049578 1/12 braccio	0,0041315 (12 atomi)	2,61111 (Trabucco)
Modenese	0,523048	0,63315			3,138288 (cavezzo)	1569,1 500 pertiche			
Napoletano			0,26455 [illegible]		2,6455	[illegible] grado 1851,85 700 canne	0,02204583 1/12 palmo		0,004409166 (minuto)
Parmense		0,5452			3,2712	[illegible] grado 1613	0,0454333 1/12 braccio	0,003786111	0,5878 = braccio da seta 0,6395 = braccio da tela
Piemonte	0,514403					45 al grado 2469,136	0,042866916 1/12 piede	0,003572243 (12 atomi)	3,086418 (Trabucco) 0,600 (raso)
Romagna	0,2976		0,2491 mercantile	1,488 5 piedi	1,9928 (8 palmi)	1489,48 1000 passi; 5000 piedi			
Sardegna			0,2625			2518,56			3,15 (Trabucco) di 12 palmi
Sicilia			0,258098		2,062 (4 passetti) 2,064784 (8 palmi)	1486,6 (5760 palmi)	0,021508166 1/12 di palmo	0,000149362 1/12 di linea	0,001792343 linea 0,5155 passetto
Toscana		0,58366 (20 soldi)			2,9183 (5 braccia)	1653,61 (2833,312 br.)			2,334 canna per stoffe (4 br.) [illegible] (denaro)
Veneto	0,347398 (o palmo)	(da lana) 0,6833	0,347398 (o piede)	1,73699 (5 piedi)		1738,67 (1000 passi)	0,028949833 (1/12 di palmo o piede)		braccio da seta 0,6387.

I valori in metri sono ripresi o calcolati sulla base dei dati esposti in: A. Socci - Aritmetica Pratica - Ed. Le Monnier Firenze 1894-1930. N.B. - Spesso i conteggi corrispondono solo grossolanamente

Altre misure lineari sono: "Il Raso" = m. 0,600 usato in Piemonte ed è pari a 14 once di piede.
"La Tesa", in uso a Torino (m. 1,713); ad Aosta (m. 1,872); ad Acqui (tesa di Monferrato = m. 1,675); a Novara (m. 1,414).
"L'Auna" ad Aosta = (m. 0,827); a Bologna = m. (0,640) coincidente col braccio. Anche il Trabucco, di cui abbiamo già parlato varia da città a città, a Torino prima del 1818 era: (m. 3,083), dopo: (m. 3,086). ad Alessandria (m. 2,861); a Casale (m. 2,904); a Tortona (m. 2,853); Pavese (m. 2,832) a Novara (m. 2,826); a Cremona (m. 2,901); a Vigevano (m. 2,774) a Bobbio (m. 2,868): Val tellina (m. 2,677); Milano (m. 2,611); Sardegna (m. 3,148). Altre misure lineari: il "Cavezzo" a Clusone (Bergamo) = (m. 2,627); a Salò = (m. 2,853); a Breno = (m. 2,852). "Il Passetto" a Massa, per tess. = (m. 0,791) a Firenze = (m. 1,167); In Sicilia = (m 0,516). Il "Passo" in Romagna = (m. 1,48948); Veneto = (m. 1,73867); a Roma braccio o passo = (m. 0,670). Lo "Staiolo" a Velletri = (m. 1,285).

Il "Miglio" Bolognese : (m. 1900,49) ; Genovese : (m. 1488) ; Lombardia = (m. 1784,8) ; Modenese = (m. 1569,10) ; Napoletano = (m. 1851,85) ; Parmense = (m. 1613) ; Piemontese = (m. 2469,136) (di 45 al grado) ; Romagna = (m 1489,48) Sardegna = (m. 2518,56) ; Sicilia = (m. 1486,60) ; Toscana = (m. 1653,61) ; Veneto = (m. 1738,67) ; Romano = (m. 1489) e (m. 2228) ;

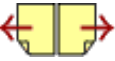
Oltre il piede; il braccio; il palmo; il passo; grandezze tutte riferite al corpo umano; occurreva dimensionare un riferimento materiale. Un ogget=to leggero, maneggevole, poco deformabile, e spesso perfettamente rettilineo, erano le canne: nacque così a Firenze ed in Toscana la <u>canna agrimensoria</u> (5 bracci) = m. 2,9183 e <u>la canna da panno</u> (4 bracci) = m. 2,3346. Poiché la canna è fragile il suo posto fu spesso sostituito dalla "<u>Pertica</u>" avente le stesse dimensioni. Un'altra misura linea=re riportata su un'asta è il "<u>Trabucco</u>" usato a Torino (m. 3,086); a Milano (m. 2,611); ed in Sardegna (m. 3.148); a Torino e Milano il <u>Trabucco</u> è 6 piedi; in Sardegna il <u>Trabucco</u> è 12 <u>palmi</u>. Si noti che, come strumento per misure agrarie, la Canna o Pertica, ed il Trabucco, sono sostituite dai <u>Triplometri</u> (dopo l'avvento del sistema metrico decimale). A Genova c'era <u>La Cannella</u> = (m. 2,98914) = 12 palmi.

decimale). A Genova c'era La Cannella = (m. 2,98914) = 12 palmi.

Il sottomultiplo più comune sia del piede, sia del braccio, sia del palmo è "l'oncia"; in genere 1/12 dell'unità cui si riferisce, ed ogni oncia divisa in 12 Punti, salvo in Sicilia ove $\frac{1}{12}$ di oncia è la linea, ed $\frac{1}{12}$ di linea il punto. Ed in Toscana ove il braccio si divide in 20 soldi, ed il soldo in 12 denari.

unitá lineare - localitá	Parti	equivalenza in metri	
		con base Parigi	altre fonti
Braccio di Lucca	2620	0,591 m.	—
" di Bologna	2640	0,596 m.	0,640039 m.
" di Firenze da terra	2430	0,548 m.	—
" di Firenze da panno	2580	0,582 m.	0,58366 m.
" di Parma e Piacenza	2423	0,547 m.	0,6395 da panno 0,587 da seta 0,545 leg. muro Pertica 3,271
" di Modena da terra	2300	0,519 m.	0,523 agrim.
" di Reggio	2348	0,53 m.	0,531 agrim.
" di Milano	2166	0,489 m.	0,594936 m.
" di Milano da legno	2620	0,591 m.	
" di Brescia	2075	0,468 m.	0,674 da Panno 0,640 da Seta cavezzo 2,853
" di Mantova	2062	0,465 m.	0,638 merc. 0,467 agrim.
Palmo di Napoli	1169	0,264 m.	0,264 m. (dopo il 1840)
" di Genova	1113	0,251 m.	0,248 m.
" di Palermo	1073	0,242 m.	0,258 m. (palmo legale dopo il 1809)
" Romano d'Architetto	990	0,223 m.	Canna d'arch.

" Romano d'Architetto	990	0,223 m.	Canna d'arch. (10 palmi) 2,234 m.

Il palmo Romano di Architetto è diviso in 12 once, perciò a ciascuna oncia toccano $82\frac{1}{2}$ parti: $(82,5)\cdot(12)=(990)$. Ogni oncia è suddivisa in 5 minuti, perciò a ciascun minuto toccano $16\frac{1}{2}$ parti: $(16,5)(5)=(82,5)$. Undici piedi di Perugia confrontano esattamente 18 palmi romani:

Prima dell'avvento del sistema metrico decimale, il problema di ragguagliare le varie unitá di misura era particolarmente sentito, come unitá di riferimento fu presa la 1440ma parte del piede di Parigi, detto piede del re. (pied de roi). Riportiamo da: Giuseppe Antonio Alberti - Trattato della misura delle fabbriche - III ediz. Firenze 1822 - pag. XXXII e che rinvia, per un piú minuto dettaglio, alla Geometria Pratica di Lodovico Perini pag. 57, "le parti" di alcune unitá

unitá lineare - localitá	Parti	equivalenza in metri	
		con base Parigi	altre fonti
Piede di Parigi (de roi)	1440	0,325. m	0,32484 m.
" " Bologna "	1682 $\frac{2}{5}$	0,380. m.	0,380098 m
" " Danimarca "	1404	0,317 m.	0,31385 m.
" del Reno o di Leiden	1390	0,314 m.	0,31385 m.
" di Londra	1350	0,305 m.	0,304797 m
" " Svezia	1316	0,297 m.	0,2969 m.
Romano del Campidoglio	[illegible]	0,295 m.	0,29625 m.

"	Romano del Campidoglio ..	1306	0,295 m.	0,29625 m.
"	di Danzica	1272	0,287 m.	......
"	d'Asterdam	1258	0,284 m.	0,2831
"	di Venezia	1525	0,345 m.	0,348 m.
"	di Piacenza	2080	0,470 m.	———
	—	1	≃ 0,225694/1000 m	

Tavola di confronto di antiche misure lineari

Occorre avvertire che spesso autori diversi interpretano diversamente le misure più antiche; Sono note le misure ragguagliate a giornate di viaggio, poi trasformate in stadi, così le misure di Eratostene della distanza fra Alessandria e Syene valutata 5000 stadi pari a 925 Km (di fatto è 780 Km.)

Antica Grecia:

Stadio Olimpico = (600 piedi olimpici) = m. 185

Stadio Pizio o delfico (600 piedi delfici) = m. 148

Piede Olimpico = m. 0,30859

Piede delfico (4/5 dell'olimpico) = m. 0,246872

Miglio = 8 stadi olimpici = m 1480

Miglio di 60 a grado = 10 stadi olimpici = m. 1850

Miglio di 75 a grado = 10 stadi Pizi o delfici = m 1480

Roma Antica:

Roma Antica:

Piede antico (pes)	= m. 0,29625
Piede moderno	= m. 0,29780
Cubito = 1,5 piedi antichi	= m. 0,444375
Miglio di 75 a grado ≃ 1000 passi	= m 1481
Passo = 5 piedi antichi	= m 1,48125

	al 1935				cambio al 27-XII-1993
EUROPA	—		ECU	£	1906,53
Finlandia	marco £o 0,130		marco	"	294,13
Francia	franco £o 0,203		franco	"	289,57
Germania	marco oro £o 1,2346		marco	"	986,88
Giappone	Yen £o 2,583		Yen	"	15,087
Grecia	dracma £o 1		dramma	"	6,875
India	rupia £o 1,892				
Inghilterra	sterlina Lit 25,2215		sterlina	"	2527,29
Jugoslavia	dinar " 1				
Irlanda			Lira	"	2402,99
Messico	peso " 5,438				
Norvegia	corona " 5,092		corona	"	227,47
Olanda	Fiorino " 7,637		Fiorino	"	881,43
Portogallo	scudo " 5,5986		scudo	"	9,681
Romania	Lei £o 1.–				
Russia	rublo Lit 9,7768				

Spagna	peseta	£o 1 —	peseta	12.023
Stati Uniti	dollaro	£o 5,1125	dollaro	1680,31
Svezia	corona	£o 1,389	corona	202,54
Svizzera	franco	£o 1,-	franco	1163,48
Turchia	Lira	£o 22,784		
Ungheria	pengo	£o 0,906		
Uraguai	piastra	Lit. 5,36		
Venezuela	piastra	" 5		

Stati esteri

I notevoli cambiamenti che si sono avuti nel tempo consigliano di riferire il ragguaglio delle monete a due epoche diverse e con diversi criteri.

1) Con R.D.=(Regio decreto) del 21-XII-1927 fu definita la lira italiana = Lit = 0,07276 $£_o$ ($£_o$ = lira oro, di cui abbiamo dato in tabella le caratteristiche).

Volendo riferirsi a <u>dopo</u> la crisi del 1929, ma <u>prima</u> della guerra di Abissinia, cioè al 1935 occorre considerare una svalutazione media del 40% - cioè:

$$1\ Lit = 0,163\ £_o$$

2) Indicheremo con ₤ la lira corrente al cambio del 27-XII-1993 - cioè mezzo secolo dopo la caduta del fascismo.-

	al 1935		cambio al 27-XII-1993	
Argentina -	Peso oro	$£_o$ 5,-			
Australia -			Dollaro	₤	1.140,83
Austria -	Shilling	Lit. 2,673	Scellino	"	140,35
Belgio -	Belga	" 2,642	Franco	"	47,439

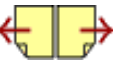
Brasile -	Cruzeiro	" 2,273			
Bulgaria -	Leu	Lo 1,=			
Canadà -			Dollaro	"	1.264,79
Cecoslovacchia -	corona	Lo 1,05			
Chilì	peso	Lo 1,89			
Cina	Tael	Lo 3,464			
Danimarca	corona	Lo 1,389	corona		252,91

Antiche monete

Regioni Italiane

Genovesato	{ Lira antica - (20 soldi - 12 denari)	£ 0,835
Lombardia	{ Lira antica -	" 5,76
	" austriaca	" 0,865
Modenese	{ Lira - (20 soldi - 12 denari)	" 0,383
Napoletano	{ Ducato - (20 carlini - 10 grani)	" 4,25
Parmense	{ Lira antica	" 0,25
Piemonte	{ Lira antica - (20 soldi - 12 denari)	" 1,18
Romagna	{ Scudo - (10 Paoli - 10 baiocchi)	" 5,384
Sardegna	{ Lira antica	" 1,88
Sicilia	{ Oncia - (30 tarì - 2 carlini - 10 grani)	" 12,75
Toscana	{ Lira - (12 crazie o 20 soldi di 12 denari)	" 0,85

Toscana	Lira – (12 crazie o 20 soldi di 12 denari)	" 0,85
	Fiorino	" 1,40
Roma antica	Sesterzio (o nummus)	£ 0,20
	Denaro	" 0,80
	Aureo	" 20,38
	Talento grande (32 000 sesterzi)	" 6522,=
	Talento piccolo (24 000 sesterzi)	" 4491
Grecia antica	Dramma	" 0,93
	Mina	" 92,68
	Talento d'argento (60 mine)	" 5561,=
	Talento d'oro (600 mine)	" 55609,=

Russia	Libbra - (32 once - 3 Solotnicks)	Kg 0,409512
	Poud - (40 libbre)	" 16,38048
	Last - (100 Poud)	" 1638,048
Serbia	Oka -	" 1,282
	Tovar - (100 oke)	" 128,2
Spagna	Libbra - (16 once - 8 Dramme)	" 0,4605
	Arroba - (25 libbre)	" 11,502
	Quintale - (4 Arrobe)	" 46,009
Svezia	Libbra - (32 lothe - 4 grasse)	" 0,425082
	Waag - (165 libbre)	" 70,13853
	Quintal (center) - (128 libbre)	" 54,410496
Turchia	Oka - (400 dramme)	" 1,282
	Cantar	" 566,36

STATI ESTERI

Stato	Unità	Kg
Austria	Libbra (Pfund) – (16 once – 2 lothe)	Kg 0,560012
	Quintale – (100 libbre)	" 56,0012
Baviera	Pfund	" 0,56
Danimarca	Libbra – (32 lothe – 4 dramme)	" 0,500194
Inghilterra	Libbra troy – (12 once – 20 denari – 24 grani)	" 0,373242
	Libbra avoir du poid (lb) (16 once – 16 dramme)	" 0,453592
	Quintal (112 libbre (lbs)) (avoir du poid)	" 50,802376
	Short-ton – (2000 libbre) (lbs)	" 907,1847
	Ton. (long-ton)	" 1016,05
Norvegia	Pund – (16 once)	" 0,498212
	Vog – (36 pund)	" 17,9356
	Toende	" 1295,3512
Olanda	libbra (suddivisa come il Kg)	" 1,—
Portogallo	Arratel	" 0,458921
	Arroba – (32 arratel)	" 14,685472

Portogallo	Arroba - (32 arratel)	"	14,685472
	Quintale - (4 arroba)	"	58,741888.
Prussia	Libbra - (32 lothe - 4 quentleine)	"	0,467702
	Libbra nuova - (30 lothe)	"	0,500
Rumenia	Litra	"	0,318812
	Oka - (4 Litre)	"	1,275248
	Cantarin - (44 oke)	"	56,110912

Lombardia	Libbra grossa - (28 once - 24 denari)	Kg 0,7625
	Libbra sottile - (3/4 di libra grossa)	" 0,32679
Modenese	Libbra - (12 once - 12 ferlini)	" 0,340455
	Peso - (25 libbre)	" 8,511375
Napoletano	Libbra - (12 once)	" 0,320759
	Rotolo - (2 7/9 libbre)	" 0,891
Parmense	Libbra - (12 once - 24 denari)	" 0,328
	Rubbo - (25 libbre)	" 8,2
Piemonte	Libbra - (12 once - 8 ottavi - 3 denari)	" 0,36888
Romagna	Libbra - (12 once - 24 denari)	" 0,3391
Sardegna	Libbra - (12 once)	" 0,40577
Sicilia	Rotolo - (2 1/2 libbre - 12 once)	" 0,79342

Toscana	Libbra - (12 once - 24 denari - 24 grani)	"	0,339542
Veneto	Libbra grossa - (12 once - 16 carati)	"	0,476998
	Libbra sottile	"	0,3012
Roma Antica	libbra - ($\frac{1}{80}$ peso del piede^3 pieno d'acqua)	"	0,3258
Grecia Antica	Mina attica o libbra ($\frac{1}{120}$ peso d'acqua in anfora)	"	0,3258

Paese	Misura	Valore
Prussia	Sheffel - (16 melzen - 3 quarts)	litri 54,961
	Eimer - (12 anker - 30 maass)	" 68,69
Russia	Tschetwert - (2 osmin - 2 paiok -)	" 219,9
	Tschetweriek - (7 tschetwerka)	" 27,4875
	Wedro - (10 stoff - 10 tscherkeys)	" 12,229
	Oxhoft - (6 ankers)	" 221,—
Spagna	Fanega - (12 calemines)	" 55,501
	Moyo - (16 arrobes)	" 258,128
Svezia	Tunna - (2 spanne - 4 fierdtn)	" 146,49
	Oxhufwud	" 235,—
Turchia	Fortin - (4 Kilow)	" 141,08
	Alma	" 5,205

MISURE di PESO

MISURE di PESO

Regioni Italiane

Bolognese	Libbra - (12 once - 16 ferlini - 10 carati)	Kg. 0,36185
Genovesato	Libbra grossa - (12 Once - 8 ottavi)	" 0,349
	Libbra sottile - (12 once - 24 denari)	" 0,317

STATI ESTERI

Stato	Misura		Valore
Austria	Metzen - (4 vierteln - 4 mässeln - 4 frutten)	litri	61,5045
	Eimer - (4 vierteln - 10 mässe - 4 seidel)	"	56,6819
Danimarca	Toende - (8 schieps)	"	139,084
	Ancker - (10 stubgen)	"	37,646
Inghilterra	Bushel - (4 peaks - 2 gallons - 2 pottles)	"	36,3477
	Gallone - (4 quarts - 2 pints - 5 gills)	"	4,54346
	Quarter - (8 bushels)	"	290,7816
	Firkin - (9 Gallons)	"	40,8912
	Barrel - (4 Firkin)	"	163,56165
	Load - (10 firkins)	"	408,91
Norvegia	Toende - (8 skjaepper - 18 potter)	"	139,001
	Pibe	"	463,3375
	Ame - (155 potter)	"	149,6194
	Potter	"	0,965286
	Mudde - (10 schepel)	"	100,—
	Last	"	3000,—

Olanda	Last	" 3000,—
	Vat – (100 Kan = litro)	" 100,—
Portogallo	Fanego – (4 alqueires)	" 55,36
	Almuda – (12 canadas)	" 16,74
	Pipa – (30 Almudes)	" 502,2

Romagna	Rubbio - (4 quarti - 4 staia - 2 quartucci)	litri 294,46
	Barile da Vino - (32 boccali - 4 fogliette)	" 58,34
Sardegna	Starello - (16 imbuti)	" 49,17
	Botte - (100 quartari)	" 502,66
Sicilia	Tomolo - (1 palmo^3 - 4 mondelli)	" 17,193
	Barile - (2 quartari - 20 quartucci)	" 34,386
Toscana	Staio - (2 mine - 2 quarti - 8 mezzette)	" 24,363
	Sacco - (3 staia)	" 73,089
	Moggio - 8 sacca	" 584,712
	Barile da Vino (20 fiaschi) - (4 mezzette)	" 45,584
	Barile da olio (16 fiaschi)	" 30,08544
Veneto	Moggio - (4 staia - 4 quarti - 4 quartaroli)	" 333,268
	Anfora - 4 bigonce - 2 mastelli - 24 bozze)	" 600,934

Roma antica	Anfora - (piede^3 antico romano)	litri 26

Roma antica { Anfora – (piede^3 antico romano) litri 26

Grecia antica { Anfora attica – ($\frac{3}{2}$ del cubo di $\frac{24}{25}$ di un piede olimpico) " 39

MISURE di CAPACITÀ per aridi e per liquidi

Regioni Italiane

Regione	Misura		
Bolognese	Corba da grano - (2 staia - 4 quartaroli)	litri	78,645
	corba da vino - (60 boccali - 4 fogliette)	"	78,593
Genovesato	mina - per aridi - (4 staia - 8 ottavi)	"	116,5596
	Barile da vino - (90 amole)	"	79,016
	Mezzarola - (2 barili)	"	158,032
Lombardia	Moggio (per aridi) - (8 staia - 4 quartari)	"	146,24
	Brenta - (3 staia - 4 quartari - 8 boccali)	"	75,55
Modenese	Staio - (2 mine - 4 quarti)	"	63,25
	Quartaro - (90 boccali)	"	101,812
Napoletano	Tomolo - (2 mezzette - 2 quarti - 6 misure)	"	55,545
	Barile - (60 caraffe)	"	43,625

Parmense	Staio - (2 mine - 8 quartaroli)	" 47,040
	Brenta - (36 pinte - 2 boccali)	" 71,672
Piemonte	Emina - (8 coppi - 24 cucchiai)	" 23,05
	Sacco - (5 emine)	" 115,25
	Brenta - (36 pinte - 2 boccali - 2 quartini)	" 49,3069

Sardegna { Starello di Cagliari m^2 3986,75

Sicilia { Salma - (4096 canne quadrate) m^2 17462,58

Toscana { Quadrato - (10 tavole - 10 pertiche - 10 deche - 10 braccia²) m^2 3406,19

Veneto { Migliaio - (1000 passi quadrati - 25 piedi²) m^2 3022,99

Roma antica { Iugero - (28800 piedi antichi quadrati) m^2 2527,61

Grecia antica { Plettro - (10000 piedi olimpici quadrati) m^2 952,3

STATI ESTERI

Austria { Yucart - (1600 Klafters quadrati) m^2 5755,43

Inghilterra { acre - (4840 Yards quadrate) m^2 4046,71

Prussia { morgen – (180 pertiche quadrate) m^2 2553,23

Russia { Deciatine – (2400 sagène quadrate) m^2 1.0925,=

Spagna { Fanegada pei campi – (500 $estadales^2$) m^2 4834,= ; Aranzada pei vigneti – (400 $estadales^2$) m^2 3867,= ; $(1\ estadales)^2 = (11\ piedi)^2 = (3,\frac{2}{3}\ vare)^2$

Svizzera { Lega Km. 4,8

Turchia { Archin - (2 cadem - 12 parmac) m. 0,75774
Berri 66 2/3 al grado Km. 1,667

Misure di Superficie

Regioni Italiane

Bolognese { tornatura, - (144 tavole o pertiche quadre) m². 2080,43

Genovesato { cannella quadra - (144 palmi quadrati) m². 8,928

Lombardia { pertica (24 tavole - 144 piedi quadrati) m². 654,52

Modenese { Biolca - (72 tavole - 4 pertiche quadrate) m² 2836,47

Napoletano { Moggio – (100 canne quadrate) m^2 699,87

Parmense { Biolca – (6 staia – 12 tavole – 4 pertiche²) m^2 3081,44

Piemonte { giornata – (100 tavole – 4 trabucchi²) m^2 3810,39

Romagna { Pezza – (16 catene quadrate) m^2 2640,63

Olanda	Piede del Reno	m. 0,31385
	Piede di Amsterdam (11 pollici)	m 0,2831
	Miglio di 15 a grado	Km 7,408
Portogallo	Piede (Pé) – 12 pollici	m 0,3285
	Palmo – (di $1\frac{1}{2}$ piedi)	" 0,49275
	Lega di 18 a grado	Km 6,173
Prussia	Piede decimale	m. 0,3768
	Ruthe – (12 piedi)	" 4,5216
	Piede del Reno – (12 pollici – 12 linee)	" 0,31385
	Miglio del Reno (2000 pertiche)	Km 7,532
Rumenia	Palma (10 degeti)	m. 0,196213
	Stangenu (10 palme)	m. 1,96213
	Miglio	Km. 7,848
Russia	Piede inglese	m. 0,30794
	Archin – (16 Werschock)	" 0,71194
	Sagèna – (3 Archin)	" 2,13582
	Wersta – (500 Sagène)	Km 1,06679
	[illegible]	[illegible]

	Miglio finlandese - 100 Werste	" 106,679
Serbia	Hâlebi	m. 0,6858
Spagna	Piede (pié) - (12 pollici)	m. 0,2875
	Estado (2 vare - 3 piedi)	" 1,725
	Lega di 16 2/3 al grado	Km. 6,693
Svezia	Piede - (10 Pollici - 10 linee)	m. 0,2969
	Corda - (10 pertiche - 10 piedi)	" 29,69
	Tesa - (3 aune - 2 piedi)	" 1,7814
	Miglio	Km. 10,628

Veneto	Piede (o palmo) - (12 once)	m. 0,347398
	Passo (5 piedi)	" 1,73699
	braccio da lana	" 0,6833
	braccio da seta	" 0,6387
	Miglio (1000 passi)	Km. 1,73867

STATI ESTERI

Austria	Piede (Fuss) - (12 pollici - 12 linee)	m. 0,316081
	Tesa (Klafter) - (6 piedi)	" 1,896486
	Miglio di posta	Km. 7,856
Baviera	Piede (Fuss) - (12 pollici - 12 linee)	m. 0,291859
	Tesa (Klafter) - (6 piedi)	" 1,751154
Danimarca	Piede del Reno - (12 pollici - 12 linee)	m. 0,31385
	pertica - (12 piedi)	" 3,7662
	Miglio di $14\frac{3}{4}$ a grado	Km 7,532
Francia	Lega metrica	Km. 4.—

Inghilterra	Piede (feet) - (12 pollici o inches)	m. 0,304794
	Yard - (3 piedi)	" 0,914382
	Fathom - (2 Yards)	" 1,828764
	Rod - ($2\frac{3}{4}$ Fathom)	" 5,02910!
	Miglio (1760 yards)	Km 1,609
Norvegia	Piede (fod)	m 0,313763
	Favn - (6 piedi)	" 1,882257
	Miglio	Km 11,205

Parmense	Braccio (12 oncie – 12 punti)	m 0,5452
	Pertica – (6 braccia)	" 3,2712
	braccio – da seta	" 0,5878
	braccio – da tela	" 0,6395
	Miglio – di (75 al grado)	Km. 1,613
Piemonte	Piede – (12 once – 12 punti – 12 atomi)	m. 0,514403
	Trabucco – (6 piedi)	" 3,086418
	Raso – (14 once del piede)	" 0,600137
	Miglio di 45 al grado	Km. 2,469136
Romagna	Piede	m. 0,2978
	Passo – (5 piedi)	" 1,48948
	Palmo mercantile	" 0,2491
	Canna – (8 palmi)	" 1,9928
	Miglio – (1000 passi – 5000 piedi)	Km. 1,48948
Sardegna	Palmo	m. 0,2625
	Trabucco – (12 Palmi)	" 3,15
	Miglio	Km. 2,51856

	Miglio	Km. 2,51856
Sicilia	Palmo - (12 once - 12 linee - 12 punti)	m. 0,258098
	canna - (8 palmi)	" 2,06478
	passetto - (2 palmi)	" 0,516
	Miglio - (5760 palmi)	Km. 1,4866
Toscana	Braccio - (20 soldi - 12 denari)	m. 0,58366
	Canna agrimensoria - (5 braccia)	" 2,9183
	canna per stoffe (4 braccia)	" 2,33464
	Miglio (braccia 2833 3/2)	Km. 1,65361

Tavole di Ragguaglio di Antiche Misure Italiane ed estere, precedenti l'adozione del sistema metrico decimale

Misure di lunghezza

Regioni Italiane

Regione	Misura	Valore
Bolognese	Piede - (12 once - 12 punti) ...	m. 0,380098
	Braccio o auna - (20 once)	" 0,640039
	Pertica - (10 piedi)	" 3,80098
	Miglio - (500 pertiche)	Km 1.90049
Genovesato	Canna - (10 palmi - 12 once - 12 punti)	m. 2,49095
	Cannella - (12 palmi)	" 2,98914
	Miglio	Km 1,488
Lombardia	Piede - (12 pollici)	m 0,435185
	Trabucco - (6 piedi)	" 2,61111
	Braccio - (12 oncie - 12 punti - 12 atomi)	" 0,594936
	Miglio - (3000 braccia)	Km 1,7848
Modenese	Piede	m. 0,523048
	Pertica o Cavezzo (6 piedi)	3,13828

Modenese	Pertica o Cavezzo - (6 piedi)	" 3,138288
	Braccio	" 0,63315
	Miglio	Km 1,5691
Napoletano	Palmo - (12 once - 5 minuti - 10/10 - 100/100)	m. 0,26455
	canna - (10 Palmi)	" 2,6455
	Miglio (di 60 al grado) - 700 canne	Km. 1,85185

La tabella delle monete del Regno d'Italia era:

Metallo	valore £ legale	valore £ reale	titolo	taglio	peso in gr	Tolleranza sul titolo	Tolleranza sul peso di coniazione	Tolleranza sul peso di consumo
					gr		mg	mg
Oro	100	99,78	0,9000	31	32,258	0,002	32,26	161,12
"	50	49,89	"	62	16,129	"	16,13	80,56
"	20	19,95	"	155	6,452	"	12,90	32,19
"	10	9,97	"	310	3,226	"	6,45	16,08
"	5	4,98	"	620	1,613	"	4,14	8,04
Argento	5	4,96	0,9000	40	25	0,003	75	249,25
"	2	1,84	0,835	100	10	"	50	497,50
"	1	0,92	0,835	200	5	"	25	248,75
Nichel (lega)	0,20	–	0,750	250	4	0,005	1 1/5 %	–
Nichel (puro)	0,20	–	1000	250	4	"	1,1/5 %	–
"	0,50	–	1000	166 2/3	6	–	"	–
Rame	0,10	–	950	100	10	–	100	–

Rame antico conio	0,10	–	950	100	10	–	100	–
"	0,05	–	"	200	5	–	50	–
Rame nuovo conio	0,10	–	950	181 9/11	5,50	–	–	–
"	0,05	–	"	307 41/45	3,25	–	–	–

La carta monetata, non è "moneta", la rappresenta, ed il suo valore varia notevolmente con le situazioni politico-economiche. (L'oro fino da allora al 22/12/93 è aumentato circa seimila volte in 63 anni; (c'è stata una guerra)

Si chiama taglio delle monete il numero di pezzi che si possono fare con un chilogrammo di lega.

Piede è il numero di monete che si possono coniare con un chilogrammo di metallo fino.

Tolleranza è un errore leggero in più o meno che la legge ammette sul peso o sul titolo.

Valore di una moneta è il prezzo del metallo di cui è formata.

Valore reale o intrinseco è il prezzo del solo metallo fino.

Valore legale, estrinseco o di tariffa è il valore del metallo aumentato delle spese di coniazione e di diritto di conio.

Oltre a ciò le monete hanno un valore di corso che segue la legge di mercato della domanda e dell'offerta.

Per legge la coniazione in Italia era:

Metalli	Valore reale £/Kg	diritto di conio	Valore reale di un kilogrammo

Oro fino	£ 3437	£ 7,444	£ 3.444.444
" monetato a 9/10	" 3093,30	" 6.70	" 3100.–
Argento fino	£ 220,50	" 1,422	" 222,222
" monetato a 9/10	" 198,45	" 1,55	" 200.–

(Notare che il rapporto : $\frac{oro}{argento} = 15,5873$; se monetato $\frac{3100}{200} = 15,5$)

(nella borsa del 21/12/1993 – Milano $\frac{\text{oro fino}}{\text{argento ind}} = \frac{20950 \text{ £/gr}}{279,8 \text{ £/gr}} = 74,87491 \ldots$)

una grandezza che a seconda dei casi è detta: "saggio interesse", "tasso di sconto", "saggio o tasso di capitalizzazione", ma che, in ogni caso, è un coefficiente di rischio, riesce a trasdurre i valori nel tempo .... "meglio un uovo oggi che una gallina domani". Naturalmente l'incertezza del futuro, grosso modo quantificabile col calcolo delle probabilità e con la statistica determinano il rischio e quindi i saggi interesse o tassi di sconto. (Torneremo sull'argomento in matematica finanziaria).

L'unità di misura per l'unità monetaria in Italia è la "Lira Italiana" che in epoca prebellica era costituita da un disco di metallo pesante 5 grammi lega di cui 9/10 d'argento ed 1/10 di rame. L'oro e l'argento si dicono metalli fini.

Si dice titolo di una lega il rapporto o percentuale

del metallo fino. La lira con titolo $9/10$ di cui sopra è detta <u>lira di conto</u>, anziché $9/10$ è più proprio $900/1000$. <u>Le monete effettive</u> anche di argento hanno titolo più basso per esempio le 5 lire (detta aquilotto) aveva un titolo di $835/1000$ di argento fino e $165/1000$ di rame. Vi erano monete d'oro al titolo 0,900. Altri metalli per monete il nichel, il bronzo, il rame. (vedi anche monete)

Misure di valore

La misura di valore è diverso da stato a stato. e varia nel tempo. Tuttavia i commerci e le relazioni internazionali impongono un riferimento comune. Per molti anni il riferimento comune è stato ed ancor oggi, seppure in minore, è l'oro. Per molti anni, fino alla seconda guerra mondiale, (1940-1945) la moneta universalmente accettata è stata la Lira Sterlina (inglese), oggi è il dollaro (America). Il valore di scambio delle varie monete è determinato giornalmente dalla borsa che quota anche il valore dell'oro e del petrolio, oltre alla quotazione dei titoli di credito e delle azioni delle società industriale.

Questi brevi cenni per affermare e confermare che l'economia non è una tavoletta d'argilla sulla quale l'uomo (di governo o no) può inci-

dere ciò che vuole, ma segue leggi, dette di mercato, difficilmente esprimibili matematicamente, ma esprimibili in detti: come la legge della domanda e dell'offerta che determina il prezzo di mercato; oppure: "la moneta cattiva scaccia la buona"; oppure "Contingentare i prezzi fa nascere il mercato nero" ecc.. La matematica finanziaria in base ad

Nel sistema metrico decimale i pesi sono:

NOME	simbolo	equivalenza
Tonnellata	t	$= 1000\ Kg \cong (1 m^3$ di $H_2O)$
Quintale	q	$= 100\ Kg$
Miriagrammo	Mg	$= 10\ Kg = 10000\ gr$
Kilogrammo	Kg	$= 1\ Kg = 1000\ gr \cong (1\ dm^3$ di $H_2O)$
ettogrammo	hg	$= \frac{1}{10} Kg = 100\ gr$
decagrammo	dag	$= \frac{1}{100} Kg = 10\ gr$
grammo	gr	$= 10^{-3} Kg = 1\ gr \cong (1\ cm^3\ H_2O)$
decigrammo	dg	$= 10^{-4} Kg = \frac{1}{10} gr$
centigrammo	cg	$= 10^{-5} Kg = \frac{1}{100} gr$
milligrammo	gm	$= 10^{-6} Kg = \frac{1}{1000} gr$.

Per le misure angolari il sistema metrico decimale divise il cerchio in 400 parti che chiamò gradi centesimali (g), ogni grado era diviso in 100 parti

gradi centesimali (g), ogni grado era diviso in 100 parti dette primi centesimali (c) ed ogni primo centesimale era diviso in 100 parti dette secondi centesimali (cc) cosicché: $400 \times 100 \times 100 = 4.000\,000$ cioè il metro base del sistema avrebbe dovuto corrispondere ad $\frac{1}{10}$ di secondo centesimale. Approssimativamente, considerando la terra sferica, avrebbe rappresentato la variazione di latitudine.

Vi sono molti modi per effettuare una pesata. Le misure di precisione sono spesso per confronto di masse, utilizzando l'equilibrio di una leva. Se la bilancia è a due piatti, su un piatto si pone ciò che si vuol pesare equilibrando con zavorra sull'altro piatto quindi si toglie ciò che si voleva pesare, ponendo masse di pesi tarati fino all'equilibrio della stessa zavorra. L'artificio di non porre su un piatto l'oggetto e sull'altro i pesi compensa certe imperfezioni della bilancia. Nelle stadere ad un piatto il romano è il contrappeso che si sposta sul braccio della leva che è tarato; oppure la rotazione di un indice su una scala sfraziona gli intervalli di spostamento del contrappeso.

Diverse per principio sono le pesatrici a molla dette anche dinamometri che indicano su scala graduata la deformazione della molla.

La molla può essere ad elica cilindrica, tesa o compressa, che accumula l'energia elastica in seguito all'abbassamento del corpo da pesare; poiché l'azione è dovuta alla gravità, cambia da luogo a luogo. Se invece l'azione si esercita per torsione di un filo sottile (bilancia di Coulomb) è possibile la misura di piccole forze attrattive o repulsive, anche di cariche elettriche.

nella pratica i contenitori di granaglie, di farine, di liquidi hanno misure approssimate variabili da regione a regione; daremo le antiche misure nelle regioni italiane, nel seguito.

Per le misure di peso il sistema metrico decimale prese come unità il grammo (gr) che avrebbe dovuto corrispondere ad un centimetro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 °C e 760 mm di Hg di pressione, con una gravità non specificata e pertanto, sia come peso, che come unità di massa ha poco di assoluto. Il campione fu fatto su un Kg di H_2O, ma, come abbiamo già detto, corrisponde al volume di un litro (unità di massa o chilogrammomassa (Kg) nel sistema M,K,S), invece nel sistema pratico l'unità è 9,806 litri di acqua alla massima densità termica 4 °C e 760 mm Hg di pressione il numero 9,806 spesso arrotondato a 9,8 od

il numero 9,806 spesso arrotondato a 9,8 od anche a 9,81 dovrebbe corrispondere ad una accelerazione media sulla terra misurata in metri al secondo per secondo (m/sec^2). Sappiamo che l'accelerazione di gravità varia con la quota, varia anche nel tempo e da luogo a luogo. Inoltre occorre tener conto dell'accelerazione centrifuga dovuta alla rotazione della terra ...; come si vede occorre contentarsi.

Per le misure di volume distinguiamo la misura di volume per solidi da quella per liquidi.

NOMI	Simboli	equivalenza	Note
Miriametro cubo	Mm^3	$10^{12}\ m^3$	poco usate
chilometro cubo	Km^3	$10^9\ m^3$	poco usate
ettometro cubo	hm^3	$10^6\ m^3$	poco usate
decametro cubo	dam^3	$10^3\ m^3$	
metro cubo (stero)	m^3	1 - metri cubi	
decimetro cubo	dm^3	$10^{-3}\ m^3$	- circa 1 litro cioè = 0,999972 l.
centimetro cubo	cm^3	$10^{-6}\ m^3$	
millimetro cubo	mm^3	$10^{-9}\ m^3$	

tal volta anziché m^3, cm^3, mm^3, si usa ml., cmc, mml.

NOMI	simboli	equivalenza	NOTE
chilolitro	Kl	1000 l	- circa $1m^3$

ettolitro	hl	100 l	
decalitro	dal	10 l	
litro	l	1 litro ≃ 1 dm^3	= 1,000028 dm^3
decilitro	dl	$\frac{1}{10}$ litro	
centilitro	cl	$\frac{1}{100}$ litro	
millilitro	ml.	$\frac{1}{1000}$ litro	

Dalle misure di lunghezza sono derivate le misure di superfici nel sistema metrico decimale

NOMI	Simboli	equivalenza
Miriametro quadrato	Mm^2	10^8 metri quadri
chilometro quadrato	Km^2	10^6 " "
ettometro quadrato	hm^2	10^4 " "
detto ettaro	ha	" " "
Decametro quadrato	dam^2	100 " "
detto ara	a	" " "
Metro quadrato	m^2	1 " "
detto centiara	ca	" " "
decimetro quadrato	dm^2	$10^{-2} = \frac{1}{100}$ di metro quadro
centimetro quadrato	cm^2	$10^{-4} = \frac{1}{10\,000}$ " " "
millimetro quadrato	mm^2	$10^{-6} = \frac{1}{1000\,000}$ " " "

(ettaro, ara, centiara: dizioni del catasto terreni)

tal volta anziché m^2 si scrive mq = metri quadri.

Nelle misure di volume il m^3 è detto "stero" e la dizione si estende a ("$10\,m^3$") detto: decastero ed al decistero $= \frac{1}{10}\,m^3$.

I nomi: s = stero = $1\,m^3$; das = decastero = $10\,m^3$; ds = decistero = $\frac{1}{10}\,m^3$; sono generalmente usati, per misurare (vuoto per pieno) le cataste di legname, o volume di granaglie, carbone, foglia ecc.

Per completezza riportiamo l'equivalenza di altre misure inglesi.

1 Acre = 0,404286 ettari

misure di superficie: 1 pollice q. (sq. in) = 6,4516 cm^2

1 piede q (sq. ft) = 0,0929 m^2

1 yard q (sq yd) = 0,8361 m^2

1 miglio q (sq mile) = 2,59 Km^2

misure di volume: 1 pollice cubo (cu. in) = 16,387 cm^3

1 piede cub. (cu. ft) = 0,0283 m^3

1 yard cub. (cu. yd) = 0,7646 m^3

1 register ton = (100 cu. ft.) = 2,832 m^3

1 ocean ton = (40 cu. ft.) = 1,1327 m^3

1 Imperial gallon = 4 quarts = 8 pints = 8 (U.K. pt) = 32 gills = 4,54596 litri

1 barrel = 4 bushel = 32 gallons = 1,6365 hl.

1 last = 10 quarters = 80 buschel = 320 peks = 29,078144 hl

misure di peso: 1 libbra avoir dupois (lb) = 16 once (oz) =

= 256 drams = 7000 troygrains = 0,453292 Kg

1 libbra troy = 12 once = 240 pennyweights (dw) =

1 libbra troy = 12 once = 240 pennyweights (dw) = (dw) = 5760 troygrains = 0,373242 Kg

1 short-ton = 2000 libbre (lbs) = 907,1853 Kg

1 long-ton = 20 centweigth = 80 quaters = = 2240 libbre (lbs) = 1016,0471 Kg

misure di lunghezze nel sistema metrico decimale

Denominazione	simbolo	equivalenza
Miriametro	Mm	10.000 m = 10^4 metri
chilometro	Km	1.000 m = 10^3 "
ettometro	hm	100 m = 10^2 "
decametro	dam	10 m = 10^1 "
metro	m	1 m = 10^0 "
decimetro	dm	$\frac{1}{10}$ m = 10^{-1} "
centimetro	cm	$\frac{1}{100}$ m = 10^{-2} "
millimetro	mm.	$\frac{1}{1000}$ m = 10^{-3} "
micron	μ	$\frac{1}{1000}$ mm = 10^{-6} "
Angström	Å	$\frac{1}{10000}\mu$ = 10^{-8} cm = 10^{-10} metri
Fermi	fm	$10^{-8}\mu$ = 10^{-13} cm. = 10^{-15} metri

Altre unità di lunghezza non strettamente legate al sistema decimale, ma aventi per base il metro.

<u>doppio metro</u> in uso in negozi di stoffe

doppio metro in uso in negozi di stoffe

tripiometro (canna metrica) in uso in topografia

doppio decametro " "

miglio marino (internazionale) = 1852 metri

anno luce ≃ 9461 miliardi di chilometri (in astronomia).

parsec ≃ 3,263 anni luce (in astronomia)

per la fisica atomica si ha il metro moltiplicando per 1.650.763,73 la lunghezza d'onda del cripto-86 dovuto alla transizione fra i livelli $2p_{10}$ e $5d_5$. (Nel vuoto).

Abbiamo già accennato che il cosiddetto <u>vuoto</u> non può esistere in realtà, ed è una astrazione del nostro pensiero, ed i signori fisici all'atto stesso che dicono <u>nel</u> lo riempiono, e non è più vuoto nemmeno come astrazione del nostro pensiero.

La definizione iniziale del metro legale o campione conservato a Sèvres fu detto corrispondente a 443,296 linee della cosiddetta "<u>Tesa del Perù</u>", ed era un campione in ferro a 13° Reaumur.

In Italia il sistema metrico decimale fu introdotto nel 1861, è stato adottato in molti paesi esclusa l'Inghilterra per la quale è stato stabilito:

$$1 \text{ metro} = 39{,}370113 \text{ pollici (inches)(in)}$$

cioè $1 \text{ pollice} = 2{,}5399979 \simeq 2{,}54$ centimetri.

Altre misure lineari inglesi: 1 Piede (foot)(ft) = 12 pollici

1 yard = 3 piedi ; 1 fathom = 2 yard = 6 piedi ;

1 pole = 16,5 piedi = 198 pollici ≅ 5,0292 metri

1 statute mile = 8 furlongs = 1760 yard ≅ 1,609342 Km.

1 miglio inglese (Londra) = 5000 piedi = 1,524 Km.

1 nautical mile (nodo) = 6080 piedi = 1,85318 Km,

1 Admiralty mile = 6086,5 piedi = 1.8551 Km.

poté essere : "la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre" Perché successive misure del meridiano portarono a differenze ben maggiori del confronto fra due segmenti. Perciò il "metro" è stato definito (nel 1872)

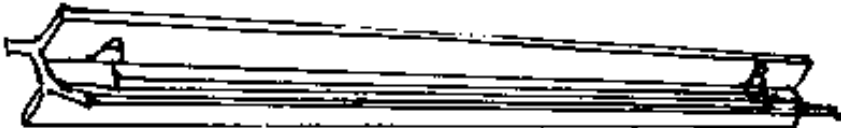
"La lunghezza del metro campione conservato negli Archivi dell'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure di Sèvres (Parigi), misurato alla temperatura di zero gradi Celsius e 760° millimetri di Hg di pressione."

Per temperature diverse, la lunghezza "l" del campione fu definita:

$$l = 1m + (8,651\,t + 0,00100\,t^2) \cdot 10^{-6}$$

(ove "t" è la temperatura del termometro ad idrogeno) più recenti misure darebbero il primo coefficiente in 8,635 anziché 8,651.

Nell'industria il metro è una lunghezza che a 20°C

Nell'industria il metro è una lunghezza che a 20°C di temperatura equivale il metro campione a 0°C, ciò per ragioni pratiche.

Ma a fini scientifici era necessaria una più precisa definizione del metro, perciò si è utilizzata la lunghezza d'onda della riga rossa del cadmio a 15°C e 760 mm.Hg.

$\lambda_{cd} = 0,000\,000\,643\,84696$ metri; 1 metro $= 1.553\,164,13\ \lambda_{cd}$.

Sistema metrico decimale

La laboriosità dei calcoli sui numeri complessi costituiti dalle antiche unità di misura con multipli e sottomultipli non decimali (ancor oggi esistenti nelle misure inglesi), convinse nel 1790 l'assemblea Costituente francese a nominare una commissione per l'unificazione delle unità di misura.

La commissione decise di fondare le misure sulla unità di misura delle lunghezze, assumendo come unità la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, quale risultava dai calcoli della Meridiana di Parigi, tale unità fu chiamata: "mètre" in italiano: "metro" e deriva dal greco antico: "μέτρον" = misura. Di tale unità ne fu fatto un campione costituito dalla distanza di due tratti sottili su una

tuito dalla distanza di due tratti sottili su una barra di platino iridio lungo 102 cm, con sezione ad X per avere la massima resistenza ad inflettersi

la distanza $\overline{AB}$ dei tratti è di un metro alla temperatura di zero gradi Celsius e 760 mm. di Hg di pressione. (1841)

Ma la definizione della unità di misura non

La Precisione

La cosiddetta precisione è in genere espressa in percentuale della grandezza cui si riferisce; per esempio una lunghezza precisa all'un per mille, (precisione $\frac{1}{1000}$) vuol dire che ogni metro, può essere affetto da un errore non superiore al millimetro, cioè la distanza di 1 Km precisa $1/1000$ può esprimersi

999 metri < 1 Km < 1001 metri. ; D = 1000 m. ± 1.

Il campo di variazione di una grandezza, non dipende solo da errori o approssimazioni, ma dipende anche da condizioni variabili di stato fisico come la temperatura, la pressione, la tensione, ecc. delle quali si deve tener conto, sopratutto se trattasi di strumenti di misura.

La tolleranza di un micron in certi pezzi meccanici, può diventare di qualche metro se si valuta la lunghezza di un cavo elettrico per coprire una

linea di 100 Km.

Sarebbe assurdo esprimere in micron le dimensioni di un vano di abitazione ove le irregolarità dell'intonaco e della tinteggiatura fanno saltare i millimetri; quindi la precisione numerica data dal numero di cifre è solo valida a fini teorici, in quanto, altri fattori, possono invalidare, almeno in parte, delle cifre, rendendole inutili.

Divisione

Se:
$$a < x < b$$
$$c < y < d$$
è:
$$\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c}$$

Esempio: calcolare $\sqrt{3} : \sqrt{2}$

$\sqrt{3} = 1,7320...$

$\sqrt{2} = 1,4142...$

$$1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321$$
$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$
$$1,7320 : 1,4143 < (\sqrt{3} : \sqrt{2}) < 1,7321 : 1,4142$$
$$1,2246 < \sqrt{3} : \sqrt{2} < 1,22479 \simeq 1,2248$$

Lasciamo qui le dispense del Prof. Rossi degli anni 1936-37, le quali propongono una divisione abbreviata per ottenere il valore più attendibile.

I moderni calcolatori elettronici, ottengono valori con molte più cifre decimali, l'ultima delle quali è arrotondata e forniscono valori ancor più attendi-

bili. Però concettualmente il problema di esprimere il valore attendibile di una certa grandezza rimane, e non possiamo dire numericamente risolto. Infatti su questo problema, che torneremo, occorre introdurre il concetto di precisione, di tolleranza, di campo di oscillazione.

Moltiplicazione abbreviata. per difetto e per eccesso, in cui si terrà conto però dei riporti dai riporti provenienti dalle cifre trascurate.

I riporti si prendono per difetto nel primo calcolo e per eccesso nel secondo.

```
 .17320          .17321
  24141           34141
 ------          ------
 17320           17321
  6928            6929
   173             174
    69              70
     3               6
 ------          ------
 2,4493          2,4500
```

quindi $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \underline{2,449}\ldots$

In pratica per la maggior parte dei calcoli di applicazione si fa una sola moltiplicazione che si può chiamare moltiplicazione compensata: essa serve per ottenere, col minor dispendio di calcolo, il valore più attendibile che può risultare per

valore è più attendibile e che può essere per difetto e per eccesso, ma sempre molto vicino al valore esatto del prodotto.

Esempio: calcolare il valore più attendibile di: $\sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$

$\sqrt{10} = 3,1623$ (per eccesso)
$\sqrt{8} = 2,8284$ (per difetto)

$$
\begin{array}{r}
3,1623 \\
48282 \\
\hline
63246 \\
25298 \\
632 \\
253 \\
12 \\
\hline
8,9441
\end{array}
$$

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{8} \cong 8,9441$$

$$\left(\sqrt{10} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{80} = 8,94427191 \right)$$

Moltiplicazione

se:
$$a < x < b$$
$$c < y < d$$
è:
$$ac < xy < bd$$

Esempio: calcolare $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$\sqrt{2} = 1,4142$

$\sqrt{3} = 1,7320$

$$1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321$$
$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$
$$1,7320 \times 1,4142 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} < 1,7321 \times 1,4143$$

```
 1,7320 X           1.7321 . X
 1.4142             1.4143
 ---------------    ---------------
 17320|             17321|
  69280|0            6928|4
   173|20             173|21
    69|280             69|284
     3|4640             5|1963
 ---------------    ---------------
 2,4493|9440 < √3·√2 < 2,4497|0903
```

quindi $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2,449\ldots$

E' bene osservare quante cifre inutili sono state trascinate nei due calcoli eseguiti con la

moltiplicazione ordinaria con perdita di tempo, mentre poche, tre sole sono le cifre decimali sicure utilizzabili per il prodotto esatto.

Pertanto si vede l'opportunità di trovare un procedimento di calcolo che eviti le cifre inutili, cioè quelle che stanno a destra delle linee verticali. Ciò si può fare utilizzando la così detta:

Per queste due ragioni è necessario trattare di calcolo numerico approssimato.

Passiamo ora in rassegna le quattro operazioni elementari con numeri approssimati per difetto e per eccesso.

Addizione

se: $a < x < b$

$c < y < d$

è: $(a+c) < (x+y) < (b+d)$

Esempio: Calcolare $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$\sqrt{2} = 1,4142 \ldots\ldots$

$\sqrt{3} = 1,7320 \ldots\ldots$

$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$

$1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321$

$3,1462 < (\sqrt{2}+\sqrt{3}) < 3,1464$

quindi: $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 3,146$

Sottrazione

Sottrazione

se:

$$a < x < b$$

$$c < y < d$$

è:

$$(a-d) < (x-y) < (b-c)$$

Esempio

Calcolare $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\sqrt{3} = 1,7320$

$\sqrt{2} = 1,4142$

$$1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321$$

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

$$(1,7320 - 1,4143) < (\sqrt{3} - \sqrt{2}) < (1,7321 - 1,4142)$$

$$0,3177 < (\sqrt{3} - \sqrt{2}) < 0,3179$$

quindi: $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0,317......$

Calcolo numerico approssimato (1)

L'introduzione dei numeri irrazionali ci pone ora nella necessità di stabilire in qual modo si dovranno eseguire le operazioni elementari su di essi.

E' evidente che essendo un numero irrazionale espresso da un numero decimale, illimitato non periodico, cioè da un numero decimale avente infinite cifre senza legge di periodicità, le operazioni non si potranno eseguire sui numeri irrazionali stessi, giacché ogni nostra attività è limitata nello spazio e nel tempo, ma solo sui loro valori approssimati per difetto e per eccesso.

Vi è inoltre, un'altra ragione che ci induce a considerare valori approssimati anziché valori esatti.

La misura di ogni grandezza esistente nella natura si fa per mezzo di appositi strumenti che

natura si fa per mezzo di appositi strumenti che non danno mai un risultato del tutto preciso a causa degli inevitabili errori di costruzione, ai quali si aggiungono ancora gli errori di osservazione dovuti alla imperfezione dei nostri organi sensitivi.

---

1) Dalle dispense del Prof. Rossi gratuitamente date agli allievi del Regio Istituto Tecnico Galileo Galilei sez. Geometri anni 1936/37 - 1937/38 - FI.

Costruzione approssimata della circonferenza rettificata

Data la semicirconferenza $\widehat{AB}$ di raggio r, si riporta, sulla tangente in A, il segmento $\overline{AC} = 3r$, sulla tangente in B si costruisce il segmento $\overline{BD}$ (ove $B\hat{O}D = 30°$),

$\overline{CD} \doteq r\pi$

$\overline{BD} = r/\sqrt{3} = \overline{AE}$; $\overline{ED} = 2r$;

$$\overline{EC} = (\overline{AC} - \overline{AE}) = (3r - r/\sqrt{3})$$

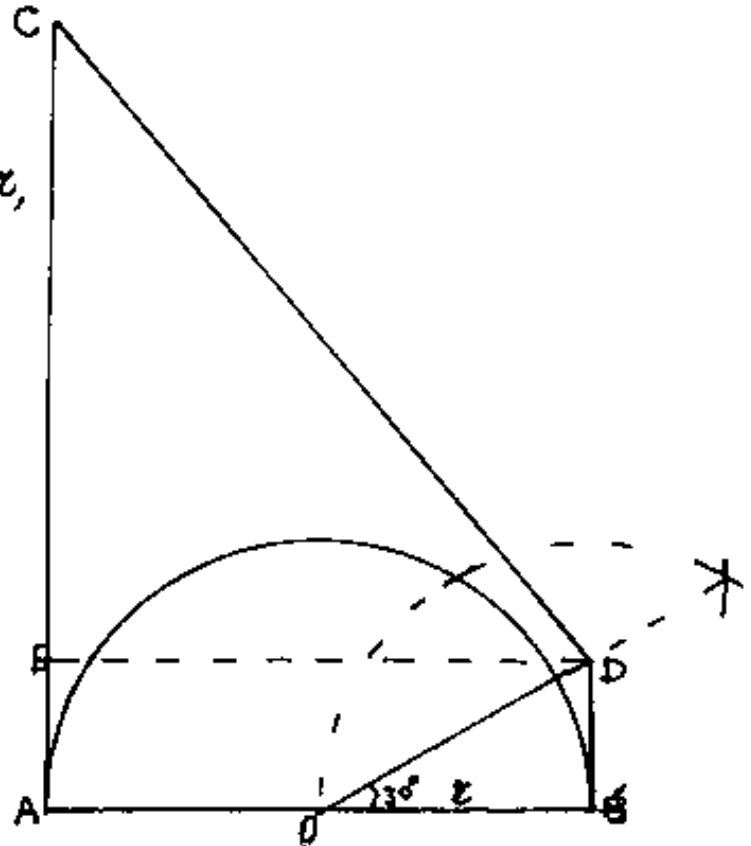
$$\overline{CD} = \sqrt{\overline{ED}^2 + \overline{EC}^2}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{4r^2 + r^2\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{r^2\left(4 + 9 + \frac{1}{3} - \frac{6}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$\overline{CD} = r\sqrt{\frac{39+1}{3} - \frac{6}{\sqrt{3}}} = \boxed{\overline{CD} = r\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}}$$

$$\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = \underline{3{,}1415}33339$$

$$\pi = 3{,}141592$$

$\pi = \underline{3,1415}92$

si può quindi dire: $\overline{CD} \simeq r\pi$

con errore alla 5 cifra decimale cioè: $\frac{0,593}{10000} r$.

con raggio 1 metro l'errore è $\sim \frac{1}{30}$ di millimetro

Triangoli Eroniani

Diconsi triangoli eroniani quei triangoli in cui i lati e l'area sono espressi da numeri razionali.

E' ovvio quindi che anche le altezze, relative ai lati, nonché i raggi dei cerchi inscritti, circoscritti ed exinscritti sono espressi da numeri razionali. Gli angoli sono detti aritmetici chiamando aritmetici quegli angoli le cui funzioni trigonometriche sono espresse da numeri razionali.

Verso l'anno 599 D.C. BRAHMAGUPTA, fissò i lati di un triangolo eroniano con:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right) \quad ; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+c\right) \quad ; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}-c\right) \quad ;$$

ove: a, b, c, sono numeri razionali.

Un triangolo pitagorico, o composto di triangoli pitagorici è eroniano.

Per esempio il triangolo di lati 4 - 13 - 15 ove l'altezza rispetto al lato 4 è 12 cioè l'Area = 24 ottenuto per differenza dai triangoli pitagorici 9 - 12 - 15 e 5 - 12 - 13, è eroniano.

ove però 15 - 20 - 25 non è "base" perchè multiplo di 3 - 4 - 5 per 5.

Con ipotenusa 65 oltre i triangoli base: 16 - 63 - 65 e 33 - 56 - 65 si hanno i triangoli: 25 - 60 - 65 che è multiplo di 5 - 12 - 13 per 5, e 39 - 52 - 65 che è multiplo di 3 - 4 - 5 per 13.

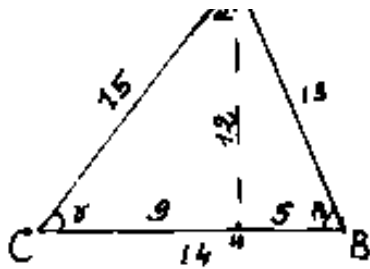
Fra i triangoli base, oltre quelli elencati, con ipotenusa compresa fra 1 e 100, vi sono: 28 - 45 - 53 ; 48 - 55 - 73 ; 39 - 80 - 89 ; 65 - 72 - 97 ; 20 - 99 - 101.

Un triangolo scomponibile in triangoli pitagorici è il triangolo 13 - 14 - 15 nel quale l'altezza relativa al lato 14 è 12 e lo divide in 9 e 5. L'area di questo triangolo è $(14 \times 12)\frac{1}{2} = 84$;

A

$\alpha = 59° 29' 23'', 14$

$\beta = 67° \; 22' \; 48'',49$

$\gamma = 53° \; 07' \; 48'',37$

$180° \; 0' \; 0''$

Col principio del cateto comune si possono costruire triangoli aventi i lati e l'area espressi da numeri interi; per esempio il triangolo di lati 17-25-28 con altezza 15 area = 210.

I triangoli pitagorici che hanno l'ipotenusa numero primo, sono detti elementari.

I triangoli pitagorici che pur essendo triangoli base (cioè i lati non ammettono un divisore comune) tuttavia l'ipotenusa non è un numero primo, ma è divisibile; questi triangoli sono detti composti.

Fra i triangoli composti ve ne sono alcuni che hanno l'ipotenusa comune; per esempio:

16 - 63 - 65 ; 33 - 56 - 65 ; 13 - 84 - 85 ; 36 - 77 - 85 .

Poiché ogni numero quadrato perfetto è la somma progressiva dei numeri dispari da 1 a $2I-1$ per ottenere I^2, cioè: $(2I-1)$ è il massimo numero dispari utilizzato, che può e non può essere quadrato perfetto, se lo è esiste un triangolo pitagorico $(N = I-1$; $M^2 = (2I-1)$; $D = (2I-1)$, possiamo fare la somma a ritroso dei numeri dispari cioè $D + D-2 + D-4 + \cdots = S$ ed

avremo che $S_i' = (2iI - i^2)$ per i variabile da 1 ad $\frac{1}{2}I$. se S_i è quadrato perfetto si ha un triangolo pitagorico di ipotenusa I.

Per esempio per $I = 25$

$S_1 = (2 \cdot 25 - 1) = 49 = 7^2$ per cui: 7 - 24 - 25

...

$S_5 = (10 \cdot 25 - 25) = 225 = 15^2$ " " 15 - 20 - 25

Se invece consideriamo triangoli rettangoli pita=
gorici in cui l'angolo opposto al cateto minore sia
piccolissimo, utilizzando le prime formule: $N = I - 1$;
$I = \frac{M^2+1}{2}$; ricordando che M deve essere dispari,
posto $M = 99999$; $I = 4999900001$; $N = 4999900000$;

$N^2 = 24999000010000000000$
$M^2 = 9999800001$
$I^2 = 24999000019999800001$

$$\frac{4999900000}{99999} = (49999{,}49999) = \text{tang}\,(89°\ 59'\ 55'',87)$$
$$= \text{cotg}\,(0°\ 0'\ 4'',13)$$

Con ciò si è voluto dimostrare che si possono
trovare triangoli rettangoli pitagorici prossimi
quanto si vuole a triangoli rettangoli ad angoli
prefissati. Col sistema del cateto comune, ab=
biamo visto (e disegnato per $M = 12$) i vari triango=
li pitagorici. Per esempio per avere un triangolo
pitagorico i cui angoli si approssimino a 30°:

pitagorico i cui angoli si approssimino a 30°; 60° e 90° si può prendere:

$M = 10864$; $N = 6273$; $I = 12545$;

$(M^2 + N^2 = I^2) = (118026496 + 39350529 = 157377025)$

$$\frac{M}{N} = \frac{10864}{6273} = \tan(59°\ 59'\ 50'',51) = \cot(30°\ 00'\ 09'',49).$$

$$\frac{10864}{6273} = 1,73186673$$ ove $\sqrt{3} = 1,732050808$ ci dice che possono trovarsi triangoli migliori —.

frazione precedente aumentato del numeratore precedente e per denominatore la somma dei precedenti numeratore e denominatore. Cioè se $\frac{N}{D}$ è una frazione, quella seguente è $\frac{2D+N}{N+D}$. abbiamo così:

$\frac{1}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{41}{29}$; $\frac{99}{70}$; $\frac{239}{169}$; $\frac{577}{408}$; $\frac{1393}{985}$; $\frac{3363}{2378}$; ...

1 ; 1,5 ; 1,4 ; $1,41\overline{6}$; 1,41379310 3 ; 1,41428571 4 ; 1,41420118 3 ; 1,414215686 ; 1,41423198 ; 1,41421362 5

$\sqrt{2} = 1,4142135623 73\ldots$ (vedi Vol. II - frazioni continue)

Però nessuna di queste frazioni ha per termini lati di triangoli pitagorici. Il triangolo pitagorico vicino a 45° con cateti fra 100,000 e 200.000 è:

$137903^2 = 19017237409$ +

$137904^2 = 19017513216$

$195025^2 = 38034750625$

$\frac{137904}{137903} = tg\,(45°\ 00'\ 00'',75)$

$$\frac{[illegible]}{137903} = [illegible]$$

$$\frac{137903}{137904} = \operatorname{tg}(44° 59' 59'',25)$$

Si noti come a questo livello la differenza è 0,75''

$$\frac{195025}{137903} = 1,414218690$$

$$\sqrt{2} = 1,414213562$$

media 1,414219578

$$\frac{195025}{137904} = 1,414208435$$

Poiché, in un triangolo pitagorico, i cateti M ed N non potranno mai essere uguali, essendo $I = \sqrt{2}$ (non intero) e dovendo essere numeri interi essi differiranno di almeno una unità. Cioè: $M = (N - 1)$ e dovrà essere:

$$(N-1)^2 + N^2 = I^2 \quad ; \quad 2N^2 - 2N - (I^2 - 1) = 0 \; ;$$

$$N^2 - 2\frac{N}{2} - \frac{I^2 - 1}{2} = 0$$

$$N = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{I^2}{2} - \frac{1}{2}} \quad ; \quad N = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2I^2 - 1}{4}} \; ; \; N = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{2I^2 - 1}\right)$$

oppure: $I = \sqrt{2N^2 - 2N + 1}$

con questa formula troviamo: $N = 4$; $M = 3$; $I = 5$;

ma $\tan \alpha = \frac{M}{N} = \frac{3}{4}$ > $\alpha = 36°52'11'',63 = 0{,}2048\,3\pi$ rad.

20 – 21 – 29 ove $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{20}{21}\right) = \alpha = 43°36'10'',15 = 0{,}2422\pi$ rad.

119 – 120 – 169 ove $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{119}{120}\right) = \alpha = 44°45'36'',97 = 0{,}24866\pi$ rad.

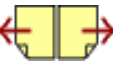
696 – 697 – 985 ove $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{696}{697}\right) = \alpha = 44°57'31'',93 = 0{,}24977\pi$ rad

4059 – 4060 – 5741 ove $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{4059}{4060}\right) = \alpha = 44°59'34'',59 = 0{,}24996079\pi$ r.

... $= 0{,}249993273\,\pi$

$23660 - 23661 - 33461$ ove $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{23660}{23661}\right) = \alpha = 44° 59' 55'',64 = 0,249993273\,\pi$;

possiamo trovare ancora triangoli pitagorici con $N > 100.000$. Si noti come: $\frac{5741}{4059} = 1,41438778$; e $\frac{5741}{4060} = 1,414039409$; $\frac{33461}{23660} = 1,41423449$; $\frac{33461}{23661} = 1,41418 3678$.

L'approssimazione di $\sqrt{2}$ per difetto e per eccesso è data dalla successione delle frazioni che hanno al numeratore il doppio del denominatore della

Lo studio dei triangoli Pitagorici ha interessato generazioni di studiosi. Le formule sono in genere date in funzione di un parametro "n" intero 1, 2, 3, ... seguente la serie naturale dei numeri, ove posti $x^2+y^2=z^2$ i lati del triangolo, secondo Pitagora abbiamo:

$$x=(2n+1) \quad ; \quad y=2n(n+1) \quad ; \quad z=n^2+(n+1)^2$$

Secondo Platone:

$$x=n^2-1 \quad ; \quad y=2n \quad ; \quad z=(n^2+1)$$

Secondo Diofanto: $(n=2,3,4\ldots)$ (esclude l'unità)

Siano $a>b$ due numeri interi positivi

$$x=a^2-b^2 \quad ; \quad y=2ab \quad ; \quad z=a^2+b^2$$

Queste ultime formule sono dette generali:

$$b^2=(a^2-x)=z-a^2 \quad > \quad a^2=\left(\frac{z+x}{2}\right) \quad ; \quad b^2=\left(\frac{z-x}{2}\right)$$

$$y=2\sqrt{\frac{z^2-x^2}{4}} \quad > \quad x^2+y^2=z^2$$ (equazione del cono con vertice nell'origine)

Un triangolo pitagorico ha le funzioni trigono-

metriche seno, coseno, e tangente espresse da numeri razionali. E' detto anche triangolo aritmetico.

Considerando che l'angolo di 45° = $\pi/4$ rad è il limite al quale si scambiano i valori dei cateti, ricordando che: $sen(\alpha) = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{M}{I}$;

$cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{tang^2\alpha+1}} = \frac{N}{I}$; $tang\,\alpha = \frac{M}{N}$;

basi: $\left((2n-1)^2 = 4n^2-4n+1 = 2(2n^2-2n)+1\right)$, ma la somma di due numeri della stessa parità è sempre pari, perciò i cateti di una terna pitagorica "base", saranno uno pari ed uno dispari.

Col metodo del cateto comune troviamo tutte le terne pitagoriche che hanno in comune quel cateto; e se vi sono terne che non hanno sottomultipli in comune quelle sono terne "base": (5-12-13; 12-35-37) sul cateto 12 abbiamo due terne base.

Verifichiamo che sul cateto $M = 14$; $M^2 = 196$; non vi sono terne pitagoriche "basi".

$(I-N) =$	1	2	3	4	5	6	7
$(I+N) =$	196	98	196/3	49	196/5	98/3	28
$2I =$	197	100	205/3	53	221/5	116/3	35
$I =$	197/2	50	205/6	53/2	221/10	58/3	35/2
$N =$	195/2	48	187/6	45/2	171/10	40/3	21/2
$M =$	28/2	14	84/6	28/2	140/10	42/3	28/2

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	140/10	42/3	28/2

(1-N) =	8	9	10	11	12	13	14
(1+N) =	49/2	196/9	196/10	196/11	49/3	196/13	14
2I =	65/2	277/9	296/10	317/11	85/3	365/13	28
I =	65/4	277/18	148/10	317/22	85/6	365/26	14
N =	33/4	115/18	48/10	75/22	13/6	27/26	0
M =	56/4	252/18	140/10	308/22	84/6	364/26	14.

Riportiamo un elenco di terne "base" di numeri pitagorici, ricordando che iniziamo col cateto minore quindi occorre scorrere i primi due numeri per avere entrambi i cateti. Nelle colonne a fianco abbiamo

3-4-5	6-8-10	9-12-15	12-16-20	15-20-25
5-12-13	10-24-26	15-36-39	20-48-52	25-60-65
7-24-25	14-48-50	21-72-75	28-96-100	35-120-125
8-15-17	16-30-34	24-45-51	32-60-68	40-75-85
9-40-41	18-80-82	27-120-123	36-160-164	45-200-205
11-60-61	22-120-122	33-180-183	44-240-244	55-300-305
12-35-37	24-70-74	36-105-111	48-140-148	60-175-185
13-84-85	26-168-170	39-252-255	52-336-340	65-420-425
15-112-113	30-224-226	45-336-339	60-448-452	75-560-565
16-63-65	32-126-130	48-189-195	64-252-260	80-315-325
17-144-145	34-288-290	51-432-435	68-576-580	85-720-725
19-180-181	38-360-362	57-540-543	76-720-724	95-900-905
20-21-29	40-42-58	60-63-87	80-84-116	100-105-145
21-220-221	42-440-442	63-660-663	84-880-884	105-1100-1105

moltiplicato le terne pitagoriche "base" per 2, 3, 4, 5

ottenendo altre terne pitagoriche, ove scorrendo i primi due numeri possiamo trovare cateti uguali, o scorrendo i terzi numeri possiamo trovare ipotenuse uguali.

-Si noti che l'ipotenusa di una terna pitagorica "base" è sempre dispari; infatti; "i quadrati dei numeri sono sempre della stessa parità delle

Però assunto M intero e quindi intero il suo quadrato, con "p" intero, anche il rapporto: $\frac{M^2}{p} = q$, è razionale e sono razionali: $I = \frac{p^2+M^2}{2p}$ ed $N = \frac{M^2-p^2}{2p}$.
quindi la terna $2pM$; M^2-p^2 ; M^2+p^2 ; è certamente una terna pitagorica.

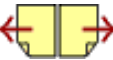
Come Esempio, prendiamo ancora $M = 12$;
$M^2 = 144$ e "p" facciamolo variare per numeri dispari.

$p = (I - n) =$	1	3	5	7	9	11
$q = \frac{M^2}{p} = (I+n) =$	144	48	144/5	144/7	16	144/11
$2I =$	145	51	169/5	193/7	25	265/11
$I =$	145/2	51/2	169/10	193/14	35/2	265/22
$(I - p) = N =$	143/2	45/2	119/10	95/14	7/2	23/22
$M =$	24/2	24/2	120/10	168/14	24/2	264/22
$I_1 =$	145	17	169	193	25	265
$N_1 =$	143	15	119	95	7	23
$M_1 =$	24	8	120	168	24	264

— —

Le terne di numeri pitagorici base, che abbiamo otte

nuto, sono in parte ottenibili con le formule preceden=ti (le prime due e le ultime due), mentre le terne: 169 - 119 - 120 e 193 - 95 - 168 non sono ottenibili con le due formule precedenti, salvo prendere $M = 120$ ed $a = 49$ per la prima ed $M = 168$ ed $a = 98$ per la seconda.

Con $M < 7$ non si hanno nuove terne pitagoriche "base".

Triangoli pitagorici aventi un cateto comune M.

Se I è l'ipotenusa ed N l'altro cateto si ha:

$$I^2 - N^2 = M^2$$

cioè: $(I - N)(I + N) = M^2$

con ciò abbiamo scomposto M^2 (noto) in due fattori:
$(I-N) = p$; $(I+N) = q$; ove $p \cdot q = M^2$.
Sommando i due fattori: $(I-N)+(I+N) = 2I = p+q$
avremo: $\boxed{\frac{M^2}{p} = q}$; $\boxed{\frac{(p+q)}{2} = I}$; $\boxed{N = I - p}$

Anche qui sorge il problema della parità, infatti dovendo l'ipotenusa I essere un numero intero, p e q debbono essere della stessa parità; e p deve essere della stessa parità di M.

Esempio: sia $M = 12$ ed $M^2 = 144$

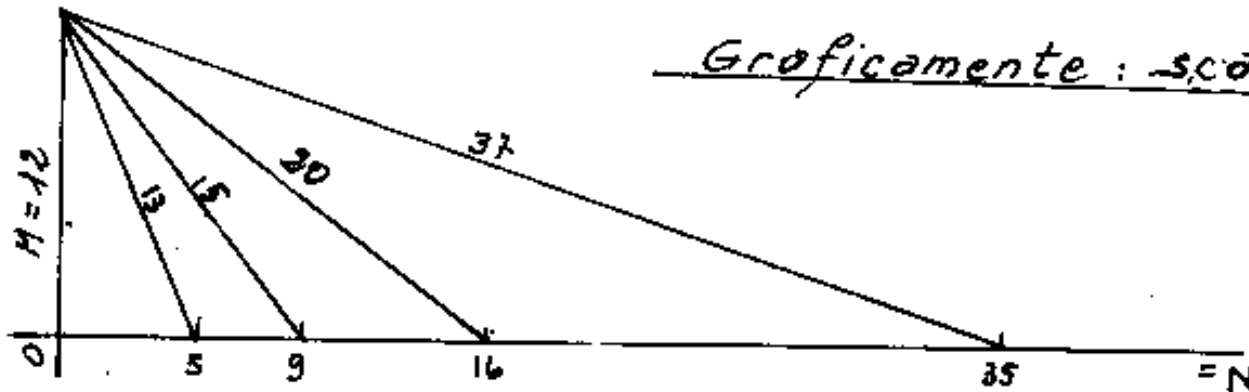
$p = (I - n) =$	2	4	6	8	12
$q = \frac{M^2}{p} = (I + n) =$	72	36	24	18	12

$q = \frac{M^2}{p} = (I+n) =$	72	36	24	18	12
$2I =$	74	40	30	26	24
$I =$	37	20	15	13	12
$(I-p) = N =$	35	16	9	5	0
$M =$	12	12	12	12	12

Graficamente : scala 1:100 m.

M = 12

37 30 15 13

0 5 9 16 35 = N

Ma la serie dei triangoli pitagorici base, non e' completa, poniamo quindi : $N = I - 2$

avremo : $\cancel{I^2} = M^2 + \cancel{I^2} - 4I + 4$

$$I = \frac{M^2+4}{4} \quad ; \quad I = \left(\frac{M}{2}\right)^2 + 1$$

Cioe' M deve essere pari, e solo alternativamente si hanno triangoli base intervallati dai triangoli simili (1) ottenuti da M dispari moltiplicato per 2, come si può vedere dalla tabella a fianco.

M	N	I	
2	0	2	
4	3	5	
6	8	10	s
8	15	17	
10	24	26	s
12	35	37	
14	48	50	s
16	63	65	
18	80	82	s
20	99	101	
22	120	122	s
24	143	145	
26	168	170	s
28	195	197	
30	224	226	s

Qualora si generalizzi la formula:

$$N = I - a \quad ; \quad \frac{M^2+a^2}{2a} = I$$

e poniamo che M sia multiplo di "a" perciò:

$$I = \frac{(Ka)^2+a^2}{2a} = \left(\frac{K^2+1}{2}\right)a$$

otteniamo triangoli simili con rapporto "a".(2)

---

(1) abbiamo affiancata una s alle terne di triangoli

(1) abbiamo affiancato uno a due terne di triangoli pitagorici simili elencati in tabella.

—— ——

(2) Le formule che abbiamo utilizzato portano a triangoli pitagorici base in cui un cateto differisce di 1 o di 2 dall'ipotenusa; però esistono triangoli pitagorici base che non hanno tali restrizioni, (per es. 95 - 168 - 193), ne vedremo le determinazioni.

Triangoli Pitagorici

Diconsi pitagorici quei triangoli rettangoli nei quali, le dimensioni dei cateti e dell'ipotenusa, sono espresse da numeri interi.

Detti M ed N i cateti ed I l'ipotenusa:

$$I^2 = M^2 + N^2$$

occorre attribuire un'altra correlazione fra I, M ed N, per determinare la legge di un insieme di triangoli pitagorici.

Poniamo: $\boxed{N = I - 1}$

avremo: $$I^2 = M^2 + I^2 - 2I + 1$$

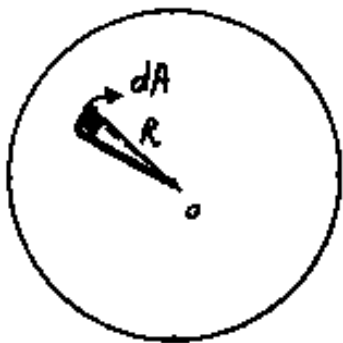
$$\boxed{I = \frac{M^2 + 1}{2}}$$

Affinché I sia intero, il numeratore deve essere pari, cioè M deve essere dispari; si hanno così le terne: (imponendo ad M l'ordine crescente dei numeri dispari) della tabella a fianco; costituita da triangoli pitagorici base, nel senso

M	N	I
1	0	1
3	4	5

3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
17	144	145
19	180	181
21	220	221
23	264	265
25	312	313
27	364	365
29	420	421

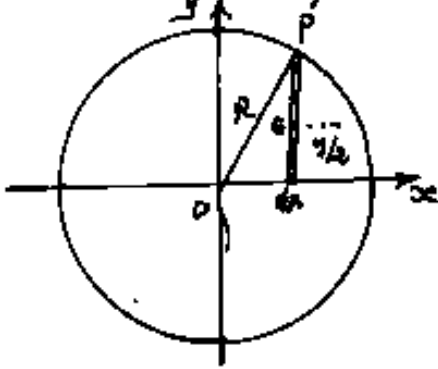
che i tre numeri non ammettono un fattore comune. Per ciascuna terna è possibile ottenere la serie infinita di triangoli simili, moltiplicando i tre valori per un numero. (p.es. 3,4,5, dà luogo a: 6,8,10 ; 9,12,15 ; 12,16,20; ecc)

Sommando i vari tratti infinitesimi si ha la dimostrazione del I° teorema di Archimede.

Consideriamo ora un elementino di superficie sferica così piccolo da poterlo ritenere piano, esso dista dal centro O il raggio R., è una piramide elementare

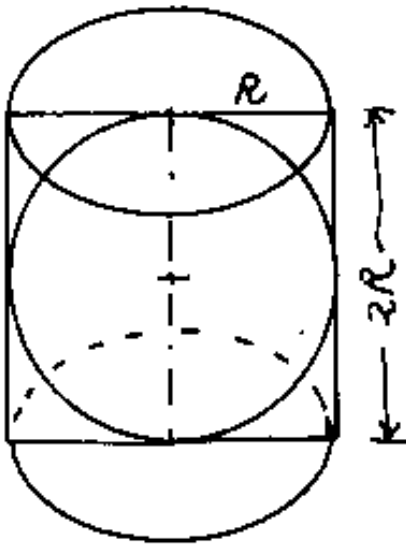
il cui volume: $dV = \frac{1}{3}R \cdot dA$, se sommiamo tutte le piramidi possibili avremo che $R/3$ può essere messo in evidenza, mentre la somma delle aree infinitesime "dA" è la superficie sferica $4R^2\pi$ per cui il volume della sfera: $\boxed{V = \frac{4}{3}R^3\pi}$

Che possiamo scrivere: $\frac{2}{3}(R^2\pi)(2R) = V = (\frac{2}{3}$cilindro$)$ e resta dimostrato il secondo teorema di Archimede.

Ma c'è ancora un metodo migliore per calcolare il volume della sfera. come solido di rotazione di un semi=

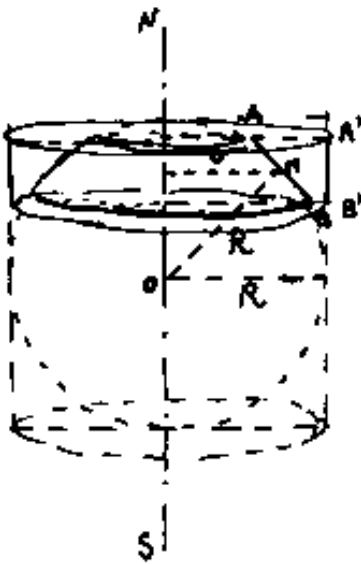
lume della sfera, come solido di rotazione di un semi= cerchio, cioè come momento statico dell'area rispetto ad un diametro per 2π.

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \; ; \quad S_x = \int_{-R}^{+R} \frac{y}{2} \cdot dA = \int_{-R}^{+R} \frac{y}{2} \cdot y\,dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{+R} y^2\,dx$$

$$S_x = \int_{0}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = R^3 - \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}R^3$$

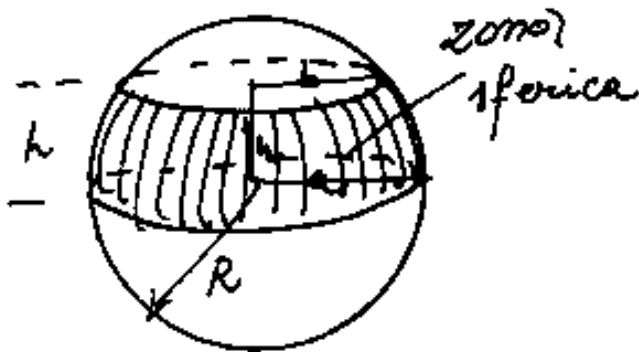
$$V = S_x \cdot 2\pi = \frac{2}{3}R^3 \cdot 2\pi = \boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Superficie laterale del cilindro:

$Al = (2R\pi)(2R) = 4R^2\pi$ = Area laterale

per il I° teorema di Archimede.

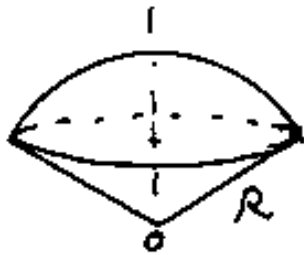
è uguale all'area della superficie sferica che risulta pari a "Quattro volte l'area del cerchio massimo"

Consideriamo il tratto $\widehat{AB} \simeq \overline{AB}$ sulla circonferenza della sfera così piccolo da considerarlo rettilineo. Esso, ruotando intorno all'asse NS genererà una zona sferica che, data la piccolezza di AB, possiamo equiparare ad un tronco di cono la cui superficie laterale sarà: $\overline{AB}\, 2r\pi$, ove r è la distanza dall'asse del punto medio di $\overline{AB}$, M. Se proiettiamo $\overline{AB}$ sulla su=

perficie cilindrica avremo il tratto piccolissimo $\overline{A'B'}$ che ruotando intorno all'asse NS genererà la superficie cilindrica di area $A'B'\,2R\pi$. Per similitudine di triangoli si ha $R : r = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ da cui $R\,\overline{A'B'} = r\,\overline{AB}$ cioè l'area della zona sferica equivale all'area della superficie cilindrica corrispondente.

zona sferica

è la parte di superficie sferica intermedia a due calotte con basi parallele

Area della superficie di una zona sferica $= 2\pi R h$.

$V = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2)$ (segmento a due piani)

Settori sferici

Solidi generati dalla ruotazione di un settore circolare attorno ad un diametro del cerchio cui appartiene il settore. Volume $= \frac{2R^2}{3} f \pi$.

I° TEOREMA di Archimede

L'area della superficie sferica è uguale all'area laterale del cilindro equilatero cir-

all'area laterale del cilindro equilatero circ.
coscritto

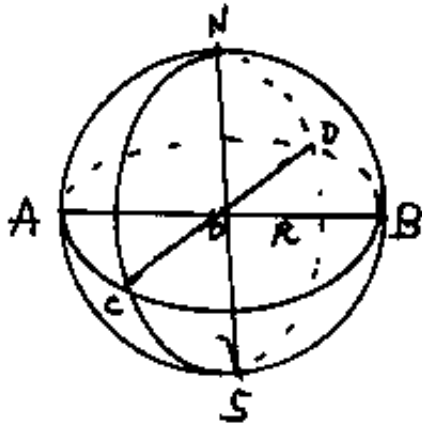
II° Teorema di Archimede

Il volume di una sfera è uguale ai due terzi del volume del cilindro equilatero circoscritto

Archimede - siracusano - (287 - 212 a.C.)

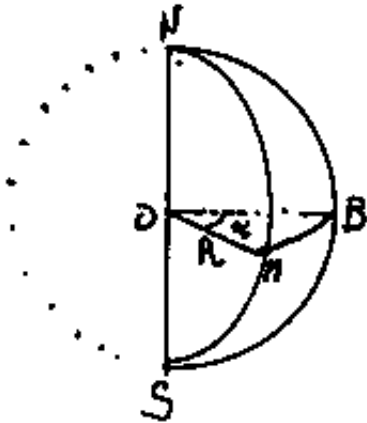
La sfera

area $= 4\pi R^2$; volume $= \frac{4}{3}\pi R^3$;

Nomenclatura

R = raggio $= \frac{\overline{AB}}{2}$; O = centro

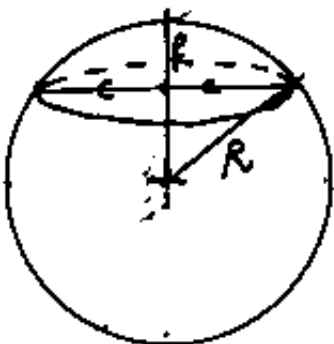
ACBD = cerchio massimo orizzontale (equatore)

CNDS = " " verticale (meridiano)

N ; S = vertici o poli

Spicchio sferico

Spicchio sferico = il solido delimitato dai semicerchi NMS e NBS e dal fuso sferico NMSBN.

Se S_1 = area della superficie sferica; l'area del fuso = $S_F = \frac{S_1 \alpha^\circ}{360^\circ}$

Se V_1 = volume sfera, il volume dello spicchio = $V_s = \frac{V_1 \alpha^\circ}{360^\circ}$

Calotta sferica

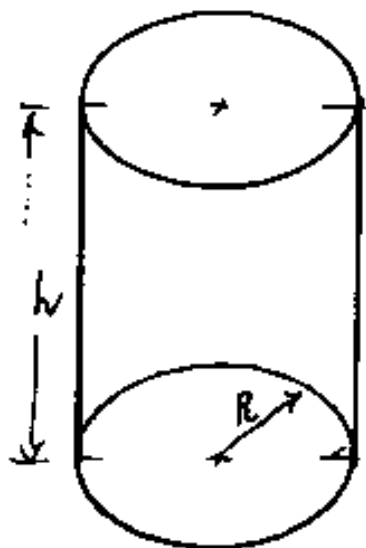
Un piano divide la superficie sferica in due parti dette calotte.

L'area di una calotta $A = 2R\pi f$

L'area di una calotta $A_1 = 2R\pi f$

L'area dell'altra calotta $A_2 = (2R-f)2R\pi = 4R^2\pi - 2R\pi f$.
la calotta è solo superficie.

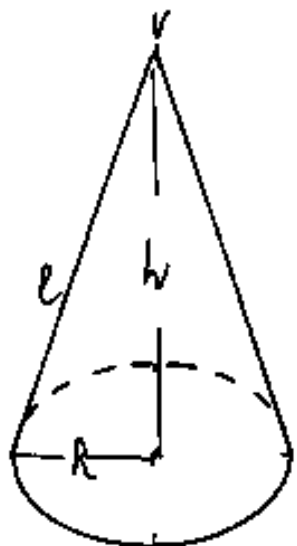
<u>Segmento sferico</u> è il solido delimitato da una calotta sferica e dal piano che, sezionando la sfera, ha generato la calotta. volume segmento $V = \frac{\pi}{3} \cdot f^2(3R-f)$

cilindro

Area base $= R^2\pi = A_b$

Area della superficie laterale $= 2hR\pi = A_l$

Area totale $A_t = A_l + 2A_b$

volume $= (A_b)\cdot h$

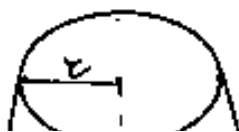
analogia col prisma

cono

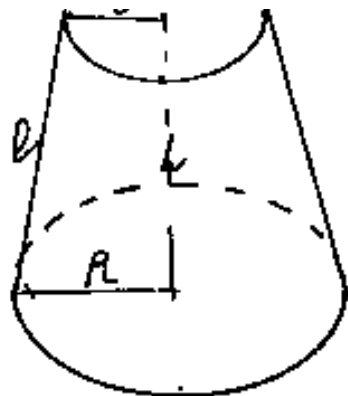
Area base $= R^2\pi = A_b$

Area della superficie laterale $= A_l = lR\pi$

Area totale $= A_l + A_b$

Volume $= \dfrac{A_b h}{3} = \dfrac{hR^2\pi}{3}$

analogia con la piramide

Tronco di cono

Area base maggiore $A_b = R^2\pi$

Area base maggiore $A_b = R^2\pi$

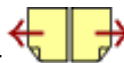
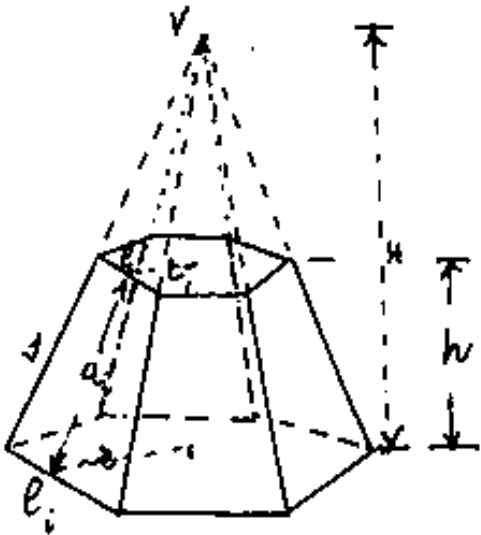
" " minore $A_{b_1} = r^2\pi$

$l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$ = generatrice

Area della superficie laterale $A_l = l\pi(R+r)$

Area totale $= A_t = A_l + A_b + A_{b_1}$

Volume $= V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

analogia col tronco di piramide.

Per il tronco di piramide, affinché la figura del solido sia definita, occorre che oltre l'altezza h sia possibile definire l'altezza H della piramide di provenienza. Se il tronco di piramide è regolare basta l = lato di base, n = numero dei lati di base; l_1 = lato della base superiore; h = altezza

avremo: $l_1 : (H-h) = l : H \Rightarrow l_1 H = lH - lh$

$$H = \left(\frac{l}{l-l_1}\right) h$$

in base ad n è possibile calcolare r = raggio del cerchio inscritto quindi l'altezza "a" delle facce trapezie sarà: $a = \sqrt{h^2 + (r - r_1)^2}$ da cui l'area di una faccia $= \frac{l + l_1}{2} a$ e l'area della superficie laterale $A_l = n a \left(\frac{l + l_1}{2}\right)$

l'area delle basi sarà: $A_b = \frac{n r l}{2}$ $A_{b_1} = \frac{n r_1 l_1}{2}$

l'area Totale $A_t = A_l + A_b + A_{b_1}$

Il volume sarà: $\frac{1}{3}\left[A_b \cdot H - A_{b_1}(H-h)\right] = V$

che può ridursi: $V = \frac{h}{3}\left(A_b + A_{b_1} + \sqrt{A_b \cdot A_{b_1}}\right)$

regolare, (cioè se ha lati ed angoli uguali ed è inscrittibile e circoscrittibile ad una circonferenza) ed il piede dell'altezza cade al centro della base (che è centro anche delle circonferenze); si ha che anche gli spigoli, oltrechè le apoteme, sono uguali, cioè le facce sono uguali, in questo caso la piramide si dice: Piramide regolare alcuni testi dicono: Piramide regolare retta, (se è regolare è certamente retta)

La superficie laterale della piramide è data dalla somma delle aree delle singole facce.

L'area di una faccia è data dal semiprodotto del lato di base per l'apotema.

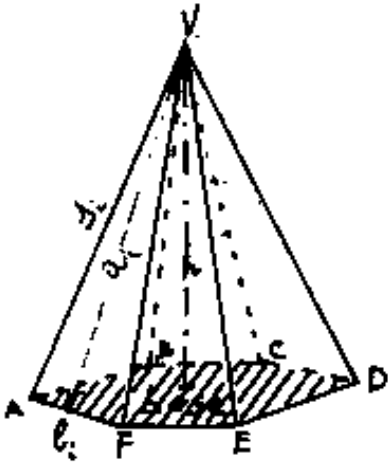
L'apotema è data da: $a = \sqrt{h^2 + \overline{PH}^2}$ ove P è il piede dell'altezza, ed H è il punto di intersezione, sul lato di base, della perpendicolare condotta ad esso da P

Ovvio che nel caso di Piramide retta l'area laterale

Ovvio che nel caso di Piramide retta l'area laterale è data dal semiperimetro di base per l'apotema.
(che solo in questo caso è uguale per tutte le facce

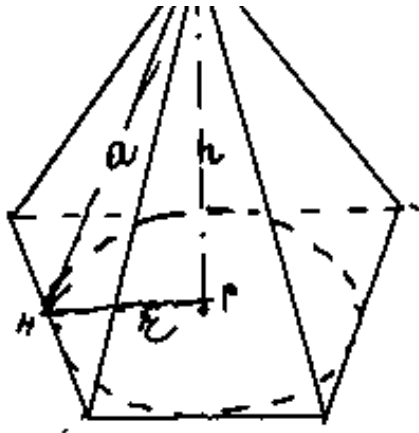
Il volume è dato da: $V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$ un terzo del prodotto dell'area di base per l'altezza
Intendendo per altezza la distanza del vertice dal piano di base. (vale quindi anche per piramidi inclinate

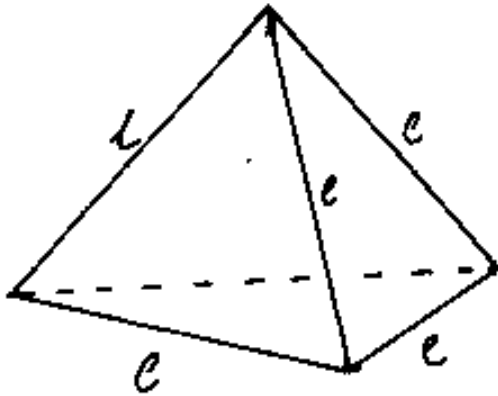
Piramide

V, a, h, l, A, F, E, D, C

Dicesi piramide il solido che si ottiene proiettando un poligono (base della piramide) da un punto V (vertice della piramide) esterno al piano del poligono. Il nome del poligono si estende alla piramide (triangolare, esagonale ecc.). Abbiamo così una parte di spazio limitata da un poligono e tanti triangoli quanti sono i lati "l" del poligono, tutti aventi in comune il vertice V della piramide. Questi triangoli sono detti facce della piramide. L'altezza "a" di questi triangoli, relativa al lato di base, è detta apotema. La distanza h del vertice dalla base è detta altezza della piramide.

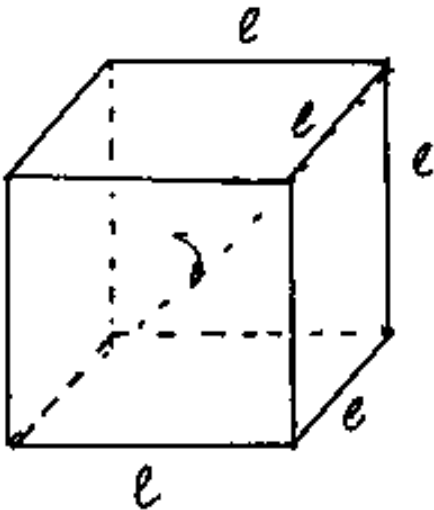
Se le apoteme sono tutte uguali avremo che:

$r = \sqrt{a^2 - h^2}$ è costante, cioè il poligono di base è circoscrittibile ad una circonferenza, (ma ciò non è suffi

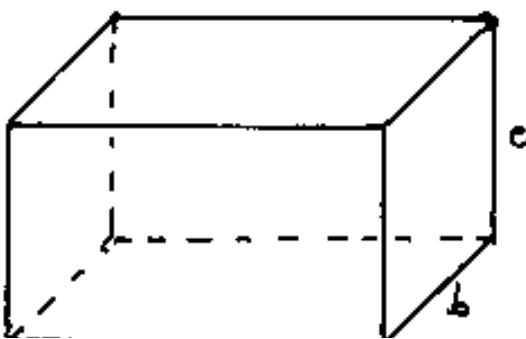
V

conferenza, (ma ciò non è sufficiente per dire che il poligono è regolare) Il piede dell'altezza della piramide cade nel centro della circonferenza e la piramide è detta: Piramide Retta. Se il poligono di base è

Solidi elementari

Tetraedro : l = spigolo del tetraedro; $a = \frac{l}{2}\sqrt{3}$ = apotema di una faccia; $H = a\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{l}{3}\sqrt{6}$ = altezza del tetraedro

Area della superficie = $l^2\sqrt{3}$

Volume = $l^3\sqrt{2}/12$.

Cubo : l = spigolo $d = l\sqrt{3}$ = d = diagonale de cubo;

Area laterale = Area totale = $6\,l^2$

Volume = l^3

Parallelepipedo a, b, c = spigoli; d = diagonale = $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

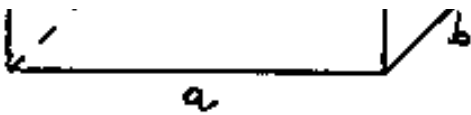
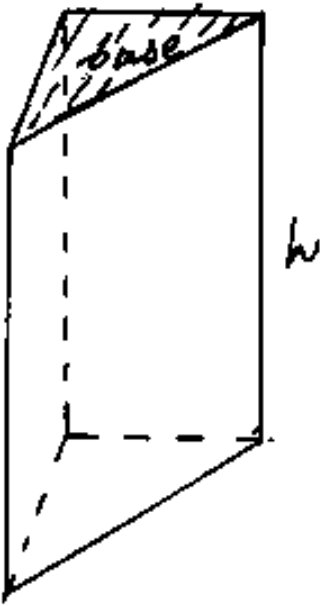
Area laterale = $2(ab + ac + bc)$

Volume = abc

a b

Volume = abc

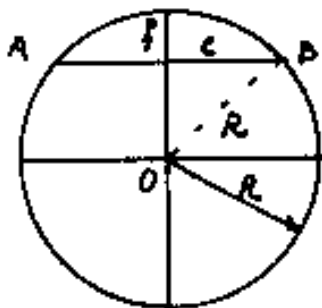
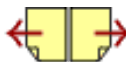
base

h

Prisma retto $2p_b$ = perimetro base

A_b = area base ; h = altezza

A_l = area della superficie laterale = $(2p_b \cdot h)$

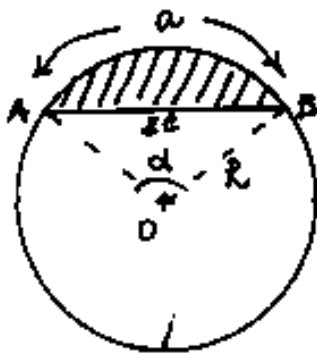
A_t = area della superficie totale = $A_l + 2A_b$

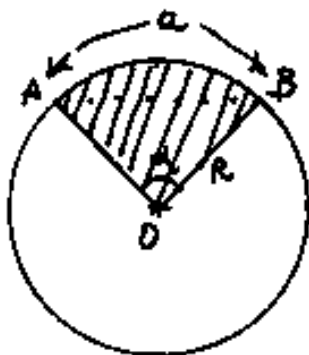
Volume = $A_b \cdot h$

Cerchio O = centro; R = raggio;

$\overline{AB} = 2c$ = corda; f = freccia; diametro = 2R

$c = \sqrt{R^2 - (R-f)^2}$; $c = \sqrt{2Rf - f^2}$;

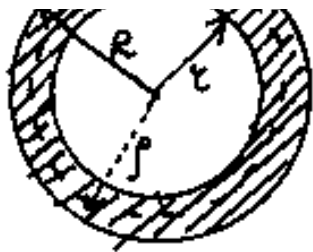
$f = R - \sqrt{R^2 - c^2}$; Area = $R^2\pi$

circonferenza = $2\pi R$; $\widehat{AB}_{rad} R$ = arco $\widehat{AB}$

Segmento circolare delimitato dall'arco $\widehat{AB}$ e dalla corda $\overline{AB}$.

$\widehat{AB} = \alpha_{rad} \cdot R = a$ Area = $\frac{aR}{2} - c\sqrt{R^2 - c^2}$

Settore circolare delimitato dall'arco $\widehat{AB}$ e dai raggi $\overline{OA}$ ed $\overline{OB}$

Area = $\frac{aR}{2}$; $a = \widehat{AB} = \alpha_{rad} R$.

se $\alpha°$ è dato in gradi: Area = $\frac{\alpha°}{360°} R^2\pi$

Corona circolare delimitata

da due circonferenze: $2R\pi$ e $2r\pi$

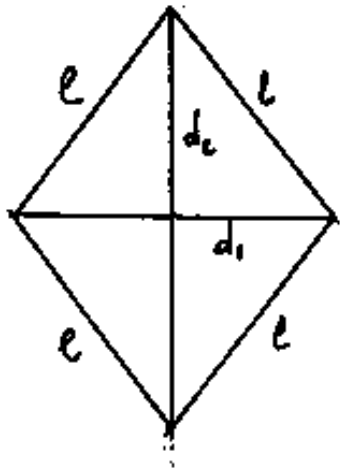
$$Area = (R^2 - r^2)\pi = (R+r)(R-r)\pi = 2\rho s \pi$$

ove: $\rho = \frac{R+r}{2}$ = raggio medio $s = (R-r)$ = spessore

$2\rho\pi$ = circonferenza media.

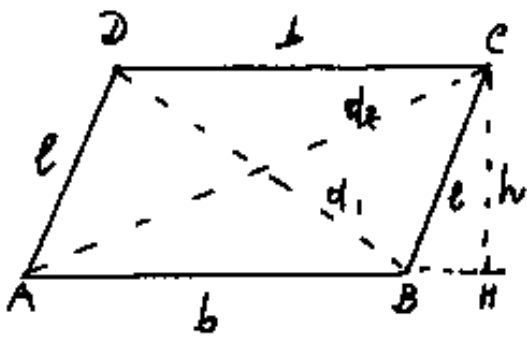
Settore di anello o corona circolare

a = arco medio $= \left(\frac{R+r}{2}\right)\alpha_{rad}$ $\qquad s = (R-r)$

Area $= as$; $\qquad$ Area $= (R^2 - r^2)\pi \frac{\alpha°}{360°}$

Rombo

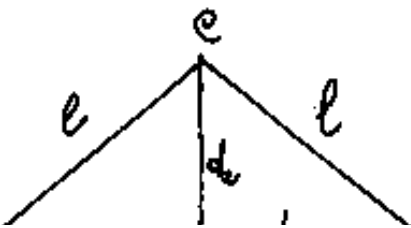
quadrilatero avente quattro lati l uguali, diagonali perpendicolari fra loro bisecanti

$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = l^2$; Area $= \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

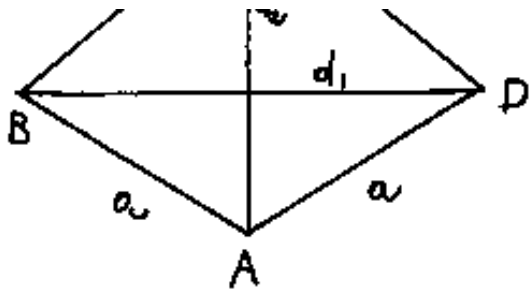
perimetro $= 4l$; (angoli opposti uguali); (lati opposti paralleli)

Parallelogramma

quadrilatero avente i lati opposti uguali e paralleli; b = lato base; l = lato obliquo; h = altezza

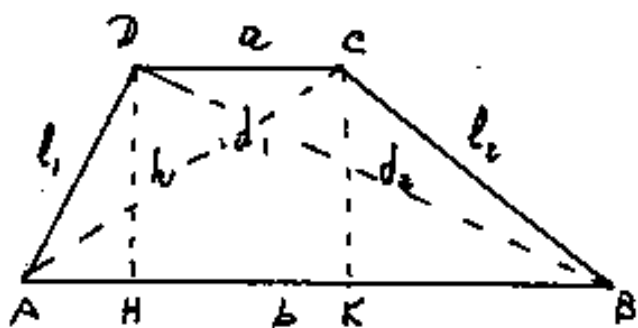
d_1, d_2 = diagonali; $\overline{BH} = \sqrt{l^2 - h^2}$; $d_1 = \sqrt{(b - \overline{BH})^2 + h^2}$; $d_2 = \sqrt{(b + \overline{BH})^2 + h^2}$

Area $= bh$; perimetro $= 2(b + l)$; (angoli opposti uguali)

Rombodeltoide (deltoide)

quadrilatero avente le diagona=

B D A d_1 a a

quadrilatero avente le diagonali diverse e perpendicolari di cui una sola biseca l'altra.

Lati adiacenti a due a due uguali; Area $= \frac{d_1 d_2}{2}$; perimetro $= 2(l+a)$ (Sono facce del deltoide dodecaedro e trapezoedro)

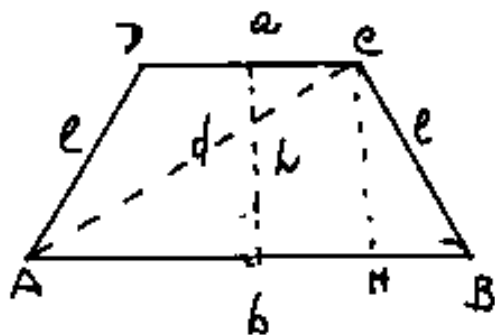
D a C
l_1 h d_1 d_2 l_2
A H b K B

<u>Trapezio</u> = quadrilatero avente due lati paralleli.

b = base maggiore ; a = base minore ; l_1, l_2 lati obliqui ; h = altezza ; d_1 ; d_2 = diagonali.

per definirlo occorrono almeno quattro elementi per es.:

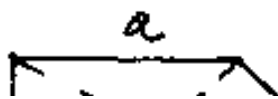
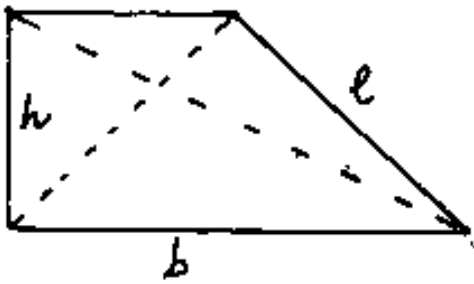
a, b, h, l_1 ; $\overline{AH} = \sqrt{l_1^2 - h^2}$; $\overline{KB} = b - a - \overline{AH}$; $l_2 = \sqrt{h^2 + \overline{KB}^2}$

$d_1 = \sqrt{(\overline{AH}+a)^2 + h^2}$; $d_2 = \sqrt{(b-AH)^2 + h^2}$; Area $= h\left(\frac{a+b}{2}\right)$; perimetro $= a + b + l_1 + l_2$.

D a C
l d h l
A b H B

<u>Trapezio isoscele</u> (lati obliqui uguali, basi parallele. l = lato obliquo b = base maggiore ; a = base minore, ed h = altezza : $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$; $\overline{HB} = \frac{b-a}{2}$

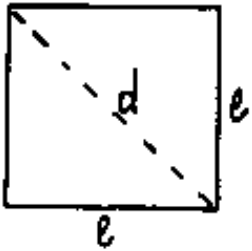
$\overline{AH} = b - \overline{HB}$; $d = \sqrt{\overline{AH}^2 + h^2}$; Area $= \left(\frac{a+b}{2}\right)h$; perimetro $= (a+b) + 2l$.

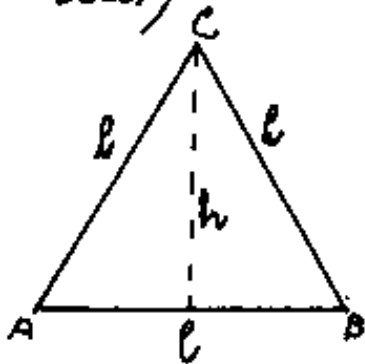
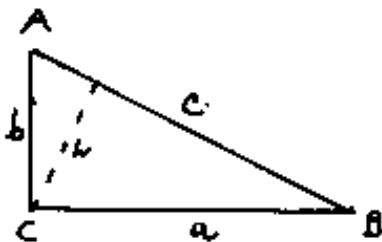
(angoli uguali alle basi) (inscrittibile in un cerchio)

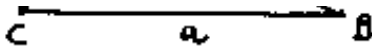
a

<u>Trapezio rettangolo</u> un

Trapezio rettangolo di lato h perpendicolare alle basi parallele a e b; l = lato obliquo.

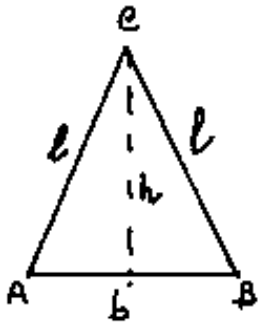
$l = \sqrt{(b-a)^2+h^2}$; area $= \left(\frac{a+b}{2}\right)h$;

perimetro $= (a+b+h+l)$ (due angoli retti adiacenti h).

Quadro riepilogativo delle figure geometriche elementari

quadrato: l = lato ; d = diagonale ; $d = l\sqrt{2}$
Area = l^2 ; $l = \frac{d}{2}\sqrt{2}$; Area = $d^2/2$;
perimetro = $4l$ = $2d\sqrt{2}$. (quattro angoli retti bisecati dalle diagonali)

Rettangolo: b = base ; h = altezza ;
d = diagonale $d = \sqrt{b^2+h^2}$; Area = bh ;
perimetro = $2(b+h)$. (Quattro angoli retti)

Triangolo equilatero; l = lato
h = altezza su $\overline{AB}$ = mediana su $\overline{AB}$ = bisettrice in C.; $h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$; Area = $\frac{lh}{2} = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$
perimetro = $3l$. (3 angoli uguali $60° = \pi/3$).

Triangolo rettangolo ; c = ipotenusa,
b, a = cateti ; $c = \sqrt{a^2+b^2}$; h = altezza

C a B

relativa all'ipotenusa; $h = \frac{ba}{c}$; Area $= \frac{ba}{2} = \frac{ch}{2}$; perimetro $= (a + b + c)$.

C l l h A b B

Triangolo isoscele; b = base; l = lato obliquo; h = altezza e mediana su $\overline{AB}$, bisettrice in C. $h = \sqrt{l^2 - (b/2)^2}$; Area $= \frac{bh}{2}$; perimetro $= (2l + b)$; (due angoli uguali alla base)

le formule trovate si prestano al calcolo di π; infatti:

essendo: $0 < \operatorname{sen} x < 1$ per x: $0 < x < \pi/2$

si ha:

$$\operatorname{sen}^{(2r+1)}(x) < \operatorname{sen}^{(2r)}(x) < \operatorname{sen}^{(2r-1)}(x)$$

integrando:

si ha:

$$\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!} < \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{(2r-2)!!}{(2r-1)!!}$$

moltiplicando la doppia disuguaglianza per $\left(\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!}\right)$

otteniamo:

$$\left(\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2r+1)} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2r)}$$

ed anche:

$$\frac{1}{(2r+1)} < \left(\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\right)^2 \frac{\pi}{2} < \frac{1}{(2r+0)}$$

posto: $(0 < \theta < 1)$

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!}\right)^2 \frac{1}{(2r+\theta)}$$

$$\pi = \left(\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!}\right)^2 \left(\frac{2r}{2r+\theta}\right) \frac{1}{r}$$

poichè: $\lim \left(\frac{2r}{2r+\theta}\right) = 1$

$$\pi = \left(\frac{\ldots}{(2\tau-1)!!}\right)\left(\frac{\ldots}{2\tau+\theta}\right)\frac{\ldots}{\tau}$$

poiché: $\lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{2\tau}{2\tau+\theta}\right)=1$

$$\lim_{\tau\to\infty}\left[\left(\frac{(2\tau)!!}{(2\tau-1)!!}\right)^2\frac{1}{\tau}\right]=\pi$$

formula di Wallis

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\pi$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{(2t+1)}(x)\, d(x) = \frac{\big((2t+1)-1\big)\big((2t+1)-3\big)\big((2t+1)-5\big)\cdots\cdots\big((2t+1)-(2t-1)\big)}{(2t+1)\big((2t+1)-2\big)\big((2t+1)-4\big)\cdots\cdots\big((2t+1)-(2t-2)\big)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2t+1-2t}(x)\, d(x).$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2t+1}(x)\, d(x) = \frac{(2t)!!}{(2t+1)!!} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}[x]\, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = -\Big[\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\Big] = 1$$

per cui:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{(2t+1)}(x)\, d(x) = \frac{(2t)!!}{(2t+1)!!}}$$

Dimostriamo anche l'uguaglianza: $\int_0^{\pi/2} \cos^m(x)\, d(x) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m(x)\, d(x)$

posto: $x = \frac{\pi}{2} - t$ avremo che mentre x varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$ t varia da $\frac{\pi}{2}$ a 0. Poiché: $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$.

e poiché $dx = -dt$ avremo:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m(x)\,dx = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^m(t)\,d(t) = +\int_0^{\pi/2} \sin^m(t)\,d(t)$$ C.V.D.

cioè:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2r}(x)\,d(x) = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{(2r+1)}(x)\,dx = \frac{(2r)!!}{(2r+1)!!}$$

che corrispondono ai valori trovati per il seno.

Per la ricorrenza della formula, si ha anche:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m(x)\, d(x) = \frac{(m-5)}{(m-4)} \cdot \frac{(m-3)}{(m-2)} \cdot \frac{(m-1)}{(m)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{(m-6)}(x)\, dx$$

Se m è un numero pari, poniamo $(m = 2r)$ ed avremo:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2r}(x)\, dx = \frac{(2r-1)(2r-3)(2r-5)\cdots\cdots(2r-(2r-1))}{(2r)\cdot(2r-2)(2r-4)\cdots\cdots(2r-(2r-2))} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{(2r-2r)}(x)\, dx$$

cioè, essendo: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^0(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$

si ha:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2r}(x)\, d(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2r-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots(2r)} \left(\pi/2\right)$$

ed anche:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2r}(x)\, d(x) = \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Ove il simbolo: "$(n)!!$" ricordiamo che significa: "semifattoriale" cioè, prodotti consecutivi di fattori della stessa parità, da 1 ad $(2n-1)$ per i dispari

della stessa parità, da 1 ad $(2r-1)$ per i dispari da 2 ad $2r$ per i numeri pari.

Se invece <u>m è un numero dispari: $(m=2r+1)$</u>

sostituendo a $2r$ il valore: $(2r+1)$ abbiamo:

Formula di Wallis

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m(x)\, d(x) = -\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{m-1}(x)\, d\cos x$$; integrando per parti:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m(x)\, dx = -\left[\left(\operatorname{sen}^{m-1}(x)\right)\left(\cos x\right)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)\; d\left(\operatorname{sen}^{m-1}(x)\right)$$

notiamo che: $\left[\operatorname{sen}^{m-1}(x)\left(\cos x\right)\right]_0^{\pi/2} = 0$

e che $$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\; d\operatorname{sen}^{m-1}(x) = (m-1)\int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^{m-2}(x)\right)\left(\cos^2 x\right) dx =$$

$$= (m-1)\int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^{m-2}(x)\right)\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) dx = (m-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{m-2}(x)\, dx - (m-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m(x)\, d(x) :$$

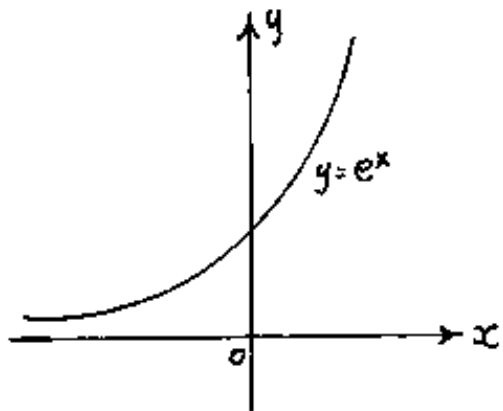
portando nel primo membro il secondo termine si ha:

$$\left((m-1)+1\right)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m(x)\, d(x) = (m-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{m-2}(x)\; d(x)$$

cioè :

$$\int_0^{\pi/2} sen^m(x)\, dx = \left(\frac{m-1}{m}\right) \int_0^{\pi/2} sen^{m-2}(x)\, d(x)$$

questa formula è ricorrente per cui :

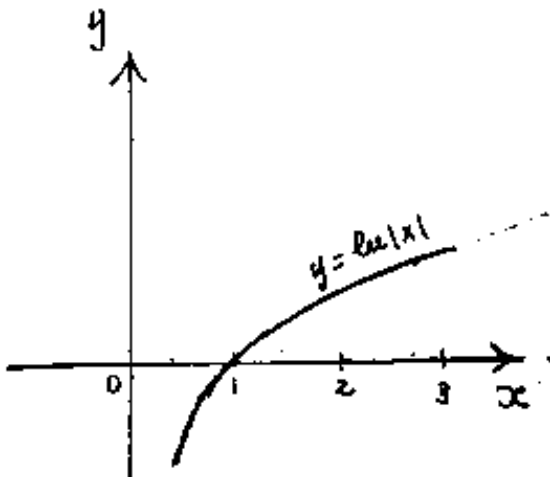
$$\int_0^{\pi/2} sen^{m-2}(x)\, d(x) = \left(\frac{m-3}{m-2}\right) \int_0^{\pi/2} sen^{m-4}(x)\, d(x)$$

Per l'integrale: $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = [e^x]_{-\infty}^{0}$

abbiamo $= [e^0 - e^{-\infty}] = +1$

l'integrale è convergente pur avendo un limite infinito.

Lo stesso integrale esteso fra 0 ed 1 sarà:

$$\int_0^1 e^x d(x) = [e^x]_0^1 = [e^1 - e^0] = (e-1)$$

Ed in generale darà un valore finito finché il limite superiore sarà finito: $\boxed{\int_0^x e^x dx = (e^x - 1)}$

L'integrale: $\int_0^1 \ln(x)\, d(x)$ essendo la stessa curva di e^x (ribaltata), sappiamo già che è convergente: $\int_0^1 \ln|x| dx = [x \ln|x| - x]_0^1$

$\lim_{\varepsilon \to 0} [x \ln|x| - x]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} [-1 - \varepsilon \ln|\varepsilon| - \varepsilon]$

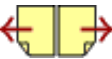
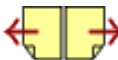
ma: $\lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon \ln|\varepsilon|) = 0$ (vedi tabella dei limiti notevoli)

ma: $\lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon \ln|\varepsilon|) = 0$ (vedi tabella dei limiti notevoli)

per cui:

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1$$

(Il segno (−) perche' l'area è sulle $y < 0$)

L'integrale: $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln|\varepsilon|) = \infty$ (divergente)

vallo a, b estremi inclusi, derivabile, la cui derivata è $f(x)$ cioè: $\frac{dF(x)}{d(x)} = f(x)$ (salvo i punti singolari ove può non essere derivabile). Diremo la $F(x)$, l'integrale di $f(x)\,dx$ cioè: $F(x) = \int f(x)\,dx$. Ed è possibile dimostrare che:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Infatti sia C un punto singolare interno all'intervallo A, B ove spezziamo l'integrale:

$$= \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx =$$

ed il $\lim_{\varepsilon \to 0} \left(F_{(c-\varepsilon)} - F_{(a)} + F_{(b)} - F_{(c+\varepsilon)}\right)$ esista e sia quindi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(F_{(c)} - F_{(a)} + F_{(b)} - F_{(c)}\right) = \left(F_{(b)} - F_{(a)}\right) \qquad (c.v.d.).$$

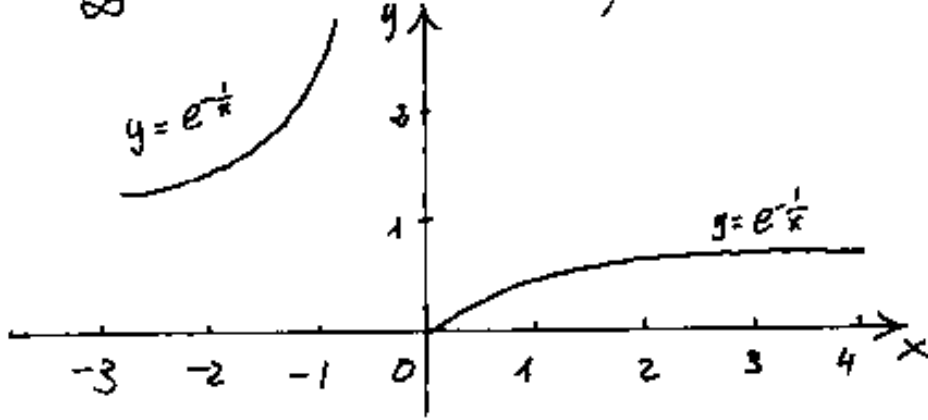
La condizione di tale validità è che:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(F_{(c-\varepsilon)}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(F_{(c+\varepsilon)}\right)$$

cioè che $F(x)$ sia continua in C

Facciamo un esempio:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,dx \neq \left[e^{-\frac{1}{x}}\right]_{-1}^{+1}$$ perché $\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$ è discon=

tinua nel punto $x=0$; infatti : $\lim_{x \to 0^-} \left(e^{-\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{-1}{-0}} =$
$= e^{\infty} = \infty$; mentre : $\lim_{x \to 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}}\right) = e^{-\frac{1}{0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} =$
$= \frac{1}{\infty} = 0$; Per cui spezzando l'integrale abbiamo:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = \infty \text{ (divergente)}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = \left(e^{-1} - 0\right) = \left(\frac{1}{e}\right)$$

(convergente).

Facciamo degli esempi:

$$\int_0^2 \frac{1 \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{arcsen}(1-\varepsilon) = \pi/2 \quad (\text{Convergente})$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{arcsen}(2) - \operatorname{arcsen}(1+\varepsilon) = (\text{non esiste})$$

Cioè l'integrale $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ è convergente nel campo fra 0 ed 1, non ha significato nel campo fra 1 e 2.

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tang} x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \operatorname{tang}(x) \, dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\log \left| \cos(\pi/2 - \varepsilon) \right| \right) = +\infty$$

L'integrale proposto è divergente

Facciamo ora il discorso inverso.

Sia data una $f(x)$ nell'intervallo a, b e sia

Sia data una $f(x)$ nell'intervallo a, b e sia continua salvo un numero finito di punti singolari ove la $f(x)$ può divergere all'infinito od avere discontinuità di prima o seconda specie, o faccia delle cuspidi; ed esista una $F(x)$ continua nell'inter=

Si verificano due casi:

I) Se: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ esiste ed è finito

allora l'integrale improprio generalizzato: $\int_a^c f(x)\,dx$ è detto convergente

II Se: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = \infty$ cioè diverge a ∞

allora l'integrale improprio generalizzato $\int_a^c f(x)\,dx$ è detto divergente

Se il limite non esisiste l'integrale non ha significato

Lo stesso discorso vale per l'integrale $\int_c f(x)\,dx$

ove: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ esiste ed è finito, allora l'integrale improprio è detto convergente

se l'integrale è infinito è detto divergente.

se il limite non esiste l'integrale non ha significato

Naturalmente il punto C può coincidere con A oppure con B, o vi possono essere più punti C nell'intervallo AB ed in quest'ultimo caso dovremo

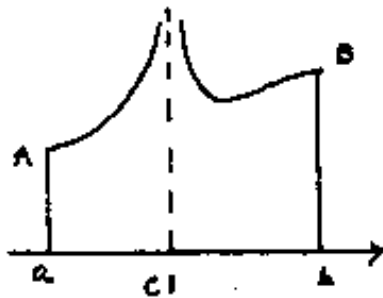
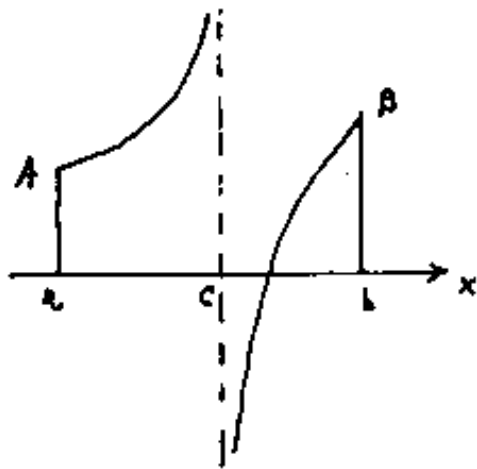
nell'intervallo AB ed in quest'ultimo caso dovremo spezzare il campo in più parti.

L'integrale improprio: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

può essere convergente in tutto il campo a, b; nei due campi a, c e c, b; oppure solo a sinistra o solo a destra di c od essere divergente nei due campi.

Integrali impropri

Consideriamo una funzione integranda nel campo A, B ove $x_A = a$; $x_B = b$. In questo campo la funzione presenti uno o più punti di discontinuità divergendo a $\pm\infty$.

Supponiamo che sia c, un punto interno all'intervallo ove avviene che la $f_{(c)} = \infty$.

è necessario in questo caso spezzare in due l'integrale

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

quindi considerando di avvicinarsi al punto c per quantità piccole a piacere sia a destra che a sinistra di c avremo:

$$I = \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Possiamo rendere di nuovo integrabili le due espressioni per valori finiti, sia pure piccolissimi di ε. L'integrale improprio è detto generalizzato

Per razionalizzare un trinomio di secondo grado sotto radice: $\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, conviene porre:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (\sqrt{a}\,x + t)$$

ove elevando a quadrato sparisce il termine: (ax^2) : $(\underline{bx+c = 2\sqrt{a}\,xt + t^2})$

per cui: $x = \dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$

Esempi sono stati già proposti al capitolo "metodi di integrazione" (sostituzione di variabile)

Comunque, se possibile, è meglio porre in evidenza fuori radice il termine "$\sqrt{a}$" in modo che la funzione integranda diventi del tipo: $\sqrt{a}\int f(x, \sqrt{x^2+px+q})\,dx$.

Tal volta, se il trinomio è scomponibile in $(x-\alpha)(x-\beta)$, possono essere utili sostituzioni diverse. Per esempio:

$$\int\left(\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}\right) = \int\left(\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\right)$$ con α e β reali e distinte

poniamo: $\left(\frac{(x-\alpha)}{(\beta-x)} = t^2\right)$ cioè: $(x-\alpha)=(\beta-x)t^2$ per cui l'integrale

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{t^2(\beta-x)^2}} = \int \frac{dx}{t(\beta-x)} \; ; \quad \text{ma: } x = \frac{t^2\beta+\alpha}{(1+t^2)} \; ; \quad dx = \frac{2t(\beta-\alpha)}{(1+t^2)^2}dt$$

$$= \int \frac{\frac{2t(\beta-\alpha)}{(1+t^2)^2}dt}{t\left(\beta-\frac{(t^2\beta+\alpha)}{(1+t^2)}\right)} = \int \frac{2(\beta-\alpha)}{(1+t^2)^2} \frac{(1+t^2)\,dt}{\beta+t^2\beta-t^2\beta-\alpha} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\mathrm{arctg}(t)+C$$

Sostituendo (t):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}} = 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}\right)+C$$

Integrazione di irrazionali algebrici

Premesso che si hanno irrazionali algebrici quando espressioni della x figurano sotto radici, noi consideremo il caso generale di esponenti frazionari, che possiamo sempre ridurre allo stesso denominatore (stesso indice di radice), e sia "m" il denominatore comune avremo:

$$\int f(x, x^{a/m}, x^{b/m}, x^{c/m} \dots)\, dx \qquad (\text{irrazionale})$$

ponendo: $x = t^m$; $dx = m\, t^{m-1}\, dt$

l'integrale diventa:

$$m \int f(t^m, t^a, t^b, t^c \dots)(t^{m-1})\, dt \qquad (\text{razionale})$$

Facciamo alcuni esempi

$$\int \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x} + 1}\, dx = \int \frac{(x^{1/2} + 2)}{(x^{1/3} + 1)}\, dx = \int \frac{(x^{3/6} + 2)}{(x^{2/6} + 1)}\, dx =$$

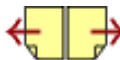
posto: $t^6 = x$; $dx = 6t^5 dt$; $t = x^{\frac{1}{6}}$

$$6 \int \frac{t^3 + 2}{t^2 + 1}\, t^5\, dt \qquad (\text{integrale di espressione razionale fratta})$$

$$= 6 \int \frac{(t^8 + 2t^5)}{t^2+1}\, dt = 6 \int (t^6 - t^4 + 2t^3 + t^2 - 2t - 1)\, dt + 6 \int \frac{(2t+1)}{(t^2+1)}\, dt =$$

$$= 6\int \frac{(t \; + 2t \;)}{t^2+1}\, dt = 6\int (t - t + 2t + t - 2t - 1)\, dt + 6\int \frac{\ldots}{(t^2+1)}\, dt =$$

$$= 6\left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{2t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - t^2 - t + 2\int \frac{t\,dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\right]$$

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^{7/6}}{7} - \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{x^{2/3}}{2} + \frac{x^{1/2}}{3} - x^{1/3} - x^{1/6} + \ln\left|x^{1/3}+1\right| + \operatorname{arctg}(x^{1/6})\right] + C}$$

Qualora l'integrale fosse del tipo:

$$\int \frac{(Mx + N)}{(x^2+px+q)^n}dx$$

con gli stessi passaggi effettuati per "$n=1$" otteniamo:

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + (N - Mp/2)\int \frac{d(x+p/2)}{((x+p/2)^2+K^2)^n} =$$

Il primo integrale è immediato:

$$\frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} = \frac{M}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}\right)+c$$

Per il secondo integrale poniamo: $(x+p/2) = Ky$, cioè facciamo una sostituzione di variabile:

$$(N-Mp/2)\int \frac{d(x+p/2)}{((x+p/2)^2+K^2)^n} = (N-Mp/2)\int \frac{d(Ky)}{((Ky)^2+K^2)^n} = (N-Mp/2)\int \frac{K\,dy}{K^{2n}(y^2+1)^n}$$

$$= \frac{N-Mp/2}{K^{2n-1}}\int \frac{dy}{(y^2+1)^n}$$

Se integriamo per parti l'integrale rimasto, senza operare trasformazioni avremo: (Svolgendo il differenziale e semplificando):

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)^n} = \frac{y}{(y^2+1)^n} + 2n\int \frac{y^2dy}{(y^2+1)^{n+1}}$$

ove aggiungendo e togliendo 1 al numeratore dell'integrale e separando in due integrali:

$$\dots + 2n\int\frac{dy}{(y^2+1)^n} - 2n\int\frac{dy}{(y^2+1)^{n+1}}$$

ed anche cambiando n con $(n-1)$ e risolvendo si ha:

$$\boxed{\int\frac{dy}{(y^2+1)^n} = \frac{y}{2(n-1)(y^2+1)^{n-1}} + \left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)\int\frac{dy}{(y^2+1)^{n-1}}}$$

formula ricorrente che degrada di 1 l'esponente e può ripetersi finché $n=1$.

Cioè avremo:

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)} = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{1}{k}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{k}\right)\right)+C$$

Si noti che le razionali fratte avranno per risultato di integrazioni solo espressioni del tipo:

$$\left(\frac{A}{(x-\alpha)^n}\ ;\ \text{logaritmi naturali}\ ;\ \operatorname{arctg}(\ldots)\right)$$

<u>Se il polinomio al denominatore ha due radici reali.</u>

per esempio: $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ (con: α, β = reali)

Si opera come nel 1° caso ponendo: $\alpha = \alpha$ $\quad n = 1$

$B_1(x) = (x-\beta)$ $\quad R(x) = Mx+N$

$B_1(\alpha) = (\alpha - \beta)$ $\quad R(\alpha) = M\alpha+N$

<u>Esempio numerico:</u>

$$\int \frac{(7(x)+9)}{(x-3)(x-5)}\,dx =$$

$\alpha = 3$ $\quad n = 1$

$B_1(x) = (x-5)$ $\quad R(x) = 7x+9$

$\Big\}\ A = \frac{R(\alpha)}{B_1(\alpha)} = \frac{(30)}{(-2)} = -15\ ;\ AB_1(x) = -15(x-5)$

$B_1(x) = (x-5)$ $\quad R(x) = 7x+9$

$B_1(\alpha) = (3-5) = (-2)$ $\quad R(\alpha) = 21+9 = 30$

$\Big\} \quad A = \dfrac{R(\alpha)}{B_1(\alpha)} = \dfrac{(30)}{(-2)} = -15 \; ; \; AB_1(x) = -15(x-5)$

aggiungendo e togliendo al numeratore $AB_1(x)$ abbiamo:

$$\int \frac{(7x+9)}{(x-3)(x-5)}dx = \int \frac{-15(x-5)+7x+9+15x-75}{(x-3)(x-5)}dx = \int \frac{-15\,dx}{(x-3)} + \int \frac{(22x-66)}{(x-3)(x-5)}dx =$$

$$= -15\ln|x-3| + 22\int \frac{dx}{(x-5)}$$

$$\boxed{\int \frac{(7x+9)}{(x-3)(x-5)}dx = -15\ln|x-3| + 22\ln|x-5| + C = \ln\left|K\frac{(x-5)^{22}}{(x-3)^{15}}\right|}$$

Se il polinomio al denominatore ha solo radici immaginarie.

per esempio si abbia: $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{x^2+px+q}$

$\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}\right\} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; e sia: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

Si opera come segue:

poniamo: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = -K^2$

ciò equivale a porre: $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \pm K$

(decade la negatività del radicando)

Aggiungendo e togliendo: $\frac{Mp}{2}$ al numeratore e $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ al denominatore avremo:

$$\int \frac{(Mx+N)}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mx + \frac{Mp}{2} + N - \frac{Mp}{2}}{x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{M\left(x+\frac{p}{2}\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)}\,dx$$

Sostituendo: $\left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = K^2\right)$

$$- \int \frac{\ldots}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)} dx$$

sostituendo: $\left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = K^2\right)$

e dividendo in due l'integrale si ha:

$$= \frac{M}{2} \int \left(\frac{(2x + p)\,dx}{x^2 + px + q} \right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + K^2}$$

Ma, il numeratore del primo integrale è la derivata del denominatore, ed il secondo integrale evidenziando K^2 possiamo scrivere:

$$= \frac{M}{2} \ln\left| x^2 + px + q \right| + \frac{\left(N - \frac{Mp}{2}\right) K}{K^2} \int \frac{d\left(\frac{x + p/2}{K}\right)}{\left(\frac{x + p/2}{K}\right)^2 + 1}$$

Con ciò si è abbassato di 1 l'esponente ad $(x-\alpha)$ ripetendo il procedimento, si risolvono gli integrali.

Facciamo un esempio assai semplice.

$$\boxed{\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^3+2x^2+x)}} = \int \frac{(x-1)\,dx}{x(x^2+2x+1)} = \boxed{\int \frac{(x-1)\,dx}{(x+1)^2(x)}}$$

siamo nel caso studiato sopra, ove:

$$\alpha = -1 \quad ; \quad \mu = 2$$

$$B_1(x) = x \quad ; \quad R(x) = (x-1)$$

sostituendo α: $\quad B_1(\alpha) = (-1) \quad ; \quad R(\alpha) = (-2)$

per cui $\quad A = \dfrac{R(\alpha)}{B_1(\alpha)} = A = \dfrac{(-2)}{(-1)} = \boxed{A = 2}$

aggiungendo e togliendo: $AB_1(x) = 2(x)$ al numeratore si ha:

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{(x+1)^2 x} = \int \frac{2x + (x-1) - 2x}{(x+1)^2 x}\,dx = 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{(x+1)\,dx}{(x+1)^2 x} =$$

$$= \boxed{-2\frac{1}{(x+1)}} - \int \frac{dx}{(x+1)\,x}$$

per il secondo integrale occorre ripetere il procedimento:

per il secondo integrale occorre ripetere il procedimento:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = -1 & ; \mu = 1 \\ B_1(x) = (x) & ; R(x) = 1 \\ B_1(\alpha) = -1 & ; R(\alpha) = 1 \end{array}\right\} A = \frac{R(\alpha)}{B_1(\alpha)} = -1 \quad ; \quad AB_{1(x)} = -x$$

$$-\int \frac{dx}{(x+1)x} = -\int \frac{-x+1+x}{(x+1)\,x} = \boxed{+\int \frac{dx}{(x+1)}} - \int \frac{(x+1)}{(x+1)x}dx \qquad \text{quindi:}$$

$$\boxed{\int \frac{(x-1)\,dx}{x^3+2x^2+x} = -\frac{2}{x+1} + \ln|x+1| - \ln|x| + C}$$

che si scompone nella somma di due frazioni:

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^{\mu}} + \frac{R(x) - AB_1(x)}{(x-\alpha)^{\mu} \cdot B_1(x)}$$

La prima frazione la sappiamo integrare, infatti:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^{\mu}}\,dx = \frac{-A}{(\mu-1)(x-\alpha)^{\mu-1}} + C$$

e se $\mu = 1$: $$\int \frac{A}{(x-\alpha)}\,dx = A \ln|x-\alpha| + C$$

La seconda frazione si può rendere semplificabile, se, con opportuno valore di A, rendiamo divisibile anche il numeratore per $(x-\alpha)$.

Se ad ogni termine di $R(x)$ sostituiamo (α) ad (x) otteniamo un altro polinomio: $R(\alpha)$, tale che: $(R(x) - R(\alpha))$ è certamente divisibile per $(x-\alpha)$ che può essere messo in evidenza termine a termine.

Perciò dovrà essere: $AB_1(x) = R(\alpha)$

Perciò dovrà essere: $A B_1(\alpha) = R(\alpha)$

cioè:

$$A = \frac{R(\alpha)}{B_1(\alpha)}$$

ove: $B_1(\alpha)$ si è ottenuto da $B_1(x)$ sostituendo ad x il valore: (α). (Altrimenti A sarebbe stata $f(x)$ e non una costante. Mettendo in evidenza al numeratore $(x-\alpha)$ la seconda frazione diventa:

$$\frac{R(x) - A B_1(x)}{(x-\alpha)^{\mu} \cdot B_1(x)} = \frac{(x-\alpha)\, R_1(x)}{(x-\alpha)^{\mu}\, B_1(x)} = \frac{R_1(x)}{(x-\alpha)^{\mu-1} B_1(x)}$$

Integrazione di funzioni razionali fratte

Siano $P(x)/B(x)$ i polinomi costituenti la frazione.
Se $P(x)$ è di grado superiore a $B(x)$ dividendo abbiamo:

$$\frac{P(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

$Q(x)$ lo sappiamo integrare. La frazione: $\frac{R(x)}{B(x)}$ ove certamente il numeratore è di grado inferiore al denominatore, sia anche ridotta ai minimi termini.

Uguagliamo a zero il denominatore: $\boxed{B(x) = 0}$
e cerchiamo una radice α dell'equazione (α puó essere reale o complessa); nel caso piú generale supponiamo di aver trovato μ radici tutte uguali ad α. (Basta dividere per $(x-\alpha)$ successivamente finché il resto sia diverso da zero)

Avremo che il polinomio $B(x)$ si scompone in:

$$B(x) = (x-\alpha)^{\mu}(B_1(x))$$

$$B(x) = (x-\alpha)^{\mu} \, (B_1(x))$$

e la frazione diventa:

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{R(x)}{(x-\alpha)^{\mu} B_1(x)}$$

aggiungiamo e togliamo al numeratore: $A B_1(x)$ (con A = costante) avremo:

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{A B_1(x) + R(x) - A B_1(x)}{(x-\alpha)^{\mu} B_1(x)}$$

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = -\int \operatorname{sen}(x)\,d\cos x \quad \text{integrando per parti}$$

$$= -\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx$$

$$2\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = -\operatorname{sen}(x)\cos(x) + x$$

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \frac{-\operatorname{sen}(x)\cos(x) + x}{2} + C}$$

$\int \operatorname{sen}^4(x)\,d(x)$ = (applicando la formula di pag. precedente)

$4\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx = -\operatorname{sen}^3(x)\cos x + 3\int \operatorname{sen}^2(x)\,d(x)$ per cui utilizzando la formula sopra trovata si ha:

$$\int \operatorname{sen}^4(x)\,d(x) = \frac{1}{4}\left[-\operatorname{sen}^3 x\cos(x) + \frac{3}{2}\left(\operatorname{sen}(x)\cos(x) - x\right)\right] + C$$

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx = \frac{1}{8}\left[x - (\operatorname{sen} x\cos x)(2\operatorname{sen}^2(x) - 3)\right] + C}$$

Analogamente: $\int \operatorname{sen}^6(x)\,dx$ applicando la formula ed avvalendosi dei precedenti risultati:

$$\int \operatorname{sen}^6(x)\,dx = \frac{1}{\ }\left[-\operatorname{sen}^5(x)\cos(x) + 5\int \operatorname{sen}^4(x)\,d(x)\right]$$

$$\int \operatorname{sen}^6(x)\,dx = \frac{1}{6}\left[-\operatorname{sen}^5(x)\cos(x) + 5\int \operatorname{sen}^4(x)\,d(x)\right]$$

$$\int \operatorname{arcsen}(x)\,d(x) = x\,\operatorname{arcsen}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x\,\operatorname{arcsen}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\,\operatorname{arcsen}(x) + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= x\,\operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

Il minimo di cifre si ha col sistema binario, elettricamente abbinabile alle condizioni: acceso, spento; le cifre sono 1 (uno), e Ø (zero). Le potenze per i valori degli scomparti sono quelle del due. Per uniformarsi a come

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
		1	0	1	1	0	1	1
256	128	64	32	16	8	4	2	1

viene usato il sistema binario, non consideriamo scomparti ove il 2 ha esponente negativo, vedremo come si rappresentano i numeri frazionari. Per ora consideriamo gli interi. Notiamo che i numeri pari hanno la prima casella Ø (zero).

0	0	1	= 1

0	0	1	0	= 2

0	0	1	1	= 3

0	1	0	0	= 4

0	1	0	1	= 5

Il numero incasellato sopra vale: $2^6 + 0 + 2^4 + 2^3 + 0 + 2^1 + 2^0$

$64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91$

Volendo rappresentare in binario il n° 354 decimale

0	1	1	0	= 6
0	1	1	1	= 7
0 1	0	0	0	= 8
0 1	0	0	1	= 9
0 1	0	1	0	= 10

binario di 354 decimale

si ha: la massima potenza del due che entra in 354 è $2^8 = 256$

$354 - 256 = 98$. In 98 non entra $2^7 = 128$, ma $2^6 = 64$ perciò $98 - 64 = 34$

da $34 - (2^5 = 32) = 2$ e $2 - 2 = 0$

$1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0_{bin} = 354$ dec.

$2^8\ 2^7\ 2^6\ 2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$

Le operazioni aritmetiche in binario sono come quelle di altre basi. esempio:

$$
\begin{array}{rl}
101100010 & = 354 \quad + \\
1011011 & = 91 \\
\hline
110111101 & = 445 \\
\\
100000111 & = (354 - 91) = 263
\end{array}
$$

Si noti il gioco del "riporto" nella somma ove 1 e 1 incolonnati danno zero ed un 1 nello scomparto adiacente (come avviene nel sistema decimale quando la somma di cifre incolonnate supera 10)

Però il sistema binario necessita di troppe cifre quando il numero diventa grande perciò, in particolare per i computer, è stata introdotta la numerazione esadecimale. (Hexadecimal, da cui il simbolo Hex). Questa ha le prime dieci cifre corrispondenti alla

ha le prime dieci cifre corrispondenti alla decimale (dec.), alle quali seguono le lettere dell'alfabeto dalla A = 10 alla F = 15, cioè con lo zero sono 16 cifre diverse; cioè i valori degli scomparti (= posizione delle cifre) corrispondono alle potenze con base 16.

Facciamo gli scomparti in base 16.

	6	8	D	6	E	0	8	C
16^8	16^7	16^6	16^5	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0
	268435456	16777216	1048576	65536	4096	256	16	1

Il numero exadecimale ove rispetto al 10 si ha:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

diventa: $(6)\cdot 16^7 + (8)16^6 + (13)16^5 + (6)(16^4 + (14)16^3 + 0 + (8)16^1 + (12)(1)$

$$
\begin{aligned}
1610612736 &+ \quad = 6\cdot 16^7 \\
134217728 &+ \quad = 8\cdot 16^6 \\
13631488 &+ \quad = 13\cdot 16^5 \\
393216 &+ \quad = 6\cdot 16^4 \\
57344 &+ \quad = 14\cdot 16^3 \\
128 &+ \quad = 8\cdot 16 \\
12 & \quad = 12\cdot 1
\end{aligned}
$$

1 758 912 662 (dec) equivale a 68D6E08C (exa).

per esempio:

$FFF\ (exa) = 16^2\cdot 15 + 16\cdot 15 + 15 = 4095$ dec.

inversamente: essendo $256 \times 15 = 3840$

$4000 - (dec)$
$3840 \quad = 16^2\cdot F$

$4000\,(dec) = FA0\,(exa)$

$$\begin{array}{ll} \underline{3040} & = 16 \cdot F \\ \quad 160 - & \\ \quad \underline{160} & = 16 \cdot A \\ \quad\quad 0 & = 0 \end{array}$$

e si noti che aumentando di 1 il numero esadecimale FFF, poiché F è l'ultima cifra il riporto finisce nell'ulteriore scomparto cioè:

$$(FFF+1)_{esa} = 1000_{esa} = 16^3 \cdot 1 = 4096_{dec} = (4095+1)_{(dec)}$$

Un altro sistema è il sistema octale, (oct) in base 8) ove le prime otto cifre (compreso lo zero)

8^7	8^6	8^5	8^4	8^3	8^2	8^1	8^0
					3	0	7
2097152	262144	32768	4096	512	64	8	1

corrispondono alle cifre decimali.

Il numero sopra indicato equivale $(3)8^2 + 0 + (7)(1)$

$307(oct) = 199(dec)$ se aggiungiamo 1 abbiamo:

$310(oct) = 200(dec)$ $(3)8^2 + (1)8^1 + 0 = 192 + 8 + 0 = 200.$

Volendo esprimere in octale il n° decimale 1523 avremo: $1523 \,|\, 512$, $= 499$, $2\ldots$; $1523 - 512 \cdot 2 = 499 \,|\, 64$, 51, $7\ldots$;

$51 \,|\, 8$, 3, 6 da cui: $1523 = 2 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$

cioè $\underline{1523_{dec}} = \underline{2763(oct)}$ Si noti l'importanza del resto di una divisione di interi. Nel linguaggio BASIC si indica con "mod" (aritmetica modulare) cioè chiedere al computer 7 MOD 4 la risposta è 3; e chiedere 7 MOD 2 la risposta è 1. (cioè il resto)

5; e chiedere [illegible] la cinquina è 1. ([illegible])

Questi brevi cenni, fanno già intravedere la complessità della rappresentazione numerica delle quantità, e come occorra fissare una serie di norme basilari ordinariamente esposte nell'aritmetica razionale (o ragionata)

Le operazioni aritmetiche

La somma.

Quando incolonnate le cifre, ove le colonne sono posizioni di ugual valore (stessi scomparti), avviene che la somma delle cifre di quella colonna supera come valore quello della cifra più alta si ha il cosiddetto "riporto" per es.

(dec)	(exa)	(bin)	(oct)
8 +	8 +	1000 +	00010 +
7	7	111	00007
= 15	= F	= 1111	00017

Si noti che per ragioni diverse, nell'esempio, il riporto si è avuto solo nel sistema decimale.
Facciamo un secondo esempio:

(dec)	(exa)	(bin)	(oct)
15 +	F +	1111 +	00017 +
3	3	11	00003
18	12	10010	00022

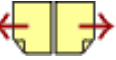
ove i riporti sono su gli altri sistemi e non

ove i riporti sono su gli altri sistemi e non sul decimale. Ricordiamo che:

$18\ (dec) = 1(10) + 8 = 18$

$12\ (exa) = 1 \cdot (16) + 2 = 18$

$10010\ (bin) = 1(16)+0+0+1(2)+0 = 18$

$00022\ (oct) = 2(8)+2 = 18$

La sottrazione

Incolonnati il diminuendo ed il diminutore, può avvenire che nella stessa colonna la cifra del diminutore sia maggiore di quella del diminuendo, in questo caso si ha il procedimento inverso del riporto, in questi casi si suol dire che si chiede a prestito una unità dalla adiacente colonna di maggior valore:

(dec)	(esa)	(bin)	(oct)
18 −	12 −	10010 −	22 −
7	7	111	7
11	B	1011	13

Vi sono vari teoremi sulle operazioni somma e sottrazione, per esempio: "Sommando o sottraendo ai due termini di una sottrazione lo stesso valore, il risultato della sottrazione non cambia". ecc.

Dicesi somma algebrica il risultato di somme

Dicesi somma algebrica il risultato di somme e sottrazioni dei termini in dipendenza al loro segno. Il prodotto di una somma algebrica per una somma algebrica è una nuova somma algebrica ottenuta moltiplicando ciascun termine della prima per ciascun termine della seconda ed il segno sarà positivo se i segni dei due termini sono concordi, negativo se discordi.

La moltiplicazione

In sintesi consiste nell'addizionare con se stesso il moltiplicando tante volte quante indica il moltiplicatore. E viceversa perché invertendo i fattori il prodotto non cambia. (Si dicono fattori il moltiplicando ed il moltiplicatore; si dice prodotto il risultato della moltiplicazione.

Nel sistema decimale, la moltiplicazione delle singole cifre fra loro è conglobata in una tavola detta tavola pitagorica. Praticamente è richiesto che questi valori si conoscano a memoria.

TAVOLA PITAGORICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Si nota che i prodotti di due cifre prevalgono sui prodotti di una sola cifra, ciò implica i riporti. Non solo, ma la cifra oltre che moltiplicare per il valore della cifra in se, moltiplica anche per il valore della posizione che occupa. Ciò ha portato ad una molteplicità di metodi per eseguire la moltiplicazione (Cfr. Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi - Vol I parte I cap III pag 232-233 — ediz. Hoepli)
Il segno × oggi universalmente usato deriva dal "metodo a crocetta" usato da Luca Pacioli e da Leonardo Fibonacci, riprendiamo l'esempio riportato nell'Enciclopedia sopra citata:

$$\begin{array}{cccc} & 5 & 9 & \\ & \multicolumn{2}{c}{\times} & \\ & 4 & 7 & \\ \hline 2 & 7 & 7 & 3 \end{array}$$

Per il metodo a crocetta il Pacioli dice:

Per il metodo a crocetta il Pacioli dice:

"el qual modo vole alquanto più fantasia e cervello che alcuno degli altri ...; è bella e sottil cosa, ... ma ... vol cervello a casa e l'occhio a bottega"

```
   59 × 47
 ─────────
     ⁶3
   35
   36
  20
 ─────
  2773
```

si è sviluppata la moltiplicazione a fianco in modo da evidenziare il prodotto in croce $35 + 36 = 71$.

cioè per eseguire la moltiplicazione a crocetta abbiamo fatto i seguenti passaggi:

$$\begin{array}{cc} 5 & 9 \\ & \times \\ 4 & 7 \\ \hline \end{array}$$

2 7 7 3

$7 \times 9 = 63$

$4 \times 5 = 20$

$(5 \times 7) = 35 + (4 \times 9) = 36$

$35 + 36 = 71$

2 7 7 3

Un'altro metodo è quello detto _per gelosia o per graticola_, da altri detto _metodo arabo_ od anche _tavola mussulmana_ con la quale volendo moltiplicare per esempio: 475 × 976 si costruisce una "graticola" quadrata o rettangolare che ha in orizzontale tante caselle quante sono le cifre del moltiplicatore, ed in verticale tante caselle quante sono le cifre del moltiplicando (o viceversa); si tracciano le _diagonali "principali"_ dei quadratini costituenti le caselle (che si allineeranno in rette parallele); si

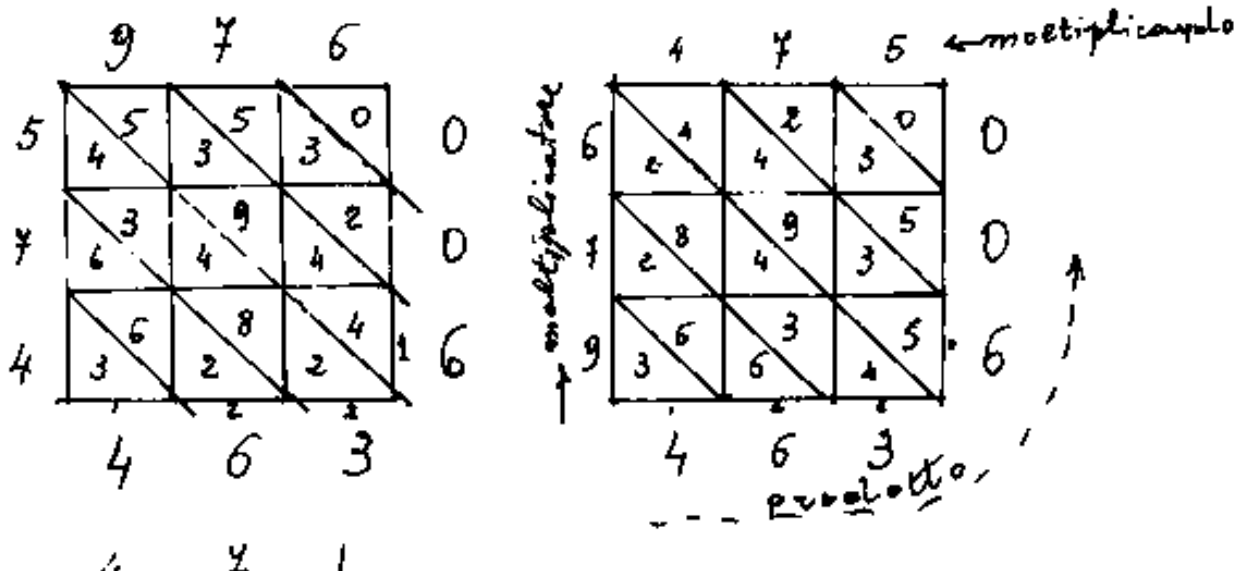
le caselle (che si allineano in file parallele); si riportano sul bordo superiore (orizzontale, ester= no alla graticola) le cifre del moltiplicatore e sul bordo esterno verticale sinistro, le cifre del moltiplicando scritte dal basso verso l'alto; quindi riempiamo le caselle con i prodotti delle due cifre che determinano la casella stessa e

scrivendo le decine sotto la diagonale principale senza curarsi di riporti. Quindi si sommano, iniziando dal vertice in alto a destra, le cifre delimitate dalle diagonali principali, i risultati si scrivono sul bordo esterno con le decine in basso che finiranno come un riporto nella successiva somma delle cifre delimitate dalle diagonali adiacenti. Il risultato (prodotto) si legge nelle cifre più esterne iniziando dal vertice sinistro in basso fino al vertice destro in alto.

$976 \times 475 = 475 \times 976 = 463600$. –

	9	7	6	
5	4 / 5	3 / 5	3 / 0	0
7	6 / 3	4 / 9	4 / 2	0
4	3 / 6	2 / 8	2 / 4	6
	4	6	3	

	4	7	5 ← moltiplicando	
6	2 / 4	4 / 2	3 / 0	0
7	2 / 8	4 / 9	3 / 5	0
9	3 / 6	6 / 3	4 / 5	6
	4	6	3	

moltiplicatore

prodotto

	4	7	1	
2	8	1 4	2	2
1	4	7	1	5
		3	6	

$471 \times 12 = 5652$

L'antica moltiplicazione egizia scomponeva il moltiplicatore nella somma di potenze del 2, (oggi binario) ed il prodotto era la somma delle successive duplicazioni del moltiplicando.

Il metodo attualmente usato era detto dai fiorentini: "per bericuocolo" e dai Veneziani "per scachero" o "per organetto" altri metodi sono: "per castelluccio" o "all'indietro"; "per gelosia" o "per graticola"; ecc.

Consideriamo due numeri espressi in un sistema di base K e siano: x, y, z le cifre del primo numero: $M = xK^2 + yK + z$ e sia $N = eK^2 + fK + g$; il prodotto $M \cdot N$ sarà:

$$\begin{aligned} & exK^4 + eyK^3 + ezK^2 \\ & \quad + fxK^3 + fyK^2 + fzK \\ & \quad\quad + gxK^2 + gyK + gz \end{aligned}$$

Se non vi fossero riporti nei prodotti fra cifre avremmo:

$$\left[(e \cdot x)K^4 + (ey + fx)K^3 + (ez + fy + gx)K^2 + (fz + gy)K + gz = MN\right.$$

Se il sistema fosse (oct) K = 8 e siano x = 5, y = 3, z = 1

Se il sistema fosse (oct) $k=8$ e siano $x=5$, $y=3$, $z=1$

$e=4$; $f=3$; $g=7$ avremmo: $531_{(oct)} = 345_{(dec)}$;

$437_{(oct)} = 287_{(dec)}$, si noti che la cifra 1 nel numero 531 octale non corrisponde alla 1 decimale infatti il corrispondente decimale è 345 cioè all'1 oct corrisponde (in questo caso: 5) : $5 \cdot (64) + 3(8) + 1 = 320 + 24 + 1 = 345 = 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$. Questi confronti vogliono

solo abituare a sistemi modulari, cioè a far acquisire il concetto: "quantità" ed espressione numerica di quella quantità.

Cerchiamo di fare una specie di tavola pitagorica nel sistema octale.

1	2	3	4	5	6	7	10
2	4	6	10	12	14	16	20
3	6	11	14	17	22	25	30
4	10	14	20	24	30	34	40
5	12	17	24	31	36	43	50
6	14	22	30	36	44	52	60
7	16	25	34	43	52	61	70
10	20	30	40	50	60	70	100

Per capire questi sistemi numerici occorre aver presente i numeri complessi ove non v'è più una base fissa, ma per esempio 12 pollici = 1 piede, 3 piedi = 1 yard, 2 yard = 1 fathom.

Per esempio ricordando che una dozzina è 12 unità e che una grossa è dodici dozzine cioè 144 unità nel sistema con base 12, il numero

cioè 144 unità, nel sistema con base 12 il numero

$210_{(12)} = 300$(dec.) infatti 2 grosse + una dozzina =

$= 2(144) + 12 + 0 = 300$ (dec). La posizione implica una nuova unità di riferimento delle cifre.

Nel sistema sessagesimale: $25° \; 32' \; 40'' =$

$= (25)(3600) + (32)(60) + 40 = 91960'' = \frac{91960}{1296000}$ giri $= 0,44583$...

I Celti usavano una notazione ventesimale che ha

lasciato traccia nella lingua francese, infatti per dire 90 (novanta), in francese si dice quatre-vingt-dix (quattro volte venti più dieci).
Il problema di esprimere quantitá numeriche con un limitato numero di simboli, è, forse, assai più sottile di quanto puó apparire a prima vista.
Il concetto "quantitá" di cui abbiamo giá evidenziato le limitazioni della numerabilitá, nel senso che la quantitá numerica si riferisce solo all'attributo o caratteristica comune.
La numerabilitá implica l'unitá di misura che puó essere numerica indipendentemente da essere qualitativa. Per fare un esempio banale se l'unitá numerica è il paio gli oggetti od unitá semplici sono due, quindi l'uno è il due! La serqua che propriamente

i uno e il due: la serqua che propriamente
usata per le uova equivale ad una dozzina,
e si può dire una serqua di pere o di mele
sempre contandone dodici; però è usata
anche come ventiquattresima parte, oppure
si ritrova: "di ciascuno si facciano dieci
serque di pane". (Etimologicamente alcuni dicono

dal latino: siliqua = baccello.) Questa inter=
pretazione ci porterebbe a considerare la misura
del contenitore. Si usa dire un paniere di
pere o di altre cose, si usa anche: "un panie=
rino." Queste dizioni legano l'unitá al conteni=
tore.

Abbiamo giá trattato lo zero, l'uno, e l'in=
finito, nell'introdurre il calcolo infinitesi=
male. Ora stiamo equiparando l'uno
ed il molteplice per studiare una corretta
rappresentazione numerica.

Se consideriamo che: "il tutto" è ancora
una unitá, e che l'unitá puó sempre
essere divisa in infinite parti, avvertiamo
una forma di relativitá assai delicata.
Cerchiamo di partire da casi piú semplici co=
me: "Il ..."

me: "Il contare" proprio come fanno i bambini.
uno, due, tre, quattro, ... muovendo le dita
di una mano, ... e cinque. Si nota che alla
denominazione dei numeri non possono darsi
parole tutte diverse (come diversi sono i
numeri), ma occorre trovare delle regole,
cioè delle unità più grosse che contengono

un numero finito di unitá elementari; nascono così i sistemi di numerazione, il nostro decimale che utilizza il 10, il 100, il 1000, ecc.. cioè le potenze del dieci come nuove unitá.
Lo stesso avviene suddividendo l'unitá (nel nostro caso l'esponente da assegnare al dieci sará nega=tivo) ed avremo i decimi, i centesimi, i millesimi, ecc.
Tutti i numeri interi sono multipli di uno, in quanto la loro sequenza si ottiene aggiungen=do uno al precedente. I primi simboli numerici fino all'unitá immediatamente superiore sono dette cifre e debbono essere diverse fra loro come lo sono i loro nomi. Abbiamo giá esposto i sistemi numerici; ci domandiamo se, oltre la nota=zione additiva e la notazione posizionale, possono esservi notazioni diverse. Certamente possono esservi; ma noi dobbiamo notare che la nostra

scrittura è per linee da sinistra a destra, e le linee si susseguono dal margine superiore al margine inferiore; altre scritture seguono linee diverse. Ciò condiziona la notazione posizionale dei numeri. Una notazione che fosse universale dovrebbe essere indipendente da tutto ciò.

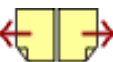
Il complemento aritmetico

Dicesi complemento aritmetico di un numero il resto della sottrazione fra l'unità superiore ed il numero. Così il complemento aritmetico di 7 è: $10-7=3$; il complemento aritmetico di 54 è $100-54=46$.

Ovvio che il complemento aritmetico di un complemento aritmetico è il numero del complemento aritmetico. Meglio è dire che la somma di un numero e del suo complemento aritmetico è l'unità immediatamente superiore. $(526+474=1000)$ ove ognuno dei due numeri è complemento aritmetico dell'altro.

Il complemento aritmetico serve a trasformare una differenza in una somma alla quale va tolta l'unità superiore

alla quale va tolta l'unità superiore
per esempio $853 - 526 = 853 + 474 - 1000 = 327$

Il complemento aritmetico era sistematicamente usato nei calcoli logaritmici coi logaritmi decimali o di Brigg per evitare caratteristiche negative (vedi vol I - logaritmi).

La divisione

L'operazione della divisione è forse la più impegnata ai fini dell'aritmetica razionale.

Dividere un numero detto dividendo, per un numero detto divisore significa sottrarre al primo il multiplo del secondo che più si avvicina al primo, il risultato della sottrazione è detto resto il multiplo del divisore è il prodotto del divisore per un numero detto quoziente che è il risultato della divisione. Se il resto è zero il dividendo è multiplo del divisore.

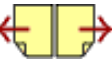
La divisione può anche farsi sottraendo successivamente tante volte il divisore quant'è il quoziente. Però se il quoziente è grande, fare tante sottrazioni sarebbe poco razionale.

Prima della introduzione del sistema posizionale di numerazione scritta, la divisione era una operazione difficilissima, ed i matematici del nostro risorgimento scientifico escogitarono vari metodi per effettuarla. (Cfr. Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, op cit.

Vol. I parte I cap III aritmetica pratica)

Un metodo, che è rimasto, era detto: "partire a dauda" Attenzione la parola "partire" non stà per "iniziare", ma per: "fare le parti" cioè: "dividi" ancora oggi a Vinci ad Empoli e d'intorni si dice: "partisci o parti il pane" nel senso "di affetta il pane" cioè dividilo in fette, da non confondere con "fare le parti" che potrebbero essere diverse a seconda di chi sono destinate. Altri metodi di dividere erano detti: "per testa"; per scapezzo; per ripiego; ed altri. Per scapezzo era detto anche il metodo per fare la moltiplicazione. Il Tommaseo nel suo dizionario srive: "Scapezzo S. m. [Foof] Moltiplicare a scapezzo. Pare corrisponda ai Rotti; quasi scavezzare l'integrità del numero. Paccioli, Aritm.

29 Ottavo ed ultimo modo di moltiplicare a scapezzo

29. Octavo ed ultimo modo di multiplicare a scapezzo è... quando se hane a multiplicare due numeri che dell'uno si fa più parti e l'altro si lascia sano. — E anche diciesi quando tutti e due i numeri si mol= tiplicano segnatamente."
Ed alla voce: "Rotti" riporta: "s(Arit.) Rotti si dicono dagli Aritmetici quelle parti che avanzano nel

partire un numero per un altro; altrimenti Fratti o Frazioni ...." Si usa anche oggi dire l'interi di un numero ed aggiungere: "e rotti,"...

Luca Pacioli (sopra scritto come Paccioli - (Tommaso)) riteneva che, per la divisione, il modo più veloce e leggero era: "per galea" ... a similitudine della galea che nel mare è ritenuto il legno " el più securo, el più veloci, el più snello e ligiadro..."

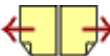
Il partire a galea comunissimo in Italia a tutto il secolo XVI cadde in disuso, tanto che Giuseppe Antonio Alberti nel suo trattato di Arimetica pratica, (Venezia 1752) lo chiama partire all'uso ultramontano.

Secondo alcuni (cfr. T. Sabatino, Aritmetica Ragionata, - ed Paravia - 1915) i simboli dell'aritmetica e dell'algebra sarebbero dovuti ad autori diversi. Il segno = (uguale) sarebbe stato introdotto nel 1552

Il segno = (uguale) sarebbe stato introdotto nel 1556 dal matematico inglese Robert Record. ; i segni > e < (maggiore e minore) da Harriot; le parentesi sarebbero state usate da Alberto Girard nel 1629. Le cifre arabiche sarebbero state introdotte in Europa nel 960 d.C. ed il primo ad introdurle sarebbe stato il famoso Gerberto che divenne papa (Silvestro II) che le introdusse prima in Francia, poi in Italia

I segni + e − (più e meno) sarebbero stati introdotti da Leonardo da Vinci, Il segno X (per) della moltiplicazione sarebbe stato introdotto da Oughtred nel 1631 ed il punto · (moltiplica) da Leibnitz nella II metà del secolo XVII. La notazione degli esponenti si trova per la prima volta nell'Aritmetica di Stefano de la Roche (Lyon 1520), ma l'uso fu perfezionato da Herigon (1634) e da Descartes (1637). I due punti (:) per indicare la divisione sarebbero stati introdotti da Leibnitz, mentre la linea di separazione fra numeratore e denominatore sarebbe una deformazione del segno di divisione usato dagli antichi egiziani, (segno che era arcuato), la linetta di divisione sembra essere stata introdotta in Europa colle cifre arabiche e la si trova per la prima volta in Leonardi Pisano nato nel 1180 e morto verso la metà del secolo XIII e conosciuto anche

verso la metà del secolo XIII e conosciuto anche sotto il nome di Fibonacci, contrazione di Filius Bonacci.

Infatti le regole della prova del 9 per le quattro operazioni le aveva date per primo Abou-Ali-Al-Hossei (nato nel 980 presso Chiraz in Persia, e morto a Hamadan nel 1037) nella sua Esposizione delle radici del Calcolo e dell'Aritmetica.

Abbiamo riportato quanto espone il Sobatino nelle note della sua Aritmetica Ragionata (op.cit.). Riteniamo però opportuno citare l'articolo di Ettore Bortolotti – Storia della matematica elementare – riportato nel III volume, parte 2ª – LVIII – della citata Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, ove la vasta bibliografia citata permette allo studioso una ricerca approfondita.

Altri testi: Dirk J. Struik – Matematica un profilo storico – ediz. Il Mulino – Bologna – 1981.

Georges Ifrah – Storia universale dei numeri – Ediz. Mondadori 1989. – Attilio Fraiese – Attraverso la storia della matematica – ediz. Le Monnier – Firenze – 1977.

O. NEUGEBAUER – Le scienze esatte nell'antichità – Feltrinelli op. cit. –

Torniamo alla nostra divisione ove il dividendo ed il divisore si identificano nel numeratore e nel denominatore di una frazione, generalmente impropria ove il quoziente è una frazione apparente ed il resto il numeratore di una frazione propria.

Abbiamo già esposti i criteri di divisibilità.
Vi sono vari problemi che possono essere istruttivi per l'aritmetica razionale. Per esempio:

1) Dimostrare che N^2+1 non è divisibile per 3

- Premesso che i multipli consecutivi di 3, differiscono di 3 .cioè sono una progressione aritmetica di ragione 3, quindi se ad un multiplo di tre si aggiunge o si toglie un numero inferiore a tre, (diverso da zero) il risultato non è più divisibile per 3.

1) Il quadrato di un numero è divisibile per 3 solo se la base è divisibile per 3 e non lo è più se aggiungiamo $1 < 3$
2) Se la base non è divisibile per 3 non lo è neppure il suo quadrato. La base può essere $N = 3K \pm 1$, oppure: $N = 3K \pm 2$ i cui quadrati aggiungendo 1 danno $(N^2+1) = (9K^2 \pm 6K) + 2$ oppure:

$(9K^2 \pm 12K)+5$ ove il primo addendo è divisibile per 3, ma non lo è il secondo, poiché né 2, né 5 sono divisibili per 3. Resta così dimostrato che qualunque sia N il numero N^2+1 non è divisibile per 3.

Prova per 9 delle quattro operazioni

Fare la prova delle quattro operazioni avvalendosi della divisibilità, e quindi dei resti, in linea di principio si potrebbe prendere un divisore qualsiasi; ma ricordando il criterio di divisibilità per 3, o per 9, cioè che la somma delle cifre sia divisibile per 3 o per 9, diventa facilissimo trovare i resti, basta togliere le somme di cifre che danno 9. Per esempio: 67456 si può dire: 6+5 = 11, −9 = 2, +4 = 6 +7 = 13, −9 = 4, +6 = 10 −9 = 1 il resto è uno (1). (67456 | 9 ; 44, 85, 46, 1 ; 7495.) e non è necessario fare la divisione.

Riprova per la somma

1) Teorema: Se più numeri si dividono per uno stesso numero, la loro somma e la somma dei loro resti, divise per quel numero

somma dei loro resti, divise per quel numero, danno resti uguali.

I numeri siano: A, B, C, il divisore è 9, i resti r ed i quozienti q_i avremo:

$$\left.\begin{aligned} A &= 9q_1 + r_1 \\ B &= 9q_2 + r_2 \\ C &= 9q_3 + r_3 \end{aligned}\right\} \frac{(A+B+C)}{9} = \frac{9(q_1+q_2+q_3)}{9} + \frac{(r_1+r_2+r_3)}{9}$$

Infatti la somma dei quozienti moltiplicata e divisa per 9 non da resti: Per esempio numerico:

A =	4723 +	resto r_1 =	7 +
B =	3714	r_2 =	6
C =	9457	r_3 =	7
A+B+C =	17894	$r_1+r_2+r_3$ =	20
	r = 2	r =	2

Ed è la prova della somma.

Riprova della sottrazione

2) Teorema: Se due numeri si dividono per uno stesso numero la loro differenza e la differenza de' loro resti divise per quel numero dànno reste eguali.

$$A = 9q_1 + r_1$$

$$A = 9\,q_1 + r_1$$

$$B = 9\,q_2 + r_2$$

$$\frac{(A-B)}{9} = \frac{9(q_1+q_2)}{9} + \frac{(r_1+r_2)}{9}$$

Stessa dimostrazione. Esempio numerico

$$A = 49732 \qquad r_1 = 7$$

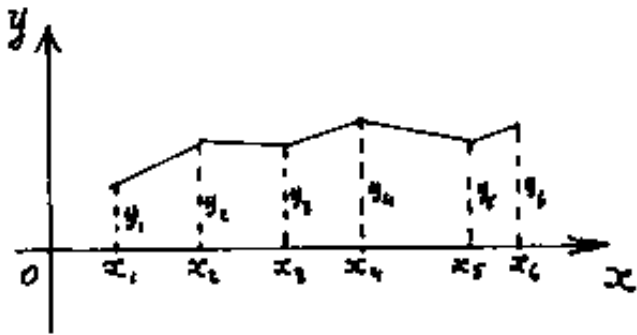
$$B = 32491 \qquad r_2 = 1$$

$$(A-B) = 17241 \qquad (r_1 - r_2) = 6$$

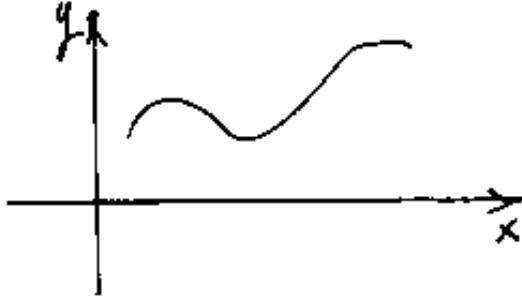
$$r = 6 \qquad r = 6$$

ed è la prova della sottrazione

I Diagrammi e il concetto di funzione

Per rappresentare i più svariati fenomeni si usono i "diagrammi" per esempio del tipo di quello in figura (che sono detti: lineari).

Rilevato che, quando una grandezza x (che può essere il tempo o qualunque altra grandezza) assume un certo valore x_i, allora la grandezza y (che in generale è la grandezza o dimensione che ci interessa del fenomeno) assume un certo determinato valore y_i che riportiamo nel diagramma.

Poiché le rilevazioni della x e conseguentemente della y sono state eseguite in modo discontinuo (per esempio la misura della temperatura ad un malato) il diagramma è una spezzata. Ma se l'apparecchio rilevatore agisse con continuità (come i termografi,

i barografi, gli igrografi, ecc) il diagramma avrebbe un andamento continuo, senza cuspidi, (salvo casi particolari) Comunque in un certo tratto il fenomeno in esame presenta una linea continua con curvatura più o meno accentuata, volta verso l'alto o verso il basso, e con andamento

La linearizzazione

Ci proponiamo di vedere meglio il significato di una frazione in cui numeratore e denominatore siano rappresentati da due grandezze variabili: x, y; ma il loro rapporto sia costante.

$$\boxed{\frac{y}{x} = m} = \text{costante}$$

moltiplicando ambo i termini per x possiamo scrivere:

$$\boxed{y = mx}$$ (ove m = coefficiente di proporzionalità fra x ed y)

Questa correlazione è quella che lega le dimensioni fisiche nella fisica classica, cioè tutte le formule fisiche possono ridursi a quella espressione: per esempio:

(Spazio) = (Velocità)(tempo) ; (velocità) = (accelerazione)(tempo) ;
(Forza) = (massa)·(accelerazione) ; (impulso) = (forza)(tempo) =
= (quantità di moto) = (massa)(velocità) ; (lavoro) = (forza)(spostamento)
(Energia) = (Potenza)(tempo) ;

(Energia termica) = (costante)(Energia meccanica) ?(1° principio della ?

(Energia termica) = (costante)(Energia meccanica) ; {1° principio della termodinamica}

(Tensione elastica) = (Modulo di Elasticità)(dilatazione) ; {legge di Hooke}

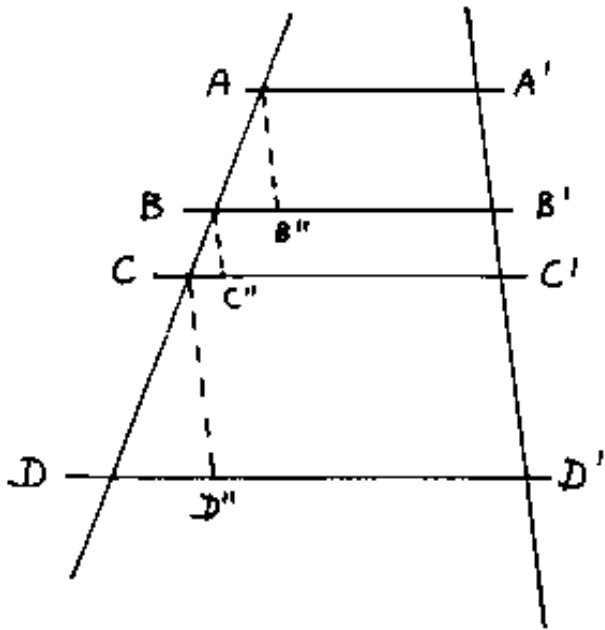
(Tensione elettrica) = (Resistenza)(intensità di corrente) ; {legge di Ohm}

(Quantità di carica elettrica) = (capacità del condensatore)(tensione elettrica)

(Potenza elettrica) = (tensione elettrica)(intensità di corrente)

e potremmo continuare, ma noi vogliamo vedere meglio cos'è questa "linearizzazione"

Teorema di Talete (1)

"Un fascio di rette parallele determina su due trasversali due serie di segmenti direttamente proporzionali."

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \text{cost.}$$

se da A, B, C, tracciamo parallele ad $\overline{A'B'} = \overline{AB''}$; $\overline{B'C'} = \overline{BC''}$; $\overline{C'D'} = \overline{CD''}$ avremo che i triangoli ABB'', BCC'', CDD'', sono simili

da cui $\overline{AB} : \overline{AB''} = \overline{BC} : \overline{BC''} = \overline{CD} : \overline{CD''}$ e sostituendo le uguaglianze: $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$; $\overline{BC''} = \overline{B'C'}$; $\overline{CD''} = \overline{C'D'}$ torna la proporzione dimostrata.

---

1) Talete di Mileto (639 - 548 A.C.) o (624 - 546 A.C.) o (VII - VI sec. A.C.)

Uno dei sette savi (detto il più saggio dei sette sapienti!

Uno dei sette savi, (detto il più saggio dei sette sapienti).
Non si hanno scritti di Talete, ciò che sappiamo è arrivato
da Aristotele, Erodoto, Diogene Laerzio, Proclo, Plutarco, Plinio
il Vecchio. Gli si attribuisce il detto: "Conosci te stesso"
stampato sulla facciata del tempio di Delfo. Fondò la scuola
ionica, predisse (o commentò) un eclisse solare (probabilmente
quella del 28 Maggio 585 a.C.)

Cioè i triangoli AIC ed ABD sono simili:

$$m : b = m+n : b+a = n : a$$

cioè: $\overline{AI} : \overline{AC} = \overline{IB} : \overline{BC}$

verifichiamo la doppia proporzione:

$$\cancel{bm} + bn = \cancel{bm} + am$$

La proporzione armonica

Dicesi proporzione armonica: $(a-b):(b-c) = (a):(c)$

il numero "b" $= 2ac/(a+c)$ è detto medio armonico fra "a" e "c".

Infatti la media armonica è l'inverso della media aritmetica degli inversi: se gli elementi sono: $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$; la media aritmetica è: $(a_1 + a_2 + \ldots a_n)/n$; per cui la media armonica è:

$$\frac{n}{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n}\right)}$$

nel nostro caso $n = 2$ quindi:

$$b = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} = \frac{2ac}{a+c}$$

$$\boxed{\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)}$$

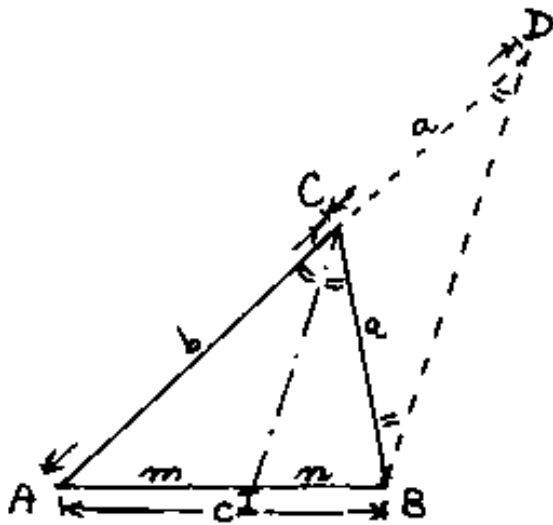
Nel caso particolare che la secante passi per il centro o distante d da A cioè: $d = \overline{OA}$ avremo:

$$(d+r) : \overline{AT} = \overline{AT} : (d-r)$$

$$\boxed{d^2 - r^2 = \overline{AT}^2}$$

che verifica il teorema di Pitagora sul triangolo ret=tangolo OTA.

(Teorema della bisettrice)

<u>In un triangolo la bisettrice divide il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti.</u>

Dato il triangolo ABC di lati: $\overline{AB} = c$; $\overline{AC} = b$; $\overline{BC} = a$, tracciata la bisettrice $\overline{CI}$ essa divide il lato $\overline{AB}$ in due parti $\overline{AI} = m$; $\overline{IB} = n$

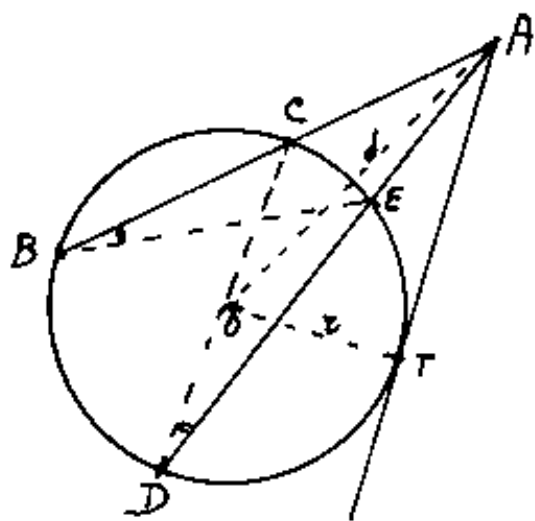
Sul prolungamento di $\overline{AC}$ riportiamo il segmento $a = \overline{CB} = \overline{CD}$ ed uniamo $\overline{BD}$: il triangolo BCD è isoscele e

$= \overline{CB} = \overline{CD}$ ed uniamo $\overline{BD}$; il triangolo BCD è isoscele e gli angoli: $C\hat{B}D = C\hat{D}B = I\hat{C}B = I\hat{C}A$ cioè $\overline{DB}$ è parallelo a $\overline{CI}$. Cioè possiamo definire D come punto comune alla retta su $\overline{AC}$ e la parallela per B alla bisettrice, e dimostrare che $I\hat{C}B = C\hat{B}D$ perché alterni interni; $A\hat{C}I = A\hat{D}B$ perché corrispondenti, e quindi essendo $A\hat{C}I = I\hat{C}B$ anche $C\hat{B}D = C\hat{D}B$ ed $\overline{CD} = \overline{CB} = a$

Alcuni teoremi dedotti dalla proporzionalitá

Il campo dei numeri razionali è il campo delle proporzioni lineari, ove si uguagliano due frazioni.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e se ne deduce: $ad = bc$.

Per esempio: (Teorema delle secanti)

Se da un punto A esterno ad una circonferenza, di centro O e raggio r, si tracciano due secanti, i segmenti definiti dalla circonferenza e misurati a partire da A sono rispettivamente i medi e gli estremi di una proporzione: $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AE} : \overline{AC}$

Infatti i triangoli: BEA e DCA sono simili avendo $\hat{A}$ in comune; $\hat{B} = \hat{D}$ alla circonferenza sullo stesso arco $\overset{\frown}{CE}$; ne consegue la proporzione.

ne consegue la proporzione.

(Teorema della secante e della tangente)

Dalla precedente proporzione si ha $(\overline{AB})(\overline{AC}) = (\overline{AD})(\overline{AE}) =$ $=$ costante $= \overline{AT}^2$ che porta: $\boxed{\overline{AB} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{AC}}$

Se da un punto A esterno ad una circonferenza si traccia una secante ed una tangente e si misurano i segmenti a partire da A, si ha che il segmento tangente è medio proporzionale fra i segmenti sulla secante.

Si noti che salvo per $n = 6$ l'angolo costruito graficamente è sempre maggiore di quello vero.

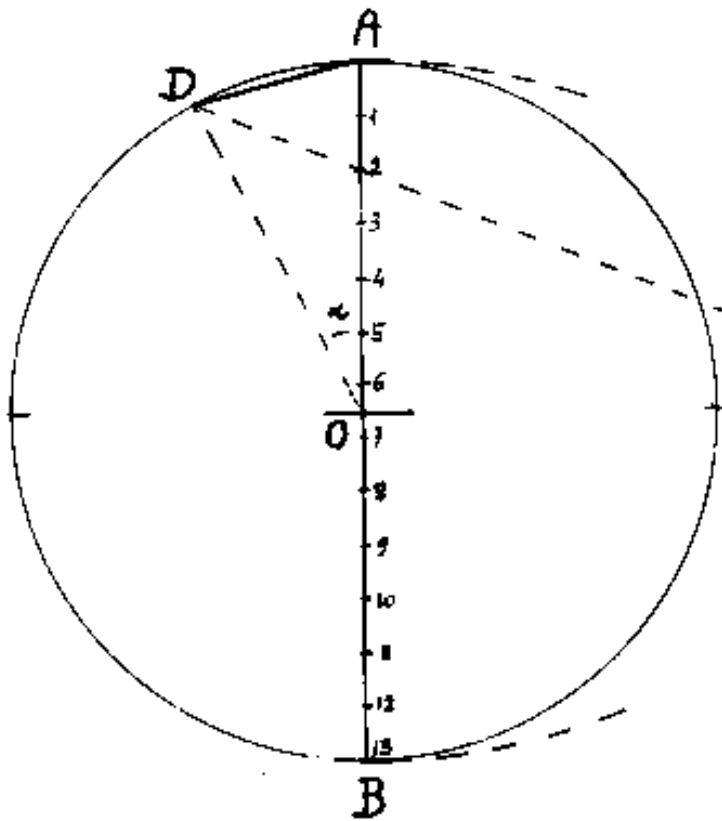
La tabella che riportiamo, può essere di ausilio per chi voglia utilizzare tale costruzione grafica.

TAVOLA DELLE DIFFERENZE fra l'angolo disegnato α^* e l'angolo vero

n	360/n	α^*	α^*-360/n	nα^*-360
5.00000	72.00000	71.95345	-0.04655	-0.23273
6.00000	60.00000	60.00000	0.00000	0.00000
7.00000	51.42857	51.51822	0.08965	0.62757
8.00000	45.00000	45.18737	0.18737	1.49896
9.00000	40.00000	40.27782	0.27782	2.50039
10.00000	36.00000	36.35581	0.35580	3.55804
11.00000	32.72727	33.14794	0.42067	4.62732
12.00000	30.00000	30.47344	0.47343	5.68121
13.00000	27.69231	28.20800	0.51570	6.70404
14.00000	25.71429	26.26343	0.54914	7.68797
15.00000	24.00000	24.57522	0.57522	8.62824
16.00000	22.50000	23.09525	0.59525	9.52405
17.00000	21.17647	21.78679	0.61032	10.37539
18.00000	20.00000	20.62132	0.62132	11.18374
19.00000	18.94737	19.57633	0.62896	11.95020
20.00000	18.00000	18.63386	0.63386	12.67723
21.00000	17.14286	17.77940	0.63654	13.36737
22.00000	16.36364	17.00101	0.63737	14.02221
23.00000	15.65217	16.28888	0.63670	14.64418
24.00000	15.00000	15.63481	0.63481	15.23547
25.00000	14.40000	15.03192	0.63192	15.79809
26.00000	13.84615	14.47434	0.62819	16.33297

25.00000	14.40000	15.03192	0.63192	[illegible]
26.00000	13.84615	14.47434	0.62819	16.33297
27.00000	13.33333	13.95716	0.62383	16.84343
28.00000	12.85714	13.47607	0.61892	17.32982
29.00000	12.41379	13.02738	0.61359	17.79412
30.00000	12.00000	12.60791	0.60791	18.23742
31.00000	11.61290	12.21488	0.60198	18.66133
32.00000	11.25000	11.84585	0.59585	19.06720
33.00000	10.90909	11.49868	0.58959	19.45635
34.00000	10.58824	11.17141	0.58318	19.82804
35.00000	10.28571	10.86245	0.57673	20.18571
36.00000	10.00000	10.57024	0.57024	20.52850

del numero di divisioni ossia del numero dei lati del poligono inscritto nella circonferenza.

"Si tracci il diametro $\overline{AB}$ e si divida nel desiderato "n" numero di parti uguali; (nel nostro caso in figura "n" = 13) quindi con centri in A ed in B e raggio $\overline{AB}$, si determini il punto C, Si unisce C con l'estremo 2 della seconda gradazione (sempre 2 qualunque sia "n"), e si prolunga fino ad incontrare in D la circonferenza: l'arco $\widehat{AD}$ è l'ennesima parte della circonferenza, (circa); la corda $\overline{AD}$ è circa il lato del poligono inscritto di "n" lati; l'angolo $A\hat{O}D = \alpha$ è circa l'ennesima parte dell'angolo giro".

Notiamo che la costruzione è esatta solo se disegnamo

Notiamo che la costruzione è esatta solo se disegnamo l'esagono, cioè per "n" = 6; l'errore massimo si ha per "n" = 22, ove l'angolo $\frac{360°}{22} = 16°,363636 = 16° 31' 49''$, graficamente $\alpha = 17°,00101 = 17° 00' 03'',6$ porta un errore di $0°,6373,7 = 38' 14'',5$

L'errore sull'angolo giro cioè: $(n\alpha° - 360°)$ è crescente col numero dei lati, per "n" = 22 si ha: $(17°,00101) \cdot 22 - 360° = 14°,02222$.

Dividere il cerchio in un numero qualsiasi di parti uguali

Abbiamo visto come dividere il cerchio in 2,3,4,5,6, parti uguali e come dividere ciascun angolo in 2^n parti uguali; si possono così ottenere:

$2; 4; 8; 16; 32; 64; \ldots 2^n$ parti uguali

$3; 6; 12; 24; 48; 96; \ldots 3 \cdot 2^n$ " "

$5; 10; 20; 40; 80; 160; \ldots 5 \cdot 2^n$ " "

risultano mancanti: 7; 9; 11; 13; ... e le loro suddivisioni in 2^n.

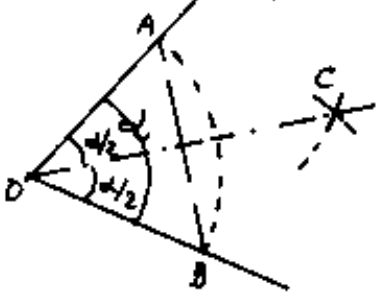
Per dividere in 15 parti possiamo avvalerci della differenza: $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$; $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$; oppure della differenza: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$; $\frac{1}{2} \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$;

Vedremo a suo tempo le costruzioni grafiche (approssimate) dell'ettagono, dell'ennagono, ecc; e la loro discussione.

Alcuni manuali di disegno riportano la se=

Alcuni manuali di disegno riportano la seguente costruzione grafica per "dividere la circonferenza in un numero qualsiasi di parti uguali". (Senza avvertire che la costruzione è soltanto approssimata)

Riportiamo la semplice modalità esecutiva di questa costruzione, facendo seguire una tabella degli errori che si commettono in funzione

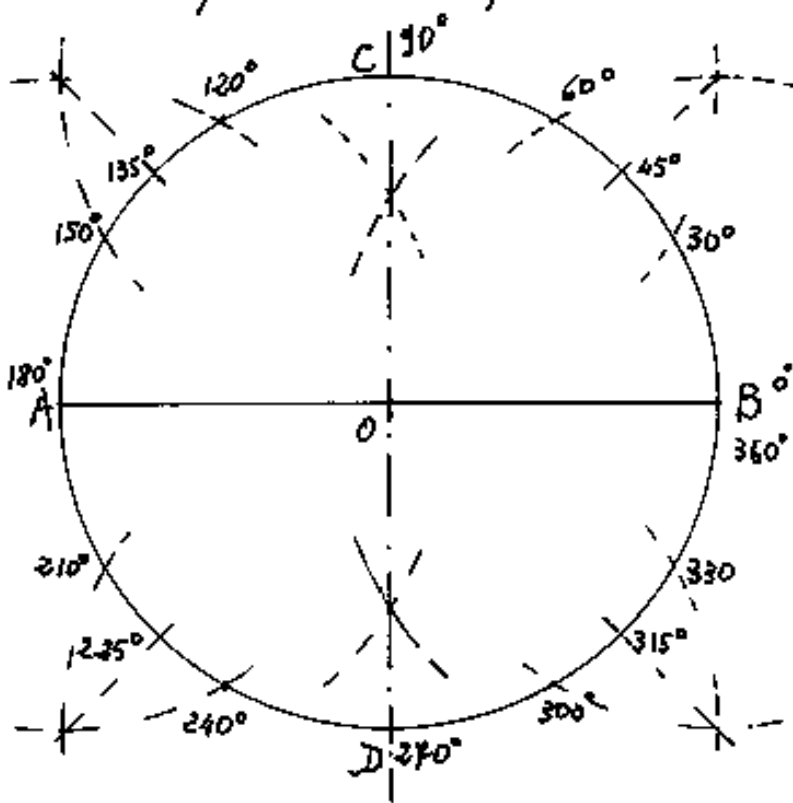
Poiché, dato un angolo qualsiasi, è sempre possibile dividerlo graficamente in due parti uguali tracciando l'asse della corda dell'arco sotteso all'angolo; cioè, facendo centro in A e B si determina C, ed unito C con O, ove $\overline{CO}$ è l'asse di $\overline{AB}$, si ottiene che l'angolo $\alpha = A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B$,

ove: $A\hat{O}C = C\hat{O}B = \alpha/2$.

Il procedimento può ripetersi su $\alpha/2$ ed avremo $\alpha/4$, $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\alpha}{16}$, ... $\frac{\alpha}{2^n}$, con n procedimenti.

Non è invece possibile dividere un angolo <u>qualsiasi</u> in tre parti uguali; è il problema insoluto, che fin dall'antichità veniva chiamato: "il problema della TRISEZIONE dell'ANGOLO". Questo problema è connesso con la risoluzione delle equazioni di terzo grado nel caso irriducibile, con l'estrazione delle radici cubiche, con la costruzione dell'ettagono rego=

radici cubiche, con la costruzione dell ettagono rego= lare, con la duplicazione del cubo (detto anche problema di Delo). Per questi problemi possiamo avvalerci di curve partico= lari predisegnate: per esempio "La Lumaca di Pascal"; "La trisettrice di Mac Laurin"; "La cissoide" (studiata da Diocle II sec A.C.)"; "La concoide di Nicomede"; ecc; oppure usare le tavole trigonometriche, cioè i valori precalcolati delle funzioni trigonometriche.

Come costruire graficamente gli angoli notevoli

Tracciato il segmento $\overline{AB}$, facendo centro in A ed in B con raggio qualsiasi, (maggiore di $\overline{AB}/2$) si tracciano due archi che si incontreranno in due punti appartenenti all'asse di $\overline{AB}$, cioè alla retta normale ad $\overline{AB}$ e passante per il suo punto di mezzo O. Quindi centro in "O" e raggio $\overline{OA} = \overline{OB}$ si traccia una circonferenza che incontrerà in C e D l'asse di $\overline{AB}$ ed avremo i primi 4 angoli: 90°, 180°, 270°, 360° cioè $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π in radianti.

- Con lo stesso raggio $\overline{OB}$ centro in A e B, troveremo gli angoli: 60°, 120°, 240°, 300°, cioè $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$ rad. che insieme ad A e B sono i vertici di un esagono. Con

lo stesso raggio $\overline{OB}$, centro in C e D, troveremo gli angoli 30°, 150°, 210°, 330°, cioè $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$ rad. Non solo, ma uniti con "O" i quattro punti comuni ai precedenti archetti, troviamo gli angoli 45°, 135°, 225°, 315°, cioè: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ rad. Con la costruzione del decagono sappiamo costruire gli angoli 36°, 72°, 108°, 144°, 216°, 252°, 288°, 324° cioè: $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{6}{5}\pi$, $\frac{7}{5}\pi$, $\frac{8}{5}\pi$, $\frac{9}{5}\pi$ rad.

Gli angoli notevoli

Nei problemi concernenti angoli, conviene sempre accertarsi se gli angoli noti o incogniti sono "notevoli", oppure complementari, o supplementari, o explementari di angoli notevoli; od anche multipli o sottomultipli interi di angoli notevoli.

Gli angoli notevoli sono:

fondamentali

$360° = 2\pi$ rad = angolo giro

$180° = \pi$ rad = angolo piatto $= (\frac{1}{2}$ giro$)$

$90° = \frac{\pi}{2}$ rad = angolo retto $= (\frac{1}{4}$ giro$)$

notevoli

$60° = \frac{\pi}{3}$ rad $= \frac{1}{6}$ giro = l'angolo del triangolo equilat.

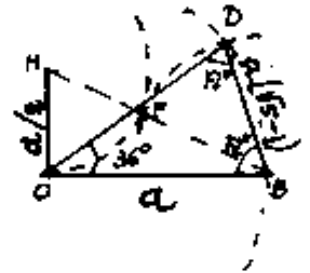
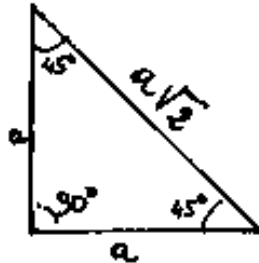
$45° = \frac{\pi}{4}$ rad $= \frac{1}{8}$ giro = l'angolo in metà quadrato

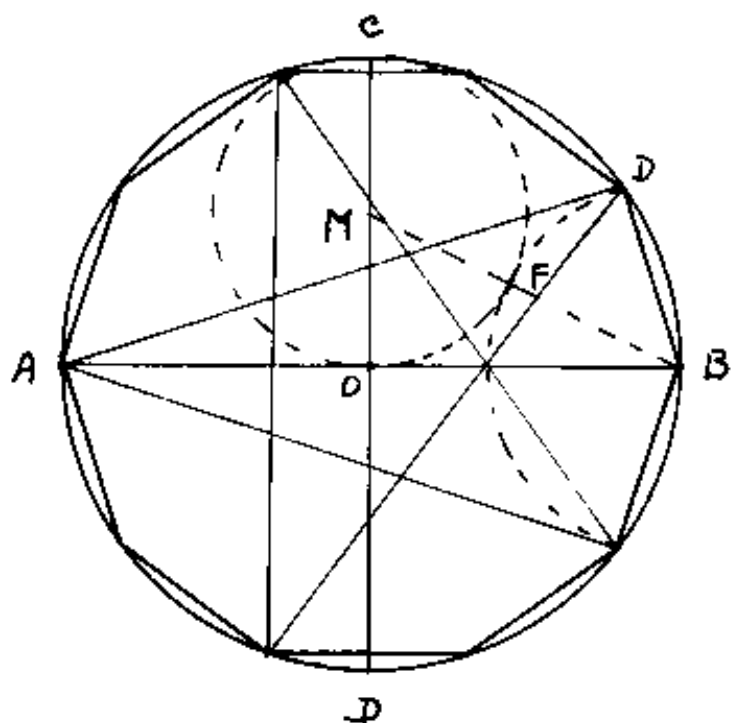
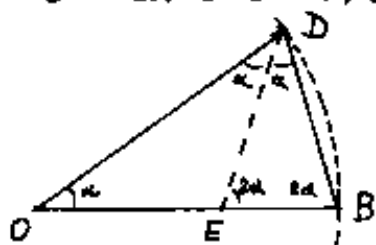
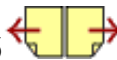
$30° = \frac{\pi}{6}$ rad $= \frac{1}{12}$ giro = l'angolo in metà triangolo equilat.

conviene aggiungere:

auree

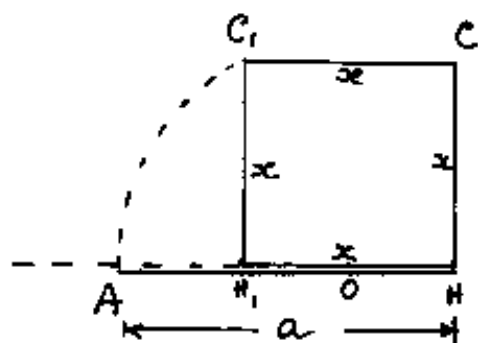
$$\begin{cases} 36° = \frac{\pi}{5} \text{ rad} = \frac{1}{10} \text{ giro} \\ 72° = \frac{2\pi}{5} \text{ rad} = \frac{1}{5} \text{ giro} \end{cases}$$ angoli trattati con la sezione aurea.

Ricordare le figure:

IL Decagono Regolare

Per la costruzione del decagono regolare, tracciato il cerchio di centro "O" e diametro $\overline{AB}$, si tracci il diametro $\overline{CD}$ perpendicolare ad $\overline{AB}$, quindi con centro nel punto M medio di $\overline{CO}$, si tracci un cerchio di diametro: $\overline{CO}$, e si unisca M con B, il punto di intersezione: F determina il segmento $\overline{FB}$ che è il lato del decagono regolare ed è la parte aurea del raggio $\overline{OB}$. Infatti sia $\overline{OB}$ il raggio ed $\overline{OE} = \overline{BD}$ la sua parte aurea. I triangoli: BOD ed EDB, sono simili infatti per la proporzione aurea: $\overline{OB} : \overline{OE} = \overline{OE} : \overline{EB}$

no simili infatti per la proporzione aurea: $OB : OE = OE : EB$ ed essendo $\overline{OE} = \overline{DB}$ si ha: $\overline{OB} : \overline{DB} = \overline{DB} : \overline{EB}$. (lati proporzionali). Ma $\overline{OB} = \overline{OD}$ per cui anche $\overline{DE} = \overline{DB} = \overline{OE}$ cioè il triangolo: OEB è isoscele e detti α gli angoli alla base, avremo che $D\hat{E}B = 2\alpha$ (angolo esterno) $= O\hat{B}D$; e $B\hat{O}D = E\hat{D}B = \alpha$. Dovendo essere: $B\hat{O}D + O\hat{D}B + D\hat{B}O = 180° = \pi\,rad$ anche $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180° = \pi\,rad$ per cui $\alpha = \frac{180°}{5} = 36° = \frac{360°}{10} = \frac{2\pi\,rad}{10} = 0{,}62832\ rad$. c.v.d.

parte aurea di $\overline{AC}$, infatti se proiettiamo $\overline{AH_1} + \overline{H_1H} = \overline{AH} = m$ su $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$ e se $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$ lo proiettiamo su: $\overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AB}$ si avranno gli stessi rapporti fra i segmenti.

Inversamente se è data la parte aurea x e si vuole l'intero segmento "a" ove:

$$a : x = x : (a-x)$$

basta disegnare il quadrato CHH_1C_1 di lato x e dal punto O medio di $\overline{HH_1}$ si riporti il segmento $\overline{OC_1}$ sul prolungamento di $\overline{HH_1}$ in A avremo: $a = \overline{AH}$. Ed è la costruzione inversa.

Dalla proporzione si ha:

$a^2 - ax - x^2 = 0$, per cui

$a = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{5x^2}{4}}$ (vale solo +)

$a = x\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $a = x(1,618034)$

$$x = a\frac{2}{1+\sqrt{5}} = a\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right); \quad x = a(0,618034)$$

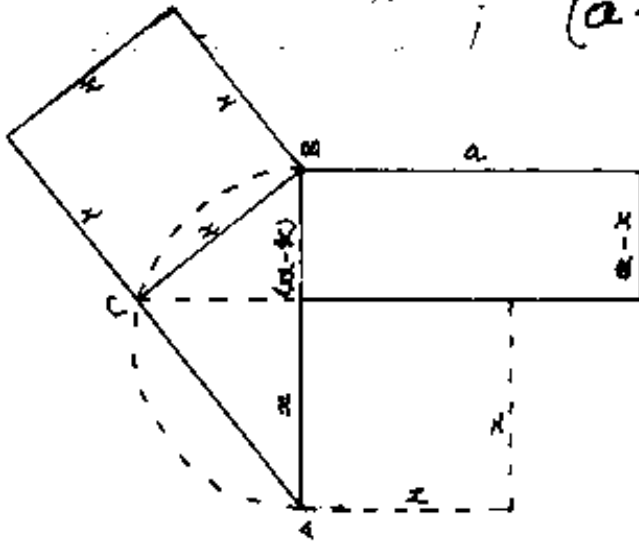
cioè la parte aurea è poco più dei $\frac{6}{10}$ del segmento

cioè la parte aurea è poco più dei 6/10 del segmento

E' anche interessante notare che: $\frac{a}{x} - \frac{x}{a} = 1$

; $(a+x)(a-x) = ax$ cioè:

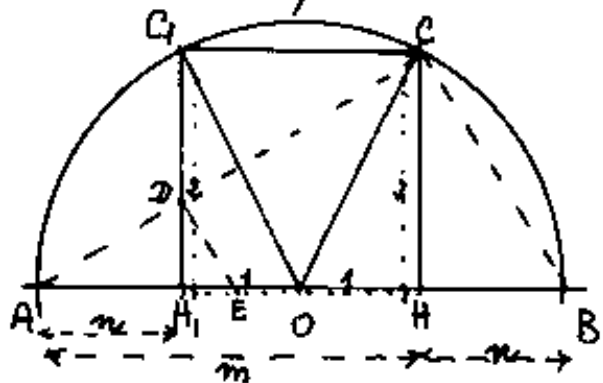
$$a^2 - x^2 = ax$$

In figura abbiamo riportato il I° teorema di Euclide $(a-x)(a) = x^2$ nel caso che x sia parte aurea di a.

$(\overline{AD}-\overline{CD}):\overline{CD} = (\overline{CD}-\overline{AC}):\overline{AC}$ (per lo scomponendo)

cioè: $(\overline{AD}-\overline{CD}) = \overline{AC} = \overline{AF}$; $\overline{CD} = \overline{AB}$; $(\overline{CD}-\overline{AC}) = (\overline{AB}-\overline{AF}) = \overline{FB}$

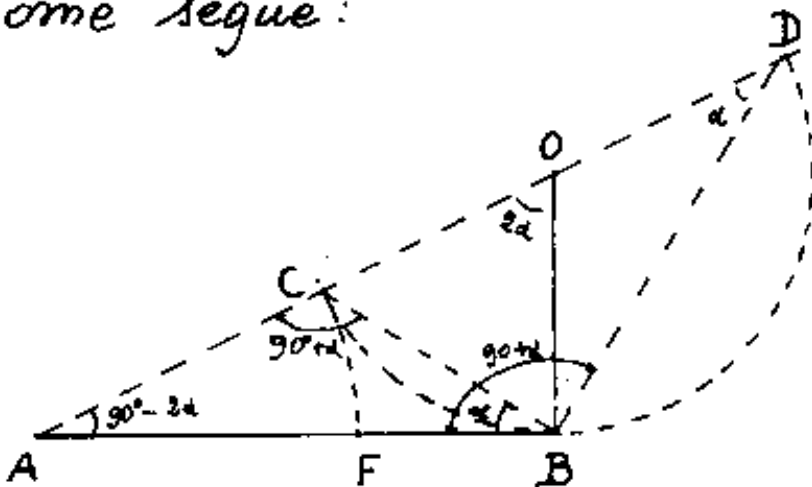
$\overline{AF}:\overline{AB} = \overline{FB}:\overline{AF}$ cioè : $\boxed{\overline{FB}:\overline{AF} = \overline{AF}:\overline{AB}}$

che dimostra essere <u>$\overline{AF}$ la parte aurea di $\overline{AB}$</u>.

Sia la dimostrazione che la costruzione grafica sono un po' elaborate, mentre la proporzione richiama alla mente il secondo teorema di Euclide: "L'altezza è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti"; $m:h = h:n$; ma dovrebbe essere : <u>$m = (h+n)$ = intero segmento con h = parte aurea</u>, mentre $\overline{AB} = m+n = h+2n$ cioè: $\overline{AB} - 2n = h$, significa che un quadrato di lato h inscritto in una semicirconferenza. Questa costruzione non presenta difficoltà: Dal centro "O" di una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}$, si tracciano a destra e a sinistra da "O" due segmenti inclinati 2/1 che incontreran-

← – – – $\overline{m}$ – – – → inclinati 2/1 che incontreran-
no la semicirconferenza in C e C_1; da C e C_1 le normali
ad $\overline{AB}$ fino ad H ed H_1; il quadrato CHH_1C_1 è il qua-
drato cercato ove $\overline{AH} = m = \overline{H_1B}$ = intero segmento;
$\overline{AH_1} = \overline{HB}$ = parte minore; $\overline{H_1H} = \overline{HC} = \overline{H_1C_1} = \overline{CC_1}$ = parte aurea
di $\overline{AH}$. Ma noi a priori abbiamo il segmento $\overline{AB}$, perciò
se da D comune ad $\overline{AC}$ e $\overline{C_1H_1}$ tracciamo la parallela $\overline{DE}$ ad $\overline{CB}$
avremo $\overline{EB}$ = parte aurea di $\overline{AB}$, così come $\overline{DC}$ è la

Luca Pacioli di Borgo S. Sepolcro (Ar. Toscana) pubblicó nel 1509 un'opera intitolata: "Divina Proporzione". Quest'opera, di cui Leonardo da Vinci incise le figure geometriche, doveva stabilire le leggi di tutte le arti figurative.

Modernamente é stato trovato che la proporzione aurea domina anche in natura, nelle proporzioni di piante, di animali, e principalmente fra le parti del corpo umano.

La costruzione grafica della parte aurea di un segmento $\overline{AB}$, viene eseguita come segue:

Dall'estremo B si riporta perpendicolarmente ad $\overline{AB}$ un segmento $\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{AB}$; quindi con centro in "O" e raggio $\overline{AB} = \overline{OB}$ si traccia

raggio $\frac{\overline{AB}}{2} = \overline{OB}$ si traccia la semicirconferenza di diametro $\overline{CD}$ sulla retta congiungente A con O. Quindi centro in A e raggio $\overline{AC}$ si riporta $\overline{AC} = \overline{AF}$ su $\overline{AB}$. <u>Il segmento $\overline{AF}$ è la parte aurea del segmento $\overline{AB}$.</u> Infatti i triangoli ACB e ABD sono simili: angolo $\hat{A}$ in comune, $A\hat{C}B = A\hat{B}D$ per cui: $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AD}$, ma $\overline{AB} = \overline{CD}$

<u>$\overline{AC} : \overline{CD} = \overline{CD} : \overline{AD}$</u> ove si nota che $\overline{CD}$ è la parte aurea di $\overline{AD}$.

LA SEZIONE AUREA

Il concetto di "frazione" che equivale a "rapporto", che equivale a "proporzione" porta a quella che fu chiamata: "SEZIONE AUREA" di un segmento od anche "divisione aurea", oppure: "dividere un segmento in media ed estrema ragione" e vuol dire che la parte minore del segmento stá alla parte maggiore, come la parte maggiore sta' all'intero segmento, cioè la parte maggiore è media proporzionale fra la parte minore e l'intero segmento. La parte maggiore si chiama anche "Parte aurea" del segmento.

Fin dall'antichità filosofi e matematici, compreso Pitagora e Platone, attribuivano grande importanza alla "Sezione Aurea" perchè permetteva di costruire il decagono (il pentagono) regolare e soprattutto il pentagono stellato detto "Penta-

soprattutto il pentagono stellato detto "Penta-gramma", (da noi chiamato: "Stella d'Italia"), che era simbolo di salute e di fortuna. Gli scienziati ed artisti del Rinascimento trovarono poi che le grandi opere d'arte figurativa (pittura, scultura, architettura) sono dominate dalla proporzione aurea.

Il sistema numerico sessagesimale che si usa anche oggi nei nostri orologi prevede 1 ora di 60' ed 1' di 60" dopo di che il sistema torna decimale. Poiché una ora è 3600" essa è divisibile per: 2, 3, 4, 5, 6, *, 8, 9, 10, *, 12, *, *, 15, 16, *, 18, *, 20, *, *, *, 24, 25, *, *, *, *, 30, *, *, *, *, *, 36, *, *, *, 40, *, *, *, *, 45, *, *, 48, *, 50, *, *, *, *, *, *, *, *, *, 60. Dei primi 60 numeri è divisibile per 22 oltre l'unità e non è divisibile per i restanti 37.
D'altra parte il cerchio è facilmente divisibile in 6 parti e quindi in: 12, 24, 48, 96, Però mentre $\frac{1}{48}$ di circonferenza equivale a 75" cioè: 1' 15" ; $\frac{1}{96}$ di giro = 37",5 abbiamo già lo sfrazionamento del secondo in metà.

Cioè, dati i numeri interi, è difficile fare un sistema di sottomultipli che permettano l'equivalenza esatta con i reciproci dei numeri interi. (per esempio 1/7); non solo, ma trovato, anche se possibile, un tale sistema, se la sua unità misura il lato di un quadrato, non potrà mai, con un nume=

il lato di un quadrato, non potrà mai, con un numero finito di cifre, misurarne anche la diagonale.

Si noti quindi la praticità della geometria di fornire (nei limiti della precisione del disegno) la vera grandezza, mediante segmenti finiti di quantità numericamente espresse da infinite cifre.

Alcuni distinguono la notazione numerica in notazione additiva (come i numeri romani) ed in notazione posizionale (come la nostra numerazione).

Alla spontanea rappresentazione dei numeri interi, si affianca la notevole difficoltà di rappresentare grandezze non intere. Dividere una unità in un numero finito di parti uguali è facile quando l'unità è un segmento, anzi si possono avere segmenti commensurabili, che ammettono una stessa unità e non commensurabili, che non ammettono la stessa unità; però, sia gli uni che gli altri, si possono sempre dividere in un numero finito di parti uguali.

Poiché i numeri servono per determinare "quantità" che possono essere espresse in peso, in volume, in area, in lunghezza, in valore, ecc. Occorrono dei sottomultipli dell'unità prescelta. Nel nostro sistema decimale è impossibile dividere

nostro sistema decimale è impossibile dividere per esempio il metro in 3 parti uguali, avremo: $33,333\bar{3}$ .... cm cioè 3 dm + 3 cm + 3 mm + 333 μ + ...

Una Yarda di 3 piedi ed ogni piede di 12 pollici, cioè una Yarda è 36 pollici, è impossibile dividerla in 5 parti avremo 7 pollici + $\frac{1}{5}$ di pollice e poiché il pollice è diviso in 8^mi^ avremo: 7 pollici + $\frac{1}{8}$ di pollice $+ \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{8}$

In Mesopotamia, nel periodo "antico-babilonese" (1800 ÷ 1600 A.C) la scrittura avveniva su tavolette di argilla pressappoco della dimensione di una mano, circa: 10 × 5 × 2 cm. Erano incise con uno stelo appuntito e l'inizio del segno era più grande, fu detta scrittura cuneiforme. I numeri da 1 a 12 erano:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

e: 10, 20, 30, 40, 50 erano: ...

I greci usavano le lettere dell'alfabeto per i numeri: $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = 3$; $\delta = 4$; $\varepsilon = 5$; però "in sequenza" dopo ε verrebbe ζ, invece il 6 è un segno simile detto digamma (st); $\varsigma = 6$; e $\zeta = 7$; $\eta = 8$; $\vartheta = 9$; $\iota = 10$; anche i greci avevano una impostazione decimale infatti $11 = \iota\alpha$; $12 = \iota\beta$; fino ad $\iota\vartheta = 19$; $\kappa = 20$; $\kappa\alpha = 21$ ... ecc $\pi = 80$; $\rho = 100$; $\sigma = 200$; $\tau = 300$; ... $\omega = 800$ poi: T (o ∧ o ϡ) = 900

$\rho = 100$; $\sigma = 200$; $\tau = 300$; ... $\omega = 800$ poi: T(o ∧ o ⁶|ᵃ) = 900

che sono simboli di un alfabeto greco più antico.

La questione decimale, dipendente dal contare sulle dita, che si ritrova anche nei numeri romani. I simboli numerici che abbiamo esposto riflettono <u>"numeri interi" assoluti</u> (cioè privi di segno).

Le Numerazioni

O. Neugebauer, nel suo libro: "Le scienze esatte nell'Antichità" (ed. Feltrinelli, edizione italiana 1974), commenta, abbastanza amaramente: "...E' interessante osservare come ci siano voluti 2000 anni di trasmissione di conoscenze astronomiche dalla Mesopotamia attraverso i Greci, gli Indiani e gli Arabi, per arrivare a un sistema numerico veramente assurdo." L'autore si riferisce in particolare alla numerazione sessagesimale per gli angoli, di cui abbiamo già esposti i fondamenti, ma il commento può estendersi agli altri tipi di numerazione.

L'argomento: "Sistemi di numerazione" è particolarmente delicato e scabroso; ci riserviamo di trattarlo più ampliamente dopo aver trattato l'intera analisi matematica. Dobbiamo distinguere

l'azione del "contare", dall'enumerare, dal numerare, dal calcolare, dal memorizzare una quantità. Abbiamo già detto che i romani per memorizzare i capi di bestiame dei propri greggi, incidevano tacche sul bastone da pastore; questo metodo era in uso anche presso altri popoli antichi.

Nello stesso grafico possono coesistere scale diverse, (per esempio il grafico della temperatura nel tempo), cioè si possono correlare graficamente le diverse dimensioni fisiche.

Tornando alla commensurabilità, si nota che se "a" e "b" sono commensurabili fra loro e "b" e commensurabile con "c", anche "a" è commensurabile con "c". Infatti se $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ cioè se $(a:m = b:n)$ ed $\frac{b}{c} = \frac{r}{s}$ cioè: $(b:r = c:s)$, avremo: $b = \frac{n}{m} a = c\frac{r}{s}$; per cui $a = \frac{mr}{ns} c$

$\frac{a}{c} = \frac{mr}{ns}$ cioè: $(a : c = mr : ns)$; $(a : mr = c : ns)$

ed essendo m, r, n, s numeri interi, lo è anche il loro prodotto, e resta dimostrato l'assunto.

Già Pitagora aveva trattato della commensurabilità e incommensurabilità delle grandezze, in particolare quella fra lato e diagonale del quadrato. A noi interessa evidenziare le caratteristiche dei modi per rappresentare le quan-

titá; quí abbiamo evidenziato un simbolismo geometrico, ma è ancora piú interessante lo sforzo umano per rappresentare aritmetica-mente le quantitá; indipendentemente dal simboli-smo grafico (le cifre); abbiamo trovato numeri raziona-li ed irrazionali cioè esprimibili o no mediante frazioni.

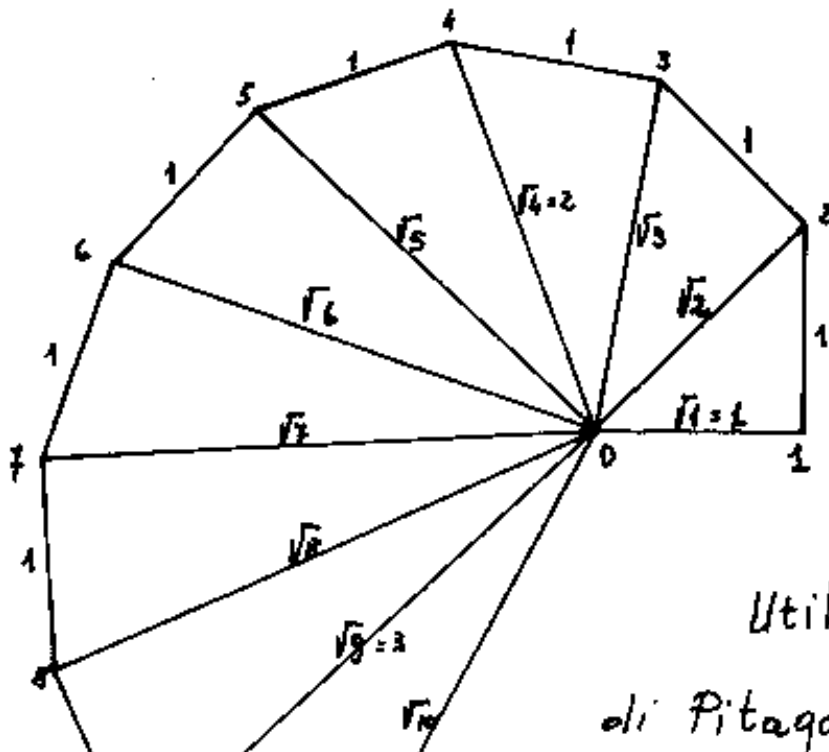
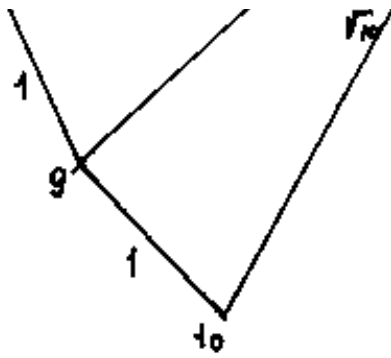
Vediamone ora l'aspetto aritmetico.

La rappresentazione grafica di quantità, resa possibile in riferimento ad un modulo grafico unitario, rispetto al quale è possibile rappresentare tutte le quantità numeriche, razionali o irrazionali, o, come vedremo, "trascendenti" o, addirittura, "immaginari complessi". Il modulo grafico unitario, può essere un <u>segmento unitario</u>, al quale attribuiamo il valore <u>puramente numerico</u>: <u>uno</u>, (1). Ma a questo <u>segmento unitario</u> possiamo anche attribuire il valore dell'<u>unità di misura</u> di una qualsiasi <u>dimensione fisica</u>, per esempio 1 Watt, o 1 Volt, o un grado di temperatura, avremo così diagrammi e rappresentazioni grafiche che unificano la geometria con la matematica e la fisica.

<u>Se al modulo unitario</u> è attribuito il valore di una "lunghezza" (per es. un centimetro, un pollice, un metro o un Kilometro) si ha una "<u>scala</u> grafica" Cioè se il modulo grafico è un cm.

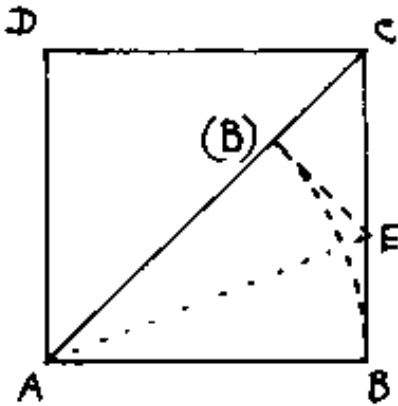
scala grafica" Cioè se il modulo grafico è un cm. ed attribuiamo ad esso il suo vero valore (un cm.) avremo la: scala 1:1 (e non è necessario specificare quali lunghezze) se ogni cm di grafico vale 1 metro, avremo la scala 1:100 (ed anche qui non è necessario specificare lunghezze, è un rapporto di similitudine). Se invece il modulo grafico di un centimetro rappresenta 100 Kg dovremo scrivere: Scala cm 1 = Kg 100.

Analoga dimostrazione potrebbe farsi fra il lato del triangolo equilatero e l'altezza; il loro rapporto è irrazionale: $\frac{h}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Anche molti altri rapporti di segmenti o di grandezze in genere sono numeri irrazionali. Tuttociò dimostra che esistono "grandezze", (anche non geometriche), <u>che non ammettono una comune unità di misura "finita"</u>. (Solo l'infinitesimo è comune alle varie grandezze).

Costruzione Grafica.

Utilizzando il teorema di Pitagora riportiamo $\overline{O1}$

di Pitagora riportiamo 01 come modulo unitario, da 1 la perpendicolare, riportiamo in $\overline{12}$ il modulo; così avremo: $\overline{02} = \sqrt{2}$; da 2 la perpendicolare ad $\overline{02}$ e riportiamo il modulo 1 in $\overline{23}$, avremo $\overline{03} = \sqrt{3}$; e così via si possono costruire le radici quadrate di tutti i numeri interi.

quindi i due segmenti "a" e "b" sono commensurabili ammettono cioè un summultiplo comune: (τ_3). Poniamo: $\tau_3 = u$ avremo: $a = 11 \cdot u$; $b = 7u$.

Vediamo ora un classico esempio di incommensurabilità.

Dimostriamo che la diagonale ed il lato di un quadrato sono fra loro incommensurabili.

Di un quadrato ABCD consideriamo la diagonale $\overline{AC}$, su di essa, a partire da A riportiamo il lato $\overline{AB}$ che sarà: $\overline{A(B)}$, da (B) la perpendicolare fino ad E.

notiamo che l'avanzo di diagonale $\overline{(B)C} = \overline{(B)E}$ essendo il triangolo C(B)E rettangolo isoscele, cioè metà di un quadrato; anche $\overline{BE} = \overline{(B)E} = \overline{BC}$ perchè i due triangoli rettangoli ABE e A(B)E sono congruenti in quanto hanno l'ipotenusa $\overline{AE}$ in comune e $\overline{AB} = \overline{A(B)}$ per costruzione quindi se al lato togliamo l'avanzo di diagonale resta $\overline{CE}$ che a sua volta è diagonale rispetto a segmenti grandi: $\overline{EB} = E(B)$. Quindi

a sua volta è diagonale rispetto a segmenti grandi: $\overline{EB} = E(B)$. Quindi riportando $\overline{E(B)}$ su $\overline{EC}$ ci ritroviamo nelle condizioni di partenza, ed avremmo quadrati sempre più piccoli fino ad essere infinitesimi senza aver trovato un modulo comune. Se: $\overline{AB} = l$ ed $\overline{AC} = d$

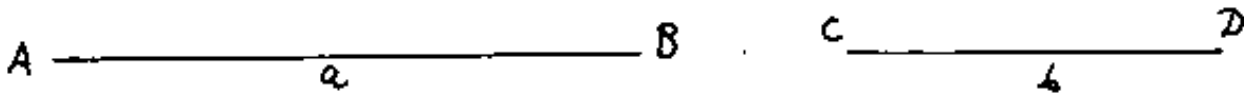
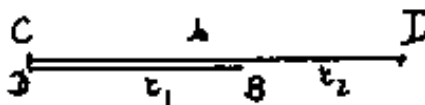
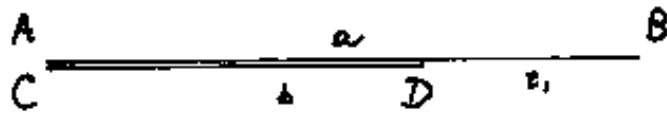
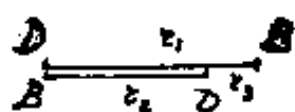
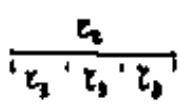
Sappiamo per Pitagora: $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \Rightarrow d = l\sqrt{2}$; cioè:

$\frac{l}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ non è esprimibile in forma frazionaria, cioè:

$\sqrt{2}$ non è un "numero razionale" è "irrazionale".

Commensurabilità ed incommensurabilità di segmenti.

Dati graficamente due segmenti a e b

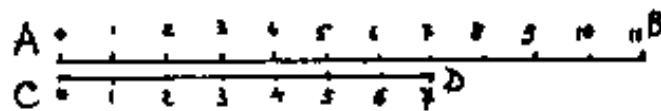
A ——— a ——— B . C ——— b ——— D

sovrapponiamoli con l'origine in comune: $A \equiv C$ il segmento minore entrerà un numero intero n di volte nel maggiore, poi, può avanzare un segmento, ancora minore, che chiameremo t_1; cioè: $nb + t_1 = a$ (nel nostro caso $n = 1$). Ripetiamo il procedimento con b ed t_1, ed avremo: che t_1 entrerà un numero intero n_1 di volte in b poi avanzerà t_2, cioè: $b = n_1 t_1 + t_2$; (nel nostro caso anche $n_1 = 1$). Ripetiamo il procedimento con t_1 ed t_2 (in generale: t_n ed t_{n+1}) si ha: ; $t_1 = n_2 t_2 + t_3$; ; $t_2 = 3 t_3$.

Ora che τ_3 è entrato un numero intero di volte in τ_2, facciamo i conti alla rovescia: $\boxed{\tau_3 = \frac{1}{3}\tau_2}$;

$\tau_1 = \tau_2 + \tau_3 = (1+\frac{1}{3})\tau_2 = \frac{4}{3}\tau_2 \supset \boxed{\tau_2 = \frac{3}{4}\tau_1}$; $b = \tau_1 + \tau_2$

$b = (1+\frac{3}{4})\tau_1 = \frac{7}{4}\tau_1 \supset \boxed{\tau_1 = \frac{4}{7}b}$; $a = b + \tau_1 = (1+\frac{4}{7})b = \frac{11}{7}b$

$\boxed{b = \frac{7}{11}a}$ notiamo che τ_3 è il modulo comune che entra 7 volte in b ed 11 volte in a.

A 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 B

C 0 1 2 3 4 5 6 7 D

τ_3 = modulo

Confronto di due segmenti

La costruzione ora effettuata consente il confronto fra due segmenti di cui si ha la rappresentazione grafica, ma non si ha il modulo unitario per definirne numericamente la misura. Basterà riportare su $\overline{OX}$ uno dei due segmenti (e sia $\overline{OB}$); perpendicolarmente da B l'altro segmento (e sia $\overline{BC}$); unito l'estremo C con l'origine essa intersecherà la retta dei coefficienti in un punto (e sia A), avremo che $\overline{UA}$ letto numericamente nella scala $\overline{OU} = 1$ è il rapporto fra i due segmenti. Se tale rapporto è esprimibile in forma frazionaria, cioè se esiste un segmento che sia il M.C.D per entrambi, i segmenti si dicono "Commensurabili", in quanto ammettono un modulo unitario comune.

Due segmenti si dicono "incommensurabili" quando non esiste alcun segmento finito che entri un numero intero di volte in ciascuno dei due segmenti, cioè quando non ammettono un modulo unitario comune.

e prolungata la retta fino all'incontro in "C" con la verticale per B, avremo che $\overline{BC} = c = ab$; ciò è facilmente dimostrabile per similitudine di triangoli, infatti: $c : b = a : 1$ da cui: $c \cdot 1 = c = ab$.

Del tutto analogo il quoziente, si riporta su $\overrightarrow{Ox}$ il divisore $\overline{OB} = b$ e perpendicolarmente da B il dividendo $\overline{BC} = c$, unito C con l'origine O, si determina A per intersezione con retta dei coef= ficienti; avremo: $\overline{UA} = a = c/b$.

In generale, per tutti i punti del piano di coordi= nate: $x;y$ (per coordinata x si intende la distanza che il punto ha dall'asse y, per coordinata y si intende la distanza che il punto ha dall'asse x) ove il rapporto $\frac{y}{x} = m$, possiamo leggerlo sulla retta dei coefficienti per l'intersezione su di essa con la retta che unisce il generico punto $P \equiv (x;y)$ (leggi: "P determinato dalle coordinate x e y") con l'origine O. Quindi tutti i

coordinate x ed y) con l'origine O. Quindi tutti i punti della retta $\overline{OP}$ hanno per coefficiente: $m = \frac{y}{x}$ cioè: $y = mx$. è l'equazione di tale retta ed m che indica la "pendenza" di tale retta è detto: Coefficiente angolare.

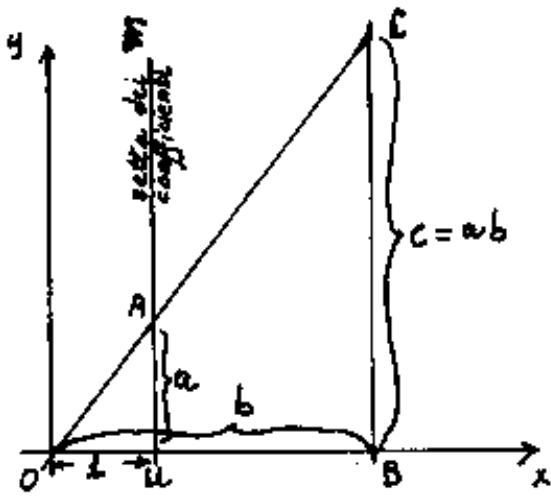
Altre costruzioni grafiche

Le costruzioni grafiche sono gli elementi base per il Calcolo Grafico. Le operazioni aritmetiche di somma o sottrazione sono ovvie, per il prodotto di due segmenti dati a e b, trovare $c = a \cdot b$

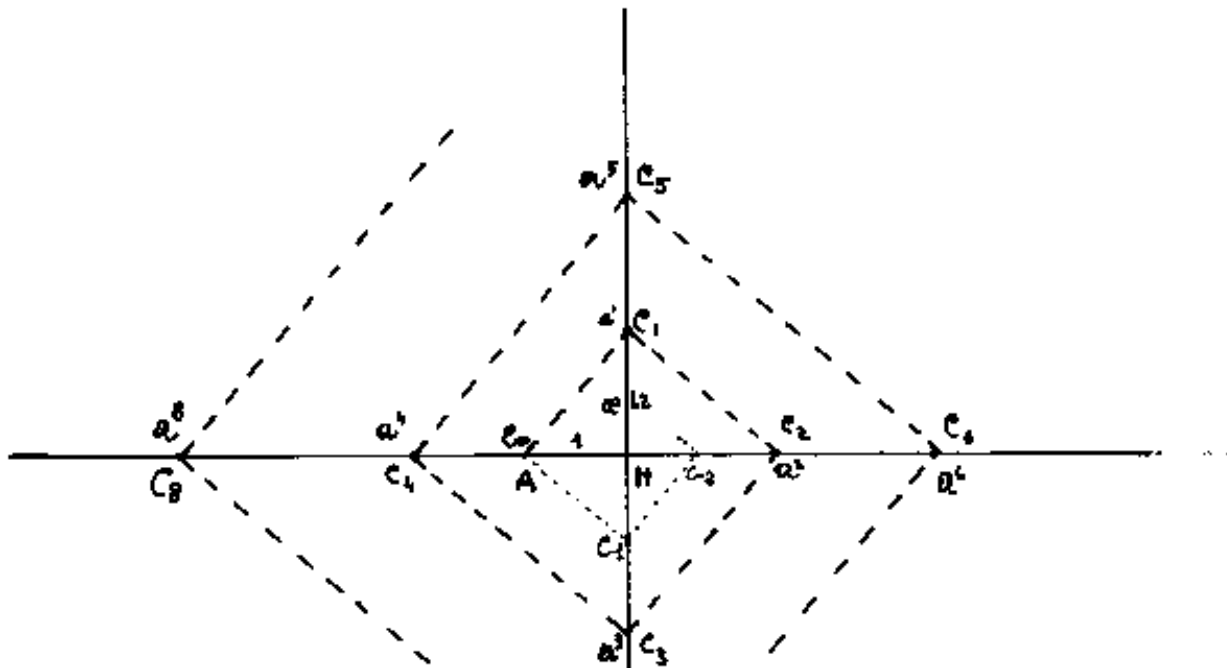
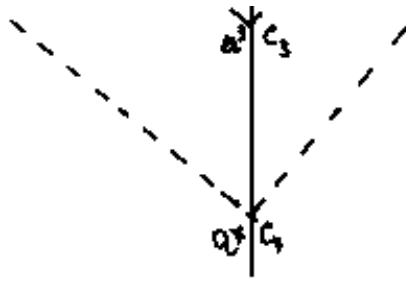
Si verificano due condizioni:

1) Se costruiamo il rettangolo di lati a, b: l'area di tale rettangolo è il prodotto di a·b, indipendente da qualsiasi unità di misura.

2) Se invece ad "a" ed a "b" attribuiamo valori numerici occorre conoscere (o ricavare) il modulo o segmento unitario rispetto al quale i due segmenti "a" e "b" possono rappresentare quei valori numerici, ed in questo caso è possibile trovare un segmento $c = a \cdot b$ che rappresenti (rispetto allo stesso modulo unitario) il prodotto dei valori nume=

to allo stesso modulo unitario) il prodotto dei valori nume= rici di "a" e di "b". — Disegnamo due assi ortogonali $\overline{OX}$ ed $\overline{OY}$, riportiamo su $\overline{OX}$ un segmento unitario (modulo) $\overline{OU} = 1$; per "u" tracciamo una parallela ad y $\overline{um}$ che sarà la retta dei coeffi= cienti moltiplicatori, riportiamo su di essa il segmento "a" $= \overline{UA}$ e su $\overline{OX}$ il segmento $\overline{OB} = b$, unita O con A,

Il procedimento di cui al punto 5) può essere generalizzato: tracciamo due assi ortogonali di origine H e riportiamo, (come in figura), $\overline{AH} = 1$ = modulo o segmento unitario, e perpendicolarmente $\overline{HC_1} =$ "a" un segmento di valore noto, (per esempio: $a = 1{,}2$). Unito A con C_1 da C_1 la normale ad $\overline{AC_1}$ fino a C_2 ove $\overline{HC_2} = a^2$, da C_2 la normale a $\overline{C_1C_2}$ fino a C_3 ove $HC_3 = a^3$, da C_3 la normale a C_2C_3 fino a C_4 ove $\overline{HC_4} = a^4$ e così via, ove da C_{n-1} la normale a $\overline{C_{n-2}C_{n-1}}$ fino a C_n ove $\overline{HC_n} = a^n$.

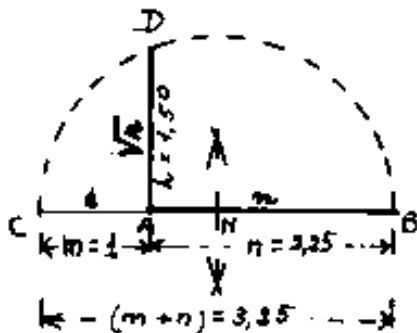
a^3 C_3

a^4 C_4

Se da A tracciamo la normale ad $\overline{AC_1}$ troviamo C_{-1} ove $\overline{HC_{-1}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$ e continuando $\overline{HC_{-2}} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ e così via. Questo procedimento consente di trovare le potenze ad esponente intero (positivo e negativo) non consente le radici. (vedi Vol V spirale logaritmica)

L'esercizio svolto al punto 2) equivale a trovare m quando noti h ed n sappiamo che h è media proporzionale fra m ed n : $m = \frac{h^2}{n}$

3) Trovare il reciproco di un numero (per esempio dato m = 2).

Sia $\overline{AB} = m = 2$ da B la perpendicolare ad $\overline{AB}$ fino a C ove $\overline{BC} = 1$. Unito A con C, da C la perpendicolare fino a D ove $\overline{BD} = \frac{1}{AB} = \frac{1}{m} = n = \frac{1}{2}$

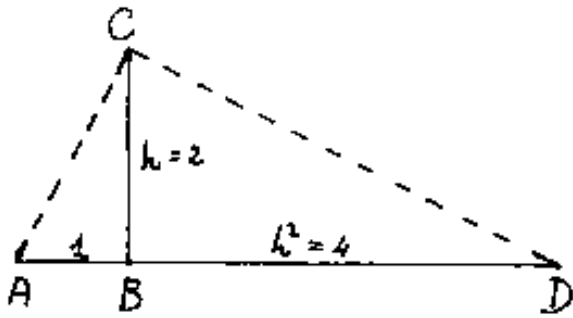
4) Trovare la radice quadrata di n = 2,25

Sia $\overline{AB} = n = 2,25$ si prolunga $\overline{BA}$ fino a C ove $\overline{AC} = 1$, si cerca il punto M medio di $\overline{CB}$ quindi centro in M e raggio $\overline{MB} = \overline{MC}$ si traccia la semicirconferenza, e da A la perpendicolare ad AB fino ad incontrare in D la semicirconferenza: $\overline{AD} = \sqrt{AB}$ infatti.

$\overline{CA} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AB}$ da cui: $(\overline{AD})^2 = (\overline{CA})(\overline{AB})$; $(\overline{AD}) = \sqrt{(\overline{CA})(\overline{AB})}$; $(\overline{CA} = 1)$

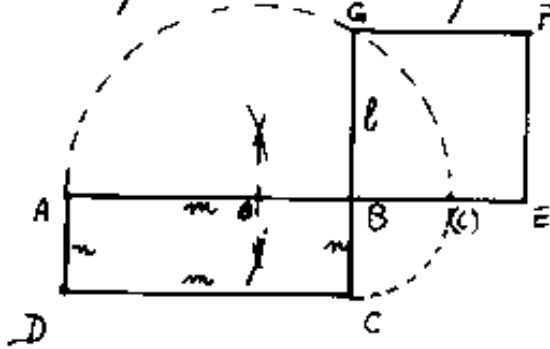
[illegible]

$1 : 1{,}5 = 1{,}5 : 2{,}25$ da cui $(1{,}5)^2 = (1)(2{,}25)$; $(1{,}5) = \sqrt{2{,}25}$.

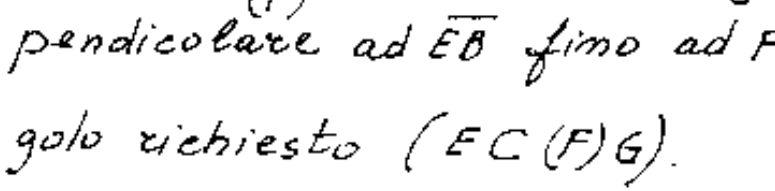
5) trovare il quadrato di un numero $h = 2$

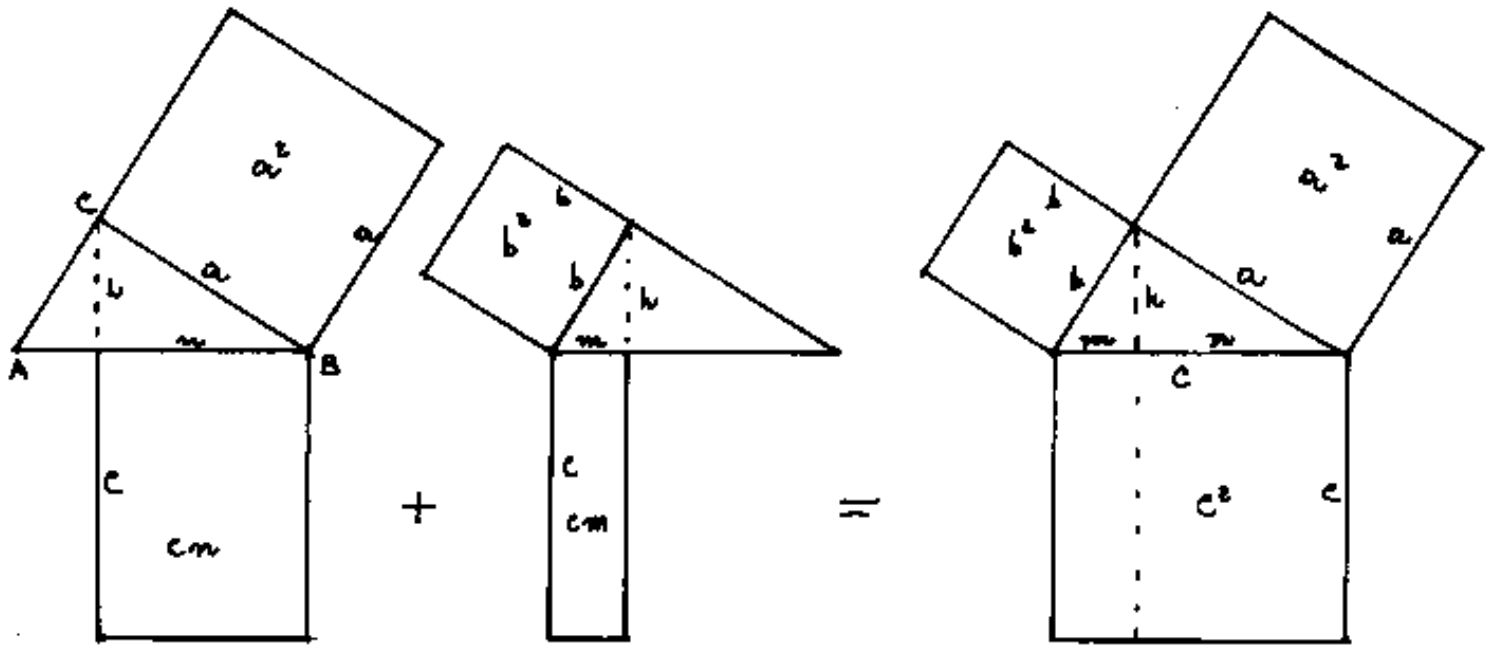
C, $h = 2$, 1, $h^2 = 4$, A, B, D

Sia $\overline{AB} = 1$ il modulo o segmento unitario, riportiamo da B perpendicolarmente ad esso il segmento $\overline{BC} = h = 2$, quindi unito A con C e da C la perpendicolare ad $\overline{AC}$ fino a D ove $\overline{BD} = h^2 = 4$.

Alcune applicazioni grafiche del II° teorema di Euclide.

1) Dato il rettangolo di lati m, n trasformarlo in un quadrato equivalente (cioè avente la stessa area)

Sia ABCD il rettangolo di lati $\overline{AB} = \overline{DC} = m$; $\overline{AD} = \overline{BC} = n$. Si fa centro in B e con raggio $\overline{BC} = n$ si riporta C in (C) allineato con $\overline{AB}$. Quindi centro in (C) e centro in (A) con ugual raggio si determina il punto medio M di $\overline{A(C)}$, centro in M con raggio $\overline{MA} = \overline{M(C)}$ si traccia la semicirconferenza quindi da B si innalza la perpendicolare ad $\overline{A(C)}$ fino ad incontrarla in G, avremo $\overline{BG} = \ell$ = lato del quadrato equivalente (ℓ tiene il posto di h).

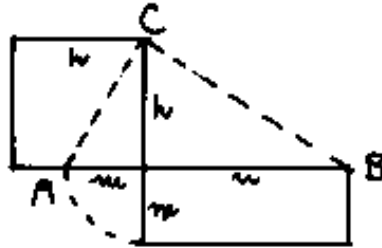
2) Dato un quadrato di lato ℓ trasformarlo in un rettangolo equivalente di base b assegnata.

A B l D F C E (F) G

Sia ABCD il quadrato di lato l e sia $\overline{CE} = b$ la base assegnata che abbiamo riportato adiacente a $\overline{DC}$ (perpendicolare a $\overline{CB}$), da E si traccia $\overline{EB}$ e da B la perpendicolare ad $\overline{EB}$ fino ad F; $\overline{CF}$ è l'altro lato del rettangolo richiesto (EC(F)G).

Illustriamo graficamente come la somma dei due primi teoremi di Euclide portino al teorema di Pitagora.

$$a^2 = cn \quad + \quad b^2 = cm \quad = \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Illustriamo graficamente il II° teorema di Euclide dal quale è possibile dedurre facili costruzioni grafiche, in particolare quando una grandezza è media proporzionale fra altre due possiamo assumere una grandezza come unitaria. Per esempio dalla: $h^2 = mn$ con $h=1$ è possibile avere grafica

esempio dalla: $h^2 = mn$ con $h = 1$ è possibile avere graficamente il reciproco: $m = \frac{1}{n}$; se poniamo $n = 1$ abbiamo $m = h^2$ cioè il quadrato di una grandezza, od anche $h = \sqrt{m}$ la radice quadrata. Generalizzando si ottengono le successive potenze.

C, h, h, A, m, n, B, m

$$h^2 = m \cdot n$$

Ricordiamo che nelle proporzioni: il prodotto dei medi = prodotto degli estremi; e che: ipotenusa I : ipotenusa II = cateto I : cateto II = rapporto di similitudine.

$I \approx II$

$c : a = b : h \longrightarrow ab = ch$ = doppia area che può $\left(h = \frac{ab}{c}\right)$ calcolarsi in due modi.

$c : a = a : n \longrightarrow \boxed{a^2 = cn}$ = I° teorema di Euclide

"Il quadrato di un cateto equivale il rettangolo: ipotenusa × proiez. cateto."

$b : h = a : n \longrightarrow ah = nb$ implica: $n = \frac{ah}{b}$.

$I \approx III$

$c : b = b : m \longrightarrow \boxed{b^2 = cm}$ I° teorema di Euclide

che sommato al precedente implica: $a^2 + b^2 = c(n+m)$ cioè $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

$c : b = a : h \rightarrow (ab = ch)$

che è il teorema di Pitagora.

$b : m = a : h \longrightarrow bh = am \rightarrow$ implica $m = \frac{bh}{a}$ e col precedente: $c = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) h$; $\frac{c}{h} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$

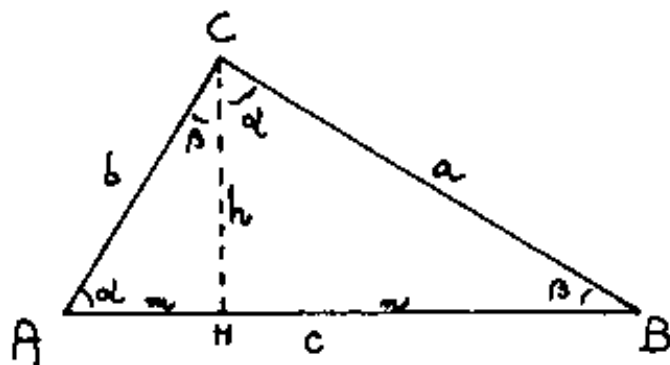
"Il rapporto fra ipotenusa e altezza è pari al rapporto dei cateti maggiorato del suo reciproco"

del suo reciproco"

$$\text{II} \equiv \text{III} \begin{cases} a : b = h : m \rightarrow bh = am \\ a : b = n : h \rightarrow ah = bn \\ h : m = n : h \rightarrow m : h = h : n \rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n} \end{cases}$$

Secondo teorema di Euclide:

"L'altezza è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti," oppure: "Il quadrato dell'altezza equivale al rettangolo delle proiezioni dei cateti.

I Principali teoremi della geometria.

Dato il triangolo rettangolo ACB e tracciata l'altezza "h" $= \overline{CH}$ relativa all'ipotenusa "c" $= AB$, ove H divide l'ipotenusa nelle due proiezioni dei cateti: $\overline{AH} = m$ (proiezione di $\overline{AC} = b$) ed $\overline{HB} = n$ (proiezione di $\overline{CB} = a$). Si ha: $(m + n = c)$.

Notiamo che il nostro triangolo rettangolo ACB, si è scomposto nella somma di altri due triangoli rettangoli <u>Simili</u>: AHC e CHB aventi angoli uguali ad ACB.

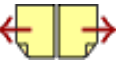
La sequenza degli elementi corrispondenti è:

$\overline{AC} \equiv \overline{CH} \equiv \overline{AH}$ = (cateti minori opposti all'angolo β)

$\overline{BC} \equiv \overline{BH} \equiv \overline{CH}$ = (cateti maggiori opposti all'angolo α)

$\overline{AB} \equiv \overline{CB} \equiv \overline{AC}$ = (ipotenuse)

Chiameremo I il triangolo rettangolo più grande: (ACB);

II il triangolo rettangolo medio: (CHB); e III il triangolo rettangolo più piccolo: (AHC). Faremo, ordinatamente, tutte le possibili combinazioni degli elementi omologhi fra i triangoli; e precisamente: I ≡ II ; I ≡ III ; II ≡ III , rapportando: ipotenuse → cateti minori; ipotenuse → cateti maggiori; cateti minori → cateti maggiori.

Useremo di norma il seguente simbolismo:

I punti si indicano con lettere maiuscole per esempio: P

Le proiezioni dei punti, con le stesse lettere maiuscole affette da apici: P' ; P'' ; P''' per la prima, seconda, terza proiez.

Le misure dei segmenti con lettere minuscole, se la figura è un triangolo, la lettera minuscola è quella stessa che è maiuscola nel vertice opposto.

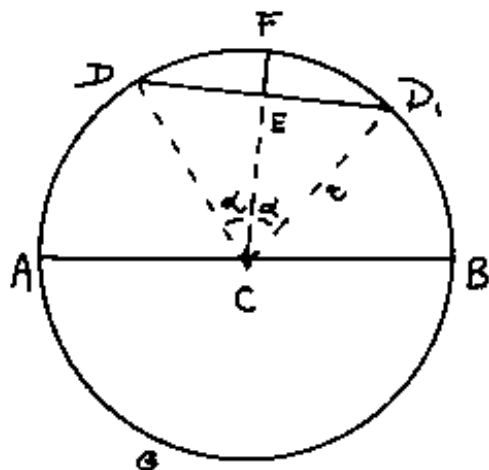
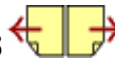
Gli angoli con le lettere greche dei rispettivi vertici.

$a \to \alpha \to A$; $b \to \beta \to B$; $c \to \gamma \to C$.

Nel citare un triangolo rettangolo è opportuno mettere al centro delle tre lettere il vertice retto.

Per esempio il triangolo ACB è retto in C. (o rettangolo)

Possiamo ora tornare alla nostra similitudine (caratterizzata dall'uguaglianza degli angoli corrispondenti e dal rapporto costante delle lunghezze

lineari omologhe). per dedurre i principali teoremi della geometria.

Nomenclatura di un cerchio

$\overline{AB}$ = diametro (si indica anche con: ϕ)

$\overline{AC} = \overline{CB} = \overline{CD} = r$ = raggio = $\overline{AB}/2$

$\overline{DD_1}$ = corda

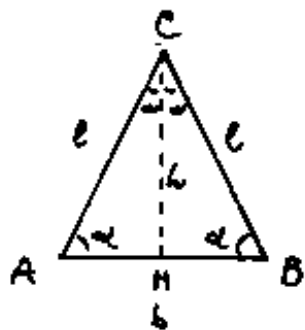
$\overline{DE} = \overline{ED_1}$ = semicorda

$\overline{EF}$ = freccia (normale alla corda)

Circonferenza = linea delimitante il cerchio = (diametro)(π).

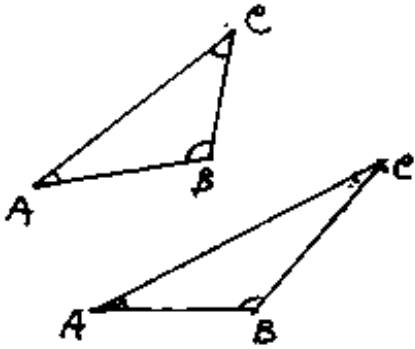
$\widehat{DD_1}$ = arco sotteso alla corda $\overline{DD_1}$ di angolo al centro $D\hat{C}D_1 = 2\alpha$.

Conviene scrivere $\widehat{DFD_1}$ per distinguere dall'arco: $\widehat{DGD_1}$.

Tipi di triangoli

Isoscele = avente due lati uguali: $\overline{AC} = \overline{BC} = \ell$, quindi, gli angoli alla base $\overline{AB} = b$, pure uguali $C\hat{A}B = C\hat{B}A = \alpha$. In un triangolo isoscele coincidono in $\overline{CH}$, l'altezza h, la bisettrice in C, e la mediana alla base AB. I triangoli rettangoli AHC e BHC sono congruenti.

Equilatero = avente i tre lati uguali: $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \ell$ e quindi tre angoli

ℓ: AB = AC = BC = ℓ e quindi tre angoli uguali: $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \alpha = 60°$; $\widehat{ACH} = \widehat{BCH} = \frac{\alpha}{2} = 30°$

$h = \overline{CH} = \frac{\ell}{2}\sqrt{3} = 0{,}866 \cdot \ell$

<u>Scaleno</u> = avente i tre lati diversi.

<u>Acutangolo</u> = avente solo angoli acuti

<u>Ottusangolo</u> = avente un angolo <u>ottuso</u> (cioè maggiore di 90° o π/2 rad.)

Nel caso particolare che la corda $\overline{DD_1}$ sia un diametro, l'angolo al centro $D\hat{C}D_1 = 180 = \pi$ è un angolo piatto, per cui l'angolo alla circonferenza è $180°/2 = 90° = \pi/2$ un angolo retto. Cioè:

"<u>La semicirconferenza è il luogo geometrico dei vertici retti di tutti i triangoli rettangoli aventi per ipotenusa il diametro $\overline{DD'}$</u>"

A₁ A h D C H D₁

Ciò consente la risoluzione di molti problemi grafici, per esempio: Se di un triangolo rettangolo si conosce l'ipotenusa e l'altezza h è possibile trovare il vertice A; (o A_1), ed unito $\overline{AC} = r = \overline{DD_1}/2$ avremo: $\overline{CH} = \sqrt{(\overline{DD_1}/2)^2 - h^2}$; $\overline{DH} = (\overline{DD_1}/2) + \overline{CH}$; $\overline{HD_1} = (\overline{DD_1}/2) - \overline{CH}$;

$\overline{AD}^2 = \overline{DH}^2 + h^2$; $\overline{AD_1}^2 = \overline{HD_1}^2 + h^2$; $A\hat{D_1}D = (90° - A\hat{D}D_1)$.

<u>In un triangolo rettangolo la mediana all'ipotenusa $\overline{AC}$ (passante per il punto medio dell'ipotenusa) è pari a metà</u> ipotenusa (raggio del cerchio).

ipotenusa. (raggio del cerchio).

Altezza relativa ad un lato, in un triangolo, è il segmento staccato sulla perpendicolare al lato stesso, a partire dal vertice opposto.

Asse di un segmento è la retta normale al segmento stesso e passante per il suo punto di mezzo.

Le parole "normale" e "perpendicolare" si equivalgono (formano angoli retti).

perché corrispondenti nelle stesse parallele tagliate dalla trasversale $\overline{AB}$. Quindi l'angolo al centro insistente sulla corda $\overline{BD}$, cioè $B\hat{C}D = B\hat{C}N + N\hat{C}D = \alpha + \alpha = 2\alpha$ è doppio dell'angolo alla circonferenza $B\hat{A}D = \alpha$ insistente sulla stessa corda $\overline{BD}$ ed avente il vertice dalla stessa parte del centro rispetto alla corda $\overline{AB}$

Lo stesso discorso può ripetersi se prendiamo un qualsiasi punto D_i sulla circonferenza. Avremo, sommando o sottraendo, che $2(D\hat{A}D_i) = D\hat{C}D_i$ cioè:

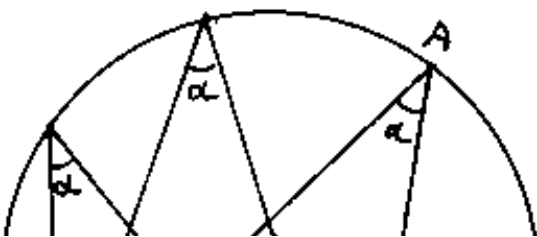
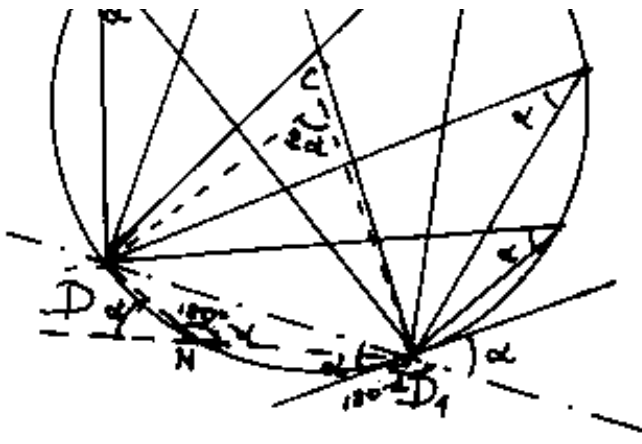
L'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circoferenza od anche: Tutti gli angoli alla circonferenza, insistenti, dalla stessa parte, sullo stesso arco sono uguali fra loro.

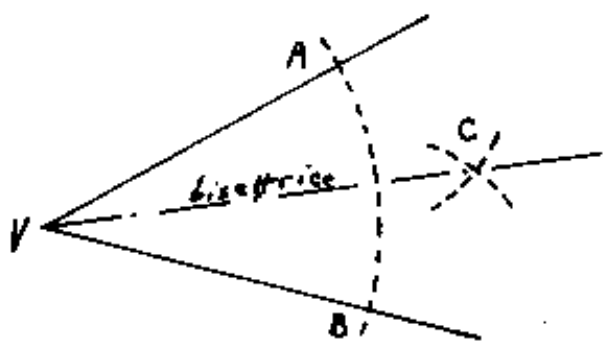
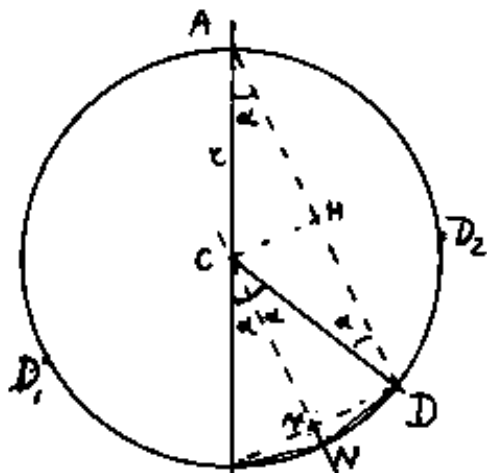
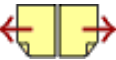
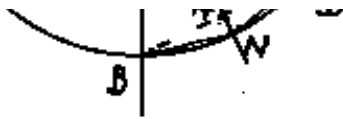
A

α

α

α

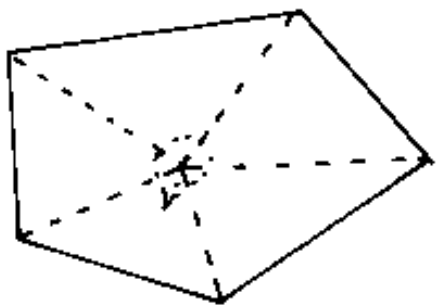
Se il vertice dell'angolo

Se il vertice dell'angolo alla circonferenza (N) cade da banda opposta al centro C rispetto alla corda ($\overline{DD_1}$), allora l'angolo alla circonferenza ($D\hat{N}D_1$) è supplementare dell'angolo alla circonferenza $D\hat{A}D_1$ che giace sull'altro arco rispetto alla corda $\overline{DD_1}$.

Bisecare un angolo significa tracciare dal vertice una semiretta (chiamata bisettrice) che divida l'angolo in due parti uguali. La costruzione grafica è molto semplice: si traccia, con centro nel vertice V un arco di cerchio che incontra in A ed in B le due semirette quindi con centro in A e centro in B si tracciano due archetti (di ugual raggio fra loro) che incontrando si determinano il punto C ove $\overline{VC}$ è la bisettrice.

Consideriamo ora un cerchio di centro "C" tagliato da un diametro $\overline{AB}$ e prendiamo un qualsiasi punto D sulla circonferenza, unito C con D ed A con D, indichiamo con α l'angolo: $\widehat{CAD} = \alpha = \widehat{BAD}$.

Sia H il punto medio di $\overline{AD}$ cioè

Sia H il punto medio di AD cioè $\overline{AH} = \overline{HD}$ i due triangoli CHA e CHD sono congruenti avendo i lati uguali $\overline{CH}$ in comune e $\overline{AC} = \overline{CD} = r$ perciò anche l'angolo $C\hat{D}A = C\hat{A}D = \alpha$. Se da C tracciamo $\overline{CN}$ parallela ad $\overline{AD}$ avremo che gli angoli $N\hat{C}D = C\hat{D}A =$ perché alterni interni alle parallele $\overline{AD}$ e $\overline{CN}$ tagliate dalla trasversale $\overline{CD}$ ed anche $B\hat{C}N = B\hat{A}D = \alpha$

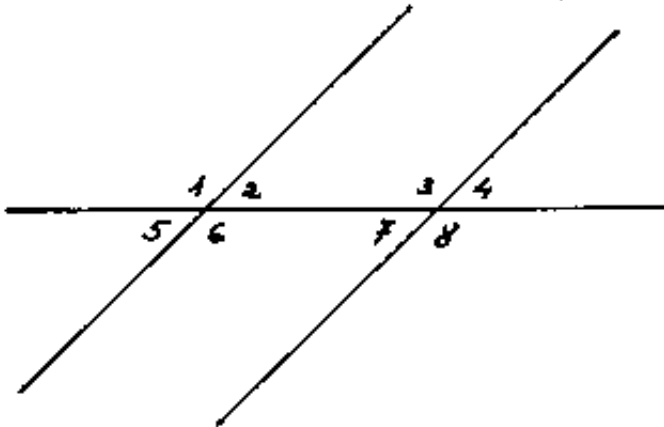
Con ciò resta dimostrato che l'angolo piatto $A\hat{B}N$, è composto degli stessi angoli α, β, γ interni al triangolo. Cioè:

1) La somma degli angoli interni di un triangolo è sempre un angolo piatto = 180° = π rad.

2) In un triangolo, l'angolo esterno compreso fra un lato ed il prolungamento di un lato adiacente ($C\hat{B}N$), equivale la somma degli angoli adiacenti il terzo lato ($C\hat{A}B + A\hat{C}B = C\hat{B}N$).

Poiché un poligono qualsiasi, può essere scomposto in triangoli, aventi per base i lati del poligono e come vertice comune un qualsiasi punto interno al poligono stesso, poiché la somma degli angoli interni di ciascun triangolo è un angolo piatto; avremo che: "la somma degli angoli interni

di un poligono è pari a tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due." (I due angoli piatti (o lati) sottratti, sono il valore dell'angolo giro nel vertice V)

La somma degli angoli interni in un poligono di "n" lati sarà: $(n-2)180° = (n-2)\pi$ rad.

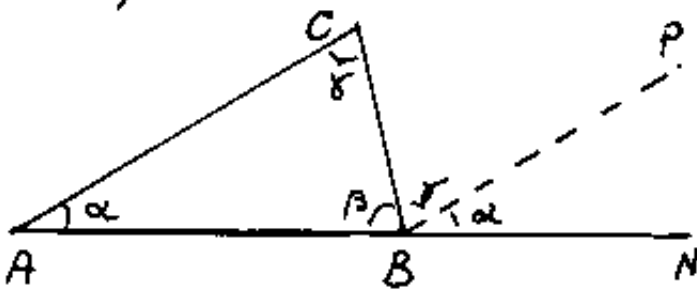
Date due rette parallele tagliate da una trasversale, è facile vedere che gli angoli da esse formati sono, a coppie, uguali.

1=6 ; 3=8
5=2 ; 7=4 } opposti al vertice

2=7 ; 6=3 } alterni interni
5=4 ; 1=8 } alterni esterni

1=3 ; 6=8
2=4 ; 5=7 } corrispondenti

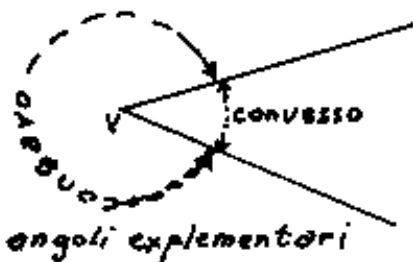
(2;3) e (6;7) } coniugati interni
(1;4) e (5;8) } coniugati esterni

oltre ai coniugati, sono supplementari le coppie:
(5;1) ; (6;2) ; (7;3) ; (8;4) ; (1;2) ; (3;4) ; (5;6) ; (7;8).

Il nostro "escursus" sugli angoli non è ancora compiuto. Dato un triangolo qualsiasi ABC di angoli interni α, β, γ rispettivi ad A, B, C, tracciata da B la parallela ad $\overline{AC}$ e sia $\overline{BP}$, avremo che: l'angolo $C\hat{B}P = \gamma = A\hat{C}B$ perché alterni interni alle paralle

$C\hat{B}P = \gamma = A\hat{C}B$ perché alterni interni alle parallele $\overline{AC}$ e $\overline{BP}$ tagliate dalla trasversale $\overline{CB}$. Prolungato $\overline{AB}$ fino ad N, l'angolo $P\hat{B}N = \alpha = C\hat{A}B = C\hat{A}N$ perché corrispondenti nelle parallele $\overline{AC}$ e $\overline{BP}$ tagliate dalla trasversale $\overline{AN}$.

è stato usato per misurare le frequenze delle onde elettromagnetiche: (Kc/sec = Kilocicli al secondo) ove esiste anche la misura in Hz = Hertz cioè:

1 Hz = 1 ciclo/sec.

La definizione di angolo: "Lo spazio compreso fra due semirette uscenti dallo stesso punto, detto vertice", definisce poco, anche perché occorre precisare se trattasi dell'angolo concavo o dell'angolo convesso.

L'angolo concavo e l'angolo convesso, formati da due semirette uscenti dallo stesso punto v, sommati danno un angolo giro; e perciò sono detti: "explementari".

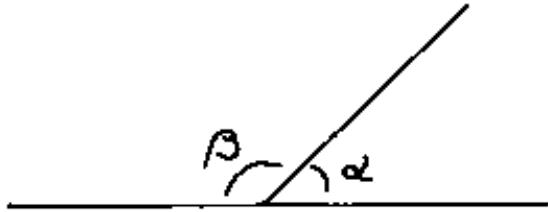
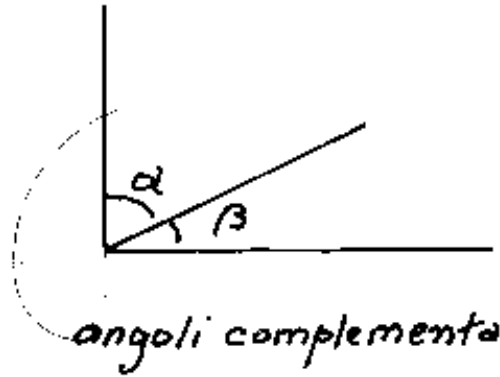
Se la somma di due angoli è un angolo piatto, sono detti: "Supplementari".

Se la somma di due angoli è un angolo retto, sono detti: "Complementari".

sono detti : "Complementari"

β α

angoli supplementari

α β

angoli complementari

Noi preferiamo definire l'angolo:

"Una variazione di direzione"

3°) Ponendo l'angolo giro pari alla lunghezza della circonferenza (raddrizzata) del cerchio di raggio unitario. Cioè l'angolo giro = $2\pi = 6,2831853...$

Quindi <u>l'angolo piatto</u> (= metà angolo giro) = π,

<u>l'angolo retto</u> (= metà angolo piatto) = $\pi/2 = 90°$,

$\frac{1}{12}$ di angolo giro = $30° = \pi/6$ e così via.

Questa misura si dice:

"<u>in radianti</u>",

e si indica con la parola: "<u>rad</u>" (o "<u>RAD</u>");

ed è di norma usata in analisi matematica, ove l'angolo è visto come il rapporto fra la lunghezza dell'arco ed il raggio: $\left(\alpha_{rad} = \frac{\widehat{AB}}{R}\right)$

<u>Il radiante</u> (unità di misura) è quindi <u>l'angolo sotteso all'arco la cui lunghezza raddrizzata, è pari alla lunghezza del raggio.</u>

$1\ rad = 57°\ 17'\ 44'',805... = 63^g\ 66^c\ 19^{cc},772..$

1 rad = 57° 17' 44'',805... = 63° 66' 19,772..

4°) Esiste anche la misura in <u>angoli giro</u> e frazioni decimali, che semplificherebbe molto i calcoli, (ma è poco usata in analisi matematica.) In questa misura l'angolo giro sarebbe: 1 ciclo, 180° = π = 0,5 cicli, 90° = 0,25 cicli.

però il termine "ciclo" ed il suo multiplo Kilociclo

La misura in gradi sessagesimali, risale ai Caldei (oltre 3000 anni A.C.), che avevano arrotondato i giorni dell'anno in 360, ed usavano una numerazione sessagesimale anziché decimale. Notiamo inoltre che è molto facile dividere un cerchio in sei parti uguali, facendo centro agli estremi di un diametro, usando lo stesso raggio del cerchio.

2°) Ponendo l'angolo giro = 400^g (gradi), si dice: "primo" la centesima parte del grado e "secondo" la centesima parte del primo. Per esempio: $30^g\ 56^c\ 85^{cc} = 30^g{,}5685\ldots$

Questa misura si dice:

"in gradi centesimali"

e si indica con la parola "GRD"

La misura in gradi centesimali è nata per adeguarsi, in qualche modo, al sistema decimale; infatti, essendo stato definito il metro come

infatti, essendo stato definito il metro come la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, (cosa che poi è risultata inesatta) dividere un cerchio in quarantamilioni di parti (40.000.000.=) equivale ad un decimo di secondo centesimale, infatti: (400)(100)(100)(10) vale 40 000 000.= .

Gli Angoli

Nella similitudine geometrica, abbiamo rilevato: "la costanza degli angoli corrispondenti". Esaminiamo il concetto di grandezza angolare.

In effetti l'angolo è l'unica dimensione fisica che dispone di una unità non convenzionale, cioè non arbitrariamente fissata dall'uomo. Infatti L'angolo giro è l'unità

La convenzione umana ha graduato tale unità in vari modi:

1°) Ponendo l'angolo giro = 360° gradi, cioè dividendo l'angolo giro in 360 parti uguali dette gradi, ogni grado è diviso in 60' (primi), ed ogni primo in 60" (secondi) per esempio: 25° 30' 42".
Questo tipo di misura si dice:

"in gradi sessagesimali"

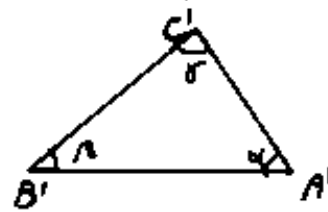
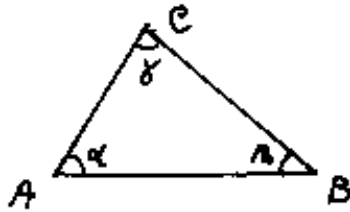
in gradi sessagesimali

Se invece dei primi e dei secondi, il grado si divide in decimali, la misura si dice:

"in gradi sessadecimali"

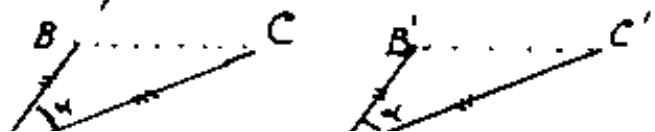
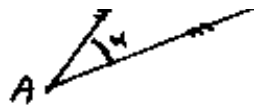
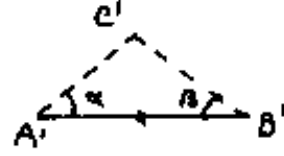
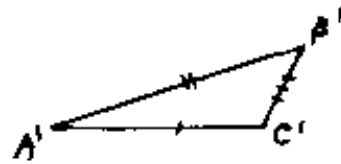
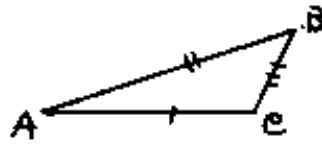
è usata nei calcolatori elettronici, si simboleggia con la parola: "Deg" e si esprime per es. 27°,51167...

i due triangoli sono uguali, però vi sono casi in cui per sovrapporre i due triangoli e verificarne la perfetta coincidenza, occorre "ribaltare" il piano in cui giace un triangolo e portarlo rovesciato sull'altro, perciò, i due triangoli anziché "uguali" sono detti "congruenti".

C, A, B, γ, α, β — C', A', B', γ, β, α

(Congruenza (in geometria) = proprietà di due figure geometriche che possono coincidere sovrapponendosi con movimenti di ruotazione e traslazione anche spaziali, cioè uscenti dal loro piano di giacitura)

Criteri di uguaglianza

I) Due triangoli sono uguali se hanno due lati e l'angolo compreso ordinatamente uguali.

B, C, B', C'

II°) Due triangoli sono uguali se hanno un lato e i due angoli adiacenti ordinatamente uguali.

III°) Due triangoli sono uguali se hanno i tre lati ordinatamente uguali

rispondenti sono paralleli, e ciò implica che:
"gli angoli corrispondenti sono uguali"
L'uguaglianza degli angoli corrispondenti è la caratteristica fondamentale della similitudine geometrica; se due figure hanno angoli corrispondenti uguali, è costante il rapporto fra segmenti corrispondenti, (e viceversa).

Ma il concetto di similitudine è molto più ampio; due sistemi fisici si dicono fisicamente simili quando in punti corrispondenti le grandezze fisiche stanno in rapporto costante. Ciò implica gli studi su "modelli" e porta alla determinazione di numeri adimensionali. Per esempio il numero di Reynolds, di Mach, di Péclet, di Prandtl, ecc. La similitudine generalizzata o analogia, è quella di due fenomeni di diversa natura, però, governati dalle stesse leggi matematiche

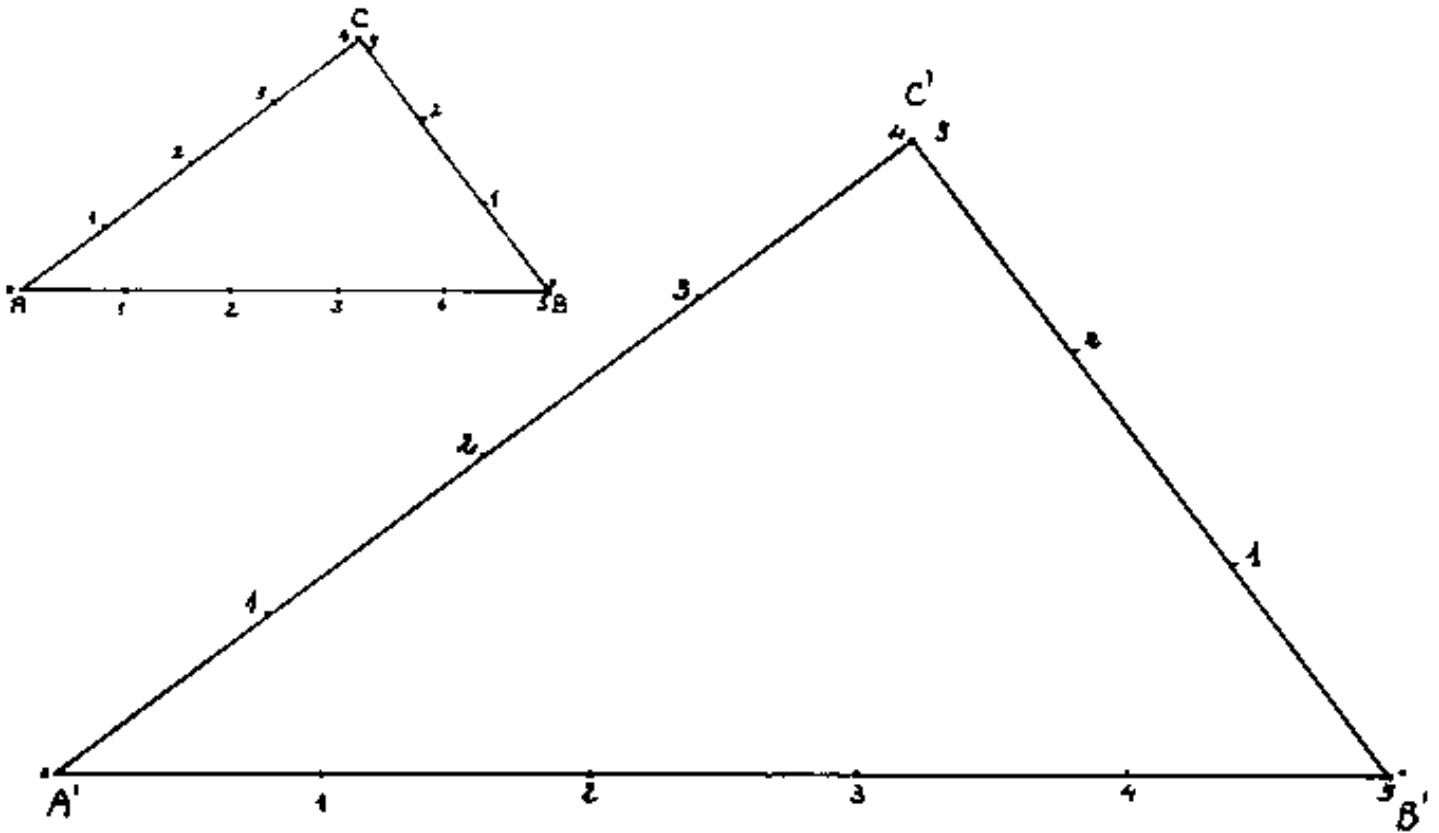
governati dalle stesse leggi matematiche.
Il funzionamento dei calcolatori analogici si basa su ciò. Torniamo ai nostri triangoli:
– Se il rapporto di similitudine fra due triangoli è uno (1), non solo i due triangoli hanno angoli uguali, ma anche lati o segmenti corrispondenti sono uguali. Comunemente si dice che

arbitrario, restano determinati i numeri degli altri due lati in proporzione. Per esempio, nel nostro caso, se attribuiamo al lato $\overline{BC}$ il numero 7 (anziché 3) avremo che $\overline{AB} = 5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{3}$, ed $\overline{AC} = 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{3}$.

Se misurassimo in centimetri il secondo triangolo, i numeri di 3, 4, 5, pollici risulterebbero moltiplicati per 2,54 e diventerebbero: 7,62 ; 10,16 ; 12,70. Cioè il secondo triangolo è <u>ingrandito "linearmente"</u> di 2,54 volte il primo. La loro configurazione è <u>simile</u>, ed essendo disegnati con lo stesso orientamento, cioè similmente disposti, si ha, oltre che: <u>similitudine</u>, <u>omotetia</u>. Si ha quindi <u>"Similitudine"</u> (in geometria) quando i segmenti <u>corrispondenti</u> stanno in rapporto costante: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \rho$ (nel nostro caso $\rho = 2,54$). Il rapporto ρ si chiama: "<u>rapporto lineare di similitudine</u>". Se le misure lineari stanno in rapporto costante, è facile dimostra

lineari stanno in rapporto costante, è facile dimostra=
re che le aree stanno fra loro come il quadrato del rap=
porto lineare, $\left(\frac{\text{area}'}{\text{area}} = \rho^2\right)$, ed i volumi come il cubo del
rapporto lineare $\left(\frac{\text{volume}'}{\text{volume}} = \rho^3\right)$.

Se i due triangoli sono omotetici, cioè simili e
similmente disposti, si nota che i segmenti cor=

In altre parole i due triangoli rettangoli <u>simili</u> sono anche <u>similmente disposti</u>. (Due triangoli simili e similmente disposti si dicono omotetici)

Notiamo subito che moltiplicando o dividendo per uno stesso numero, i tre numeri indicativi dei lati, il triangolo non cambia se prendiamo una opportuna unità di misura, e possiamo disegnarlo sovrapponibile.

(Per

(Per esempio se moltiplichiamo per 10 i tre numeri diventano 30, 40, 50, e basta prendere per unità grafica il millimetro per disegnare un triangolo sovrapponibile al primo, oppure assumere come unità grafica il decimo di pollice per sovrapporlo al secondo). (Il decimo di pollice non è usato, è usato l'ottavo di pollice)

Inversamente, se disegnamo un triangolo ed attribuiamo ad un determinato lato un numero

La similitudine

L'arbitrarietà dell'unità di misura porta al concetto di similitudine; una fotografia più o meno ingrandita ... lo stesso soggetto fotografato in dimensioni diverse...

Facciamo una osservazione:

"Qualunque figura geometrica delimitata da punti e segmenti è sempre scomponibile in triangoli, ed ogni triangolo è sempre scomponibile nella somma (o nella differenza) di due triangoli rettangoli; quindi se conosciamo il triangolo rettangolo conosciamo l'elemento base della geometria."

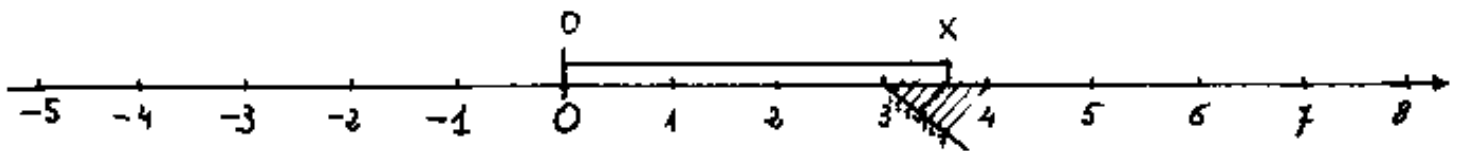
Disegnamo due triangoli rettangoli aventi ciascuno i cateti di ampiezza 3 e 4 e l'ipotenusa 5, Per un triangolo usiamo come segmento unitario il centimetro, per l'altro usiamo

to unitario il centimetro, per l'altro usiamo come segmento unitario il pollice (inch).

Inoltre disponiamo i disegni in modo che per entrambe i triangoli l'ipotenusa sia orizzontale e che il cateto maggiore sia a sinistra ed il cateto minore a destra, ed il vertice C sia al di sopra dell'ipotenusa.

indefinitamente lunga, a partire da un'origine "O" con modulo unitario prefissato, e può essere graduata sia positivamente, sia negativamente, con tutti i numeri (relativi, interi e frazionari, cioè con l'insieme dei numeri razionali.) E' possibile quindi staccare su di essa segmenti rappresentativi di qualsiasi numero razionale.
(per esempio: $25/7 = 3 + 4/7 = 3,571428571..$) $= \overline{OX}$

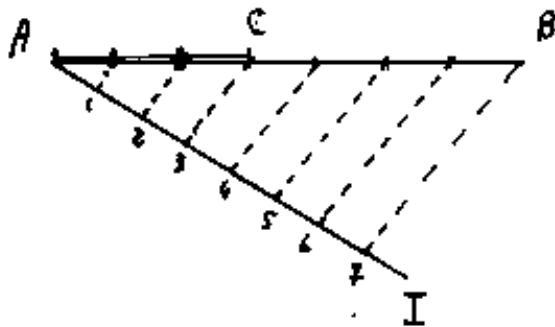
O X

−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Vedremo che su questa retta è possibile riportare qualunque numero reale anche non frazionario.

Questo è un'altro modo di simboleggiare "quantità" cioè mediante segmenti, tenendo presente che la misura numerica dipende dall'unità arbitraria prescelta, cioè il (segmento unitario).

L'arbitrarietà dell'unità di misura, porta a rappresentare, in geometria, in diversa grandezza una stessa cosa, cioè porta al concetto di Similitudine assolutamente basilare e fondamentale dal quale hanno origine tutti!! i teoremi della geometria.

in antico, a Bologna si aveva le seguenti dizioni:
12 "punti" fanno 1 "oncia", 12 "oncie" fanno 1 "piede",
10 "piedi" fanno una "pertica" (La pertica era circa
3,80 metri). Lo sfrazionamento sessagesimale che
si usa ancora oggi per l'ora = 60', ed 1' = 60" risale
ai caldei.

Ci domandiamo, se è possibile dividere il
nostro segmento $\overline{AB}$, o qualunque altro seg-
mento, in un prefissato <u>numero intero</u> di parti
uguali e di staccare su di esso la parte cor-
rispondente ad una frazione per esempio i 3/7
in modo che: $\overline{AC} = \frac{3}{7}\overline{AB}$; $\left(\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}\right)$

Soluzione.

Da A tracciamo una retta
inclinata AI ed, a partire
da A riportiamo su AI, consecuti-
vamente, 7 segmenti uguali;

vamente, 7 segmenti uguali;

cioè: $\overline{A1}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, $\overline{45}$, $\overline{56}$, $\overline{67}$; Uniamo 7 con B, e

dai punti: 1, 2, 3, 4, 5, 6 tracciamo le parallele al segmento

$\overline{7B}$, che divideranno $\overline{AB}$ in 7 parti uguali. È ora facile

prenderne 3 fissando C.

Questa costruzione, apparentemente banale,

implica la possibilità di "graduare" una retta

Applicazioni Geometriche

Analizziamo ora le "frazioni" ed applichiamone i risultati alla geometria.

Consideriamo il segmento $\overline{AB}$:

A————————B. L'uomo non dispone di alcun segmento che, in assoluto, possa assumersi come unitario; è costretto a "convenire" l'unità di misura. (In questo caso unità di lunghezza).

Le convenzioni in merito, dall'antichità ad oggi, sono state parecchie. Ogni tribù, ogni staterello, aveva le sue unità di misura, in particolare le unità di misura lineare erano generalmente riferite a misure del corpo umano: Si avevano così:

Il piede di Parigi = circa 32,5 centimetri, il piede romano del Campidoglio = circa 29,5 cm., il cubito ebraico, simile al braccio toscano = 58,366 cm. ed ogni città aveva una particolare unità di lunghezza che chiamava: "piede", "braccio", "palmo" (dal palmo della mano),

"piede", braccio", palmo" (dal palmo della mano), ed anche: "canne", "pertiche", e così via.

Oggi abbiamo il metro ed i suoi multipli e sottomultipli, mentre negli stati di lingua inglese vale ancora il "pollice" (inch, in) ≅ 2,54 cm., il "piede" (foot, ft) ≅ 30,48 cm.

12 pollici = 1 piede; (12 in = 1 ft); 3 "piedi" = 1 yard = 91,43992 cm.

Lo sfrazionamento non decimale era di uso comune,

Ripartizione inversamente proporzionale

Si opera come per la ripartizione direttamente proporzionale, peró prendendo gli inversi dei numeri.

Ripartire S inversamente proporzionale ad $a_1, a_2, \ldots a_i \ldots, a_n$; significa applicare la formula:

$$S_i = \frac{1}{a_i} \frac{S}{\sum_1^n \frac{1}{a_i}}$$

Per esempio: Volendo costituire un vitalizio ad un certo gruppo di 5 persone si pensó di distribuire la somma di 1000.000,= inversamente proporzionale all'etá. Le etá erano: 55, 60, 72, 80, 83. anni.

Avremo: $\frac{1}{55} + \frac{1}{60} + \frac{1}{72} + \frac{1}{80} + \frac{1}{83} = \frac{9635}{131472}$

$$S_{55} = \frac{1}{55} \frac{1000.000}{\frac{9635}{131472}} = \frac{1}{55} \frac{131472}{9635} 1000000 = 248.095$$

131472

$$S_{60} = \frac{1}{60} \frac{131472}{9635} 1000000 = 227.421$$

$$S_{72} = \frac{1}{72} \frac{131472}{9635} 1000000 = 189.517$$

$$S_{80} = \frac{1}{80} \frac{131472}{9635} 1000000 = 170.566$$

$$S_{83} = \frac{1}{83} \frac{131472}{9683} 1000000 = 164.401$$

Totale 1.000.000

Ripartizione direttamente proporzionale

Supponiamo di voler ripartire la somma S fra "n" impiegati direttamente proporzionale agli anni di servizio prestati. $a_1, a_2 \ldots a_n$

Il totale anni di servizio è $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ per ogni anno di servizio compete $\frac{S}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ per cui al primo impiegato spetterà:

$a_1 \frac{S}{a_1 + a_2 + \cdots a_n}$; al secondo: $a_2 \frac{S}{a_1 + a_2 + \cdots a_n}$ ....

all'ennesimo: $a_n \frac{S}{a_1 + a_2 + \cdots a_n}$. ove sommando le quote avute dagli impiegati torna la somma S.

La formula generale per l'i^{mo} impiegato sarà:

$$S_i = a_i \frac{S}{\sum_1^n a_i}$$

Esempio Numerico: $n = 5$ $a_1 = a_2 = 3$; $a_3 = 5$;

$a_4 = 7$; $a_5 = 8$; $S = 2.600.000$ £.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \sum_1^5 a_i = 26$; $\frac{S}{\sum a_i} = 100.000$ £

$S_1 = S_2 = 300\,000$; $S_3 = 500\,000$; $S_4 = 700.000$; $S_5 = 800\,000$

La regola pratica esprime:
"Il valore dell'incognita x è dato da una frazione che ha per numeratore il prodotto del valore primitivo della grandezza incognita, per i valori nuovi delle grandezze alle quali essa è direttamente proporzionale e per i valori primitivi di quelle alle quali è inversamente proporzionale; il denominatore è il prodotto dei valori rimanenti" (dizione ripresa da: Socci - Aritmetica Pratica)

$$x = \frac{15 \cdot 35 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10}{18 \cdot 9 \cdot 40 \cdot 30} = \frac{35 \cdot 25}{6 \cdot 9} = 16{,}20$$

Per questo genere di problemi si consiglia il metodo di riduzione all'unità. (occorrono 3 ore di operaio per mq di lastricato)

Una vasca d'acqua è alimentata da una sorgente perenne che versa 1 litro ogni 5 minuti,

sorgente perenne che versa 1 litro ogni 5 minuti, però una perdita sul fondo determina una diminuzione del livello dell'acqua di 6 cm al giorno; ogni ora una pompa automatica preleva 7 litri. Trovare la superficie della vasca sapendo che il livello è costante alle stesse ore. Porre (1 litro = 1 dm³)

$1 \frac{l}{5'} = 12 \; l/h - 7 \; l/h = \underline{5 \; l/h \Rightarrow 5 \times 24 = 120} \; dm^3/g \Rightarrow \frac{0,120}{0,06} = 2$ mq.

Regola del tre composta:

"Si scrivono sulla stessa riga i nomi delle grandezze che intervengono nel problema, ed al disotto di esse le coppie di valori corrispondenti chiamando con x l'incognita. Stabilito quali grandezze sono direttamente proporzionali, o inversamente proporzionali si contrassegnano con frecce come nel caso del tre semplice, riferendosi all'incognita.

Nel nostro caso: più operai, più lavoro, meno tempo

Si possono riunire fra loro (per righe) le frecce con-

N° operai	N° giorni (tempo)	N° ore lavoro (tempo)	m. lunghezza (lavoro)	m larghezza (lavoro)
↓ 15	↑ 24	↑ 10	↓ 40	↓ 30
x	18	9	35	25

cordanti avremo:

N° operai	tempo ore	lavoro mq.
15	↑ 240	1200
...	...	875

x 162 875

$15 : x = 162 : 240$

ore operaio — lavoro mq

3600 — 1200

$162 \cdot x$ — 875

$$3600 : 162x = 1200 : 875 \qquad x = \frac{875 \times 3600}{162 \times 1200} = 16,20\overline{37}.$$

Regola del tre composta

Qui le grandezze che entrano in gioco sono più di due; facciamo un esempio:

"15 operai lavorando per 24 giorni 10 ore al giorno, hanno lastricato una piazza lunga metri 40 e larga metri 30; quanti operai ci vorranno per lastricare in 18 giorni, lavorando 9 ore al giorno, una piazza lunga 35 metri e larga 25?"

Ciò che salta alla mente è che: $(15 \times 24 \times 10 = 3600)$ ore di operaio per: $(40 \times 30 = 1200)$ metri quadri di lastricato: $\left(\frac{3600}{1200} = 3\right)$ ore di operaio per metro quadro; quindi per $(35 \times 25 = 875)$ metri quadri occorrono: $(875 \times 3 = 2625)$ ore di operaio.

ogni operaio però lavora per $(18 \times 9 = 162)$ ore/operaio, quindi:

$\left(2625 : 162 = 16 \text{ resto } 33\right)$ occorrono più di 16 operai (mancano 33 ore di lavoro). Si noti come il resto della divisione: 33 ore sia un intero utilizzabile diversamente da:

$33 : 162 = 0,2037..$ ove i $33/162$ di operaio non hanno senso; basta far lavorare un operaio in più dei 16 per 3 gioni

– lavorare un operaio in più dei 16 per 3 giorni $(3 \times 9 = 27)$ e per $(33 - 27) = 6$ ore cioè $6/9 = 2/3$ di giorno.

La risoluzione è quindi:

occorrono 16 operai per 18 giorni $(16 \times 18 \times 9 = 2592)$ ore

più un operaio per 3 giorni e 6 ore $(1 \times 3 \times 9 + 6 = 33)$ ore

Totale $(2592 + 33 = 2625)$ ore

Sarebbe sciocco rispondere: $16,2\overline{037}$ (periodico) operai.

Regola del tre semplice

Si scrivono sulla stessa riga i nomi delle due grandezze (dimensioni) che entrano nel problema, ed al di sotto di essi le coppie di valori corrispondenti chiamando x l'incognita. Stabilito se le grandezze sono direttamente o inversamente proporzionali, se direttamente; si tracciano due frecce equiverse a fianco delle colonne; se inversamente le due frecce avranno verso opposto. Si scrive la proporzione prendendo gli elementi come indicato dalle frecce.

metri di stoffa ↓ 8, 6 — dinari ↓ 192, x

$$8 : 6 = 192 : x \qquad x = \frac{192 \times 6}{8} = 144$$

---

operai ↓ 8, 6 — giorni ↑ 3, x

$\downarrow 6$ $\qquad x$

$$8 : 6 = x : 3 \qquad x = \frac{3 \cdot 8}{6} = 4$$

Le proporzioni e le regole del tre semplice e del tre composto.

Stabilita una proporzionalità diretta o inversa fra due elementi noti, qualora si cambi il valore ad uno dei due, quale valore assumerà l'altro affinché permanga la proporzione? Questo tipo di problemi è detto della regola del tre semplice la cui risoluzione consiste nel risolvere una proporzione del tipo: $a : b = c : x$ da cui $x = \frac{b}{a}c$.

Caso della proporzionalità diretta:

8 metri di stoffa sono costati 192 dinari, volendo comprarne 6 m, quale sarà la spesa?

$$8 : 192 = 6 : x \qquad x = \frac{192}{8}6 = 144.$$

Come si vede è implicita la "riduzione all'unità" infatti $\frac{192}{8} = 24$ dinari/metro.

Caso della proporzionalità inversa

Caso della proporzionalità inversa

Il tempo impiegato a compiere un certo lavoro

è inversamente proporzionale al numero di operai.

8 operai impiegano 3 giorni, in 6 operai quanto tempo?

$$3 : \frac{1}{8} = x : \frac{1}{6} \quad > \; ; \quad x = \frac{3}{6} 8 = 4$$

(La proporzione è con i reciproci o inversi); meglio dire: "per quel

lavoro occorrono (3.8) = 24 giornate di operaio. 6 operai impiegano 4 giorni.

cioè data una proporzione: $\boxed{a:b=c:d}$ risultano valide anche: $a:c=b:d$

$$c:a=d:b$$

$$d:c=b:a$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=n\ ;\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}=1/n\ ;\ \frac{c}{a}=\frac{d}{b}=m\ ;\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{1}{m}$$

queste correlazioni portano a tre importanti regole sulle proporzioni, infatti:

Se: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a(m\pm 1)}{b(m\pm 1)}=\frac{am\pm a}{bm\pm b}$.

ma dalla: $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}=m$ avremo: $am=c\ ;\ bm=d$

perciò sostituendo: $\frac{am\pm a}{bm\pm b}=\frac{c\pm a}{d\pm b}$

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{c\pm a}{d\pm b}} \qquad \boxed{\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a\pm b}{c\pm d}}$$

"<u>Se due frazioni sono equivalenti, la somma, o la differenza ordinata, dei numeratori e dei denominatori dà ancora una frazione equivalente.</u>"

Se l'uguaglianza è scritta in forma di proporzione

Se l'uguaglianza è scritta in forma di proporzione: $a : b = c : d$ si ha:

$(a+b) : b = (c+d) : d$ regola del componendo

$(a-b) : b = (c-d) : d$ regola dello scomponendo

$(a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d)$ regola del componendo-scomponendo

che può estendersi alle altre forme valide di proporzione.

L'equivalenza di due frazioni – Le proporzioni

consideriamo l'uguaglianza : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

possiamo scriverla nella forma:

$$a : b = c : d$$

e si legge: a stá a b come c stá a d

ove: "b" e "c" sono detti medi , mentre:

"a" e d sono detti estremi della proporzione.

E' da osservare come una frazione, sia un "rapporto". (La grandezza "a" "rapportata" alla grandezza "b" (confrontata, paragonata) è n volte tanto); ciò vuol dire che: $\frac{a}{b} = n$, ed "n" è lo stesso "coefficiente di proporzionalità" di "c" su "d" cioè anche: $\frac{c}{d} = n$

– Se moltiplichiamo l'uguaglianza : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

per (bd) otteniamo:

$$ad = bc$$

cioè:

In una proporzione, il prodotto dei medi equivale il prodotto degli estremi.

perciò:

"invertendo i medi o gli estremi la proporzione è ancora valida." (con diverso rapporto). $6:3=10:5$; $6:10=3:5$.

immediato è il prodotto dei denominatori, però, fra tutti i possibili multipli, esiste un minimo comune multiplo che si usa indicare con: " m.c.m ".

Il m.c.m. ha la proprietà di rendere la frazione risultante con numeri più piccoli. (non sempre la frazione risultante risulta ridotta ai minimi termini)

esempio: $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} =$ (m.c.m = 6)

$$\frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

avremmo potuto: "moltiplicare in croce" cioè:

$$\frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{12+15}{18} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

moltiplicare incrociato si usa per determinare quale di due frazioni è la maggiore; per es. $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{7}$

$2 \cdot 7 = 14$; $5 \cdot 3 = 15$; $15 > 14$ perciò: $\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$. Il simbolo $>$

$a > b$ si legge: "a maggiore di b".

$a > b$ si legge: "a maggiore di b".

Per trovare il minimo comune multiplo = m.c.m di più numeri, si scompongono i numeri in fattori primi e si moltiplicano fra loro i fattori comuni e non comuni col massimo esponente.

Per es. 8, 4, 15, 18 ; si ha: $8 = 2^3$; $4 = 2^2$; $15 = 3 \cdot 5$; $18 = 2 \cdot 3^2$ avremo: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360 =$ m.c.m.

$360/8 = 45$; $360/4 = 90$; $360/15 = 24$; $360/18 = 20$.

godono di questa proprietà, la somma e la moltiplicazione; però trasformando la divisione in prodotto, cioè prendendo il reciproco del divisore, si ha: $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b}$. È opportuno ricordare che dividere una grandezza per un'altra significa moltiplicarla per l'inverso o reciproco di quest'ultima. Ciò evita errori ed ambiguità. Per esempio, avendo la frazione $\frac{m}{n}$, si debba dividerla per l, è bene scrivere: $\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{l} = \frac{m}{nl}$. È bene evitare di scrivere: $\frac{\frac{m}{n}}{l}$, perché, se non si sta attenti alla lunghezza della barra di frazione può intendersi: $\frac{m}{\frac{n}{l}} = \frac{ml}{n}$ che sarebbe: $\frac{m}{n} \cdot l$ e cioè un errore avendo moltiplicato anziché diviso. (Mai fare frazioni a doppia barra quando è possibile evitarle) $\left(\frac{m}{n} / \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} = \frac{mb}{na}\right)$ <u>Il quoziente di due frazioni è il prodotto della frazione</u>

dividendo per l'inverso della frazione divisore.

Per sommare o sottrarre due frazioni è necessario ridurle allo stesso denominatore.
Dopo aver ridotto le singole frazioni ai minimi termini dividendo i membri di ciascuna per il rispettivo M.C.D.; occorre trovare un multiplo comune dei denominatori; il più

In algebra esiste la convenzione che due lettere affiancate ab significano "b" molti= plicato per "a", oppure "a" moltiplica "b"; (il moltiplicatore precede, si chiama anche coef= ficiente moltiplicatore o semplicemente coef= ficiente: ax ("a" coefficiente di x).

Per le altre operazioni aritmetiche si ha anche: $(a+b)$ vuol dire "b" addizionato ad "a"; $(a-b)$ = "b" sottratto ad "a". Se uno stesso fattore "a" figura nei prodotti di tutti gli addendi, può essere: "messo in eviden za", cioè diventare coefficiente della sommatoria per esempio: $(ab^2 + acd + 4a - a^2b) = a(b^2 + cd + 4 - ab)$.

Il quoziente di due quantità si indica: a/b oppure, più raramente: $a:b$. Anche in algebra si possono semplificare le frazioni: $\frac{ac+ab}{a} = \frac{\not{a}(c+b)}{\not{a}} = (c+b)$.

Detto: $1/b$ l'inverso o reciproco di b è op= portuno ricordare che la frazione: $\frac{a}{} = a \cdot \frac{1}{}$

portuno ricordare che la frazione: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

ed anche: $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$.

Premesso che dicesi: "proprietà commutativa" di una operazione aritmetica, la facoltà di scambiare i due operandi restando invariato il risultato. Cioè: $(b+a) = (a+b)$; $ab = ba$;

Quadro dell'alfabeto greco

Maiuscole	minuscole	denominazione		corrispondenza
Α	α	alfa	αλφα	ă
Β	β	beta	βῆτα	b
Γ	γ	gamma	γάμμα	g (duro)
Δ	δ	delta	δέλτα	d
Ε	ε	epsilon	ἒ ψιλόν	ĕ (= e semplice)
Ζ	ζ	zeta	ζῆτα	z (dolce)
Η	η	eta	ἦτα	ē
Θ	ϑ, θ	theta	θῆτα	th (th inglese)
Ι	ι	iota	ἰῶτα	i
Κ	κ	Kappa	κάππα	(K) c (duro)
Λ	λ	lamda	λάμβδα	l
Μ	μ	my	μῦ	m
Ν	ν	ny	νῦ	n
Ξ	ξ	xi (csi)	ξῖ	x
Ο	ο	omicron	ὂ μικρόν	o (= piccolo)
Π	π	pi	πῖ	p

Π	π	pi	πῖ	p
Ρ	ρ	rho	ῥῶ	r
C, Σ	c σ, ς	sigma	σῖγμα	s (duro)
Τ	τ	tau	ταῦ	t
Υ	υ	ypsilon	ὖ ψιλόν	y (u francese)
Φ	φ	phi (fi)	φῖ	ph
Χ	χ	chi	χῖ	ch
Ψ	ψ	psi	ψῖ	ps
Ω	ω	omega	ὦ μέγα	o (= grande)

L'Algebra

Anziché scrivere numeri spesso composti da molte cifre, è molto più comodo e veloce indicare le quantità con lettere:

$a, b, c, \ldots$ per quantità note e costanti

$x, y, z, \ldots$ per quantità incognite

$K, H, \lambda, \ldots$ per quantità parametriche.

Inoltre vi sono, in matematica, numeri spesso ricorrenti ed importantissimi, composti di infinite cifre decimali; per es. il rapporto fra la circonferenza ed il diametro che si indica con "π" (pi greco);

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716 9\ldots$$

oppure la base dei logaritmi naturali che si indica con "e".

$$e = 2{,}718281828459045235360287471352662497757247 09\ldots$$

Anche ad altre costanti sono riservate lettere o simboli particolari. Spesso nell'algebra si usa

simboli particolari. Spesso nell'algebra si usa assumere come simbolo l'iniziale di ciò che rappresenta: lato = l ; base = b ; apotema = a ; (essendo già usata "a"), per l'altezza si usa : altezza = h ; ecc,

Per gli angoli si usano lettere greche:

Riportiamo un quadro delle lettere greche maiuscole e minuscole, nonché la loro denominazione corrente in italiano.

Si sono omessi i criteri di divisibilità per potenze del 2, o del 3, o del 5, perché la scomposizione deve essere <u>in numeri primi</u>. Tuttavia, per completezza indichiamo:

divisibile per 4 (se lo è il numero formato dalle ultime due cifre)
" " 8 (" " " " " tre ")
" " 9 (se lo è la somma delle sue cifre)
" " 25 (se lo è il numero formato dalle ultime due cifre)
" " 125 (" " " " " tre ")
ecc.

Si noti che se N è un numero qualsiasi si ha:

$$\frac{N}{5} = \frac{2 \cdot N}{10} \quad ; \quad \frac{N}{25} = \frac{4 \cdot N}{100} \quad ; \quad \frac{N}{125} = \frac{8 \cdot N}{1000}$$

poiché dividere per 10, 100, 1000, è facile perché basta spostare la virgola, piuttosto che dividere per 5, 25, 125 conviene moltiplicare per 2, 4, 8 rispettivamente.

Per fare una tavola di <u>numeri primi</u> il filosofo greco <u>ERATOSTENE</u> (276 – 190 A.C.) scrisse in un quadro la successione dei numeri naturali,

quindi perforò i multipli del 2 forando ogni due numeri, poi i multipli di tre lasciando il tre e forando ogni tre numeri (qualche numero lo trovava già forato, come il 6), poi il primo numero non forato risulta il 7 ed egli fora ogni 7 numeri, e così via. I numeri non perforati erano numeri primi ed il quadro fu chiamato: Crivello di Eratostene.

(crivello era un attrezzo agricolo formato da una pelle perforata che si usava per separare il grano dalla pula)(oggi di lamiera perforata)(lo staccio o vaglio è di rete a maglie)

Criteri di divisibilità - numeri primi

Per scomporre un numero di più cifre in fattori, ricordiamo che:

1) Un numero pari è sempre divisibile per due (2)
2) Se la somma delle sue cifre è divisibile per tre (3) l'intero numero è divisibile per 3 (tre)
3) Se l'ultima cifra è 0 o 5 è divisibile per (5)
4) Se la somma delle cifre di posto pari e quella delle cifre di posto dispari sono uguali o differiscono di un multiplo di (11) l'intero numero é divisibile per (11)
5) Un numero che sia divisibile solo per 1 e per se stesso si chiama: numero primo

Sono numeri primi: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41.... ecc.

Per eseguire la scomposizione di un numero, usual= mente si procede per successive divisioni iniziando dai divisori più piccoli, fino ad esaurirli, si predispone i calcolo come segue: (per es: 5544)

predispone i calcolo come segue: (per es: 5544)

5544	2
2772	2
1386	2
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

cioè:

$$5544 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$$

Queste successive divisioni risultano utili anche per semplificare i radicali.

$\frac{420}{630}$ si vede subito che possiamo dividere: "sopra e sotto" per 10 ed avremo: $\frac{420:10}{630:10} = \frac{42}{63}$

si nota che $42 = 6 \times 7$; e $63 = 9 \times 7$ per cui possiamo dividere ambo i termini per 7 cioè $\frac{42:7}{63:7} = \frac{6}{9}$ e qui dividiamo per 3 : $\frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$.

cioè :

$$\frac{420}{630} = \frac{10 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

notate come mentalmente è più facile acquisire quant'è $2/3$ anziché $420/630$.

Quindi per semplificare una frazione "si scompongono in fattori numeratore e denominatore e si elidono i fattori comuni"

Il prodotto dei fattori comuni (nel nostro caso $10 \times 7 \times 3 = 210$) è detto: "Massimo Comun Divisore" si sigla : M.C.D. per cui : $\left(\frac{420:210}{630:210} = \frac{2}{3}\right)$ per semplificare una frazione, cioè ridurla ai "minimi termini" occorre dividere nume-

ai *minimi termini*" occorre dividere nume-
ratore e denominatore per il loro M.C.D.
(che è dato dal prodotto dei sottomultipli comuni)

L'insieme dei numeri interi e dei numeri frazionari, si chiama insieme dei numeri "<u>Razionali</u>" cioè grandezze rappresentabili con una frazione (propria, impropria, apparente).

Vedremo che vi sono grandezze non esprimibili mediante una frazione, cioè non appartenenti all'insieme dei numeri razionali.

IMPORTANTE notare che moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero il valore della frazione non cambia.

Supponiamo di aver diviso la nostra torta in tre parti e di averne presa una, cioè abbiamo preso $\frac{1}{3}$ di torta. Se la torta fosse stata divisa in 6 parti, tagliando a metà ogni terzo di torta la nostra parte $\frac{1}{3}$ diventerebbe $\frac{2}{6}$, a parte i tagli, la quantità è la stessa: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{(1) \cdot (2)}{(3) \cdot (2)}$

Ciò vale per qualunque numero "n" siano state

divise le fette iniziali: $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot n}{3 \cdot n}$, cioè:

"Moltiplicando (o dividendo) numeratore e denominatore per uno stesso numero, il valore della frazione non cambia."

Ciò è importantissimo perché ci consente di semplificare i calcoli: si abbia la frazione:

Improprie : - Quando il numeratore è maggiore del denominatore, cioè quando quantificano un numero maggiore di (1)(uno), e quindi la frazione può scindersi in un numero intero ed in una frazione propria.

(esempio: $23/5 = \frac{20+3}{5} = 4+\frac{3}{5}$)

(cinque torte sono state divise ciascuna in 5 parti ne abbiamo prese 23 delle 25 fette, ma bastava tagliare una sola torta in 5 parti e prendere quattro torte intere e tre fette di quella tagliata)

Apparenti : - Quando il numeratore è uguale o multiplo intero del denominatore, cioè quando

quantificano un numero intero. (esempio: $\frac{12}{3} = 4$)(era inutile tagliare le 4 torte in tre fette ciascuna). Si noti però come: $\frac{12}{3}$ e 4 pur essendo la stessa quantità esprimano cose diverse (torte tagliate e non tagliate)

Le frazioni

Non sempre le quantità possono essere espresse per numeri interi, una torta può essere suddivisa in fette, ed ammesso che, chi ha tagliato la torta, abbia fatto fette: "uguali", (non esistono cose assolutamene uguali, per il semplice fatto che due cose distinguibili, fra l'altro, oc= cupano posizioni diverse. L'identità di una cosa è solo con se stessa.) una parte di torta può essere espressa da una "frazione": (aritmetica= mente due numeri separati da una barra di cui il primo detto "numeratore" indica il numero delle fette che si sono prese, il secondo detto "denominatore" indica il numero totale delle fette in cui è stata divisa la torta). Si hanno così tre tipi di frazioni:

frazioni :

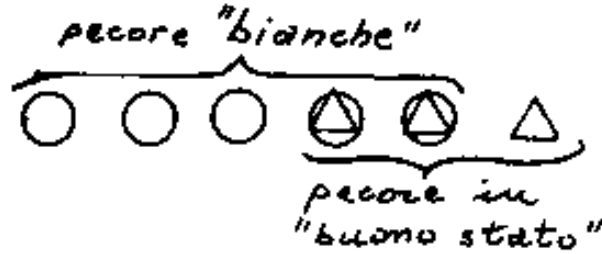
Proprie :- Quando il numeratore è minore del denominatore, cioè quando quantificano un numero minore di (1) uno.

(per esempio : $2/3$) (La torta è stata divisa in 3 parti, e ne abbiamo prese 2)

non è otto: $(5+3=8)$, ma sei $(5+3-2=6)$, perchè occorre togliere "l'intersezione" in quanto, le due pecore dell'intersezione, si conterebbero due volte; sia come pecore "bianche" ○ sia come pecore in "buono stato" △

pecore "bianche"

○ ○ ○ ⊛ ⊛ △

pecore in "buono stato"

l'intersezione è indicata con: (⊛ ⊛).

Le correlazioni dell'insiemistica tendono a determinare <u>qualificazioni</u> di quantità.

Le quantitá

Noi usiamo i "numeri" per esprimere le "quantitá"; in effetti non é lecita alcuna numerabilitá. Infatti le dieci pecore di Tizio sono tutte diverse fra loro, sia per etá, sia per colore del manto, sia per stato fisico, ecc. Quindi il numero "10" si riferisce solo alla caratteristica comune: (essere pecore). —

Questa osservazione, in tempi abbastanza recenti ha portato alla cosiddetta "insiemistica"; essa esprimerebbe: nell'insieme di 10 pecore di tizio, vi sono vari sottoinsiemi, infatti vi sono: 3 pecore nere, 5 pecore bianche, e 2 variegate. Vi sono: 3 pecore in buono stato, 4 in medio stato, 3 in cattivo stato.
Se di pecore bianche in buono stato ve ne sono 2, queste che hanno le caratteristiche co=

no 2, queste che hanno le caratteristiche comuni a due sottoinsiemi, costituiscono la "intersezione" fra i sottoinsiemi: "pecore bianche e pecore in buono stato.

Si noti che la "unione" dei due sottoinsiemi: pecore bianche (5) e pecore in buono stato (3)

Cosa memorizzare

Forse l'uomo prima di memorizzare i capi del suo bestiame incidendo tacche sul suo bastone (quelle che poi saranno detti numeri romani), ha eretto una stele di pietra per una persona cara.
E' possibile memorizzare tutto, il piacere, il dolore, il tempo, lo spazio, gli eventi, le ricette, i meccanismi, i processi di lavorazione. I diversi linguaggi a livello tribale, con i traffici, finiscono per unificarsi nei simboli quantificativi. I simboli numerici, correlati fra loro, porteranno all'aritmetica, in cui, la memorizzazione del prodotto, è quella che oggi si chiama: Tavola Pitagorica. Passeranno secoli prima di avere le tavole logaritmiche o addirittura i computer. Eppure il procedimento è sempre lo stesso: "vedere se vi è una via migliore per raggiungere lo scopo". E ciò può avvenire correlando "fatti" acquisiti e memorizzati, anche

lando fatti acquisiti e memorizzati, anche molto diversi fra loro.

Non abbiamo trattato della memorizzazione incoscienle quale si forma nel bambino nei primi anni di vita, perché lo studio è rivolto a persone adulte che desiderano: "ripartire da zero".
Cioè non trattiamo psicologia o pedagogia infantile.

La memoria - la comunicabilità - i linguaggi

"Memorizzare" esternamente alla mente umana, significa produrre un qualcosa capace di "Comunicare" all'autore o ad altri, ciò che volevasi memorizzare. Il disegno è forse il "linguaggio" più universale, però, mentre rende bene "la forma", non è capace di memorizzare i suoni, i profumi, e tutte le altre cose non riducibili alla sensazione visiva. Ma le memorie esterne alla mente umana, possono distinguersi in due grandi gruppi: le memorie "permanenti" e le memorie "di transito o contingenti". Queste ultime servono solo all'atto in cui sono costituite, ed hanno comunicato il loro contenuto di informazione. È quindi della massima importanza conoscere il "linguaggio" mediante il quale certi "simboli" transitori, o permanenti possano trasmettere informazioni. I "simboli" possono essere gestuali (mimica), suoni, fonemi (linguaggio parlato), simboli grafici di varia natura, (scrittura, ideogrammi, grafici, o altro). È fondamentale che il linguaggio sia inequi=

o altro). È fondamentale che il linguaggio sia inequi=vocabile; purtroppo le lingue parlate, e le stesse parole, spesso con lo stesso accento, hanno significati diversi. Per esempio, in italiano, la parola: "amare" può essere l'infinito del verbo, ma può anche essere l'aggettivo qualificativo, di genere femminile, plurale. Da cui le ovvie battute.

La matematica, la geometria, l'analisi, per chi voglia ripartire da zero

Premessa

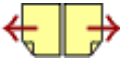
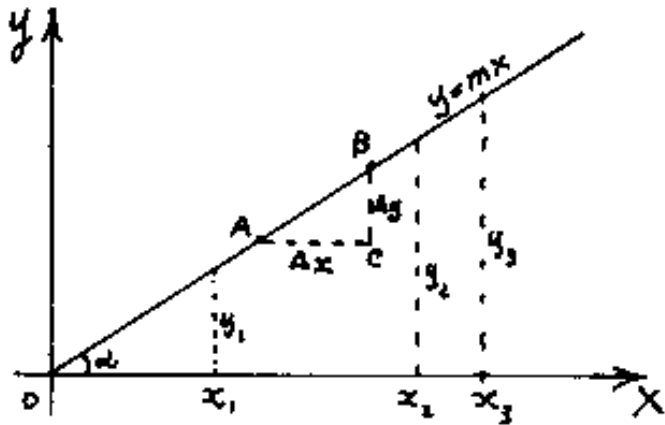
Avvertiamo subito che è perfettamente inutile studiare una molteplicità di teoremi "a memoria" per risolvere un qualsiasi problema. È invece assolutamente necessario che il bagaglio di cognizioni, ciascuno se lo conquisti personalmente, partendo da constatazioni accettabili ed estremamente semplici. È questo il criterio che seguiremo nella nostra esposizione.

Posizione del problema.

L'uomo, come essere pensante, a qualunque epoca appartenga, ed in qualunque località viva, sente la necessità di "memorizzare" la propria esperienza, sia per se stesso, sia per comunicarla ai propri simili. D'altra parte, proprio l'esperienza ha inse=

[illegible] parole, proprio l'esperienza ha insegnato che la mente umana può dimenticare. Per arrivare in un certo punto di una intricata foresta, occorre ricordare il percorso. I percorsi per arrivarci sono praticamente infiniti, alcuni più accessibili, più brevi, più lunghi, ed alcuni presentano difficoltà qualche volta insormontabili. Perciò una volta memorizzato un percorso "sicuro" l'uomo cercherà di trovare se ve ne sono dei migliori.... ciò avviene per tutte le cose, (matematica inclusa).

che può essere crescente, decrescente o costante, a seconda del punto esaminato sul diagramma. Si suole scrivere $y = f(x)$, e si legge: "ipsilon funzione della x". Cioè la lunghezza del segmento in direzione y (detta ordinata), dipende dalla lunghezza del segmento in direzione x (detta ascissa). Le grandezze o valori dell'ascissa e dell'ordinata di ogni punto del piano, sono dette "coordinate" di quel punto" e si indicano nell'ordine: prima la x poi la y. $P \equiv (x, y)$. Le coordinate di una linea che riflette un certo fenomeno, sono correlate dalla: $y = f(x)$ quando in "forma esplicita" si voglia evidenziare che la y è una variabile dipendente dai valori attribuiti alla variabile indipendente x. In generale la $f(x)$ è una formula matematica ove figura la (x) formula

formula matematica ove figura la (x), formula non necessariamente diversa da fenomeno a fenomeno, ove i simboli assumeranno le dimensioni delle grandezze del fenomeno in esame. (per "dimensioni" intendiamo: lunghezze, aree, volumi, masse, tempo, velocità, accelerazioni, temperature, tensione, lavoro, ecc).

Se per l'origine degli assi, tracciamo una retta, per la similitudine dei triangoli possiamo scrivere: $y_1 : x_1 = y_2 : x_2 = y_3 : x_3 = \Delta y : \Delta x =$ = costante: Δx e Δy (leggi: delta x e delta y), rappresentano l'incremento in x ed in y, per passare dal punto A al punto B). La proporzione implica che qualunque sia il punto considerato sulla retta, vale la:

$$\boxed{\frac{y}{x} = m} = \text{costante}$$

che scritta nella forma: $\boxed{y = m \cdot x}$ è l'equazione di una retta passante per l'origine degli assi, scritta in forma: "esplicita". (è la più semplice delle $y = f(x)$.)

Vogliamo vedere bene cos'è quell' m = = costante = (numero), che vale anche per: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$.

Infatti: $y_2 : y_1 = x_2 : x_1$

Infatti:

$$y_B : y_A = x_B : x_A$$

e per lo scomponendo:

$$(y_B - y_A) : y_A = (x_B - x_A) : x_A$$

ma: $(y_B - y_A) = \Delta y$; $(x_B - x_A) = \Delta x$; cioè: $\Delta y : y_A = \Delta x : x_A$

invertendo i medi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A}{x_A} = \frac{y}{x} = m$$

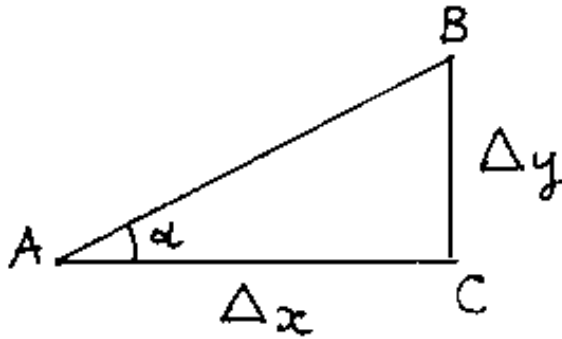
(già noto per Talete)

Notiamo che il rapporto: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

B

A α C

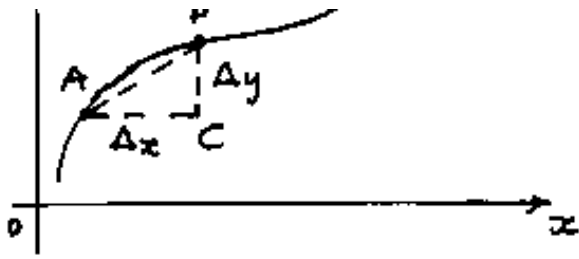
Δy

Δx

rappresenta la: "Pendenza" del segmento $\overline{AB}$, e quindi la pendenza di tutta la retta: $y = mx$

Si pensi ad una strada dove Δy rappresenta la differenza di quota fra i punti distanti orizzontalmente di Δx; (se $\Delta x = 100$ metri e $\Delta y = 3$ metri quella strada ha una pendenza del 3%).

La pendenza cresce al crescere di Δy (direttamente proporzionale a Δy) e decresce al crescere di Δx (inversamente proporzionale a Δx).

Se consideriamo i soliti due punti A e B su un diagramma curvilineo, rappresentare il fenomeno nel tratto $\overline{AB}$ con la formula: $y = m \cdot x$

y B

con la formula: $y = m \cdot x$ significherebbe "linearizzare l'espressione: $y = f(x)$"

cioè significherebbe sostituire all'arco $\overset{\frown}{AB}$ il segmento $\overline{AB}$.

È chiaro che si commetterebbe un errore, che è tanto più piccolo quanto più la linea

curva si approssima ad una retta.

Ma è anche tanto più piccolo l'errore, quanto più piccolo è il triangolo ABC di cateti Δy e Δx. Quando questo triangolo diventa infinitamente piccolo, l'errore è trascurabile; i cateti "Δy" e "Δx" sono divenuti infinitesimi e si indicano con: "dy" e "dx" (si leggono rispettivamente "differenziale y" e "differenziale x") il loro rapporto è ancora la pendenza: $\frac{dy}{dx} = m$

e al caso limite di triangolo infinitesimo, il rapporto: $\frac{dy}{dx}$ si chiama derivata della $y = f(x)$ e si indica con y' oppure con $f'(x)$ ed il suo valore numerico "m" è la pendenza della $y = f(x)$ nel punto considerato.

Nasce così quello che sarà chiamato: "Calcolo infinitesimale", che in definitiva è una "linearizzazione" di un fenomeno complesso, al fine di

zizzazione" di un fenomeno complesso, al fine di rimanere (sia pure al limite infinitesimo) nel campo dei numeri razionali.

un Numero reale irrazionale o più generalmente non razionale è espresso da infinite cifre non esprimibile con frazioni di numeri finiti.

Il simbolismo

Sia "a" un simbolo rappresentativo di una certa quantità esprimibile anche numericamente. Il simbolo "a" può essere affetto anche da altri simboli che sono scritti in carattere più piccolo, essi, a seconda della posizione che hanno rispetto ad "a", sono denominati:

<u>indici</u> (in basso a destro) servono a distinguere quantità di una stessa specie. Per esempio:

$$(a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_H \ldots a_i\, a_j\, a_K \ldots\ldots a_n)$$

Ove: a_i, a_j, a_H, a_K indicano termini generici di una successione, mentre a_n in genere indica l'ultimo termine.

("a_{ij}") indica il termine generico in una matrice ove "i" è il numero della riga, e "j" il numero della colonna.

(per matrice si intende un quadro di elementi incasellati per righe e colonne)

elementi incasellati per righe e colonne)
Però l'incasellatura oltrechè piana, può
essere spaziale: ("a_{ijk}") ove k indica
l'altezza del quadro. E può aversi
("$a_{ij\ldots n}$") in campi "n" dimensionali. —
Se il simbolo indica funzione e l'indice è
in parentesi ($f(x)$) si legge: "funzione della x".

apici (in alto a destra) questi si distinguono in più specie:

1) apici propriamente detti quando sono degli apostrofi, che a loro volta si distinguono in due specie:

- Se apposti a lettere maiscole: A', A'', A'''... indicano proiezioni del punto A rispettivamente in prima, seconda, terza proiezione;
- se apposti a lettere minuscole r', r'', r''' si hanno le proiezioni di rette.
- Se apposti a lettere indicanti funzioni di variabili, per esempio: $y = f(x)$ (leggi y funzione della x): y', y'', y''' indicano rispettivamente la derivata prima, seconda, terza, rispetto alla variabile indipendente x. Cioè l'ordine di una derivata.

2) Se l'apice è un asterisco: si usano

per indicare grandezze fittizie, per es. $q^* = M$ in scienza delle costruzioni significa che si assume come fosse un carico q (carico fittizio) in una sezione, il valore che in quella sezione ha il momento flettente.

ESPONENTE

Se l'apice è un numero o una lettera in generale si considera tale numero o lettera un esponente; cioè il numero di volte che la quantità affetta da quell'esponente, deve moltiplicare se stessa: per es. $a^3 = (a \cdot a \cdot a)$

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$; $a^n = \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \ldots \frac{a}{n}\right)$

La quantità affetta da esponente si chiama base ed il simbolo completo "a^n" si chiama potenza e si legge: (potenza ennesima di "a") od anche: (la base "a" elevata ad "n") o semplicemente: ("a" elevata ad "n"). Potenza è anche il valore di a^n oltreché il simbolo:

per esempio: (la potenza di 5^4 è 625)

Parentesi

Si distinguono in tre specie:

- parentesi tonde: ( )

- parentesi tonde: ( )
- parentesi quadre: [ ]
- parentesi a graffa { }

Le parentesi hanno molteplici usi in aritmetica, in algebra e nel simbolismo.

Possono indicare la sequenza delle

operazioni da effettuare. La regola generale è: "prima le tonde, poi le quadre, poi le graffe". Significa: prima effettuare, nell'ordine aritmetico, le operazioni entro parentesi tonde, quindi, trovati i valori, si tolgono le parentesi tonde che racchiudevano tali valori, e che ora rimangono entro le più esterne parentesi quadre che a loro volta sono interne alle parentesi a graffa. (L'ordine aritmetico è: prima le potenze, poi i prodotti e quozienti, poi somme o sottrazioni)

per esempio: $2\{[(5-3)\cdot 4-(5-3\times 4)]-1\} =$

$= 2\{[2\times 4 + 7]-1\} =$

$= 2\{15-1\} =$

$= 2\times 14 = 28$

$= 2 \times 14 = 28$

Come in algebra, parentesi affiancate indicano prodotto; per es: $(5)(6) = 30 = (5)6$. ecc.

- Le parentesi possono indicare nei grafici i punti o rette spostate nella posizione di arrivo; per es A da una certa posizione è finito per movimento, (non per proiezione) in (A).

Se i punti di arrivo sono in sequenza si ha: A che va prima in $(A)_1$ poi in $(A)_2$ poi.. $(A)_m$. Ciò può tradursi in una funzione: $f(x)$.

- Le parentesi graffe possono indicare una successione di termini $\{a_n\}$ significa $a_1, a_2, \ldots a_n$; Ma possono anche indicare la legge che regola tale successione: $\{2n-1\}$ è la legge dei numeri dispari sostituendo a n $(n=1;\ n=2;\ldots n=n)$

Le barrette verticali che delimitano un simbolo o più simboli indicano valore assoluto o modulo $|a|$ (leggi: valore assoluto di "a"). Valore assoluto vuol dire che qualunque segno $\pm$ abbia la quantità contenuta entro le barrette verticali essa deve essere considerata positiva. Ciò implica che per valori solo positivi le barrette non sono necessarie; (per es.: a^2 è inutile dire: $|a^2|$) Se trattasi di valori solo negativi possiamo moltiplicare per (-1) il valo

possiamo moltiplicare per (−1) il valore entro le barrette e sostituirle con parentesi. Per esempio: per x maggiore di 3 l'espressione $|3-x|$ può sostituirsi $(x-3)$.

Le barrette verticali indicano spesso matrici e determinanti (il determinante è una matrice quadrata) per es. $|A|$

Tal volta per distinguere una matrice non quadrata da un determinante si usa la doppia barra verticale: $\|A\|$ ove: $\|A\| \; ; \|a_{ij}\|$ vuol esprimere:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

che è una matrice $(m \times n)$

$\|A\| \; (m \times n)$

con $(i = 1, 2, 3, \ldots m)$

con $(j = 1, 2, 3, \ldots n)$

Le virgolette Si usano in uno scritto, per evidenziare che la lettera, o l'espressione letterale, è una quantità o simbolo algebrico; e non una lettera dell'alfabeto linguistico. per es. "a". In alcuni elaboratori elettronici avviene esattamente l'opposto; infatti se comandiamo

al calcolatore di stampare "a" cioè: (Print "a") esso stampa la lettera a. Se invece digitiamo: (Print a) esso stampa il valore numerico di "a"..

<u>Controindici</u> (<u>in basso a sinistra</u>) servono ad indicare <u>provenienza</u>, origine, e si utilizzano in calcoli speciali; per es. $({}_x a\ ;\ {}_4 a\ ;\ {}_m a)$ e possono indicare quando un elemento si è sostituito in una certa tabulazione indicizzata. Se vogliamo la successione delle sostituzioni in a_{ijk} avremo: ${}_1 a_{ijk}$, ${}_2 a_{ijk}$, ... ${}_i a_{ijk}$; ${}_n a_{ijk}$.

<u>Controapici</u> (in alto a sinistra) Servono per indicazioni speciali, per esempio di ubicazione in tabulati pluridimensionali in cui si voglia evidenziare la <u>caratteristica qualitativa</u> di appartenenza, campi, od altro; esempio: $({}^7 a, {}^2 a, {}^n_m a)$ ed anche: $({}^\varphi a_{ijk})$; $({}^\varphi_n a_{ijk})$.

<u>sottostanti</u> (posti al di sotto della lettera) il più banale è la sottolineatura che serve

banale è <u>la sottolineatura</u> che serve
ad evidenziare quella certa quanti
tà (in alcuni testi la sottolineatura
indica che la grandezza è un vettore)
[si dicono Vettori, o grandezze vettoriali, quelle
entità, che, oltre alla qualità (dimensione) e

quantità (intensità), sono caratterizzate dalla direzione e verso, secondo cui agiscono (per es. la pressione del vento, la velocità, i campi elettrici, magnetici, gravitazionali ecc)] per es. a. Se sotto al simbolo vi sono due lettere separate da un archetto per es. $\underset{AB}{M_s}$ indica il momento calcolato per forze a sinistra valido nel campo da A a B. Sarebbe stato meglio scrivere: $\underset{AB}{\overset{s}{M}}$ od anche: $s\underset{AB}{M}$, a seconda che si voglia evidenziare il tipo (qualità) di momento (calcolato per forze a sinistra) oppure si voglia evidenziare la provenienza delle azioni che lo generano.

Separare un simbolo od una espressione.

Separare un simbolo od una espressione con una barra e porre sottostanti altri simboli è il normale simbolo di frazione.

In alcuni calcoli di elettrotecnica conviene indicare con $\frac{\Sigma}{ijl\ldots}$ la sommatoria delle impedenze $Z_i + Z_j + Z_l \ldots$ (cfr. Tesi di Laurea di C. Brogi - Bologna 1968).

Soprastanti (posti al di sopra della lettera) si ha la sopralineatura che serve per evidenziare particolari caratteristiche. In scienza delle costruzioni si sopralineano i momenti d'incastro perfetto, in alcuni testi si sopralineano le grandezze vettoriali, in analisi talvolta si sopralinea una variabile (per es $\overline{X}$) per evidenziare un particolare valore della x, oppure che in quella operazione la x è da riguardare come costante parametrica. Per indicare grandezze vettoriali è preferibile sopralineare con una freccia: $\vec{V}$ (leggi "V vettore", o, "il vettore V").
Un accento circonflesso indica angolo: $\hat{A}$ (l'angolo in A), mentre un archetto indica arco: $\frown{a}$ (l'arco a), la sopralineatura di due lettere indi

sopralineatura di due lettere indi-
ca segmento: $\overline{AB}$ (segmento da A a B)
$\overline{BA}$ (segmento da B ad A) e quindi
anche: $\overset{\frown}{AB}$ (arco da A a B).
Un punto o due punti o più
punti sovrapposti ad una let-

tera, indicano il grado della derivata rispetto al tempo per es. la funzione $\dot{u}$ è la derivata prima di u rispetto a t (tempo); $\ddot{u}$ è la derivata seconda di u rispetto a t. Poiché per derivata si può intendere il rapporto fra la variazione infinitesima di u e la variazione infinitesima di t, cioè: $\frac{du}{dt}$, se u è uno spazio, il tratto infinitesimo di spazio diviso il tempo infinitesimo neces- sario a percorrerlo è la velocità istanta- nea $= \dot{u}$ mentre l'accelerazione istantanea sarà $= \ddot{u}$.

Un'altro simbolo che si sovrappone alle lettere è il segno ~ ; se A è una matrice $\|A\|$; $\tilde{A}$ è la matrice trasposta, cioè se il simbolo a_{ij} è il simbolo generico dell'$\|A\|$ [illegible]

a_{ij} è il simbolo generico di $\|A\|$ avremo che a_{ji} è il simbolo generico di $\|\tilde{A}\|$, cioè si sono scambiate le righe con le colonne.

È evidente che il simbolismo, non essendo

unificato può essere interpretato in modi diversi da quello qui esposto, quindi ciascuno potrà, nei propri studi, usare quel simbolismo che risulta più evidente al suo modo di pensare. (I tedeschi per i vettori usano spesso lettere in grassetto o addirittura in alfabeto gotico). Se poi si vuole esporre ad altri le proprie ricerche, si deve, per prima cosa, chiarire il significato del simbolismo usato.

Vi sono altri simboli correlatori fra due grandezze, oltre i simboli delle operazioni aritmetiche: (+ ; − ; X ; oppure · ; : oppure /), ne riportiamo alcuni:

= (uguale), o (congruente)

≡ (simile), o (definito da), o (determinato da)

≠ (diverso) (nel senso non uguale) (ogni simbolo sbarrato assume il significato opposto)

... il significato opposto)

$\not\simeq$ (non simile)

$\equiv$ (equivalente) $\not\equiv$ (non equivalente)

$//$ (parallelo)

$\perp$ (perpendicolare o normale)

$\int_a^b f(x)\,dx$ (integrale della f(x) esteso da a a b)

$\simeq$ (circa uguale)

$\sim$ (circa)

$\sum_{i=a}^{i=b} a_i$ (Somma dei termini a_i con i variabile da "a" a "b")

$>$ (maggiore di..) . $\not>$ (non maggiore di)

$\geqslant$ (maggiore o uguale a..)

$\gg$ (molto maggiore di..)

$<$ (minore di..) $\not<$ (non minore di)

$\leqslant$ (minore o uguale a..)

$\ll$ (molto minore di..)

$\supset$ (da cui, ... include..., implica che, comprende, ne consegue)

$\not\supset$ (non include)

$\subset$ (... è incluso...) $\not\subset$ (non è incluso)

$\in$ (appartiene a) $\notin$ (non appartiene)

$\cup$ (unione di insiemi
..... unito a .....

$\cup$ (unione di insiemi, ... unito a ...)

$\cap$ (intersezione di insiemi, cioè gli elementi comuni di due diversi insiemi)

$\forall$ (per ogni) $\qquad\qquad$ $\not\forall$ (non ogni)

$\exists$ (esiste) $\qquad\qquad$ $\nexists$ (non esiste)

LE CINQUE PROPRIETÀ DELLE POTENZE

Dicesi potenza di un numero (base) il prodotto ottenuto moltiplicando per se stesso il numero (base) quante volte indica l'esponente:

$$a^n = \underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdot \underset{3}{a} \cdot \ldots\ldots \cdot \underset{n}{a}$$

ove: a = base ; n = esponente.

I^a) Proprietà:

espressione matematica:

$$(a^m)(a^n) = (a^{m+n})$$

espressione in lingua:

Il prodotto di due potenze aventi per base la stessa base e per esponente anche diversi esponenti, è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

---

dimostrazione:

$$\left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdot \ldots \cdot \underset{m}{a}\right)\left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdot \ldots\ldots \cdot \underset{n}{a}\right) =$$

$$\left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdot \ldots \cdot \underset{m}{a}\right)\left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdot \ldots \cdot \underset{n}{a}\right) =$$

$$= \left(\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdot \ldots \cdot \underset{m}{a} \cdot \underset{m+1}{a} \cdot \underset{m+2}{a} \cdot \ldots \cdot \underset{m+n}{a}\right)$$

esempio numerico:

$$(2^3)(2^4) = 2^{3+4} = 2^7$$

$$(2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7 = 128$$

$$(8) \cdot (16) = 128$$

$2_1 \times 2_2$
$4 \times 2_3$
$8 \times 2_4$
$16 \times 2_5$
$32 \times 2_6$
$64 \times 2_7$
128

II^a Proprietà

espressione matematica

$$(a^m):(a^n) = (a^{m-n})$$

espressione in lingua

Il quoziente di due potenze aventi per base la stessa base e per esponenti anche diversi esponenti, è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti

dimostrazione:

$$\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \cdot \overbrace{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots\cdots a_m}^{\text{restano } (m-n)}}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}$$

poiché dividendo ambo i termini di una frazione per uno stesso numero il valore della frazione non cambia.

esempio numerico:

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4} = 2^3 = 8 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 8$$

Implicazioni della II^a proprietà.

Implicazioni della II^a proprietà:

La frazione apparente : $\frac{a^m}{a^m} = 1$ per la II^a proprietà: $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = \boxed{a^0 = 1}$ ciò vuol dire che qualunque numero ad esponente zero è pari all'unità (vale uno).

Da ciò si deduce: $\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = \boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$

"Ogni potenza ad esponente negativo è il reciproco della stessa potenza ad esponente positivo" (e viceversa).

$\cos(\alpha)\cos(\beta)$, abbiamo:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha)\, tg(\beta)}$$

analogamente:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \tan(\alpha-\beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha)\cdot tg(\beta)}$$

$\cot(\alpha) = 1/tg(\alpha)$ per cui:

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cdot\cot(\beta) - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta) + 1}{\cot(\beta) - \cot(\alpha)}$$

Le formule:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Fondamentali di somma e sottrazione sono dette da alcuni formule

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

da alcuni formule di Werner, mentre altri chiamano <u>formule di Werner</u> le seguenti:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

dedotte dalle precedenti sommando e sottraendo membro a membro.

Le funzioni somma e differenza di angoli

sia: $\alpha = P\hat{O}A$; $\beta = A\hat{O}\varnothing$; $(\alpha+\beta) = P\hat{O}\varnothing$; si noti inoltre che: $P'''\hat{O}P'' = \beta = P'\hat{P}P''$.

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \overline{PE} + \overline{EP'}$$

Ricordando la regola: " Un cateto = = l'ipotenusa nel seno dell'angolo opposto o nel coseno dell'angolo adiacente", si ha:

$$\overline{PE} = \overline{PP''}\cos(\beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\overline{EP'} = \overline{P''P'''} = \overline{OP''}\,\text{sen}(\beta) = \cos(\alpha)\,\text{sen}(\beta)$$

per cui avremo:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,\text{sen}(\beta)}$$

analogamente:

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OP'} = \overline{OP'''} - \overline{P'P'''} = \overline{OP''}\cos(\beta) - \overline{PP''}\,\text{sen}(\beta)$$ cioè:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\beta)}$$

poiché: $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$ e $\text{sen}(-\beta) = -\text{sen}(\beta)$

sostituendo:

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\,\text{sen}(\beta)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

e da queste:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)}$$

da cui dividendo i termini della frazione per

Si nota che i numeri diversi fra loro sono pochi, e per fare la tabella li abbiamo ripetuti molte volte.
Perciò le tavole trigonometriche pubblicate, riportano solo gli angoli del I quadrante; poi tenendo conto delle cofunzioni, presentano tavole a doppia lettura: dall'alto verso il basso, e dal basso verso l'alto, rispettivamente per la colonna di sinistra e di destra.
Cioè si presentano:

α	sin.	cos.	tang.	cotg.	sec	cosec	/
0	0	1	0	∞	1	∞	90°
30°	0,500000	0,866025	0,577350	1,732051	1,154701	2	60°
45°	0,707107	0,707107	1	1	1,414214	1,414214	45°
/	cos.	sin	cotg.	tang.	cosec.	sec.	α

Con ciò si evita di ripetere gli stessi valori.
Però i valori così calcolati erano uno po' pochini, mentre nell'ordinarietà dei calcoli occorreva avere

mentre nell'ordinarietà dei calcoli occorreva avere valori delle funzioni angolari precise almeno al primo sessagesimale. Occorreva quindi incrementare la tavola trigonometrica di valori intermedi. Per far ciò occorrevano relazioni per le funzioni trigonometriche relative alla somma e differenza di angoli.

Le tavole trigonometriche

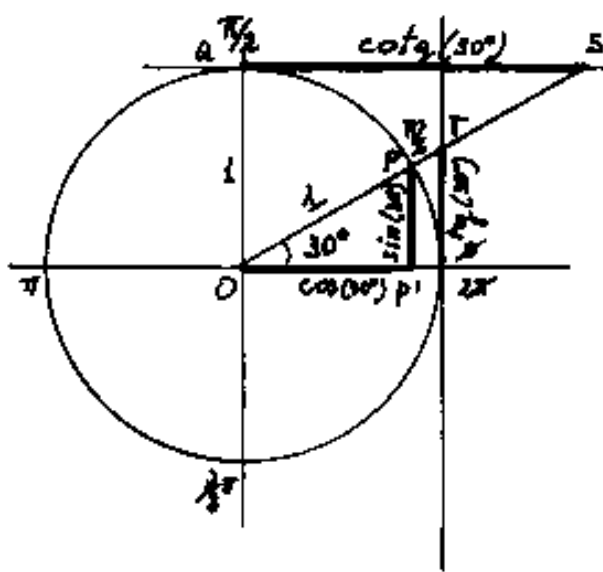
Come abbiamo visto è facile calcolare i valori numerici delle funzioni trigonometriche per gli angoli notevoli. Se poi consideriamo che questi valori calcolati per il primo quadrante si ripetono negli altri tre quadranti, al più, variando di segno, operando quella che viene chiamata la: "riduzione al primo quadrante", si può costruire la seguente tabella.

angolo α	ridotto al I° q.	sin (α)	cos (α)	tg (α)	ctg (α)	sec (α)	cosec (α)
∅	primo quadrante	∓ 0	1	∓ 0	∓ ∞	1	∓ ∞
30°		0,500000	0,866025	0,577350	1,732051	1,154701	2
45°		0,707107	0,707107	1	1	1,414214	1,414214
60°		0,866025	0,500000	1,732051	0,577350	2	1,154701
90°		1	± 0	± ∞	± 0	± ∞	1
120°	60°	0,866025	−0,500000	−1,732051	−0,577350	−2	1,154701
135°	45°	0,707107	−0,707107	−1	−1	−1,414214	1,414214
150°	30° II	0,500000	−0,866025	−0,577350	−1,732051	−1,154701	2
180°	∅°	± 0	−1	∓ 0	∓ ∞	−1	± ∞
210°	30°	−0,500000	−0,866025	0,577350	+1,732051	−1,154701	−2
235°	45° III	−0,707107	−0,707107	1	1	−1,414214	−1,414214

235°	45° III	−0,707107	−0,707107	1	1	−1,414214	−1,414214
240°	60°	−0,866025	−0,500000	1,732051	0,577350	−2	−1,154701
270°	90°	−1	∓0	±∞	±0	∓∞	−1
300°	60°	−0,866025	0,500000	−1,732051	−0,577350	2	−1,154701
315°	45° IV	−0,707107	0,707107	−1	−1	1,414214	−1,414214
330°	30°	−0,500000	0,866025	−0,577350	−1,732051	1,154701	−2
360°	∅	∓0	1	∓0	∓∞	1	∓∞

Si noti come lo zero e l'infinito (∞) siano i termini di passaggio da valori positivi a negativi e viceversa.

Angoli notevoli

Vediamo ora come si calcolano numericamente le funzioni trigonometriche degli angoli notevoli.
Per: 0°, 90°, 180°, 270°, 360°; i valori si vedono direttamente dai grafici.

Per: $30° = (\pi/6)$ rad.

I triangoli rettangoli metà di triangoli equilateri, hanno angoli opposti ai cateti di 30° e 60°.

Per cui: $\sin(30°) = \sin(\pi/6 \text{ rad}) = \cos(60°) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2} = 0{,}5000000 = \overline{PP'}$

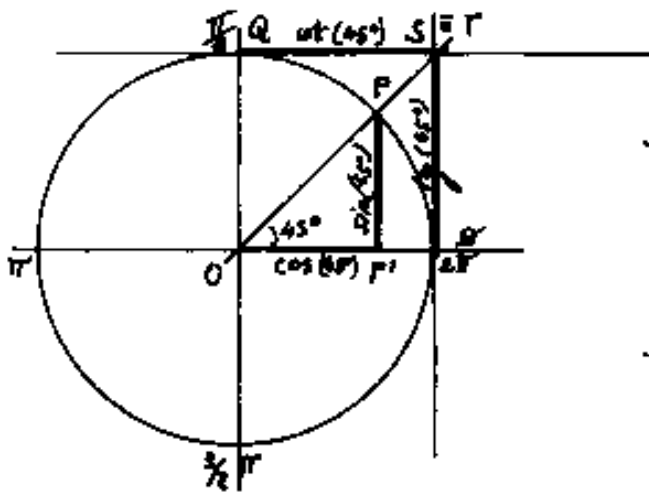
$\cos(30°) = (\text{sen}(60°)) = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866025 = \overline{OP'}$

$\text{tang}(30°) = (\text{cotg}(60°)) = 1/\sqrt{3} = 0{,}577350 = \overline{ØT}$

$\text{cotg}(30°) = (\text{tg}(60°)) = \sqrt{3} = 1{,}732051 = \overline{QS}$

$\sec(30°) = (\text{cosec}(60°)) = 2/\sqrt{3} = 1{,}154701 = \overline{OT}$

$\sec(30°) = [\operatorname{cosec}(60°)] = 2/\sqrt{3} = 1{,}154701 = \overline{OT}$

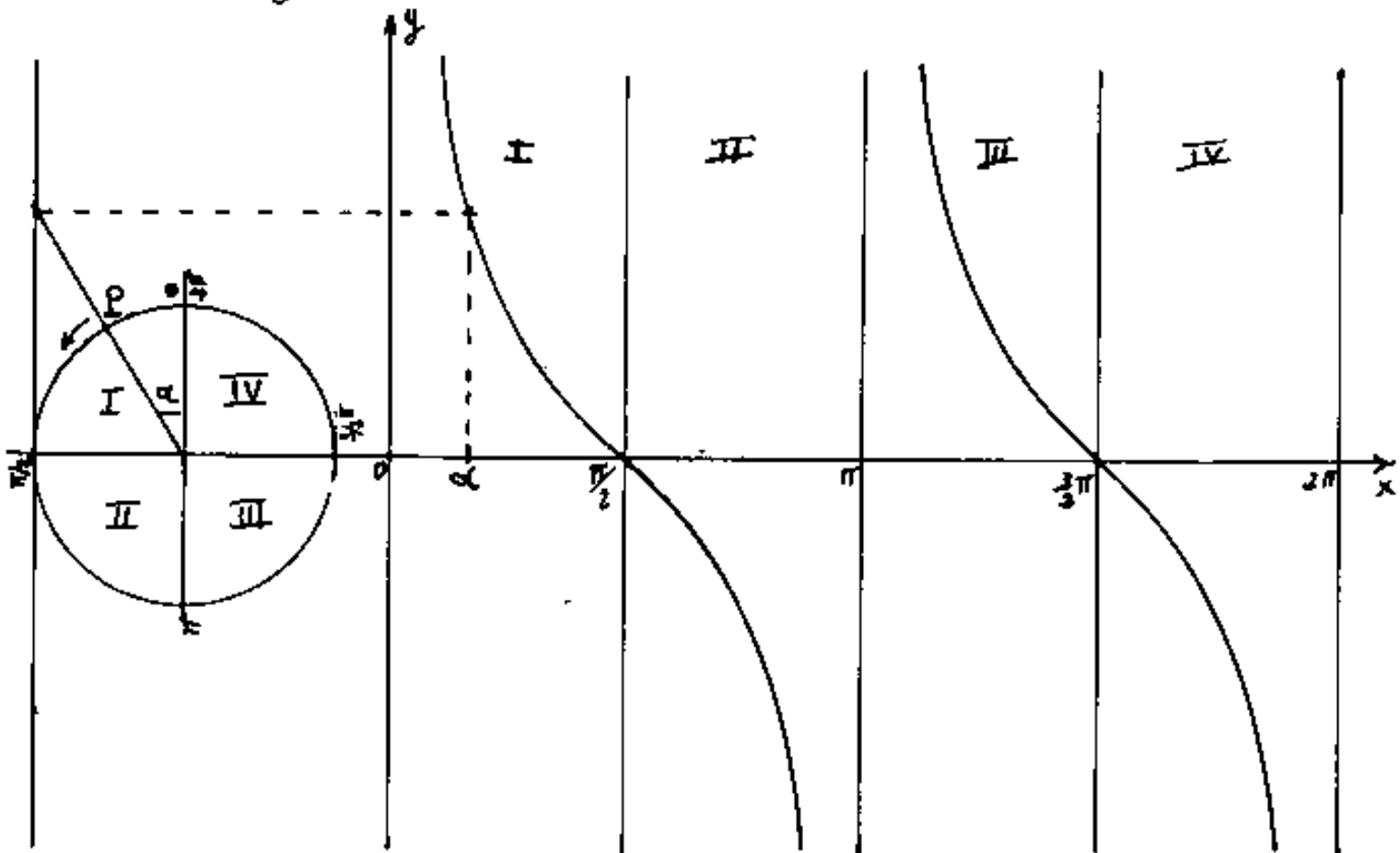
$\operatorname{cosec}(30°) = (\sec(60°)) = 2 = 2{,}000000 = \overline{OS}$

Per $45° = (\pi/4)$ rad

$\sin(45°) = \cos(45°) = 1/\sqrt{2} = 0{,}707107$

$tg(45°) = ctg(45°) = 1 = 1{,}000000$

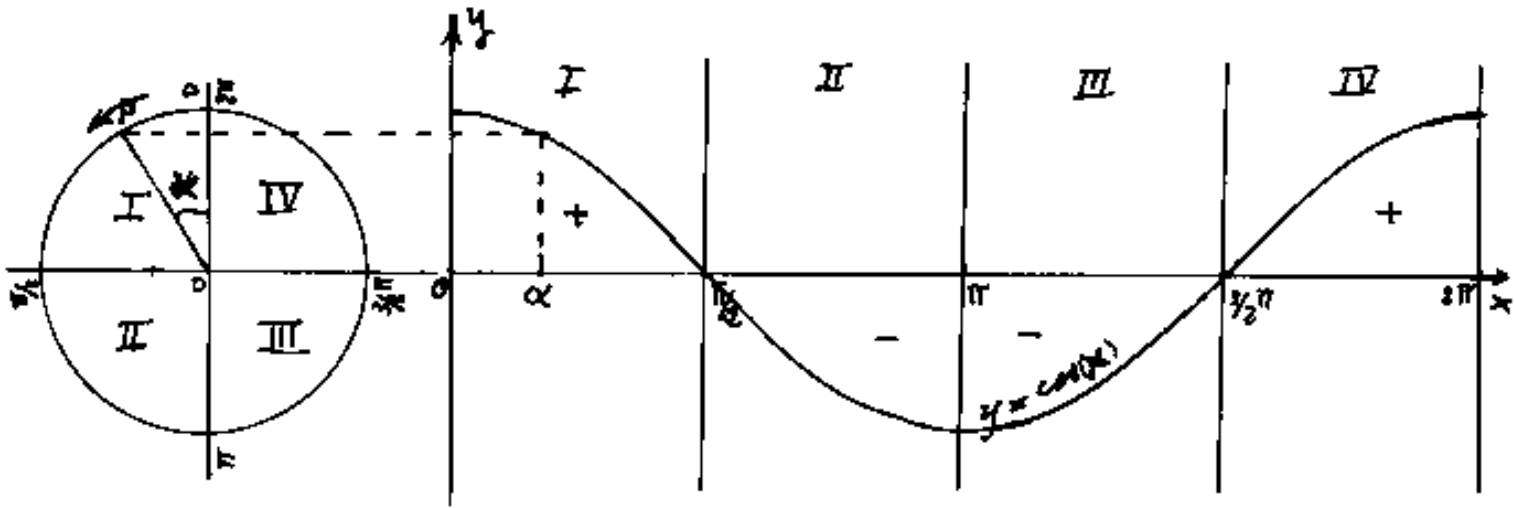
$\sec(45°) = \operatorname{cosec}(45°) = \sqrt{2} = 1{,}414214$

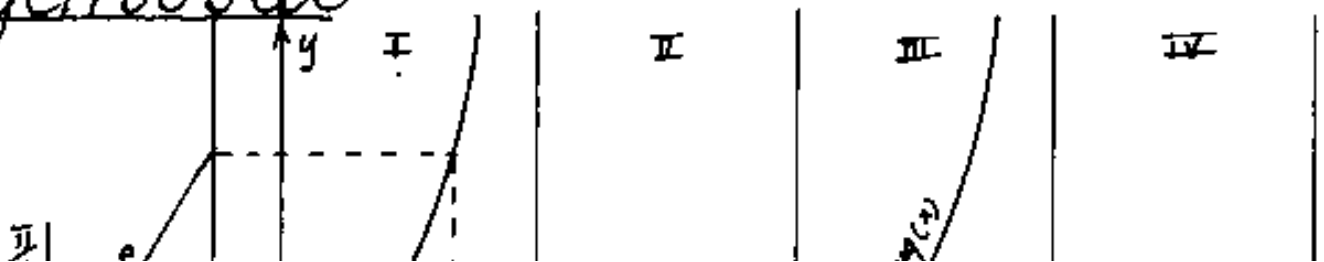
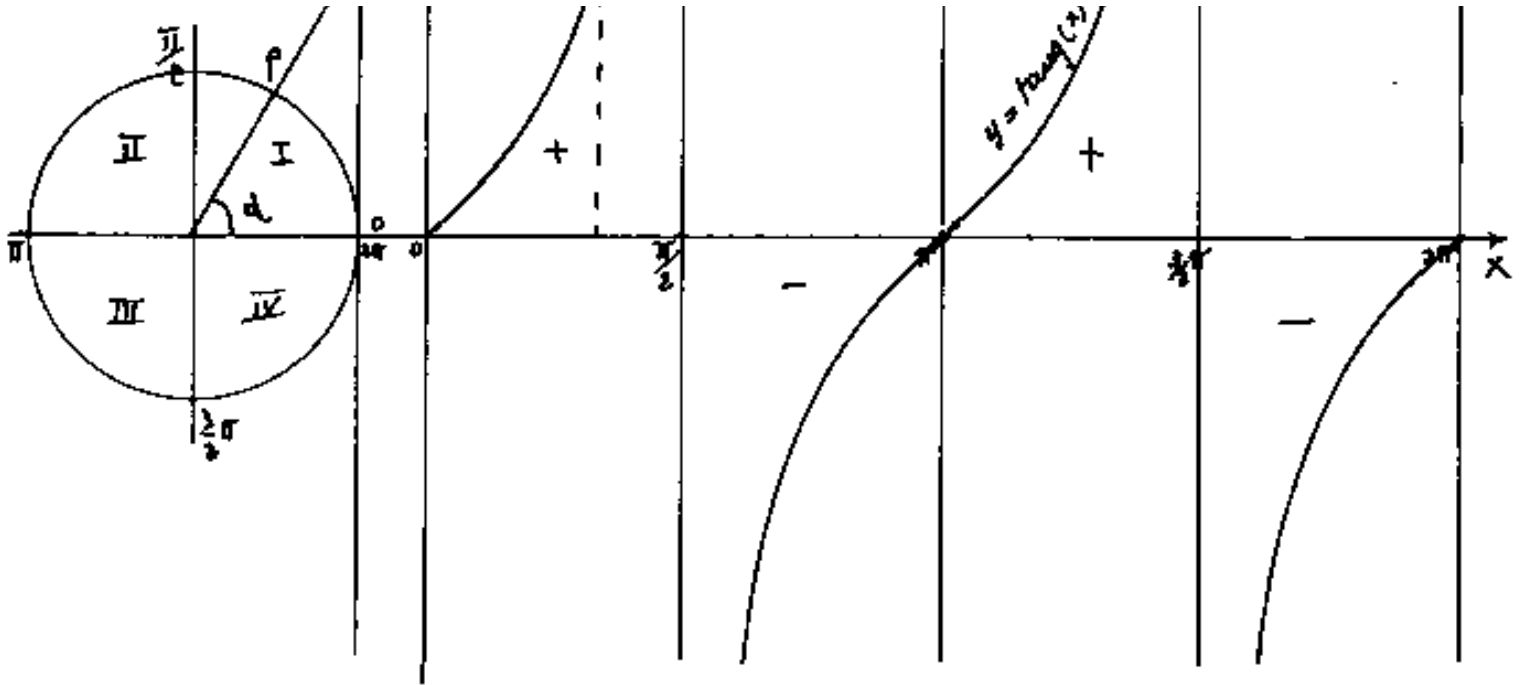
La tangente è positiva nel I e III quadrante, negativa nel II e IV. Abbiamo: $tg(\alpha) = -tg(180-\alpha) = +tg(180+\alpha) = -tg(-\alpha)$.

cotangentoide

Attenzione la cotangentoide non si ottiene slittando la tangentoide.

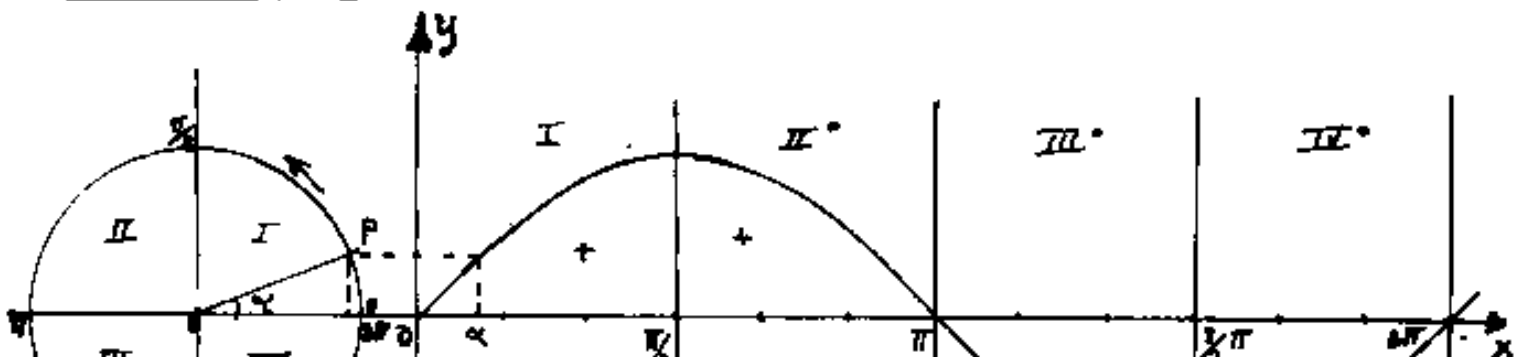
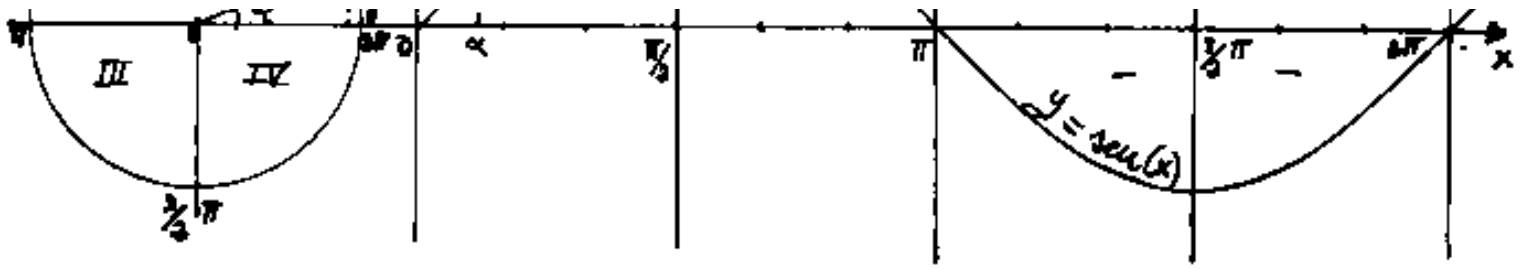
Anche per la cotangentoide, si è ~~ruotato~~ ruotato il cerchio di 90° (essendo la cofunzione) cioè

cerchio di 90 (essendo la cofunzione) cioè $cotg(\alpha) = taug(90-\alpha)$. Però è necessaria una osservazione sui segni. Gli angoli α e β si accrescono rotando in verso opposto. Mentre $sen(\alpha)$ e $cos(\alpha) = sen(\beta)$, nel secondo quadrante hanno segni opposti, $cotaug(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = taug(\beta)$ in tutti i quadranti hanno lo stesso segno: $cotg(\alpha) = -cotg(180-\alpha) = cotg(180+\alpha) = -cotg(-\alpha)$

Cosinusoide

Si noti che per far corrispondere il grafico, abbiamo ruotato il cerchio di $90° = \pi/2$; infatti il coseno (co-funzione) ovvero seno dell'angolo complementare: $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$, si ripete anch'esso per valori assoluti nei quattro quadranti: $\cos(\alpha) = -\cos(180 - \alpha) = -\cos(180 + \alpha) = +\cos(-\alpha)$, cioè il coseno è positivo nel I e IV quadrante, negativo nel II e III quadrante

Tangentoide

Rappresentazioni grafiche.

Possiamo ora tracciare i grafici delle funzioni trigonometriche. A tal fine basterà dividere il cerchio trigonometrico in un numero abbastanza grande di divisioni e riportare in y il segmento corrispondente alla funzione; mentre in ascisse è riportata la circonferenza rettificata, cioè l'angolo in radianti (se consideriamo il raggio del cerchio = 1 modulo unitario della scala grafica). E' questa una delle ragioni per cui, in analisi matematica, gli angoli si misurano in radianti.

Sinusoide

Notiamo che in valore assoluto i valori del seno si ripetono nei 4 quadranti: $sen(\alpha) = sen(180 - \alpha) = - sen(180 + \alpha) = - sen(-\alpha)$. Il seno è positivo nel I e II quadrante, negativo nel III° e IV quadrante.

analogamente:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{tg(\alpha)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}$$

Possiamo quindi, nota una funzione di un angolo, ricavarne tutte le altre.

TABELLA

incognita \ nota	$sin(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tang(\alpha)$	$cotg(\alpha)$	$sec(\alpha)$	$cosec(\alpha)$
$sin(\alpha)=$	$\text{sen}(\alpha)$	$\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$	$\frac{tg(\alpha)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\sqrt{cotg^2(\alpha)+1}}$	$\frac{\sqrt{sec^2(\alpha)-1}}{sec(\alpha)}$	$\frac{1}{cosec(\alpha)}$
$cos(\alpha)=$	$\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$	$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}$	$\frac{cotg(\alpha)}{\sqrt{cotg^2(\alpha)+1}}$	$\frac{1}{sec(\alpha)}$	$\frac{\sqrt{cosec^2(\alpha)-1}}{cosec(\alpha)}$
$tang(\alpha)=$	$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$	$tg(\alpha)$	$\frac{1}{Cotg(\alpha)}$	$\sqrt{sec^2(\alpha)-1}$	$\frac{1}{\sqrt{cosec^2(\alpha)-1}}$
$cotg(\alpha)=$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}{\text{sen}(\alpha)}$	$\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{tg(\alpha)}$	$cotg(\alpha)$	$\frac{1}{\sqrt{sec^2(\alpha)-1}}$	$\sqrt{cosec^2(\alpha)-1}$
$sec(\alpha)=$	$\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\cos(\alpha)}$	$\sqrt{1+tg^2\alpha}$	$\frac{\sqrt{cotg^2(\alpha)+1}}{cotg(\alpha)}$	$sec(\alpha)$	$\frac{cosec(\alpha)}{\sqrt{cosec^2(\alpha)-1}}$

$\sec(\alpha)=$	$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\alpha)}$	$\cos(\alpha)$	$\sqrt{1+tg^2\alpha}$	$\operatorname{cotg}(\alpha)$	$\sec(\alpha)$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2(\alpha)-1}$
$\operatorname{cosec}(\alpha)=$	$\dfrac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}$	$\dfrac{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}{tg(\alpha)}$	$\sqrt{\operatorname{cotg}^2(\alpha)+1}$	$\dfrac{\sec(\alpha)}{\sqrt{\sec^2(\alpha)-1}}$	$\operatorname{cosec}(\alpha)$

Queste tre regole sottolineate (che un Professore di Topografia pretendeva a memoria immediata) consentono di risolvere i triangoli rettangoli e quindi tutte le altre figure poligonali.

Si noti che le funzioni angolari: $sen(\alpha)$, $cos(\alpha)$, $tang(\alpha)$, ecc., sono dei <u>coefficienti di proporzionalità</u> fra gli elementi di triangoli rettangoli simili.

I valori del seno, del coseno, della tangente, si trovano affiancati al valore dell'angolo nelle <u>tavole trigonometriche</u>.

Correlazioni fra le funzioni trigonometriche

Dalla: $\boxed{sen^2(\alpha) + cos^2\alpha = 1}$ ricaviamo:

$sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$ ed $cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad ; \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Dalla: $$\boxed{\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = tg(\alpha)} \quad ; \quad \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = tg^2(\alpha) \quad ;$$

$$\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha \quad > \quad 1-\cos^2\alpha = (\cos^2\alpha)(tg^2\alpha) \quad > \quad \cos^2\alpha(1+tg^2\alpha) = 1$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}} \quad \text{(col segno di } tg(\alpha))$$

inoltre: $\overline{TQ} : \overline{OQ} = \overline{PP'} : \overline{OP'}$ cioé:

$$\tan(\alpha) : 1 = \sin(\alpha) : \cos(\alpha)$$

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)} \quad \text{(fondamentale)}$$

Consideriamo ora il triangolo ACB, simile e similmente disposto al triangolo OP'P, possiamo scrivere le seguenti proporzioni:

$a : c = \sin(\alpha) : 1 \longrightarrow \boxed{a = c \sin(\alpha)}$

$b : c = \cos(\alpha) : 1 \longrightarrow \boxed{b = c \cos(\alpha)}$

$a : b = \tan(\alpha) : 1 \longrightarrow \boxed{a = b\, tg(\alpha)}$

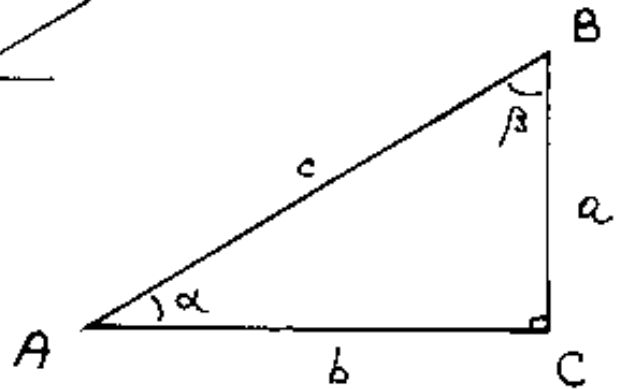
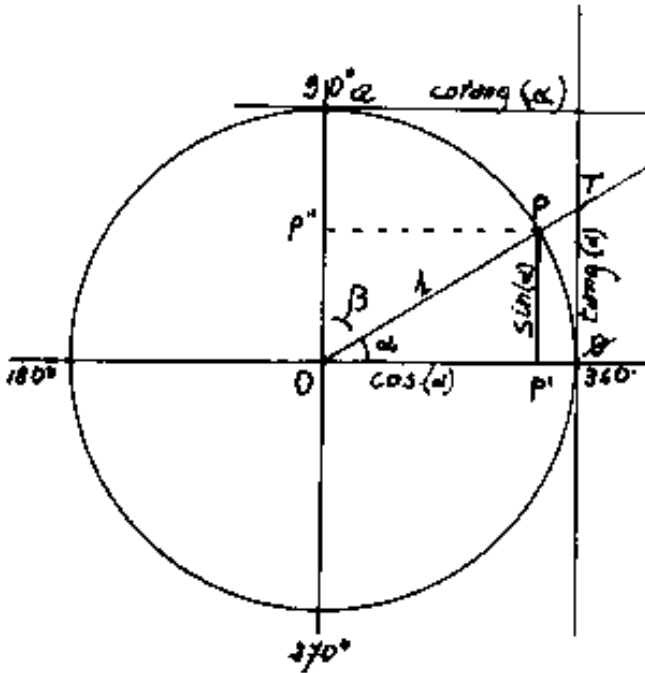
Se del triangolo ACB conosciamo l'ipotenusa "c" ed un angolo (oltre l'angolo retto), possiamo dire:

"Un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo adiacente"

Se invece conosciamo un cateto ed un angolo, possia=

Se invece conosciamo un cateto ed un angolo, possiamo dire:

"L'ipotenusa è uguale ad un cateto diviso per il seno dell'angolo opposto o diviso per il coseno dell'angolo adiacente"

"Un cateto è uguale all'altro per la tangente dell'angolo opposto o la cotangente dell'angolo adiacente"

Proiettiamo P su $\overline{O\emptyset}$ e su $\overline{OQ}$ in P' e P", avremo

$\overline{PP'}$ = seno dell'angolo(α) = sin(α) = sen(α)

$\overline{PP''}$ = seno dell'angolo(β) complementare di α

(le funzioni dell'angolo complementare sono le cofunzioni)

perciò: $\overline{PP''}$ = coseno dell'angolo(α) = cos(α) = $\overline{OP'}$

tracciate le tangenti al cerchio in $\emptyset$ e Q si

ha: $\overline{\emptyset T}$ = tangente di(α) = tang(α) = tg(α)

$\overline{QS}$ = cotangente di(α) = cotg(α) = $1/tg(\alpha)$

$\overline{OT}$ = secante di(α) = sec(α) = $\frac{1}{\cos(\alpha)}$

$\cos(\alpha)$

$\overline{OS}$ = cosecante di (α) = $\operatorname{cosec}(\alpha) = 1/\sin(\alpha)$.

infatti: $\overline{OT} : \overline{OQ} = \overline{OP} : \overline{OP'}$, cioè: $\overline{OT} : 1 = 1 : \overline{OP'}$, cioè:

$\sec\alpha : 1 = 1 : \cos\alpha$; analogamente: $\operatorname{cosec}\alpha = 1/\sin(\alpha)$.

Al triangolo OPP' possiamo applicare il teorema di Pitagora:

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$ (fondamentale)

Si noti che: $\sin^2(\alpha) = (\sin(\alpha))^2$; $\cos^2(\alpha) = (\cos(\alpha))^2$.

Ipparco di Nicea (II sec a.C.) calcoló le corde di archi varianti di mezzo grado in mezzo grado. Diciamo: "seno" = "la semicorda sottesa all'arco doppio". Le prime tavole che calcolano "seni" anziché "corde" sarebbero dovute all'indiano Aryabhatta (476 d.C.).

Vediamo com'é possibile eseguire una simile tabella e come da ció sia possibile dedurne quelle correlazioni pomposamente chiamate calcoli e formule trigonometriche.

Consideriamo un cerchio di raggio = 1 (cerchio trigonometrico), fissato un raggio origine: $\overline{O\emptyset} = 1$, ed un verso di rotazione, (poniamo antiorario); un raggio mobile: $\overline{OP} = 1$ può assumere tutte le posizioni possibili tali che possano, rispetto al raggio origine, rappresen=

possono, rispetto al raggio origine, rappresen=tare tutti gli angoli piani possibili, nessuno eccettuato.

Dividiamo il cerchio in quattro quadranti, consideriamo P sulla circonferenza del I° quadrante e chiamiamo α l'angolo $P\hat{O}O$. e β il suo complementare.

misure angolari. Notavano che <u>se il rapporto dei cateti</u> (o di un cateto e l'ipotenusa) <u>era lo stesso, i due triangoli rettangoli avevano angoli uguali indipendentemente dalla grandezza lineare degli stessi.</u> Era il principio di similitudine ...

Il problema era avvincente e dobbiamo dire che nella sostanza non è mai stato risolto (e non lo è a tutt'oggi). Però i calcoli dovevano pure essere fatti, perciò sulla base di triangoli ret= tangoli noti, furono approntate delle tavole di conti fatti. Per esempio il triangolo ret= tangolo, metà di un equilatero, cioè di angoli 90°, 60°, 30°. ha il cateto minore: (opposto a 30°) metà dell'ipotenusa; il cateto maggiore $\sqrt{3}$ volte il cateto minore. È evidente che un qualsiasi triangolo rettangolo che abbia per

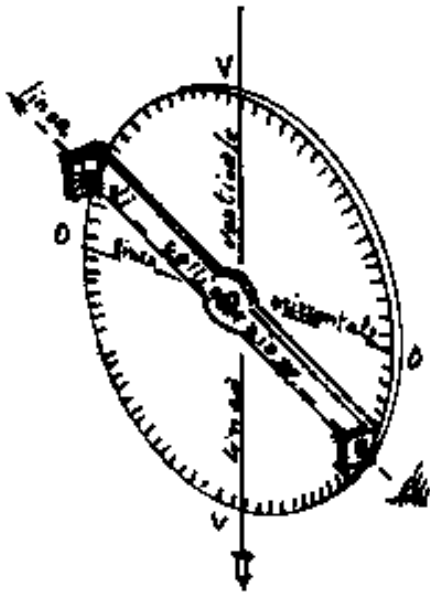
[illegible]

angoli $90°, 60°, 30°$ e di cui si conosca una misura lineare, sulla base dei rapporti suddetti si conoscono anche le altre misure lineari.

Se sappiamo che il cateto minore è 5, l'ipotenusa sarà $2 \cdot 5 = 10$ ed il cateto maggiore sarà $5 \cdot \sqrt{3} = 8,66025$.

La trigonometria

TRIGONOMETRIA è una parola che deriva dal Greco: τρι-γωνία-μέτρον = tre-angolo-misura. In effetti gli antichi erano riusciti a trovare praticamente tutte le correlazioni che oggi conosciamo sulle grandezze lineari e di superficie dei triangoli e quindi di tutte le figure scomponibili in triangoli; la similitudine era la base, e da ciò i teoremi di Pitagora, di Euclide, di Erone, ecc.; ma non riuscivano a trovare correlazioni fra angoli e misure lineari. Pure le misure del terreno per determinare confini, ma soprattuto misure astronomiche, ove con uno strumento chiamato: "Astrolabio", costituito da un grosso cerchio graduato, e da un diametro mobile detto collimatore, col quale

un diametro mobile dello collimatore, col quale puntavano alle stelle ed ai pianeti, misurando angoli, aveva fatto emergere la necessità di correlare angoli e misure lineari. Del resto, la varia configurazione dei triangoli rettangoli, era evidentemente connesso alle

Confronto delle radici di una equazione con due numeri dati α e β. (Metodo di Tartinville - Girod) con $\alpha < \beta$ e $\Delta > 0$ nella

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Supponiamo inoltre che a, b, c siano funzioni di un parametro k.

Quindi si procede esattamente come per il confronto con un solo numero dato α.

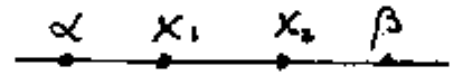
Si verificherà che se $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ hanno segni discordi ed $\alpha < \beta$ avremo che un valore sarà interno alle radici, l'altro esterno, cioè una radice è compresa nell'intervallo: $(\alpha, \div \beta)$. Si hanno due casi: $\alpha \quad x_1 \quad \beta \quad x_2$; $x_1 \quad \alpha \quad x_2 \quad \beta$

il primo: con $a f(\alpha) > 0$; il secondo: con $a f(\alpha) < 0$.

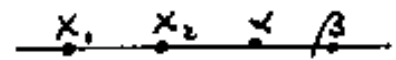
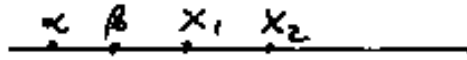
Se invece: $f(\alpha) < 0$ ed $f(\beta) < 0$ ed $a > 0$ avremo che sia α che β sono interni alle radici $x_1 \quad \alpha \quad \beta \quad x_2$

Se $f(\alpha) > 0$ ed $f(\beta) > 0$ ed $a > 0$ avremo

Se $f(\alpha) > 0$ ed $f(\beta) > 0$ ed $a > 0$ avremo che le radici x_1 ed x_2 cadono entrambe nell'intervallo $(\alpha, \div \beta)$

α x_1 x_2 β

Infine confrontando α e β con $(-b/2a)$ possiamo avere:

α β x_1 x_2

x_1 x_2 α β

Resta valido il prospetto fatto per il solo dato α.

3) Se $f(\alpha) = 0$ vuol dire che α coincide con una delle due radici e per sapere quale confronteremo ancora α con $-\frac{b}{2a} = \frac{x_1+x_2}{2}$

Accertato che $\Delta > 0$ cioè si abbiano radici reali, la discussione può sintetizzarsi nel seguente prospetto:

$\Delta > 0$	$f(\alpha) < 0$	$\longrightarrow$	$(x_1 < \alpha < x_2)$
	$f(\alpha) > 0$	$\alpha > -b/2a$	$(x_1 < x_2 < \alpha)$
		$\alpha < -b/2a$	$(\alpha < x_1 < x_2)$
	$f(\alpha) = 0$	$\alpha > -b/2a$	$(x_1 < \alpha = x_2)$
		$\alpha < -b/2a$	$(x_1 = \alpha < x_2)$

Si ha la seguente regola:

" Per confrontare le radici di una equazione di secondo grado con un numero dato α, si sostituisce questo numero alla x dell'equazione, e si ottiene numericamente $f(\alpha)$. Se $f(\alpha)$ è di segno opposto ad "a"; α è intermedio alle radici.

opposto ad "a"; α è intermedio alle radici.

Se $f(\alpha)$ è di segno concorde con "a", ed α è maggiore di $(-b/2a)$. è anche maggiore delle radici, se α è minore di $-b/2a$, α è anche minore delle radici.

Se $f(\alpha) = 0$ allora α coincide con una radice: con x_1, se $\alpha < -b/2a$. Con x_2 se $\alpha > -b/2a$. //

Formule di duplicazione

Se nelle formule di somma di due angoli poniamo $\alpha=\beta$ si ha:

$\text{sen}(2\alpha) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$
$\text{tg}(2\alpha) = \dfrac{2\,\text{tg}(\alpha)}{1-\text{tg}^2(\alpha)}$
$\text{cotg}(2\alpha) = \dfrac{\text{cotg}^2\alpha - 1}{2\,\text{cotg}\,\alpha}$

Formule di bisezione

Dalla formula di duplicazione : $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha)$

sostituendo: $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$, oppure $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

si hanno le due espressioni:

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos(2\alpha) = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$

dalle quali:

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{\ldots}}$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}}$$

$$\text{sen}(\alpha) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}}$$

e sostituendo ad α il valore $\alpha/2$ si ha:

$$\text{sen}\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

Fondamentali di bisezione

Dividendo membro a membro:

$$\frac{sen(\frac{1}{2}\alpha)}{cos(\frac{1}{2}\alpha)} = tg(\frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{1+cos(\alpha)}}$$

ove moltiplicando ambo i termini della frazione sotto radice per $(1-cos\alpha)$ oppure: $(1+cos\alpha)$ otteniamo:

$$tang(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{(1-cos\alpha)^2}{1-cos^2\alpha}} = \boxed{tg(\tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{1-cos\alpha}{sen\,\alpha}}$$

$$tg(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1-cos^2\alpha}{(1+cos\alpha)^2}} = \boxed{tg(\tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{sen\alpha}{1+cos\alpha}}$$

Vediamo cosa succede se esprimiamo le formule di bisezione in radicale doppio:

$$sen(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-sen^2\alpha}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-sen^2\alpha}} =$$

$$sen(\tfrac{1}{2}\alpha) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-sen^2\alpha}}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-sen^2\alpha}}{2}}\right]$$

$$\boxed{sen(\tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+sen\alpha} - \sqrt{1-sen\alpha}\right)}$$

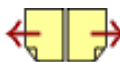
È evidente che con le formule di bisezione possiamo incrementare le nostre <u>tavole trigonometriche</u>

incrementare le nostre tavole trigonometriche (tavole di conti fatti).

$$sen(15°) = sen\left(\frac{1}{2}30°\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} =$$

$$sen\ 15° = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}}\right] = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$cos(15°) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}}$$ perciò:

$$\boxed{sen(15°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \quad ; \quad \boxed{cos(15°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

Formule parametriche

Sono dette <u>formule parametriche</u> le formule che esprimono il valore <u>del seno</u>, <u>del coseno</u>, <u>della tangente</u> di un angolo α, in funzione del parametro $t = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
(<u>In genere funzioni razionali di t</u>)

Essendo: $$tang\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{sen\,\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{sen\,\alpha}$$

$$t^2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \Rightarrow t^2 + \cos\alpha\, t^2 = 1 - \cos\alpha$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \qquad \left(t = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)$$

$$sen\,\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+2t^2+t^4-1+2t^2-t^4}{(1+t^2)^2}}$$

$$\boxed{sen\,\alpha = \frac{2t}{1+t^2}} \qquad \left(t = \frac{1}{sen\,\alpha} - \sqrt{\frac{1}{sen^2\alpha} - 1}\right)$$

$$\left(tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$\boxed{tang(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}} \qquad \left(t = \frac{-1}{tg\,\alpha} + \sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha} + 1}\right)$$

Queste formule sono utili sia per ridurre una espressione alla stessa funzione trigonometrica, sia per certe sostituzioni che permettono di trasforma= re espressioni irrazionali in razionali.

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg}(t)$$

Le formule di prostaferesi

La parola "prostaferesi" significa: sommare e sottrarre. dal greco προσ-θεσις = addizione e ἀφαιρεσις = sottrazione, ricorda come sono ricavate queste formule. Infatti:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = P \\ \alpha - \beta = Q \end{cases}$$ sommando e sottraendo

abbiamo: $\boxed{\alpha = \dfrac{P+Q}{2}}$; $\boxed{\beta = \dfrac{P-Q}{2}}$

Anche le formule di Werner si sono ottenute sommando e sottraendo le formule di somma e sottrazione. Sostituendo P e Q nelle formule di Werner si ha le formule:

Fondamentali dette di prostaferesi

$$\operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(p) - \operatorname{sen}(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

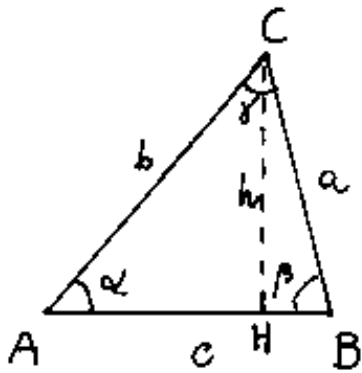
Dalle quali dividendo membro a membro le prime due abbiamo le:

<u>conseguenti di Prostaferesi</u>

$$\frac{\operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q)}{\operatorname{sen}(p) - \operatorname{sen}(q)} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

I teoremi per la risoluzione di triangoli

Ricordiamo che per risolvere un triangolo occorrono tre elementi noti di cui almeno uno misura lineare.

Teorema dei seni

Dato il triangolo ABC, risolviamo "h" come cateto dei triangoli rettangoli AHC e BHC.

$$h = a \,\mathrm{sen}(\beta) \qquad h = b \,\mathrm{sen}(\alpha)$$

uguagliando:

$$a \,\mathrm{sen}(\beta) = b \,\mathrm{sen}(\alpha)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\mathrm{sen}(\beta)} \qquad a : b = \mathrm{sen}(\alpha) : \mathrm{sen}(\beta)$$

"In un triangolo, i lati stanno fra loro come i seni degli angoli opposti" (vedi anche circocentro p.270)

$$a = b \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\beta}$$

Un lato è uguale all'altro nel rapporto dei seni degli angoli opposti.

Area del triangolo

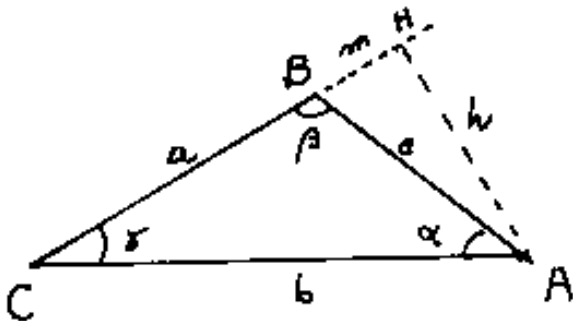
$S = \frac{1}{2} c \cdot h$ sostituendo h:

$S = \frac{1}{2} c \cdot h$ sostituendo h :

$$S = \frac{ac\,sen(\beta)}{2} = \frac{bc\,sen(\alpha)}{2} = \frac{ab\,sen(\gamma)}{2}$$

"L'area di un triangolo è data dal semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso"

Il teorema di Carnot

Dal triangolo in figura abbiamo:

$$h = b\,\text{sen}(\gamma) \quad ; \quad (m+a) = b\cos(\gamma)$$

$$m = b\cos(\gamma) - a$$

$$c^2 = m^2 + h^2$$ sostituendo:

$$c^2 = [b\cos(\gamma) - a]^2 + [b\,\text{sen}(\gamma)]^2$$

$$c^2 = b^2\cos^2(\gamma) - 2ab\cos\gamma + a^2 + b^2\text{sen}^2(\gamma)$$

poiché: $\text{sen}^2(\gamma) + \cos^2(\gamma) = 1$ si ha:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Si noti che il teorema di Carnot è la generalizzazione del teorema di Pitagora.

"Il quadrato di un lato equivale la somma dei quadrati degli altri due diminuita del doppio prodotto di essi nel coseno dell'angolo compreso"

Quando l'angolo compreso $\gamma = 90°$, $\cos(\gamma) = \cos(90°) = 0$ si ha Pitagora: $c^2 = a^2 + b^2$.

si ha Pitagora: $c^2 = a^2 + b^2$.

Se: $\gamma < 90°$ $\cos(\gamma) > 0$. il lato c è minore dell'ipotenusa

Se $\gamma > 90°$ $\cos(\gamma) < 0$ il lato $c > \sqrt{a^2+b^2}$. (ottusangolo)

Il teorema può essere scritto nella forma:

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad ; \quad \cos(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \quad \cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Teorema di Neper

Dal teorema dei seni : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)}$

per il componendo - scomponendo :

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(\beta)}$$

per le conseguenti di prostaferesi :

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}}$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left[\frac{a-b}{a+b}\right]}$$

formula di Neper

Se in un triangolo sono noti due lati e l'angolo compreso : a, b, γ ; La risoluzione può effettuarsi sia col teorema di Carnot , sia con la formula di Neper, però mentre nella formula di Carnot non sono convenientemente applicabili i logaritmi, la formula di Neper si presta al calcolo logaritmico, per cui è stata molto usata prima dell'avvento dei calcolatori elettronici.

ma con l'avvento dei calcolatori elettronici.

Si pensi che le tavole logaritmiche ordinarie erano a 5 cifre decimali, quelle di precisione a 7, e per certi numeri primi di base le tavole arrivavano ad 11 cifre decimali. Oggi $8 \div 10$ cifre decimali sono sui calcolatori tascabili; nei computer si arriva facilmente alle $16 \div 20$ cifre decimali. —

Formule di Briggs

Dalle formule di bisezione: $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

dal teorema di Carnot: $\cos(\alpha)=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

sostituendo:

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

scomponiamo il prodotto notevole:

$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$, ove posto: $\frac{a+b+c}{2}=P$

avremo: $2(P-c)=(a+b-c)$; $2(P-b)=(a-b+c)$

sostituendo e semplificando:

$$sen\left(\frac{1}{2}\alpha\right)=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{(bc)}}$$

ed anche:

$$sen\left(\frac{1}{2}\beta\right)=\sqrt{\frac{(P-a)(P-c)}{(ac)}}$$

$$sen\left(\frac{1}{2}\gamma\right)=\sqrt{\frac{(P-a)(P-b)}{(ab)}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\gamma\right)=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(ab)}}$$

analogamente:

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(bc)}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\beta\right)=\sqrt{\frac{p(p-b)}{(ac)}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\beta\right)=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\gamma\right)=\sqrt{\frac{p(p-c)}{(ab)}}$$

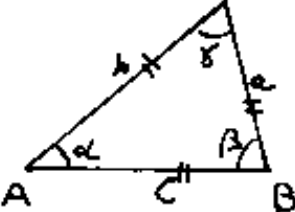
$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\gamma\right)=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Risoluzione di triangoli
tavola riepilogativa

Figura	noti	formule risolutive	osservazioni
C, b, a, γ, α, β, A, c, B	c, α, β. — un lato e due angoli	$\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$ $a = c\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}$; $b = c\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}$	teorema dei seni
C, b, a, γ, α, β, A, c, B	a, b, γ. — due lati e l'angolo compreso	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ - - - - - $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$ $tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\frac{a-b}{a+b}$ $\alpha = \frac{(\alpha-\beta)}{2} + \frac{(\alpha+\beta)}{2}$; $\beta = \frac{(\alpha+\beta)}{2} - \frac{(\alpha-\beta)}{2}$ $c = a\,\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$	I° metodo (Carnot) - - - - - II° metodo (Neper)
C_1, b_1, C_2, b_2, a, γ_1, γ_2, α, β_1, β_2, A, c, B	a, c, α — due lati e l'angolo non compreso	$\left.\begin{matrix}\operatorname{sen}(\gamma)\\ \operatorname{sen}(180°-\gamma)\end{matrix}\right\rangle = \frac{c}{a}\operatorname{sen}(\alpha)$ $\beta = 180° - (\alpha+\gamma)$ $b = a\,\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$	si hanno due risoluzioni: γ_1 (acutangolo) γ_2 (ottusangolo)
	a, b, c	$\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$	I° metodo: formule di

	a, b, c	... $\sqrt{\;\;\;\; \over bc}$	formule di
	i tre Lati	$sen(\frac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ $sen(\frac{1}{2}\gamma) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$	Briggs si verificano con: $(\alpha+\beta+\gamma) = 180°$
A, B, C, α, β, γ, a, b, c		$cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $cos(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$	II° metodo: Carnot stessa verifica $(\alpha+\beta+\gamma = 180°)$

Funzioni trigonometriche inverse

Data una funzione: $y = f(x)$, dicesi funzione inversa, un'altra funzione tale che: $x = \varphi(y)$.
Molti testi usano scrivere: $x = f^{-1}(y)$, però questa notazione è ambigua nel senso che: $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.
Abbiamo già visto che: $y = \ln|x|$ l'inversa è $x = \exp(y)$
Per le funzioni trigonometriche:

$y = sen(x)$ l'inversa è: $x = arcsen(y)$ talvolta indicata: (sen^{-1})
$y = \cos(x)$ " $x = \arccos(y)$ " " : $(\cos^{-1})$
$y = tg(x)$ " $x = arctg(y)$ " " Tan^{-1}
$y = ctg(x)$ " $x = arccotg(y)$ " " cot^{-1}

Se consideriamo che $sen(30°) = 0,5$ avremo che l'arco (di raggio 1) cioè l'angolo in radianti, il cui seno è 0,5, è: $\pi/6$ rad $= 30°$. si scrive: $arcsen(0,5) = 30°$
analogamente: $\arccos(0,5) = 60°$ (l'arco il cui coseno è 0,5, è: $\pi/3 = 60°$); $arctg(1) = 45°$.

Queste funzioni consentono, essendo note le

Queste funzioni consentono, essendo note le funzioni angolari, di risalire all'angolo.

Ma anche queste funzioni ammettono delle correlazioni, solo apparentemente difficili.

Provate a chiedere ad un amico: "Chi è il padre della figlia di Sorio" e, se non conosce il gioco, nove casi su dieci dirà: "non lo so!" e rimangono quando dite: "è Sorio"!

Giochetti sulle funzioni inverse trigonometriche

$$\operatorname{sen}\arcsin(m) = m$$

$$\cos\arcsin(m) = \sqrt{1-m^2}$$

$$\operatorname{tang}\arcsin(m) = m/\sqrt{1-m^2}$$

$$\cos\arccos(n) = n$$

$$\operatorname{sen}\arccos(n) = \sqrt{1-n^2}$$

$$\operatorname{tang}\arccos(n) = \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}-1}$$

$$\operatorname{tang}\operatorname{arctg}(p) = p$$

$$\operatorname{sen}\operatorname{arctg}(p) = p/\sqrt{1+p^2}$$

$$\cos\operatorname{arctg}(p) = 1/\sqrt{1+p^2}$$

$$\operatorname{sen}\arccos\left(\sqrt{1-m^2}\right) = m$$

$$\operatorname{sen}\operatorname{arctang}\left(m/\sqrt{1-m^2}\right) = m$$

$$\cos\arcsin\left(\sqrt{1-n^2}\right) = n$$

$$\cos\operatorname{arctang}\left(\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}\right) = n$$

$$\cos \operatorname{arctang}\left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}\right) = m$$

$$\operatorname{tang} \operatorname{arcsen}\left(p/\sqrt{1+p^2}\right) = p$$

$$\operatorname{tang} \operatorname{arccos}\left(1/\sqrt{1+p^2}\right) = p$$

Per risolvere per es. $\operatorname{tg} \operatorname{arccos}\left(1/\sqrt{1+p^2}\right)$ occorre dire: "c'è un angolo α il cui coseno è:" $\left(\cos\alpha = 1/\sqrt{1+p^2}\right)$, trasformiamo $\cos\alpha$ in

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-1/(1+p^2)}}{1/\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{\frac{1+p^2-1}{(1+p^2)}} \cdot \sqrt{(1+p^2)} = p$$

Nel prospetto precedente era nota una funzione dell'angolo α, cioè: $\operatorname{sen}\alpha = m$; $\cos\alpha = n$; $\operatorname{tg}\alpha = p$ e veniva richiesta un'altra funzione. Il problema consisteva quindi nell'esprimere una funzione con l'altra.

Vediamo ora un'altro tipo di problemi:

$\operatorname{arcsen}(\cos\alpha)$ quindi noi cerchiamo un angolo β tale che il suo seno uguagli il $\cos\alpha$.

$$\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha = \operatorname{sen}(90-\alpha)$$

$$\beta = 90-\alpha$$

$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\alpha) = \alpha$ $\qquad$ $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$

$\arccos(\operatorname{sen}\alpha) = (90-\alpha)$ $\qquad$ $\operatorname{arcsen}(\cos\alpha) = (90-\alpha)$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{sen}\alpha)$ questo problema è possibile perché $\operatorname{sen}\alpha$ varia da $+1$ a -1 perciò: $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{sen}\alpha$ il nostro β varierà da $+45°$ a $-45°$. possiamo porre:

$$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta}} = \operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}^2\alpha(1-\operatorname{sen}^2\beta)$$

$\operatorname{sen}^2\beta(1+\operatorname{sen}^2\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{[illegible]}$ $\qquad$ oppure:

$\operatorname{sen}^2\beta\,(1+\operatorname{sen}^2\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha$ $\quad \operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\alpha}}$ oppure:

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha / \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}\beta$. Meglio: $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{sen}\alpha$

Il problema inverso: $\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg}\alpha)$ non è sempre possibile perchè la $\operatorname{tg}\alpha$ varia da $\pm\infty$ quindi: $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{tang}\alpha$ con β incognita è possibile solo se α. $-45° \leq \alpha \leq 45°$.

La simmetria

Un'altro concetto fondamentale è il concetto di simmetria. La parola deriva dal Greco: συμμετρία notate il prefisso: συν= (con) (opposto di: ἀντί), diverso da (iso). simpatia - antipatia; sincronismo - isocronismo; isometria - simmetria. Dobbiamo considerare una specie di legame speculare. In geometria avremo un centro di simmetria, uno o più assi di simmetria, uno o più piani di simmetria.

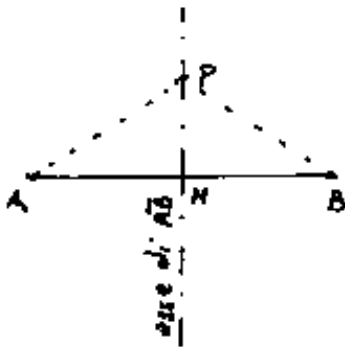
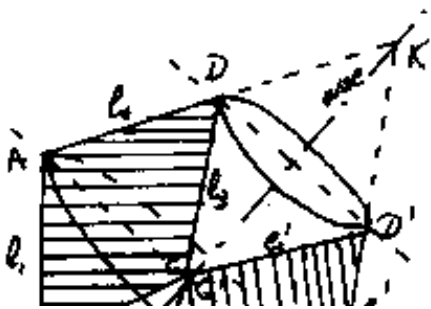
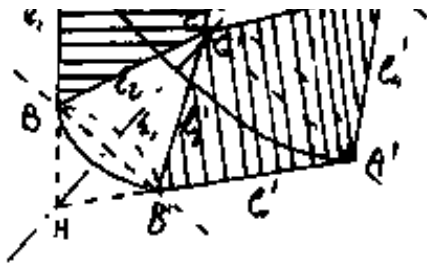
Due punti si dicono simmetrici, rispetto ad un centro di simmetria, quando sono gli estremi di un segmento di cui il punto medio è il centro di simmetria. Come si vede non basta dire: "quando sono equidistanti da tale centro", ma, occorre aggiungere: "ubicati da banda opposta".

Due punti sono simmetrici, rispetto ad un asse di simmetria, quando si trovano, da banda opposta,

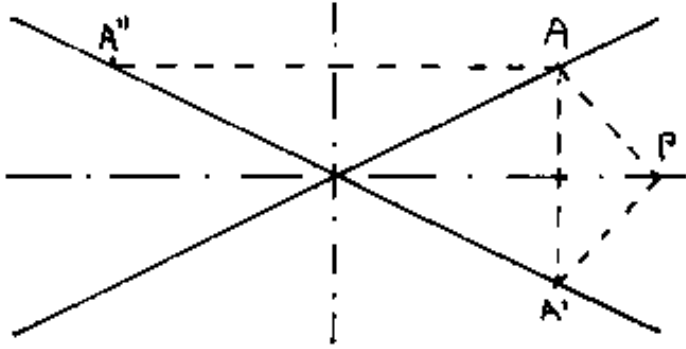
sulla stessa perpendicolare a tale asse ed equidistan
ti dall'asse stesso.

Due figure piane, sono simmetriche rispetto ad un asse, quando, complanari con l'asse e fra loro, ribaltando il piano di 180° intorno all'asse, ogni figura sovrappone la precedente dell'altra.

Indice Enciclopedico Indice Pag. 262

L'asse di un segmento (retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio) è anche asse di simmetria per il segmento stesso; infatti ogni punto P dell'asse è equidistante dagli estremi del segmento $\overline{AB}$ se M è il punto medio di $\overline{AB}$, $\overline{AM} = \overline{MB}$ ed anche $\overline{PA} = \overline{PB}$. L'asse di un segmento è anche il luogo geometrico di tutti i vertici dei triangoli isosceli aventi per base il segmento stesso.

In particolare, per disegnare la figura simmetrica rispetto ad un asse, di una figura data, basta, punto per punto tracciare la perpendicolare all'asse e disegnare l'equidistante punto simmetrico da banda opposta all'asse. Si noti che i segmenti simmetrici, prolungati si incontrano sull'asse. (Ciò controlla la precisione del disegno).

cisione del disegno).

Abbiamo disegnato le traettorie circolari dei punti ABCD della figura, (nella proiezione ellissi), per evidenziare la simmetria dei "solidi di rotazione"; in figura il quadrilatero ABCD ruotante intorno all'asse HK genera due tronchi di cono "cavi" cioè detratti due coni interni.

Le due bisettrici degli angoli formati da due rette che si incontrano, sono perpendicolari fra loro, e sono il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle due rette; cioè sono: assi di simmetria delle due rette.

Infatti ribaltando il piano della figura, intorno ad una bisettrice, ognuna delle due rette assume la posizione dell'altra.

Ogni diametro di un cerchio è asse di simmetria per il cerchio.

Ogni piano diametrale di una sfera è piano di simmetria per la sfera.

Le diagonali di un rettangolo non sono assi di simmetria per il rettangolo. (Dicesi antisimmetria la simmetria di segno opposto. Per esempio le due frecce: sono antisimmetriche. Noi considereremo antisimmetrici i due triangoli rettangoli, in cui una diago=

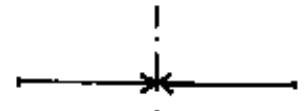
simmetrici i due triangoli rettangoli, in cui una diago=
nale separa le due parti del rettangolo.)

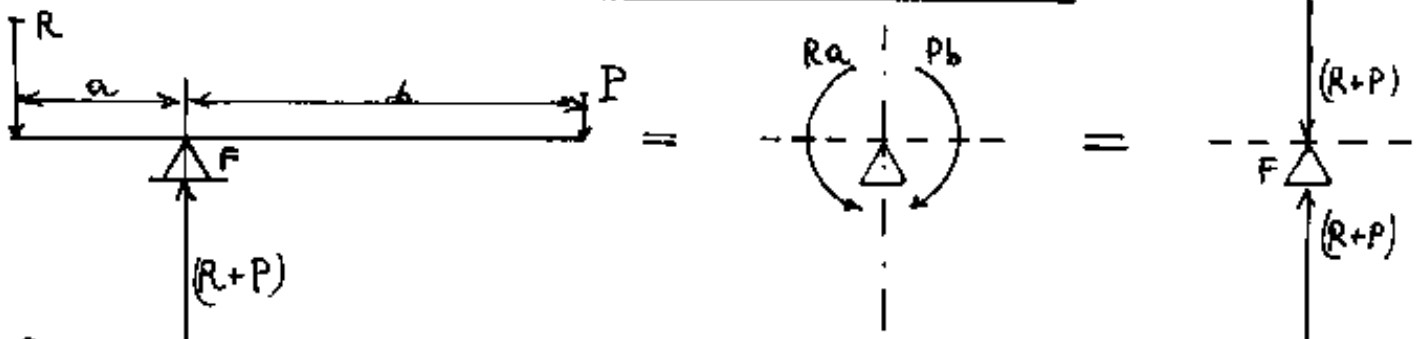
Notiamo che si trovano tanti più assi (o piani) di simmetria
quanto più la figura è regolare. (Un triangolo scaleno non ha
assi di simmetria). Spesso individuare una simmetria permette
di ridurre i n= delle incognite del problema.

La simmetria non è solo geometrica, vi è anche

una simmetria algebrica, per esempio nella: $x^2+y^2=R^2$ la x e la y possono scambiarsi senza che muti la formula. (La x e la y sono simmetriche in quella formula). Analogamente: $x \cdot y = K$. Cosa comporta ciò? ($x = K/y$; $y = K/x$). Per esempio, se $K=12$ ed attribuiamo alla x il valore 2, la $y=6$; inversamente se poniamo: $y=2$ allora $x=6$.

Oltre che geometrica ed algebrica, la simmetria è fondamentale nelle varie branche della scienza.

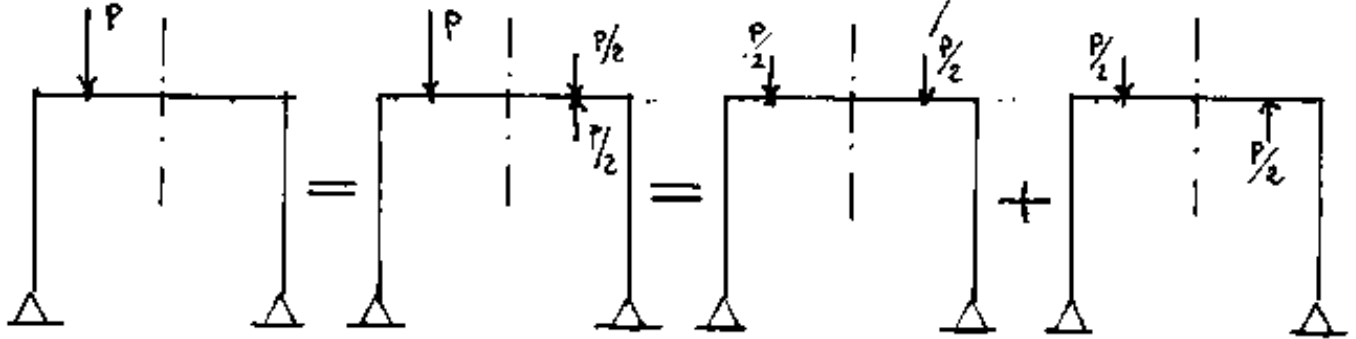
In fisica, legato alla simmetria è il problema dell'equilibrio. (Due azioni uguali ed opposte)

Se in una leva di fulcro F si ha una azione P ed una reazione R, in equilibrio, dov'è la simmetria? Evidentemente nelle azioni di rotazione attorno al

R a b P F (R+P) = Ra Pb = (R+P) F (R+P)

fulcro F, ove i momenti: $Ra = Pb$ sono uguali e contrari.

(Alla parola "momento" associare sempre il pensiero "ruotazione").

Si noti che proprio la simmetria dei momenti, che consente l'equilibrio alla ruotazione, consente anche che la risultante dei carichi sia sulla stessa retta dell'equilibrante che li sostiene: (P+R)=(P+R) uguali ed opposte perciò in equilibrio, perciò simmetriche.

Due forze "antisimmetriche" generano un momento.
Perciò una forza generica su una struttura simmetrica, spesso si può scomporre in due sistemi: uno simmetrico ed uno antisimmetrico la cui somma equivale al carico dato.

P = P, P/2, P/2 = P/2, P/2 + P/2, P/2

Nello spazio tridimensionale, tutti i possibili assi di un segmento $\overline{AB}$ formano il piano di simmetria passante per il punto medio M del segmento e perpendicolare al segmento stesso: luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da A e da B.
Se consideriamo materializzato il segmento $\overline{AB}$, cioè se lo consideriamo costituito da elementi pesanti infinitesimi, con peso uniformemente distribuito lungo $\overline{AB}$, in modo che frazioni di uguale lunghezza abbiano lo stesso peso, il segmento sta in equilibrio se viene sostenuto nel suo punto di mezzo.
Cioè all'insieme dei pesini diretti verso il basso, corrisponde una

che un insieme dei pesini diretti verso il basso, corrisponde una unico azione di sostegno pari al peso dell'intero segmento, diretta verso l'alto, applicata in un punto "G" detto "baricentro" =(centro di pressione) che, nel caso del segmento di peso uniforme=mente distribuito, G coincide col punto medio M.

Comunemente diciamo: "aver peso", di cose o persone, per esprimere che la cosa o la persona "ha importanza".

In questi casi la parola: "peso" non ha alcun rife= rimento all'attrazione gravitazionale.

Il "peso" di un segmento o di una linea è la sua lun ghezza, il peso di una superficie è la sua area; di un solido geometrico, il suo volume; di un corpo materiale la sua massa.

Premesso ciò possiamo considerare il baricentro di una linea, o di una superficie definita, o di un so= lido geometrico, o di un corpo materiale, o più in generale di un qualsiasi fenomeno ove attribuia= mo importanza a certe grandezze. Se esistono assi di simmetria il baricentro è su di essi.

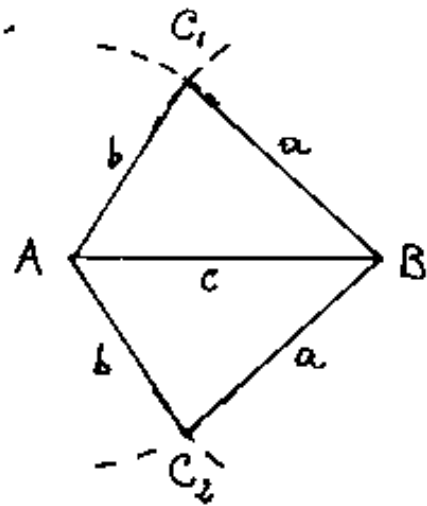
Nell'esempio della leva, F≡G, è anche il baricentro dei "Pesi": P ed R.

Ma se le grandezze di P e di R rappresentano i "consumi" di due centri abitati, allora F≡G è la più conveniente ubi cazione del "centro distribuzione" per quei "consumi"

cazione del centro distribuzione per quei "consumi"

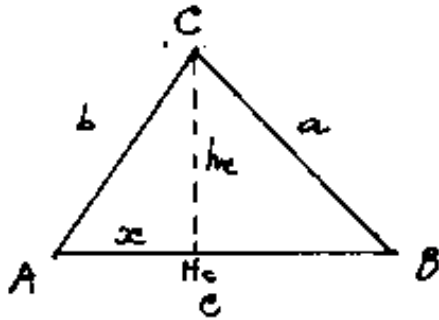
Abbiamo usato la parola "Peso" perché di uso comune, ma il peso è l'azione di una massa inerte, in campo gravitazionale, "massa" che in fisica è la quantità di materia, per noi massa sarà l'entità delle grandezze in calcolo, cioè lunghezze, aree, volumi, massa di gente, ecc. Approfondiremo in geometria delle masse.

Il triangolo

Ripartiamo da zero e consideriamo tre segmenti di lunghezze a, b, c, che per ora consideriamo diversi. Tracciato in una certa scala un segmento, per esempio $c = \overline{AB}$, col compasso facciamo centro in A con raggio $= b$, e centro in B con raggio $= a$; si ottengono due punti di intersezione: C_1 e C_2, cioè si hanno due triangoli: ABC_1 ed ABC_2, congruenti, aventi gli stessi angoli e gli stessi lati, ma in uno disposti in senso orario, nell'altro antiorario, potremmo dirli: uno "destro", l'altro "sinistro". Sono simmetrici rispetto ad $\overline{AB}$, per cui sono sovrapponibili per ruotazione intorno ad $\overline{AB}$. Quindi dato un foglio (piano) orientato, non basta dare la lunghezza di tre segmenti e l'orientamento di un lato (AB), per disegnare quel triangolo,

mento di un lato (AB), per disegnare quel triangolo, infatti per ruotazione e slittamento nel piano del disegno i due triangoli non sono sovrapponibili.

Notiamo che se: $(a+b) \leq c$ e se: $(a-b) \geq c$ non è possibile disegnare alcun triangolo; perciò:

"In un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due, e maggiore della loro differenza"

Supponiamo dato il triangolo ABC, di lati a, b, c, proponiamoci, senza ricorrere alla trigonometria, di calcolare l'area in funzione di a, b, c, e del semiperimetro $p = (a+b+c)/2$.

Sia: $\overline{AH_c} = x$; avremo: $h_c^2 = (b^2 - x^2) = a^2 - (c-x)^2$;

$$b^2 - x^2 = a^2 - x^2 - c^2 + 2xc \qquad x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \qquad = (b \cos\alpha)$$

$$h_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2 = \left[b - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\right]\cdot\left[b + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\right] =$$

$$h_c^2 = \left[\frac{a^2-(b-c)^2}{2c}\right]\cdot\left[\frac{(b+c)^2-a^2}{2c}\right] = \left[\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2c}\right]\left[\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2c}\right]$$

$$h_c^2 = \left[\frac{2(p-b)\cdot 2(p-c)}{2c}\right]\cdot\left[\frac{2(p-a)\cdot 2p}{2c}\right] = \frac{4\,p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}$$

$$\boxed{h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

ed essendo: $S = \dfrac{c\,h_c}{2}$

avremo: l'area: $$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$ formula di Erone

$$\boxed{h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

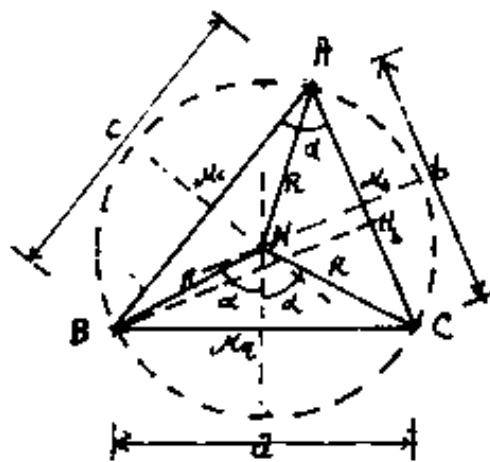
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Si noti, nello sviluppo algebrico, il costante utilizzo dei prodotti notevoli.

I punti notevoli di un triangolo

circocentro

Si chiama circocentro il centro del cerchio circoscritto, punto equidistante dai vertici del triangolo, si indica con la lettera N, ed è determinato dal punto comune agli assi dei lati del triangolo, ove ogni asse è il luogo dei punti equidistanti da due vertici.

Dato il triangolo ABC di lati a,b,c, tracciamo gli assi dei lati, cioè le normali per i punti mediani M_a, M_b, M_c. Se gli assi per M_a ed M_b si incontrano in N avremo che i triangoli rettangoli $BM_aN = CM_aN$ sono uguali, perciò: $\overline{NB} = \overline{NC}$; ma anche i triangoli rettangoli $CM_bN = AM_bN$ e quindi: $\overline{NB} = \overline{NC} = \overline{NA} = R$, che è il raggio del cerchio circoscritto.

Se da B tracciamo l'altezza $\overline{BH_b}$ i triangoli rettangoli NM_aC e BH_bA sono simili perché l'angolo $\alpha = B\hat{A}H_b$ = angolo alla circonferenza = $M_a\hat{N}C$ = metà angolo al centro.

Perciò: $\overline{NC} : c = \frac{a}{2} : \overline{BH_L}$; ma: $\overline{NC} = R$; $\overline{BH_L} = 2S/L$ (ove: S = area)

Perciò: $\overline{NC} : c = a/2 : \overline{BH_b}$; ma: $\overline{NC} = R$; $\overline{BH_b} = 2S/b$ (ove: S = area)

sostituendo: $R : c = \frac{a}{2} : \frac{2S}{b}$; $R = c\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2S}$; $\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$

<u>Il raggio del cerchio circoscritto è un quarto del rapporto fra il prodotto dei lati e l'area del triangolo.</u>

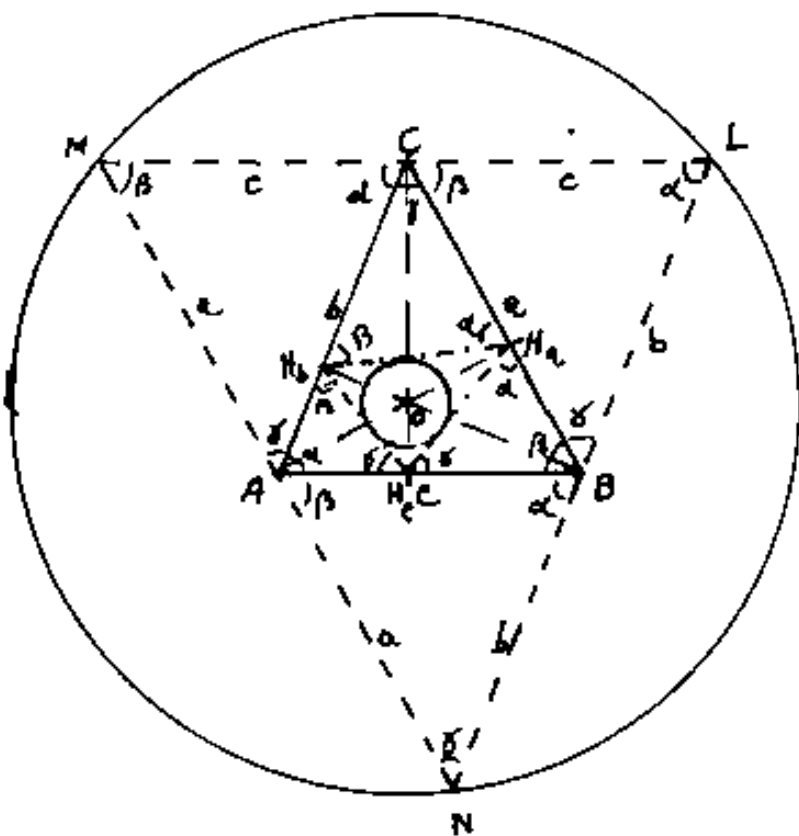
Si noti che: $R = \frac{a}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ cioè per il teorema dei seni:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R}$$

<u>Il rapporto costante fra un lato ed il seno dell'angolo opposto è il diametro del cerchio circoscritto</u>

Ortocentro

Dicesi: "ortocentro", il punto comune alle altezze relative ai lati di un triangolo. Si indica con la lettera "O".

L'ortocentro ha varie proprietà interessanti.

Dato il triangolo ABC, dai vertici si tracci le parallele ai lati opposti, otterremo il triangolo LMN, avente gli stessi angoli del triangolo dato, e costituito da quattro triangoli congruenti di cui uno è il triangolo dato ABC. Perciò considerati i parallelogrammi ABCM; ABLC; ACBN; rileviamo che: $\overline{ML}=2c$, $\overline{MN}=2a$; $\overline{NL}=2b$; cioè i vertici A, B, C sono mediani ai lati del triangolo LMN, cioè le altezze uscenti dai vertici A, B, C corrispondono agli assi dei lati del triangolo LMN.

agli assi dei lati del triangolo LMN.

<u>L'ortocentro del triangolo ABC corrisponde al circocentro del triangolo LMN.</u>

Calcoliamo ora i segmenti in cui le altezze dividono i lati del triangolo: ABC..

$$\begin{cases} \overline{AH_c} = b\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c} ; \quad \overline{H_cB} = a\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c} \\ \overline{AH_b} = c\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b} ; \quad \overline{H_bC} = c\cos\alpha = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b} \\ \overline{BH_a} = c\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a} ; \quad \overline{H_aC} = b\cos\beta = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a} \end{cases}$$

Uniamo i piedi delle altezze ed otteniamo i triangoli: $H_a H_b H_c$; ed $H_a C H_b$; $H_a B H_c$; $H_b A H_c$. Notiamo che i rapporti: $\frac{\overline{H_b C}}{\overline{H_a C}} = \frac{a}{b}$; ecc. cioè i lati del triangolo $H_a C H_b$ stanno tra loro come i lati del triangolo dato e comprendono lo stesso angolo γ; perciò il triangolo $H_a C H_b$ è simile al triangolo dato; cioè: $C\widehat{H_a H_b} = \alpha$ e $C\widehat{H_b H_a} = \beta$.

Lo stesso discorso vale per i triangoli: $H_a B H_c$ e $H_b A H_c$, però con diverso rapporto di similitudine, per cui in genere il triangolo $H_a H_b H_c$ non è simile al triangolo dato, però (vedi figura) i suoi angoli sono: $H_b \widehat{H_a} H_c = (180° - 2\alpha)$; $H_a \widehat{H_c} H_b = (180° - 2\gamma)$; $H_a \widehat{H_b} H_c = (180° - 2\beta)$, e poiché le altezze del triangolo ABC sono le bisettrici del triangolo $H_a H_b H_c$ si ha: <u>L'ortocentro del triangolo ABC corrisponde all'incentro del triangolo $H_a H_b H_c$ ottenuto collegando i piedi delle altezze di ABC. ($H_a H_b H_c$ = triangolo ortico)</u>

Calcoliamo ora le distanze dell'ortocentro dai vertici del triangolo. Per similitudine dei triangoli rettangoli CH_cB e CH_aO, si ha: $\overline{OC} : \overline{CH_a} = a : h_c$ da cui: $\overline{OC} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2h_c} =$

$\overline{OC} = \frac{ab\cos\gamma}{} = \frac{2S\cos\gamma}{} =$ $\boxed{\overline{OC} = c/\operatorname{tg}\gamma}$ analogamente si ha

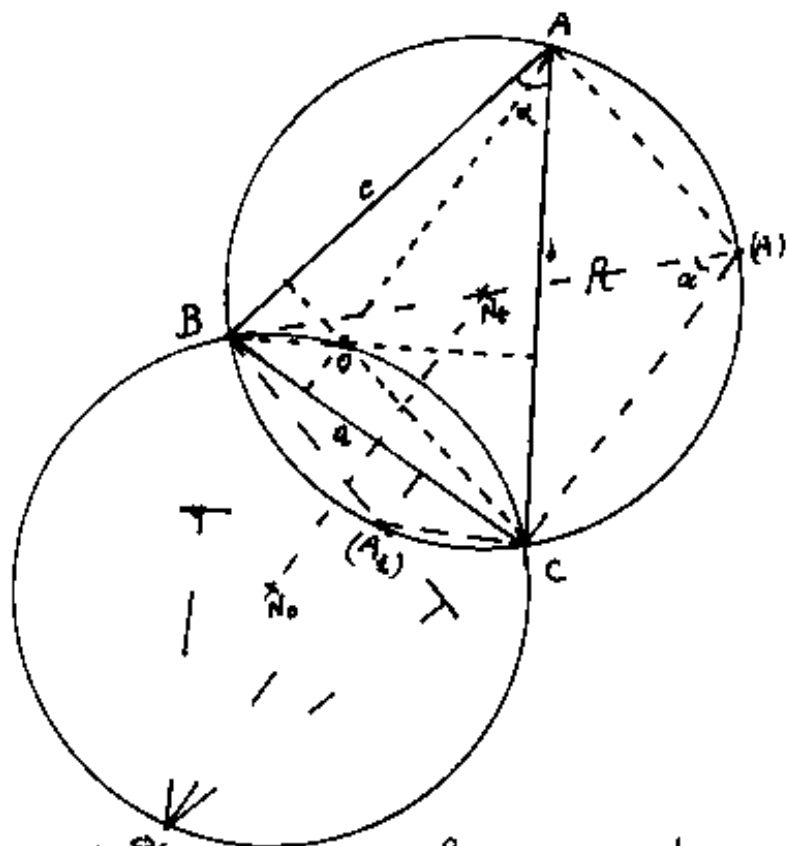
$$\overline{OC} = \frac{ab\cos\gamma}{h_c} = \frac{2S\cos\gamma}{h_c \operatorname{sen}\gamma} = \boxed{\overline{OC} = c/\operatorname{tg}\gamma}$$ analogamente si ha

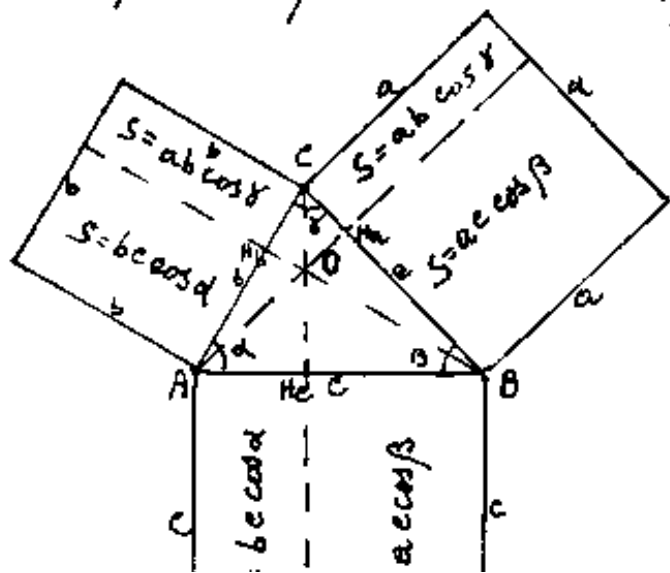
$$\boxed{\overline{OA} = a/\operatorname{tg}\alpha} \; ; \; \boxed{\overline{OB} = b/\operatorname{tg}\beta}$$ ed essendo: $\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = 2R$

$$\boxed{\overline{OA} = 2R\cos\alpha} \; ; \; \boxed{\overline{OB} = 2R\cos\beta} \; ; \; \boxed{\overline{OC} = 2R\cos\gamma}$$

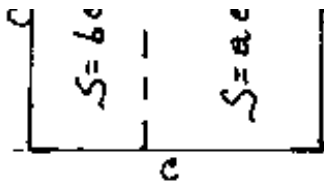
<u>le distanze dell'ortocentro dai vertici del triangolo sono proporzionali ai coseni degli angoli nei vertici</u>

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\overline{OA}}{\cos\alpha} = \frac{\overline{OB}}{\cos\beta} = \frac{\overline{OC}}{\cos\gamma} = 2R}$$

le distanze stanno fra loro come i coseni nei vertici.

Se consideriamo il triangolo ABC inscritto in una circonferenza e tenendo fissa la base $\overline{BC}$ spostiamo il vertice A in (A), si ha che $\overline{OA} = 2R\cos\alpha = \overline{(A)C}$, per cui mentre (A) percorre la circonferenza "O" percorre un'altra circonferenza; cioè

Date due circonferenze di uguale raggio e corda comune $\overline{BC}$ una è il luogo geometrico degli ortocentri dei triangoli di base $\overline{BC}$, l'altro il luogo geometrico dei vertici (A) e vale per l'intera circonferenza perchè $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180°-\alpha)$.

Un'altra proprietà delle altezze è che i loro prolungamenti dividono i quadrati dei lati in modo tale che le parti adiacenti lo stesso vertice sono equivalenti.

$S = bc$ $S = ac$

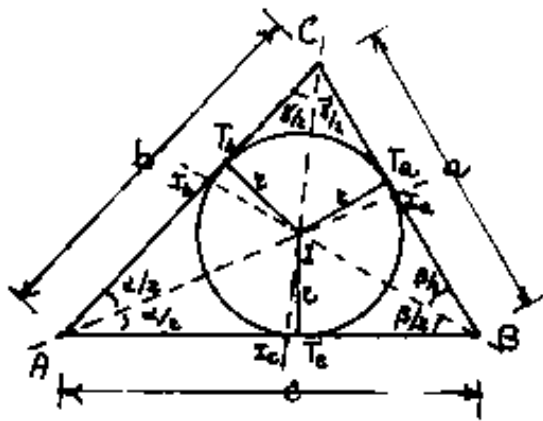
c

equivalenti.

La dimostrazione è immediata infatti nel vertice A concorrono le parti: $b\,\overline{AH_b} = c\,\overline{AH_c}$ cioè $b(c\cos\alpha) = c(b\cos\alpha)$.

Tuttociò è una conferma immediata del teorema di Carnot:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Incentro

Dicesi: "incentro" il centro del cerchio inscritto in un triangolo, si indica con la lettera I ed è il punto comune delle bisettrici interne al triangolo.

Poiché ogni punto di una bisettrice è equidistante dai lati che formano l'angolo di cui è bisettrice, l'incentro è equidistante dai lati, per cui, $\overline{IT_a} = \overline{IT_b} = \overline{IT_c} = r_i$ = raggio del cerchio inscritto nel triangolo.

Consideriamo il triangolo ABC scomposto nei tre triangoli: AIB; AIC; BIC. Le cui aree saranno:

$S_{AIB} = \frac{c r_i}{2}$; $S_{AIC} = \frac{b r_i}{2}$; $S_{BIC} = \frac{a r_i}{2}$ sommando tali aree otteniamo l'area S del triangolo: ABC cioè,

$$r_i \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = r_i p = S$$

. da cui:

$$r_i = \frac{S}{}$$

$$r_i = \frac{S}{p}$$

$$r_i = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

"Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo è dato dal rapporto fra l'area e il semiperimetro del triangolo stesso."

Si noti che: $\overline{AT_b} = \overline{AT_c} = (p-a)$

$$\overline{BT_c} = \overline{BT_a} = (p-b)$$

$$\overline{CT_a} = \overline{CT_b} = (p-c)$$

Calcoliamo le distanze dell'incentro dai vertici:

$$\overline{AI}^2 = \left(\overline{AT_c}^2 + r_i^2\right); \quad \overline{BI}^2 = \left(\overline{BT_a}^2 + r_i^2\right); \quad \overline{CI}^2 = \overline{CT_a}^2 + r_i^2$$

sostituendo:

$$\overline{AI}^2 = (p-a)^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \frac{(p-a)\left[p^2 - pa + p^2 - pb - pc + bc\right]}{p}$$

$$\overline{AI}^2 = \frac{(p-a)(2p^2 - p(a+b+c) + bc)}{p} = \frac{(p-a)\,bc}{p} \quad \text{per cui:}$$

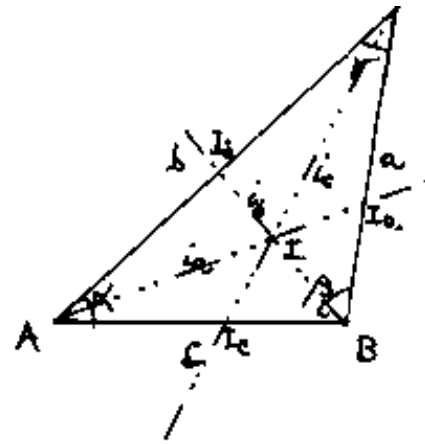
$$\boxed{\overline{AI} = \sqrt{\frac{(p-a)\,bc}{p}}} \quad \boxed{\overline{BI} = \sqrt{\frac{(p-b)\,ac}{p}}} \quad \boxed{\overline{CI} = \sqrt{\frac{(p-c)\,ab}{p}}}$$

Indichiamo rispettivamente con I_a, I_b, I_c i punti in cui le bisettrici incontrano i lati a, b, c. (diversi in generale da: T_a, T_b, T_c). Abbiamo già dimostrato che <u>la bisettrice divide il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti: (Teorema della bisettrice)</u> per cui:

$\overline{AI_c} = b\,\frac{c}{[illegible]}$; $\overline{BI_c} = a\,\frac{c}{[illegible]}$ (lato c)

$$\overline{AI_c} = b\,\frac{c}{(a+b)}\ ; \quad \overline{BI_c} = a\,\frac{c}{(a+b)} \quad (\text{lato } c)$$

$$\overline{BI_a} = c\,\frac{a}{(c+b)}\ ; \quad \overline{CI_a} = b\,\frac{a}{(c+b)} \quad (\text{lato } a)$$

$$\overline{AI_b} = c\,\frac{b}{(a+c)}\ ; \quad \overline{CI_b} = a\,\frac{b}{(a+c)} \quad (\text{lato } b)$$

Lunghezza delle bisettrici

Siano:

$i_a = \overline{AI_a}$; $i_b = \overline{BI_b}$; $i_c = \overline{CI_c}$ rispettivamente

le bisettrici degli angoli α, β, γ;

Per il teorema di Carnot si ha: (vedi figura)

$$i_c^2 = b^2 + \overline{AI_c}^2 - 2b \cdot \overline{AI_c} \cos\alpha$$

sostituendo ($\cos\alpha$) ed $\overline{AI_c}$;

$$i_c^2 = b^2 + b^2 \frac{c^2}{(a+b)^2} - 2b \frac{bc}{(a+b)} \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right)$$

semplificando e sviluppando

$$i_c^2 = \frac{a^2b^2 + b^4 + 2ab^3 + b^2c^2 - ab^3 - b^4 - abc^2 - b^2c^2 + a^3b + a^2b^2}{(a+b)^2}$$

$$i_c^2 = \frac{2a^2b^2 + ab^3 + a^3b - abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab(2ab + b^2 + a^2 - c^2)}{(a+b)^2}$$

$$i_c^2 = \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2} = \frac{ab(2p)(2p-2c)}{(2p-c)^2}$$ per cui:

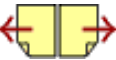
$$i_a = \frac{1}{b+c} \sqrt{[(b+c)^2 - a^2]\, bc}$$

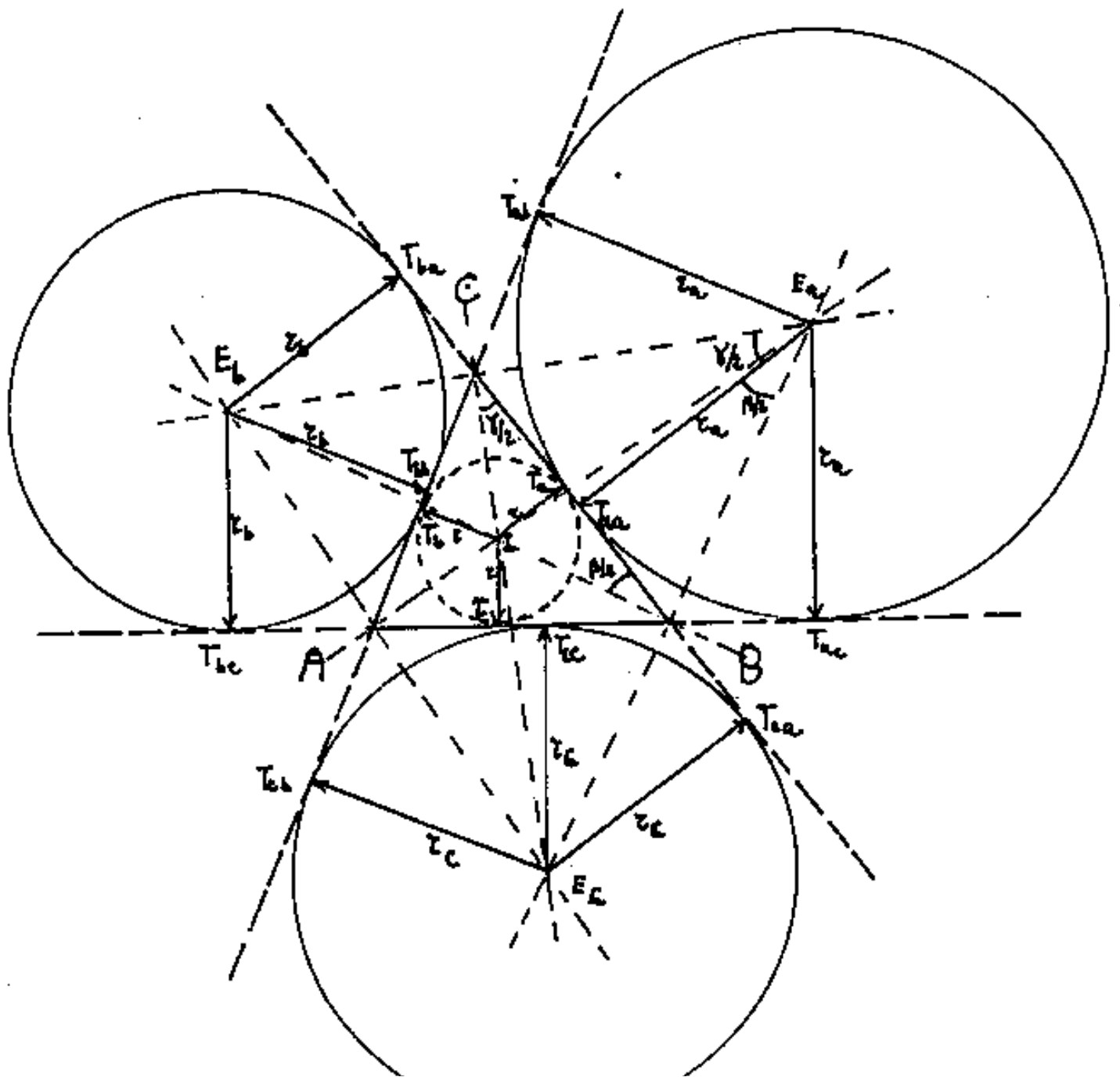
$$i_a = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right] bc}$$

$$i_b = \frac{1}{a+c}\sqrt{\left[(a+c)^2 - b^2\right]ac}$$

$$i_b = \sqrt{\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right]ac}$$

$$i_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{\left[(a+b)^2 - c^2\right]ab}$$

$$i_c = \sqrt{\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]ab}$$

Exincentri

Dicesi exincentri i punti comuni alle bisettrici esterne al triangolo e sono centri dei cerchi exinscritti.

Siano quindi E_a, E_b, E_c; i centri dei cerchi eximscritti, rispettivamente giacenti sul prolungamento di i_a, i_b, i_c. cioè negli spazi angolari α, β, γ. Indichiamo con T_a, T_b, T_c i punti di tangenza del cerchio inscritto, mentre indichiamo

con T_{aa}, T_{ab}, T_{ac}; i punti di tangenza del cerchio exinscritto di centro E_a. Analogamente T_{ba}, T_{bb}, T_{bc}; se di centro E_b; ed T_{ca}, T_{cb}, T_{cc} se di centro E_c; infine con r_α, r_β, r_γ i rispettivi raggi dei archi exinscritti.

Le bisettrici esterne sono perpendicolari alle bisettrici interne, (nei vertici), quindi i lati del triangolo dividono l'angolo retto in due angoli complementari, da ciò i triangoli rettangoli simili:

$$CT_aI \equiv E_aT_{aa}C \quad ; \quad BT_aI \equiv E_aT_{aa}B$$

(hanno l'angolo complementare in comune) perciò:

$$\overline{CT_a} : r = r_\alpha : \overline{CT_{aa}} \quad ; \quad \overline{BT_a} : r = r_\alpha : \overline{BT_{aa}}$$

$$r \cdot r_\alpha = (\overline{CT_a})(\overline{CT_{aa}}) = (\overline{BT_a})(\overline{BT_{aa}})$$

da cui:

$$\overline{CT_{aa}} : \overline{BT_{aa}} = \overline{BT_a} : \overline{CT_a}$$

per il componendo:

$$\frac{\overline{CT_{aa}} + \overline{BT_{aa}}}{\overline{BT_{aa}}} = \frac{\overline{BT_a} + \overline{CT_a}}{\overline{CT_a}}$$

$$B'_{aa} \qquad\qquad C'_{a}$$

cioè:

$$\frac{a}{\overline{BT_{aa}}} = \frac{a}{\overline{CT_{a}}}$$

$$\boxed{\overline{BT_{aa}} = \overline{CT_{a}}}$$

Il discorso può ripetersi per i tre lati:

ed anche:

$$\boxed{\overline{BT_{a}} = \overline{CT_{aa}}}$$

per cui:

<u>I punti di tangenza del cerchio inscritto dividono i lati del triangolo in due parti tali da essere uguali a quelle delimitate dai punti di tangenza dei cerchi exinscritti, peró misurate dall'altro vertice.</u> (vedi figura)

Poiché i segmenti di tangente delimitati dai punti di tangenza allo stesso cerchio e dal punto comune alle due tangenti (vertice del triangolo) sono uguali, si ha:

$$\overline{CT_a} = \overline{CT_b} = \overline{BT_{aa}} = \overline{AT_{bb}} = \overline{BT_{ac}} = \overline{AT_{bc}} \text{ ; poniamo } = \ell$$

$$\overline{BT_a} = \overline{BT_c} = \overline{CT_{aa}} = \overline{AT_{cc}} = \overline{CT_{ab}} = \overline{AT_{cb}} \text{ ; " } = m$$

$$\overline{AT_b} = \overline{AT_c} = \overline{CT_{bb}} = \overline{BT_{cc}} = \overline{CT_{ba}} = \overline{BT_{ca}} \text{ ; " } = n$$

$$\boxed{(m+\ell) = a} \quad ; \quad \boxed{(n+\ell) = b} \quad ; \quad \boxed{(m+n) = c}$$

ed $$\boxed{m+n+\ell = p}$$

poiché i segmenti fra vertici e punti di tangenza

poiche i segmenti fra vertici e punti di tangenza sono già stati calcolati per il cerchio inscritto; abbiamo:

$$m = \frac{a + c - b}{2} \quad = \quad m = (p - b)$$

$$n = \frac{b + c - a}{2} \quad = \quad n = (p - a)$$

$$\ell = \frac{a + b - c}{2} \quad = \quad \ell = (p - c)$$

Notiamo che le distanze dei punti di tangenza esterni dai vertici opposti sullo stesso lato del triangolo è pari al semiperimetro $p = l+m+n$.

cioè:

$\overline{T_{ab}A} = m+n+l = p$

$\overline{T_{ba}B} = p$

$\overline{T_{bc}B} = p$

$\overline{T_{ab}C} = p$

$\overline{T_{ca}C} = p$

$\overline{T_{ac}A} = p$

per la similitudine dei triangoli rettangoli:

$AT_{ab}E_a \equiv AT_bI$ (e analoghi) si ha:

$$r_\alpha : p = r : n \supset r_\alpha = \frac{pr}{n} = \frac{p}{(p-a)} r$$

$$r_\beta : p = r : m \supset r_\beta = \frac{pr}{m} = \frac{p}{(p-b)} r$$

$$r_\gamma : p = r : l \supset r_\gamma = \frac{pr}{\ } = \frac{p}{\ } r$$

$$r_\gamma : p = r : l \quad \Rightarrow \quad r_\gamma = \frac{pr}{l} = \frac{p}{(p-c)}\, r$$

sostituendo: $\boxed{r = \frac{S}{p}}$ abbiamo:

$$\boxed{\begin{aligned} r_\alpha &= \frac{S}{(p-a)} \\ r_\beta &= \frac{S}{(p-b)} \\ r_\gamma &= \frac{S}{(p-c)} \end{aligned}}$$

Valori dei raggi dei cerchi exinscritti dai quali si può ricavare:

$$\boxed{r = \frac{r_\alpha \cdot r_\beta \cdot r_\gamma}{p^2}}$$

Distanze degli exincentri dai vertici

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo: $AT_{ab}E_a$ si ha:

$$\overline{AE_a}^2 = p^2 + r_\alpha^2 = p^2 + \frac{S^2}{(p-a)^2} = \frac{p^2(p-a)^2 + p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2}$$

$$\overline{AE_a}^2 = p(p-a) + \frac{(p-b)(p-c)p}{(p-a)} = \left(\frac{p^2(p-a)^2}{(p-a)^2}\right)\left(1 + \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}\right)$$

$$\overline{AE_a}^2 = p^2\left(1 + tg^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{p^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{p^2(bc)}{p(p-a)} = \frac{pbc}{(p-a)}$$

$AE_a = \sqrt{\frac{pbc}{(p-a)}}$
$BE_b = \sqrt{\frac{pac}{(p-b)}}$
$CE_c = \sqrt{\frac{pab}{p-c}}$

distanze degli exincentri dai vertici opposti

$$\overline{AE_b}^2 = r_\beta^2 + \overline{AT_{bc}}^2 = \left(\frac{S}{(p-b)}\right)^2 + (p-c)^2 = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c) + (p-c)^2(p-b)^2}{(p-b)^2}$$

$$\overline{AE_b}^2 = (p-c)^2\left(1 + \frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}\right) = (p-c)^2\left(1 + ctg^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(p-c)^2}{sen^2\frac{\alpha}{2}}$$

$\overline{AE_b} = (p-c)\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$	; $\overline{AE_c} = (p-b)\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$
$\overline{BE_c} = (p-a)\sqrt{\frac{ac}{[illegible]}}$	; $\overline{BE_a} = (p-c)\sqrt{\frac{ac}{[illegible]}}$

$\overline{BE_c} = (p-a)\sqrt{\dfrac{ac}{(p-a)(p-c)}}$	; $\overline{BE_a} = (p-c)\sqrt{\dfrac{ac}{(p-a)(p-c)}}$
$\overline{CE_a} = (p-b)\sqrt{\dfrac{ab}{(p-a)(p-b)}}$	; $\overline{CE_b} = (p-a)\sqrt{\dfrac{ab}{(p-a)(p-b)}}$

$\overline{E_bE_c} = a\sqrt{\dfrac{bc}{(p-b)(p-c)}} = a/\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}$
$\overline{E_aE_c} = b\sqrt{\dfrac{ac}{(p-a)(p-c)}} = b/\operatorname{sen}\dfrac{\beta}{2}$
$\overline{E_aE_b} = c\sqrt{\dfrac{ab}{(p-a)(p-b)}} = c/\operatorname{sen}\dfrac{\gamma}{2}$

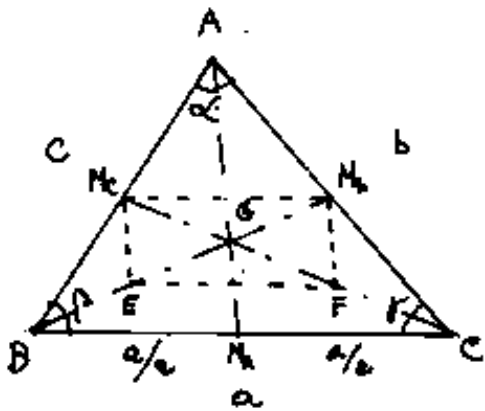
distanze fra gli exincentri

Baricentro

Dicesi "Baricentro" di un triangolo il punto comune delle mediane e si indica con la lettera G. (Dicesi mediana la retta che uscente da un vertice biseca il lato opposto)

Abbiamo già accennato al concetto di baricentro in generale, ed in particolare abbiamo rilevato che il baricentro di un segmento è il suo punto medio; se consideriamo la superficie di un triangolo costituita da tanti segmenti paralleli ad un lato e decrescenti fino al punto vertice opposto al lato, il baricentro di ciascuno di essi è nel loro punto medio, cioè giace sulla mediana al lato. Quindi se appoggiamo un triangolo di peso uniforme (per esempio di cartone) su una lama di coltello in corrispondenza di una sua mediana, il nostro triangolo materializzato sta in equilibrio, (la lama deve essere oltre metà spessore per avere equilibrio

[illegible] per avere equilibrio stabile, altrimenti si ha equilibrio instabile. come voler far stare ritto un cono poggiato sul vertice) Il discorso vale per tutte le mediane, per cui, se appoggiamo il nostro triangolo di cartone sulla punta di uno spillo in corrispondenza al punto G, punto comune delle mediane (baricentro) esso starà in equilibrio.

Dimostriamo ora che il baricentro G di un triangolo divide le mediane in due parti tali che la distanza di G da un vertice è doppia della distanza di G dal punto medio del lato opposto a quel vertice.

Tracciate le mediane: $\overline{AM_a}$; $\overline{BM_b}$; $\overline{CM_c}$ unito $\overline{M_cM_b}$ (parallelo a BC) da M_b ed M_c le parallele ad $\overline{AM_a}$, avremo, nell'incontro con le altre mediane, il parallelogramma M_cM_bFE ove $\overline{EG} = \overline{GM_b}$ ed anche: $\overline{FG} = \overline{GM_c}$, ma per i triangoli simili M_cEB ed AGB anche $\overline{BE} = \overline{EG} = \overline{GM_b}$ e poiche $\overline{BE} + \overline{EG} + \overline{GM_b} = \overline{BM_b} = m_b$ = mediana su b abbiamo che $\overline{GB} = \frac{2}{3} m_b$; $\overline{GM_b} = \frac{1}{3} m_b$. Lo stesso discorso può essere fatto per: $\overline{CF} = \overline{FG} = \overline{GM_c}$; ove: $\overline{CG} = \frac{2}{3} m_c$, $\overline{GM_c} = \frac{1}{3} m_c$. E tracciando la parallela ad un altro lato per esempio: $\overline{M_aM_c}$, si dimostra che $\overline{GA} = \frac{2}{3} m_a$; $\overline{GM_a} = \frac{1}{3} m_a$.

Questa dimostrazione, può essere fatta in molti modi.

Calcoliamo ora la lunghezza delle mediane.

Applicando il teorema di Carnot al triangolo ABM_a abbiamo:

$$\overline{AM_a}^2 = m_a^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \cancel{2}\, c\, \frac{a}{\cancel{2}} \cos\beta$$

ancora per Carnot al triangolo ABC

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

sostituendo:

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

quindi:

$$m_a^2 = \frac{2(c^2+b^2)-a^2}{4}$$

cioè:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+b^2)-a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

lunghezza delle mediane

$$(m_a^2+m_b^2+m_c^2) = \frac{1}{4}\left[2c^2+2b^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2\right]$$

$$(m_a^2+m_b^2+m_c^2) = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

la somma dei quadrati delle mediane è 3/4 la somma dei quadrati dei lati

La distanza del baricentro G dai vertici del triangolo è: $\frac{2}{3}m$, perciò:

$$\overline{GA} = \frac{1}{3}\sqrt{2(c^2+b^2)-a^2}$$

$$\overline{GB} = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$$

$$\overline{GC} = \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

distanze del baricentro dai vertici

Complementi sul triangolo

Ricerchiamo la condizione affinché tre rette uscenti dai vertici di un triangolo A,B,C abbiano un punto V in comune. Indichiamo con A', B', C' i punti di intersezione delle rette coi lati opposti ai vertici omonimi. Con $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ le parti in cui tali rette dividono gli angoli ai vertici. Per il teorema dei seni abbiamo:

$$\overline{VA} = b\frac{\operatorname{sen}\gamma_2}{\operatorname{sen}(\alpha_1+\gamma_2)} = c\frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}(\beta_1+\alpha_2)}$$

$$\overline{VB} = c\frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}(\beta_1+\alpha_2)} = a\frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}(\gamma_1+\beta_2)}$$

$$\overline{VC} = a\frac{\operatorname{sen}\beta_2}{\operatorname{sen}(\gamma_1+\beta_2)} = b\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}(\alpha_1+\gamma_2)}$$

facendo i rapporti in modo da elidere lati e denominatori:

si ha:

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{VB}} = \frac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} \quad ; \quad \frac{\overline{VC}}{\overline{VA}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\gamma_2} \quad ; \quad \frac{\overline{VB}}{\overline{VC}} = \frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\beta_2}$$

moltiplicando membro a membro le tre uguaglianze si ha:

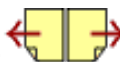
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\beta_1 \operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\beta_2 \operatorname{sen}\gamma_2} = 1$$

$$\frac{\ldots}{\operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\beta_2 \operatorname{sen}\gamma_2} = 1$$

che è la condizione perché tre rette, uscenti dai vertici di un triangolo, abbiano un punto comune.

Consideriamo ora:

$\overline{AB'} = p = c \dfrac{\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta_1)}$; $\overline{CB'} = q = a \dfrac{\operatorname{sen}\beta_2}{\operatorname{sen}(\gamma+\beta_2)}$; $\beta_2 = (\beta - \beta_1)$;

$\boxed{\operatorname{sen}(\gamma+\beta_2) = \operatorname{sen}(\alpha+\beta_1)}$; sostituendo si ha:

La generalizzazione del teorema della bisettrice:

$$\frac{AB'}{CB'} = \frac{p}{q} = \frac{c \operatorname{sen} \beta_1}{a \operatorname{sen} \beta_2}$$

analogamente:

$\frac{r}{s} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha_1}{c \operatorname{sen} \alpha_2}$	$\frac{p}{q} = \frac{c \operatorname{sen} \beta_1}{a \operatorname{sen} \beta_2}$	$\frac{n}{m} = \frac{a \operatorname{sen} \gamma_1}{b \operatorname{sen} \gamma_2}$

"Una retta uscente da un vertice di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti moltiplicati rispettivamente per i seni degli angoli fra la retta e i lati stessi"

Se la retta è la bisettrice: $(\alpha_1 = \alpha_2)$; $(\beta_1 = \beta_2)$; $(\gamma_1 = \gamma_2)$

perciò: $\frac{r}{s} = \frac{b}{c}$; $\frac{p}{q} = \frac{c}{a}$; $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$; cioè la bisettrice divide il lato opposto proporzionalmente ai lati adiacenti (Teorema della bisettrice)

Se moltiplichiamo membro a membro le tre

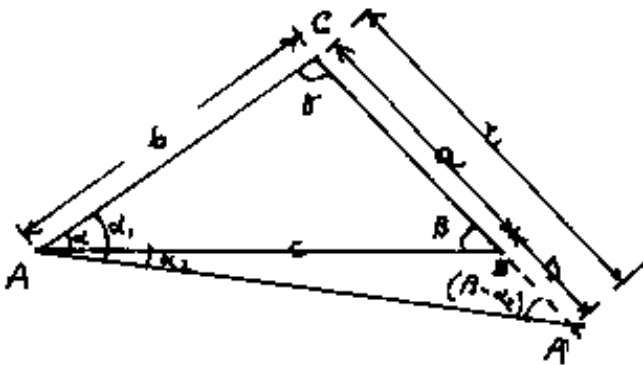
uguaglianze della generalizzazione del teorema della bisettrice; semplificando otteniamo:

$$\frac{r \cdot p \cdot n}{s \cdot q \cdot m} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\beta_1 \operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\beta_2 \operatorname{sen}\gamma_2} = 1$$

Che è la condizione perché tre rette uscenti dai vertici di un triangolo, abbiano un punto comune. (espresso in funzione delle parti in cui vengono divisi i lati opposti)

Puo' esprimersi:

"Se tre rette uscenti dai vertici di un triangolo, hanno un punto comune, il prodotto dei rapporti fra le parti in cui dividono i lati opposti (prese ordinatamente in senso orario o antiorario) e' l'unitá.

Abbiamo considerato rette interne al triangolo; per rette esterne al triangolo si ha: (per il teorema dei seni):

$$r = b\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha_2)}\ ;\ s = \frac{c\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha_2)}$$

$$\boxed{\frac{r}{s} = \frac{b\operatorname{sen}\alpha_1}{c\operatorname{sen}\alpha_2}}$$

Vale ancora il teorema della bisettrice generalizzato.

Si possono avere i seguenti casi:

1) Le tre rette si incontrano in un punto interno al triangolo

2) Le tre rette si incontrano in un punto esterno

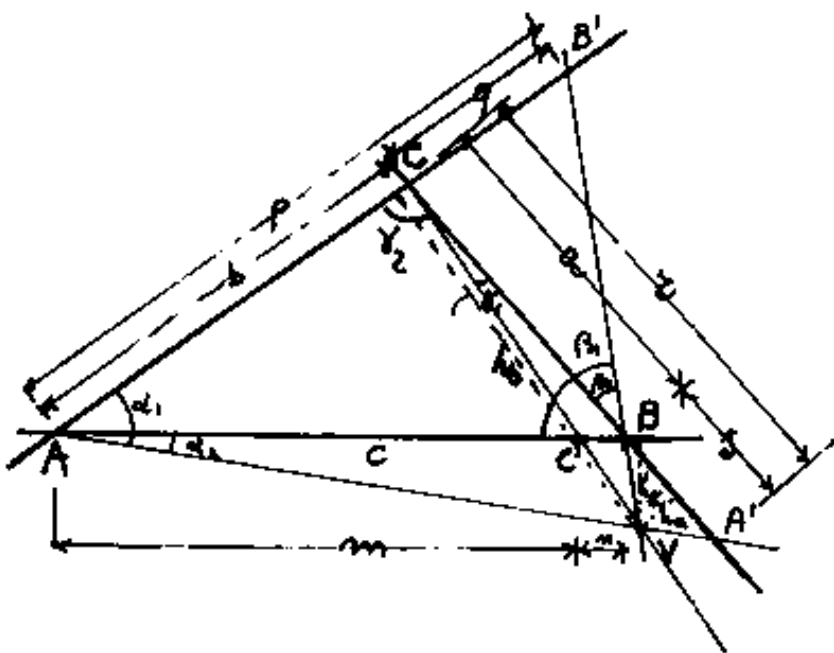
al triangolo (In questo caso una sola retta taglia il triangolo

3) I punti A', B', C' sono allineati (in questo caso una sola retta uscente dai vertici è esterna al triangolo)

4) Le rette dai vertici non hanno un punto comune e i punti A'B'C' non sono allineati.

Notiamo che, nel caso che le tre rette abbiano un punto in comune,(V), possiamo considerare i triangoli: ABV ; BCV ; CAV ; le cui aree saranno il semiprodotto dei lati per le rispettive altezze tracciate da V perpendicolarmente ai lati a, b, c che indicheremo rispettivamente con h_a, h_b, h_c.

ma: $\text{sen}\,\alpha_1 = h_b/\overline{VA}$; $\text{sen}\,\alpha_2 = h_c/\overline{VA}$; $\text{sen}\,\beta_1 = h_c/\overline{VB}$

$\text{sen}\,\beta_2 = h_a/\overline{VB}$; $\text{sen}\,\gamma_1 = h_a/\overline{VC}$; $\text{sen}\,\gamma_2 = h_b/\overline{VC}$

Ciò vale sia che il punto comune "V" sia interno al triangolo, sia che sia esterno. Se sostituiamo i valori dei seni nelle espressioni del

\ le espressioni del precedente teorema si ha:

$$\frac{t}{s} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha_1}{c \operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{b h_b / \sqrt{VA}}{c h_c / \sqrt{VA}} = \frac{b h_b}{c h_c} = \frac{2 S_{ACV}}{2 S_{ABV}} = \frac{S_{ACV}}{S_{ABV}}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{c \operatorname{sen} \beta_1}{a \operatorname{sen} \beta_2} = \frac{c h_c / \sqrt{VB}}{a h_a / \sqrt{VB}} = \frac{c h_c}{a h_a} = \frac{2 S_{ABV}}{2 S_{BCV}} = \frac{S_{ABV}}{S_{BCV}}$$

$$\frac{n}{m} = \frac{a \operatorname{sen} \gamma_1}{b \operatorname{sen} \gamma_2} = \frac{a h_a / \sqrt{VC}}{b h_b / \sqrt{VC}} = \frac{a h_a}{b h_b} = \frac{2 S_{BCV}}{2 S_{ACV}} = \frac{S_{BCV}}{S_{ACV}}$$

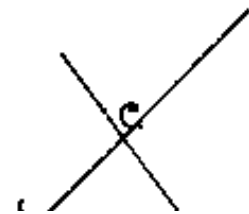
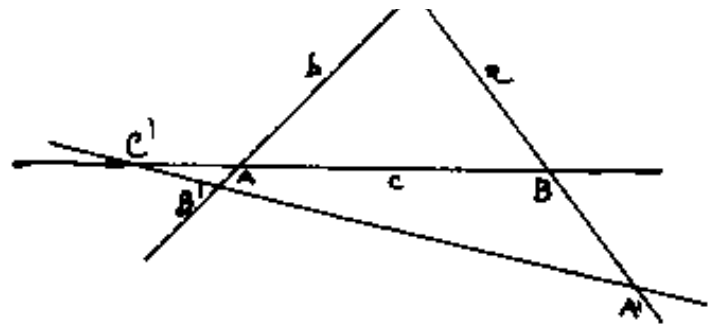
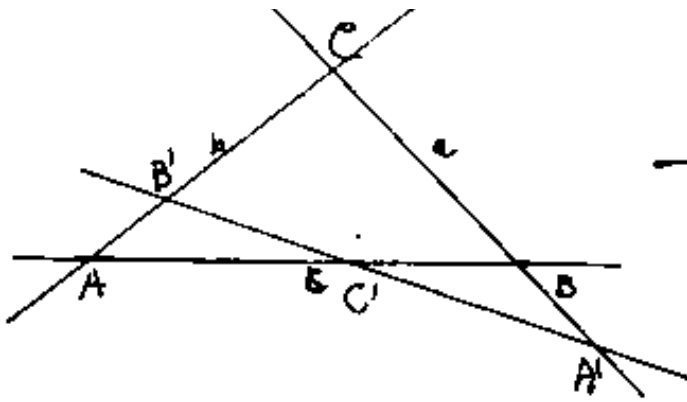
Cioè si ha un altro aspetto del precedente teorema:

"Se da un punto V del piano uniamo i vertici A,B,C, di un triangolo, la retta passante per un vertice divide il lato opposto in due parti proporzionali alle aree dei triangoli delimitati dalla retta stessa, dai lati adiacenti e dalle altre due rette uscenti da V."

$$\frac{r}{s} = \frac{S_{AVC}}{S_{AVB}} \qquad \frac{p}{q} = \frac{S_{AVB}}{S_{BVC}} \qquad \frac{n}{m} = \frac{S_{BVC}}{S_{AVC}}$$

Si noti invece che, affinché tre punti A', B', C', presi sui lati di un triangolo, siano allineati, la retta che li unisce non può passare per i vertici A, B, C distinti da A', B', C'.

C

C

Si hanno due casi: 1) la retta taglia il triangolo 2) la retta è esterna al triangolo. (Torneremo sull'argomento).

Indice Enciclopedico Indice Pag. 289

Il teorema di Ceva

Occorre premettere una osservazione sui segni: le parti $\overline{AC'}$ e $\overline{BC'}$ del lato $\overline{AB}$ hanno segni opposti perché misurate in direzione opposta ($\overline{BC'} = -\overline{C'B}$) analogamente per i segni delle altre parti.

$$\left(\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}}\right) = -1$$

reciprocamente, se sussiste tale relazione, le rette $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$; hanno un punto in comune

(Teorema di Ceva)

La dimostrazione si avvale del precedente teorema:

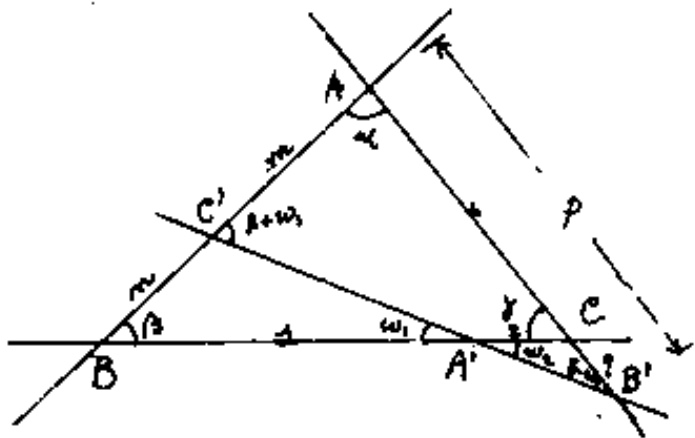
$$\left(\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\right) = \frac{-p}{-q} = \frac{-S_{AVB}}{S_{BVC}} \; ; \; \frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}} = \frac{-n}{m} = \frac{-S_{BVC}}{S_{AVC}} \; ; \; \frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}} = \frac{-r}{s} = \frac{-S_{AVC}}{S_{AVB}}$$

sostituendo:
$$\left(\frac{-S_{AVB}}{S_{BVC}}\right)\cdot\left(\frac{-S_{BVC}}{S_{AVC}}\right)\cdot\left(\frac{-S_{AVC}}{S_{AVB}}\right) = -1$$

Il prodotto dei rapporti fra le parti in cui vengono divisi i lati di un triangolo da tre rette uscen

gono divisi i lati di un triangolo da tre rette uscen-
ti dai vertici opposti ed aventi un punto comune,
è pari all'unità presa di segno negativo, essendo
le parti di lato misurate a partire dai vertici.

Il teorema di Menelao

Una trasversale (non passante per i vertici) sega i lati di un triangolo ABC nei punti: A', B', C' rispettivamente, su a, b, c. si ha:

$$\left(\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\right)\cdot\left(\frac{BC'}{AC'}\right)\cdot\left(\frac{CA'}{BA'}\right) = 1$$

"Il prodotto dei rapporti, fra le distanze dai vertici dei punti intercettati sui lati di un triangolo da una trasversale, misurate sui lati stessi è unitario. e viceversa se i punti A', B', C' sodisfano la precedente relazione i tre punti sono allineati." (Teorema di Menelao)

Si noti che i tre punti A', B', C', del teorema di Ceva non sono allineati, e che le rette AA', BB', CC' del presente teorema non han

rette AA', BB', CC' del presente teorema non hanno un punto comune.

La condizione di allineamento di C'A'B' può esprimersi: (vedi figura): $\omega_1 = \omega_2$.

Dal triangolo BC'A' abbiamo: $\frac{n}{s} = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen}(\beta + \omega_1)}$

" " A'CB' " $\frac{r}{q} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma - \omega_2)}{\operatorname{sen} \omega_2}$

" " C'AB' " $\frac{p}{m} = \frac{\operatorname{sen}(\beta + \omega_1)}{\operatorname{sen}(\gamma - \omega_2)}$

moltiplicando fra loro le tre uguaglianze abbiamo:

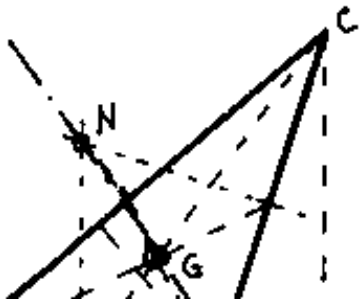
$$\frac{n \cdot r \cdot p}{m \cdot s \cdot q} = \frac{sen(\omega_1) \cdot sen(\gamma - \omega_2) \cdot sen(\beta + \omega_1)}{sen\,\omega_2 \cdot sen(\gamma - \omega_2)\; sen(\beta + \omega_1)}$$

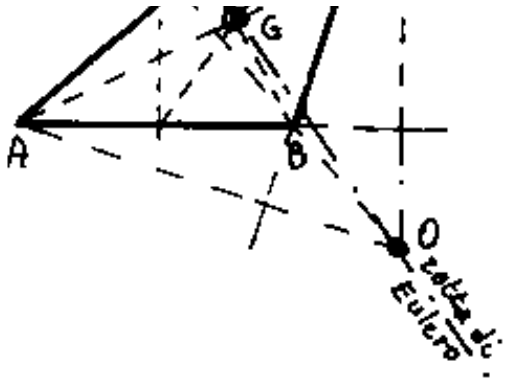
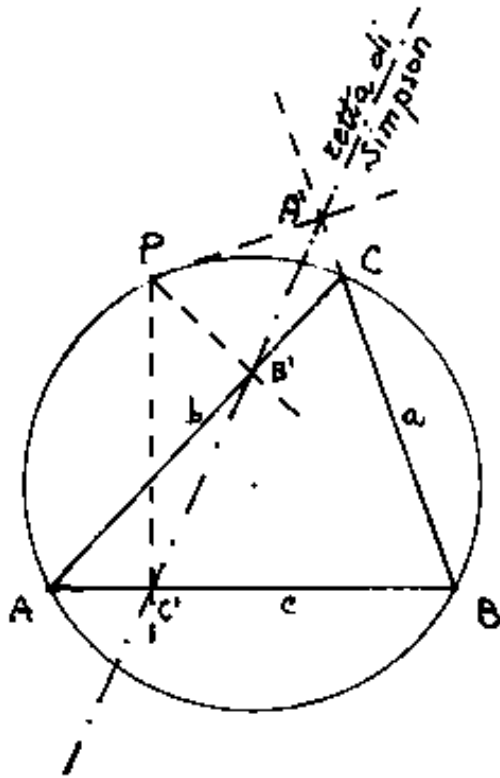
cioè: i prodotti dei rapporti

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\right) ; \quad \frac{n}{m} = \left(\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}\right) ; \quad \frac{r}{s} = \left(\frac{\overline{CA'}}{(\overline{BA'})}\right)$$

sono uguali all'unità se $(\omega_1) = (\omega_2)$, resta dimostrato il teorema di Menelalo.

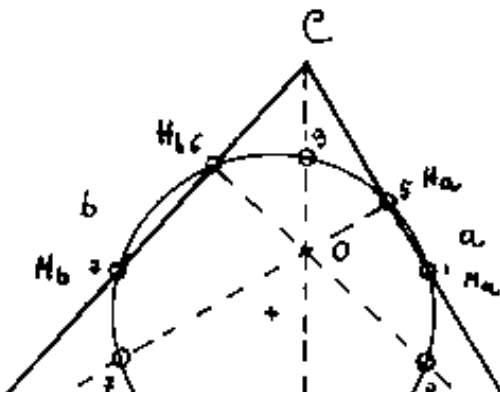
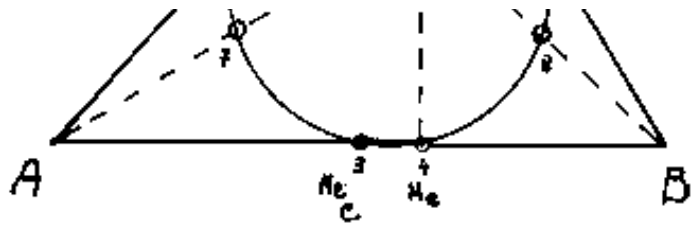
Retta di Eulero

si può anche dimostrare che l'ortocentro "O", il baricentro G, ed il circocentro N; in qualsiasi triangolo sono tre punti allineati, e la retta che li congiunge è chiamata: "Retta di Eulero"

E si ha che: $\overline{ON}/\overline{GN} = 3$,

A B G O retta di Eulero

E si ha che: $\overline{ON}/\overline{GN} \simeq 3$, per cui G è intermedio ad $\overline{ON}$ e divide il segmento $\overline{ON}$ in due parti una doppia dell'altra. (come G divide anche le mediane del triangolo)

Retta di Simpson

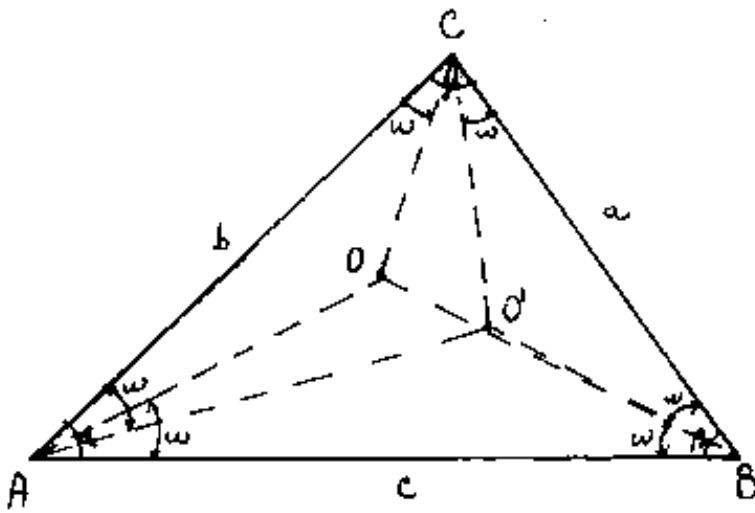
I piedi A', B', C', delle normali condotte da un punto P, del cerchio circoscritto ad un triangolo, rispettivamente ai lati a, b, c, sono allineati. La retta che li congiunge è detta: "retta di Simpson".

Il cerchio dei nove punti

(o di Feuerbach)

Dato un triangolo ABC, dicesi "Cerchio dei nove punti", il cerchio che passa per i punti medi dei lati,

i punti medi dei lati, perchè passa anche per i piedi delle altezze, e per i punti medi dei segmenti che dall'ortocentro vanno ai vertici del triangolo.

(V. Encicl. delle Mat. Elem. (op. cit.) Vol. II parte 1ª pag. 188 nota 46)

I Punti di Brocard.

Dato un triangolo A B C, nel suo piano esistono due punti "O" ed "O'" detti "*punti di Brocard*", tali che:

$$O\hat{A}B = O\hat{B}C = O\hat{C}A = \omega;$$

$$O'\hat{C}B = O'\hat{B}A = O'\hat{A}C = \omega;$$

ove:

$$\cot g(\omega) = \cot g(\alpha) + \cot g(\beta) + \cot g(\gamma)$$

sostituendo:

$$\cot g(\omega) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

$$\tan g(\omega) = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2}$$

poiché: $\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha = 2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad ; \quad \boxed{\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2S}{bc}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{bc}{2S}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} \quad , \quad \operatorname{cotg}(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S} \quad ; \quad \operatorname{cotg}\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

I Poligoni regolari

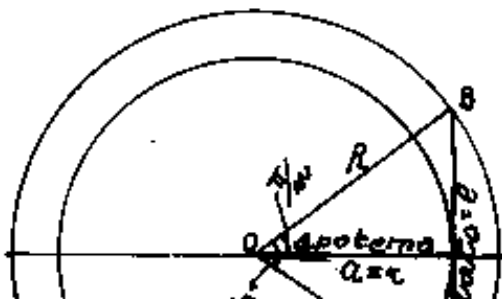
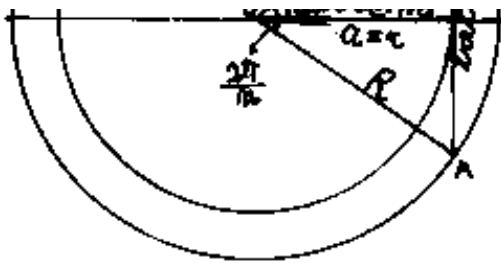
Si dicono "poligoni regolari" quei poligoni che hanno lati uguali ed angoli interni uguali e sono quindi inscrittibili e circoscrittibili con una circonferenza. Essi prendono il nome dal numero dei lati, che corrisponde al numero di parti uguali in cui viene divisa la circonferenza. (o l'angolo giro). Abbiamo già visto che è possibile dividere la circonferenza in 3, 4, 5, 6 parti uguali, e multipli secondo le potenze di 2, cioè: 2, 4, 8, 16 .... avremo quindi la possibità di disegnare poligoni di: 3, 6, 12, 24, 48 ...; 4, 8, 16, 32, 64.... ; 5, 10, 20, 40 ....; lati Nonchè quelle frazioni ricavabili per somma o differenza di divisioni note ; per esempio: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{15}$; od $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{30}$ per cui è possibile anche la serie di: 15, 30, 60, 120... lati. Non è invece possibile, (col solo ausilio della squadra e del compasso), dividere la circonferenza in 7, 9, 11, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23, ... parti uguali. Ciò equivale a dire che

non disponiamo di formule capaci di fornirci <u>esattamente</u> i valori delle funzioni trigonometriche di tali angoli, (Che possono essere calcolati solo mediante le serie, in quanto sono <u>numeri trascendenti</u>).

In un poligono regolare, se uniamo il centro co= mune del cerchio inscritto e del cerchio circoscrit=

to con i vertici del poligono, otteniamo tanti triangoli isosceli uguali quanti sono i lati del poligono, aventi per base il lato del poligono, per altezza il raggio del cerchio inscritto, e per lato obliquo il raggio del cerchio circoscritto; "l'altezza" di tali triangoli è chiamata: "apotema" da cui la regola generale per calcolare l'area di un poligono regolare: "L'area di un poligono regolare è data dal perimetro per metà dell'apotema"

Come abbiamo detto, l'apotema può essere calcolata in funzione del lato. Nella scuola primaria si insegna la regola: "L'apotema è data dal lato per il numero fisso!"

Vediamo come si calcola il "misterioso" numero fisso; siano: l = lato; n = numero dei lati; $a = r$ = apotema = raggio del cerchio inscrit=

... = raggio del cerchio inscrit-to ; R = raggio del cerchio circoscritto.

$$l = 2R\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \; ; \quad R = \frac{l}{2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \; ; \quad a = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \; ;$$

$$R = \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \; ; \quad a = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{l}{2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \; ; \quad a = \left(\frac{\text{cotg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}\right) l$$

Quindi il numero fisso "N" = $\frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Facciamo una tabella

n	poligono	numero fisso $a/l = N = \frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}(\pi/n)$	angolo al centro
3	triangolo	0,288675135 $= (\sqrt{3}/6)$	120°
4	quadrato	0,500000000 $= (1/2)$	90°
5	pentagono	0,688190960 $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)$	72°
6	esagono	0,866025404 $= (\sqrt{3}/2)$	60°
7	ettagono	1,038260699 - (trascendente)	51° 25' 42",8571
8	ottagono	1,207106781 $= \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$	45°
9	ennagono	1,373738710 = (trascendente)	40°
10	decagono	1,538841769 $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$	36°
11	undecagono	1,702843620 = (trascendente)	32° 43' 38",181828
12	dodecagono	1,866025404 $= (1+\sqrt{3}/2)$	30°

Se consideriamo i poligoni regolari inscritti e circoscritti ad una circonferenza di raggio unitario, avremo, a parità di n, che il perimetro

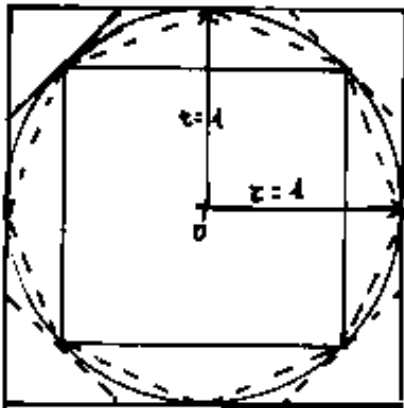
unitario, avremo, a parità di n, che il perimetro del poligono circoscritto ed il perimetro del poligono inscritto si avvicinano (all'aumentare di n) alla lunghezza della circonferenza.

Con questo metodo gli antichi calcolavano il valore di π per eccesso e per difetto.

$$(n)\,\mathrm{sen}(\pi/n) < \pi < (n)\,\mathrm{tang}(\pi/n)$$

Usando la trigonometria è facile per noi scrivere la doppia disuguglianza che delimita π e se disponiamo di un calcolatore anche modesto possiamo dire: per $n = 100$

$3,141075902 \ldots < \pi < 3,142626598$; sono i semiperimetri dei poligoni di 100 lati circoscritti ed inscritti ad un cerchio di raggio unitario.

Assai più laborioso è partire dal quadrato inscritto e circoscritto ad un cerchio di raggio unitario calcolarne i semiperimetri e dire:

$$4 < \pi < 2\sqrt{2} = 2,83$$

Quindi dividere in due l'angolo al centro e calcolare (col teorema di Pitagora) il lato e quindi il semiperimetro dell'ottagono inscritto e circoscritto, e dire:

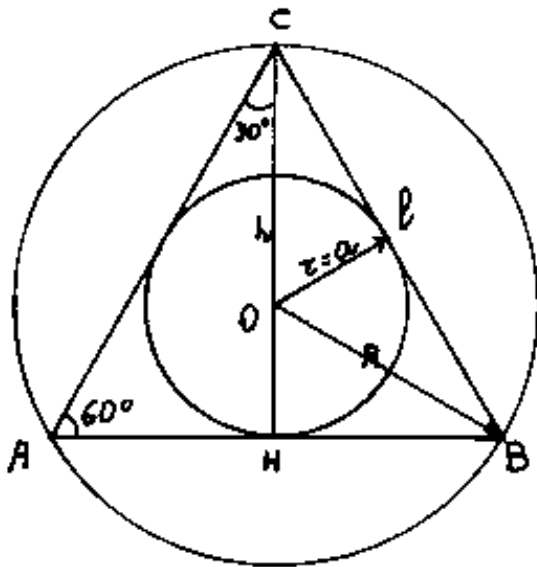
$$3,06147 < \pi < 3,31371$$

e per sedici lati: $3,12145 < \pi < 3,182598$ .... e così via.

e per sedici lati: $3{,}12145 < \pi < 3{,}182598$ .... e così via.

Per scopi pratici gli antichi approssimarono il valore di π a $\frac{22}{7} = 3{,}142857143$ (valore per eccesso di $+\,0{,}001264489$, il nostro $3{,}14$ è approssimato per difetto $-\,0{,}0015926535\ldots$)

È formativo pensare mentalmente il crescere di n = numero dei lati e vedere il poligono inscritto e quello circoscritto avvicinarsi alla circonferenza. (Torneremo sul concetto di limite).

Triangolo equilatero

l = lato ; h = altezza;

R = raggio del cerchio circoscritto

a = apotema = r = raggio del cerchio inscritto.

Tavola delle correlazioni:

noti / incogniti	l	h	$a=r$	R
l	l	$\frac{2}{3}h\sqrt{3} = 1{,}15470\ h$	$2a\sqrt{3} = 3{,}46410a$	$R\sqrt{3} = 1{,}73205 R$
h	$\frac{l}{2}\sqrt{3} = 0{,}86603 \cdot l$	h	$3a$	$\frac{3}{2}R = 1{,}5 R$
$a=r$	$\frac{l}{6}\sqrt{3} = 0{,}28868 \cdot l$	$\frac{h}{3} = 0{,}33333 \cdot h$	$a=r$	$\frac{R}{2} = 0{,}5 R$
R	$\frac{l}{3}\sqrt{3} = 0{,}57735\ l$	$\frac{2}{3}h = 0{,}6667\ h$	$2a$	R

Quadrato

l = lato ; d = diagonale

R = raggio del cerchio circoscritto

a = apotema = r = raggio del cerchio inscritto.

d

B

inscritto.

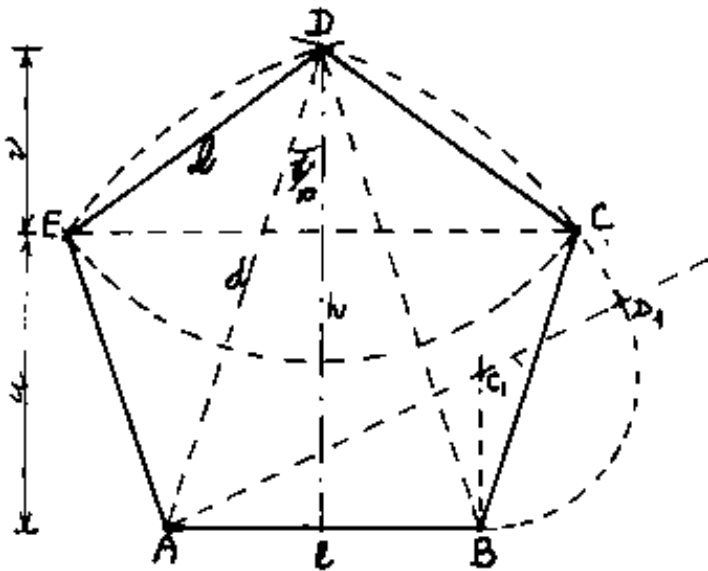
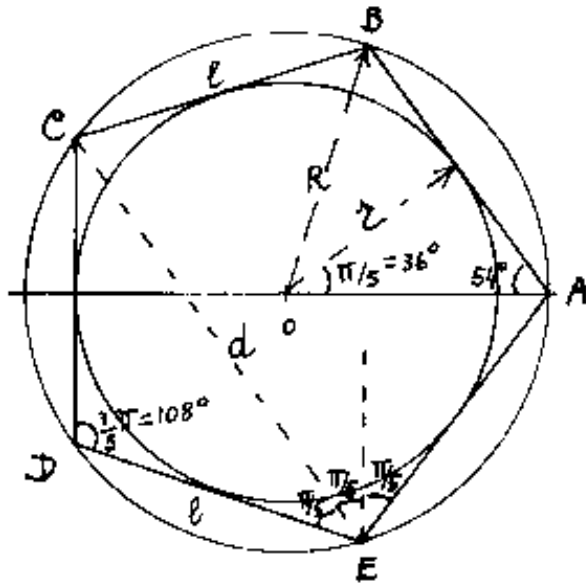
Tavola delle correlazioni

noti / incogniti	l	d	$a = r$	R
l	l	$\frac{d}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711 \cdot d$	$2 \cdot a$	$R\sqrt{2} = 1{,}4142 \cdot R$
d	$l\sqrt{2} = 1{,}4142 \cdot l$	d	$2a\sqrt{2} = 2{,}82843 \cdot a$	$2R$
$a = r$	$l/2 = 0{,}5\, l$	$\frac{d}{4}\sqrt{2} = 0{,}35335\, d$	$a = r$	$\frac{R}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711\, R$
R	$\frac{l}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711\, l$	$d/2 = 0{,}5d$	$a\sqrt{2} = 1{,}4142 \cdot a$	R

Pentagono

Costruzione grafica dato il lato

Mediante la sezione aurea, dato il raggio del cerchio circoscritto sappiamo costruire il decagono e quindi il pentagono regolare.

Dato invece il lato $\overline{AB}=\ell$ del pentagono, avvalendoci ancora della sezione aurea riportiamo dall'estremo B perpendicolarmente ad $\overline{AB}$ un segmento $\overline{BC_1}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\ell}{2}$. Unito A con C_1 e prolungato di $\overline{C_1D_1}=\overline{BC_1}$ si trova D_1.

Il segmento $\overline{AD_1}$ è la diagonale del pentagono, per cui: $\overline{AD_1}=d=\frac{\ell}{2}(\sqrt{5}+1)$. Centro in A ed in B con raggio $\overline{AD_1}$ si trova D. Centro in; A, B, D e raggio $=\ell$, si trovano E e C. (Deve verificare E e D.)

l = lato ; d = diagonale ;

R = raggio del cerchio circoscritto

a = apotema = r = raggio del cer-
chio inscritto.

Facciamo la tavola delle correlazioni

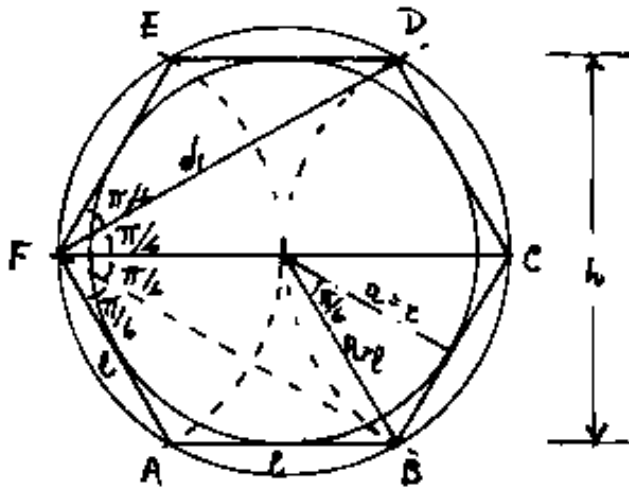
Relazioni fra gli elementi del pentagono

i \ n	l	R	$a = r$	d	h	v	u
l	l	$=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 1.175570505 · R	$=a\,2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ 1.453085057 · a	$=d\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ 0.618033989 · d	$=h\,2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ 0.649839392 · h	$=v\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$ 1.701301616 · v	$=u\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$ 1.051462224 · u
R	$=l\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ 0.850650808 · l	R	$=a\left(\sqrt{5}-1\right)$ 1.236067977 · a	$=d\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ 0.525731112 · d	$=h\left(1-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$ 0.552786405 · h	$=v\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)$ 1.447213595 · v	$=u\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 0.894427191 · u
$a=r$	$=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 0.688190960 · l	$=R\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$ 0.809016994 · R	$a = r$	$=\frac{d}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ 0.425325404 · d	$=h\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ 0.447213595 · h	$=v\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\right)$ 1.170820394 · v	$=u\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)$ 0.723606797 · u
d	$=l\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ 1.618033989 · l	$=R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 1.902113032 · R	$=a\sqrt{2(5-\sqrt{5})}$ 2.351141009 · a	d	$=h\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$ 1.051462224 · h	$=v\,2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 2.752763840 · v	$=u\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$ 1.701301616 · u
h	$=\frac{l}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ 1.538841769 · l	$=R\left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$ 1.809016994 · R	$=a\sqrt{5}$ 2.236067977 · a	$=\frac{d}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 0.951056517 · d	h	$=v\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ 2.618033989 · v	$=u\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ 1.618033989 · u
v	$=\frac{l}{2}\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 0.587785253 · l	$=R\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)$ 0.690983006 R	$=a\left(\frac{3\sqrt{5}-5}{2}\right)$ 0.854101966 · a	$=\frac{d}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ 0.363271264 · d	$=h\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ 0.381966012 · h	v	$=u\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ 0.618033989 · u
u	$=\frac{l}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ 0.951056516 · l	$=R\,\frac{\sqrt{5}}{2}$ 1.118033989 · R	$=a\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ 1.381966012 · a	$=\frac{d}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ 0.587785252 · d	$=h\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ 0.618033989 · h	$=v\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 1.618033989 · v	u

Tavola delle funzioni trigonometriche (pentagono)

giri	$\alpha°$	α rad.	sen (α)	cos (α)	tang(α)	cotg (α)
$\frac{1}{40}$	9°	$\pi/20$ 0,157079633	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,156434465	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,987688341	$(\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}})$ 0,158384440	$(\sqrt{5}+1+\sqrt{5+2\sqrt{5}})$ 6,313751516
$\frac{1}{20}$	18°	$\pi/10$ 0,314159265	$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ 0,309016994	$\left(\frac{l}{d}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 0,951056517	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ 0,324919696	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ 3,077683537
$\frac{1}{10}$	36°	$\pi/5$ 0,628318531	$\left(\frac{l}{2R}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 0,587785253	$\left(\frac{a}{R}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$ 0,8090169943	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ 0,726542528	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 1,376381920
$\frac{1}{5}$	72°	$2\pi/5$ 1,256637062	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ 0,951056517	$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ 0,3090169943	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ 3,077683537	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ 0,324919696
$\frac{3}{40}$	27°	$3\pi/30$ 0,471238898	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,453990500	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,891006524	$(\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}})$ 0,5095254495	$(\sqrt{5}-1+\sqrt{5-2\sqrt{5}})$ 1,962610505
$\frac{3}{20}$	54°	$3\pi/10$ 0,942477796	$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$ 0,8090169943	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ 0,587785253	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ 1,376381920	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ 0,726542528
$\frac{7}{40}$	63°	$7\pi/10$ 1,099557424	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,891006544	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,453990500	$(\sqrt{5}-1+\sqrt{5-2\sqrt{5}})$ 1,962610505	$(\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}})$ 0,5095254495
$\frac{9}{40}$	81°	$9\pi/20$ 1.413716694	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,987688341	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}{2}}$ 0,156434465	$(\sqrt{5}+1+\sqrt{5+2\sqrt{5}})$ 6,313751516	$(\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}})$ 0,158384440

Esagono

L'esagono è una figura geometrica fondamentale.

Il lato = l = R = raggio del cerchio circoscritto; perciò la costruzione grafica dell'esagono è semplicissima: fatto un cerchio di raggio l = R, con lo stesso raggio si fa centro agli estremi di un diametro (come F, C) e per intersezione si trovano i restanti 4 punti (A,B,D,E). I sei punti A,B,C,D,E,F, sono i vertici dell'esagono. L'angolo al centro è $2\pi/6$ cioè $\frac{1}{6}$ di angolo giro; e poiché è facile dividere gli angoli a metà si può ottenere: $\frac{1}{12}$ e poi $\frac{1}{24}$ di giro (che sono rispettivamente i mesi dell'anno e le ore del giorno già prefissate dai Caldei col loro sistema sessagesimale.)

Detto: a = apotema = r = raggio del cerchio inscritto;

h = altezza = d_1 = diagonale minore; d_2 = diago=

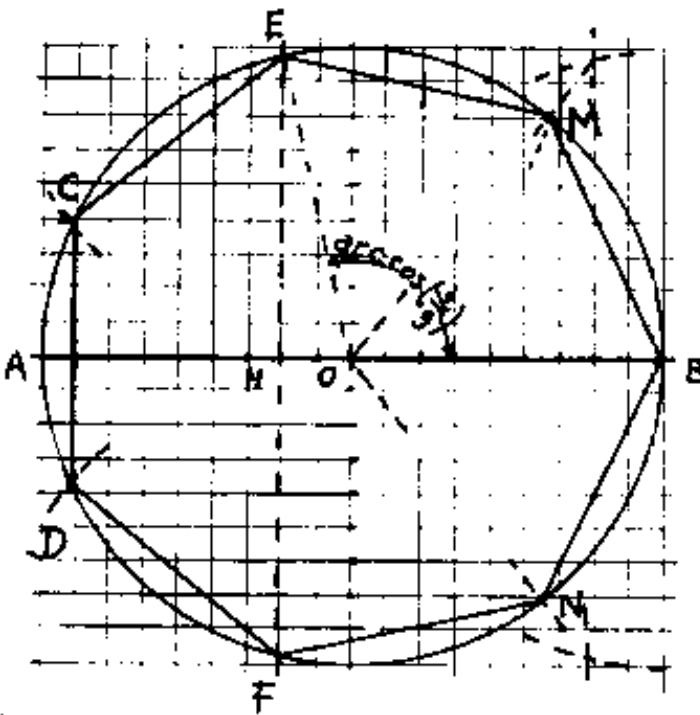
h = altezza = d_1 = diagonale minore ; d_2 = diagonale maggiore ; Si hanno le seguenti relazioni.

x \ Ω	$l = R$	$a = r$	$h = d_1$	d_2
$l = R$	$= (l - R)$	$= a(\frac{2}{3}\sqrt{3})$ $1{,}54700539 \cdot a$	$= h(\sqrt{3}/3)$ $0{,}577350269 \cdot h$	$= d_2(1/2)$ $0{,}50000000 \cdot d_2$
$a = r$	$= \frac{l}{2}\sqrt{3}$ $0{,}8660254 \cdot l$	$= (a = r)$	$= (h/2)$ $0{,}500000 \cdot h$	$= \frac{d_2}{4}\sqrt{3}$ $0{,}433012702 \cdot d_2$
$h = d_1$	$= l\sqrt{3}$ $1{,}7320508 \cdot l$	$= 2a$ $2{,}00000 \cdot a$	$= (h = d_1)$	$= \frac{d_2}{2}\sqrt{3}$ $0{,}866025404 \cdot d_2$
d_2	$= 2 \cdot l$ $2{,}000000 \cdot l$	$a(\frac{4}{3}\sqrt{3})$ $2{,}309401078 \cdot a$	$= h(\frac{2}{3}\sqrt{3})$ $1{,}154700539 \cdot h$	$= (d_2)$

Ettagono

L'ettagono è un poligono regolare che non si può disegnare col solo ausilio della riga e del compasso. Vi sono molte costruzioni approssimate che si avvalgono di funzioni trigonometriche note, od altri elementi noti. Per esempio sapendo che il coseno di $\pi/7$ è: $\cos(\pi/7) = 0,900968868...$ arrotondando il valore a: "0,9", (cioè con un errore di quasi un millesimo) $u \cdot 0,9 = 9/10 \cdot u$, si possono fare due cerchi concentrici, uno di raggio = 9 ed uno di raggio = 10 che saranno rispettivamente il cerchio inscritto ed il cerchio circoscritto all'ettagono di lato $l = u \cdot 2\,\text{sen}(\pi/7) = u \cdot 0,867767478 \simeq 0,868 \cdot u$, ed avendo scelto $u = 10$ il lato sarà 8,68 delle nostre unità grafiche. Si noti che un triangolo che abbia gli angoli uno doppio dell'altro, dovendo essere π la

somma degli angoli interni avremo: $\alpha + 2\alpha + 4\alpha = \pi$ da cui: $\alpha = \pi/7$. Il triangolo è come BCE, ma la sua costruzione grafica presenta le stesse difficoltà della trisezione dell'angolo.

Un metodo per costruire l'ettagono con buona approssimazione, ed assai pratico su carta quadrettata, consiste nel tracciare un cerchio di 9 caselli di raggio, sia $\overline{AB}$ il diametro orizzontale, ed "O" il centro. scostata di due caselli da O si traccia perpendicolarmente ad $\overline{AB}$ la corda: $\overline{EF}$; si tracciano le bisettrici degli angoli $E\hat{O}B$ ed $F\hat{O}B$, che incontrano il cerchio in M ed N.

Avremo necessariamente:

$\overline{EM} = \overline{MB} = \overline{BN} = \overline{NF} = \ell$. Con raggio $\overline{EM}$ e centro in E ed F si determinano i punti "C" e "D" quindi si verifica che anche $\overline{CD} \cong \ell$ nei limiti di tolleranza grafica.

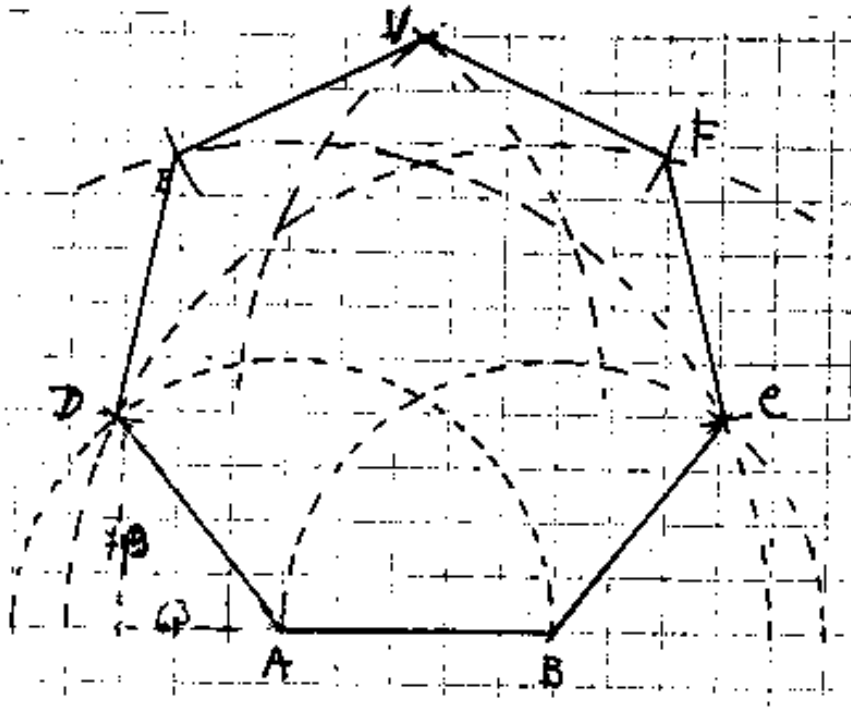
<u>Calcoliamo l'errore</u>:

$\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{2}{9}\right) = 51°,419794175$; $\frac{360°}{7} = 51°,42857143$ differenza in

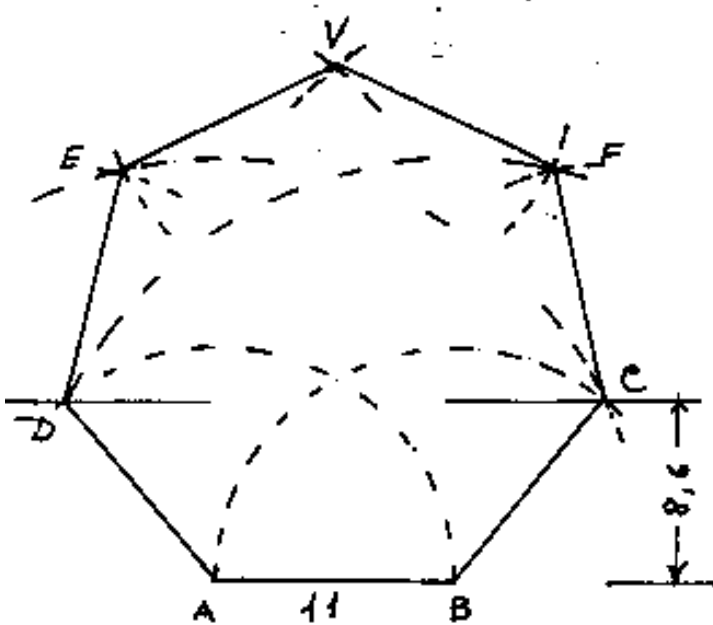
[illegible] difetto: $0°,00877723$ = <u>$0°\ 00'\ 32''$ di errore angolare</u> (graficamente irrilevante). $\overline{BM} = \overline{ME} = \overline{EC} = \overline{BN} = \overline{NF} = \overline{FD} = \ell = 2R$ sen[illegible] $\cos\left(-\frac{2}{9}\right)$, cioè $\ell = 2R \operatorname{sen}(25°,7098971) = 0,8676294549\ R$

$\overline{DC} = 2R\left(\operatorname{sen}\frac{3}{2}\arccos\left(-\frac{2}{9}\right)\right) = 0,8685955111 \cdot R$ differenza $\ell - \overline{DC} =$
$= -\ 0,0009660562 \cdot R$ = cioè: 8,69 millesimi di casello $DC > \ell$.

(anche questo irrilevante graficamente, per caselli di 5mm errore $4,3/100$ mm.)

Se, invece del raggio, conosciamo il lato dell'ettagono, possiamo fare la seguente costruzione (Per esempio utilizzando la carta quadrettata).

Sia $\overline{AB}$ il lato di 5 caselli, con raggio di 5 caselli si tracciano, con centro in A e B, gli archi $\widehat{BD}$ ed $\widehat{AC}$. Quindi ancora con centri in A e B, ma, con raggio di 9 caselli, si tracciano gli archi $\widehat{CE}$ e $\widehat{DF}$, determinando così per intersezione i punti "C" e "D". Con lo stesso raggio di 9 caselli con centro in C e D si tracciano gli archetti che determinano V. Preso ora il raggio di 5 caselli con centro in V si determinano per

intersezione i punti E ed F. Per verifica, sempre con raggio di 5 caselli, si fa centro in E ed F e gli archetti dovranno passare per D e per C (nei limiti di errore grafico accettabile). Verifichiamo l'approssimazione di questa costruzione: $\arccos(4{,}5/5) = 25°\,50'\,31''$ $\left(\frac{360°}{14} = 25°\,42'\,51''\right)$ errore $7'$ e $40''$ sull'angolo: $C\hat{A}B = A\hat{B}D$; $A\hat{B}C = B\hat{A}D = 128°\,18'\,58''$; $\left(\frac{5}{7}180° = 128°\,34'\,17''\right)$ errore: $15'\,19''$. (circa 1/100 di casello per la posizione dei vertici) $\left[\text{Arctg}\left(\frac{79}{63}\right) - \left(\frac{360°}{7}\right)\right] = \left(0°\,0'\,0{,}''6347529305268305''\right)$ errore

Un metodo molto più preciso del precedente si ottiene prendendo il rapporto: V/ℓ arrotondato ad $8,6/11$ (o valori proporzionali) in effetti anziché 8,6 il valore sarebbe: 8,600146307148328..... L'errore non arriva a 15 centimillesimi di unità, cioè con un lato dell'ettagono di 11 cm, l'errore sarebbe minore di $1,5\mu = \frac{1,5}{1000}$ mm. Se il disegno è con pennino da 0,1 mm, l'errore è poco più di $\frac{1}{100}$ dello spessore della linea.

Tracciata la base $\overline{AB}$ e la parallela $\overline{DC}$ distante $\frac{8,6}{11}\overline{AB}$, abbiamo gli elementi per co=struire l'ettagono. Centro in A e B con raggio $\overline{AB}$ si deter=minano C e D e quindi le diagonali $\overline{AC} = \overline{BD} = \overline{AE} = \overline{BF} = \overline{VC} = \overline{DV}$.

$\overline{EF}$ parallela ad $\overline{AB}$ dista da $\overline{AB}$ i $\frac{65}{37}$ di $\overline{AB}$ con appros=simazione maggiore della presente costruzione, infatti con questa costruzione la distanza è 19,32416198.., mentre

la vera distanza con lato = 11 è 19,32435333... , infine

se prendiamo i $\frac{6,5}{3,7}$ 11 = si ha: 19,32432432.

Però il rapporto: 65/37 non si presta ad una comoda

costruzione dell'ottagono: (lato $\overline{AB}$ = 37 ; distanza da $\overline{EF}$ = 65)

Costruzioni più precise si hanno utilizzando la tabella.

Lo studio delle funzioni

1) Semplificazioni

Data una funzione: $\boxed{y=f(x)}$, la primissima cosa da effettuare è vedere se è possibile semplificarla, in ogni caso metterla in una forma conveniente alla discussione. Ciò si fa scomponendo in binomi i prodotti notevoli ed i polinomi divisibili; evidenziando, per quanto possibile, le condizioni di "zero", cioè i valori della "x" che azzerano una qualsiasi parte dell'espressione: $f(x)$. Occorre però fare molta attenzione che le semplificazioni non invalidino l'espressione.

Esempio:

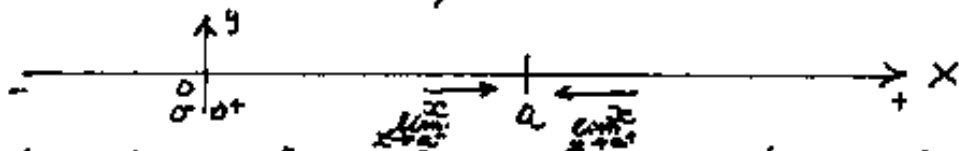
$$y=\sqrt{\frac{2x^2-10x+12}{x^2+4x-21}}=\sqrt{\frac{2(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+7)}}=\sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$$

2) Valori assoluti

Una volta semplificata l'espressione, la cosa da fare è togliere i simboli di valore assoluto, dividendo le ascisse in campi ove

non opera il valore assoluto (e quindi può essere tolto perchè non modifica la funzione) ed in campi ove opera (cioè trasforma in positivi i valori negativi); in questi campi, ciò che "opera" il valore assoluto, possiamo farlo noi moltiplicando per (-1) e togliere il valore assoluto.

Limiti a destra, limiti a sinistra.

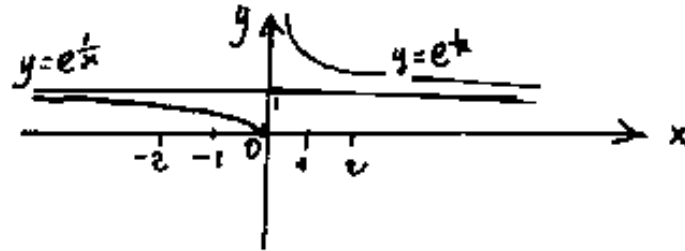
Per completare lo studio dei limiti, è bene rilevare che, se la x tende al limite "a", per valori crescenti di x (limite a sinistra di "a") oppure se tende ad "a" per valori decrescenti di x (limite a destra di "a"), il risultato può essere nettamente diverso.

Se il limite è lo "zero" anziché dire limite a sinistra di zero, si indica: $\left(\lim_{x\to 0^-}\right)$ che vuol dire che la x tende a zero per valori negativi. Viceversa: $\left(\lim_{x\to 0^+}\right)$ vuol dire che la x tende a zero per valori positivi. Questa notazione è stata estesa a $\left(\lim_{x\to a^-}\right)$ e $\left(\lim_{x\to a^+}\right)$ ed esprime rispettivamente il limite a sinistra di "a" cioè per valori $<$ "a", e limite a destra di "a" cioè per valori $>$ "a". Alcuni testi (facendo confusione) intendono il segno (-) come valori di x decrescente e il segno (+) come valori di x crescenti. (Mettiamoci d'accordo!)

segno (+) come valori di x crescenti. (Mettiamoci d'accordo!).

Esempio:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{0}} = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y = e^{\frac{1}{x}}$ $y = e^{\frac{1}{x}}$

3) Espressioni del tipo: $\left(f_x\right)^{\psi(x)}$ al limite possono portare alle forme indeterminate:

0^0 ; 1^∞ ; ∞^0

in questi casi si cerca: $\lim_{x \to \ldots} \left(\ln \left| \left(f(x)\right)^{\psi(x)} \right| \right)$

Esempi:

1) $\lim_{x \to 0} \left(x^x\right) = 0^0 \to \lim_{x \to 0} \left(\ln \left| x^x \right| \right) = \lim_{x \to 0} \left((x) \ln |x| \right) =$

$= (0)(-\infty) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln |x|}{1/x} \right) = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \to 0}{}^H \left(\frac{1/x}{-1/x^2} \right) =$

$= \lim_{x \to 0} \left(-x \right) = 0$ ma, se: $\lim_{x \to 0} \left(\ln \left| x^x \right| \right) = 0$

allora: $\lim_{x \to 0} \left(x^x\right) = e^0 = 1$

2) $\lim_{x \to 1} \left(x^{\frac{1}{1-x}} \right) = 1^\infty \to \lim_{x \to 1} \left(\ln \left| x^{\frac{1}{1-x}} \right| \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\ln |x|}{1-x} \right) = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x \to 1}{}^H \left(\frac{\frac{1}{x}}{-1} \right) = -1$; se: $\lim_{x \to 1} \left(\ln \left| x^{\frac{1}{1-x}} \right| \right) = -1$

allora: $\lim_{x \to 1} \left(x^{\frac{1}{1-x}} \right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$$3)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{tg(x)}\right) = \boxed{\infty^0} \quad : \quad \lim_{x\to 0}\left(\ln\left|\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}\right|\right) = \lim_{x\to 0}\left(tg(x)\ln\left|\frac{1}{x}\right|\right) =$$

$$= 0\cdot\infty; \quad = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg(x)}{x}\cdot x\ln|x|\right) = -\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\ln|x|\right) = (0)(-\infty)$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln|x|}{1/x}\right) = \frac{+\infty}{\infty} = -\lim_{x\to 0}{}^{H}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}(2x) = 2\cdot 0 = 0$$

se $\lim_{x\to 0}\left(\ln\left|\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}\right|\right) = 0$ allora: $\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}\right) = e^0 = 1}$

Per eliminare l'indeterminazione: $\boxed{\infty - \infty}$ può anche essere utile sostituire:

$$\boxed{\left(f_{(x)} - \varphi_{(x)}\right) = f_{(x)}\left(1 - \frac{\varphi_{(x)}}{f(x)}\right)}$$

se il limite del rapporto: $\frac{\varphi_{(x)}}{f_{(x)}} = 1$, si può porre $f_{(x)} = \frac{1}{1/f_{(x)}}$ ed avremo:

$$\lim\left(\frac{1 - \frac{\varphi_{(x)}}{f_{(x)}}}{1/f_{(x)}}\right) = \frac{0}{0}$$ indeterminazione che sappiamo eliminare.

Se: $\left(f_{(x)} - \varphi_{(x)}\right)$ ammette un limite finito L, il limite $e^{\left(f_{(x)} - \varphi_{(x)}\right)}$ cioè: $\lim\left(e^{\left(f_{(x)} - \varphi_{(x)}\right)}\right) = \lim\left(\frac{e^{f_{(x)}}}{e^{\varphi_{(x)}}}\right) = \exp(L)$ per cui: $L = \ln\left(\exp(L)\right)$.

Esempio:

$$\boxed{\lim_{x \to 0}\left(\operatorname{cotg}(x) - \frac{1}{x}\right)} = \boxed{\infty - \infty}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\operatorname{cotg} x\left(1 - \frac{1/x}{\operatorname{cotg} x}\right)\right] =$$

$= \lim_{x \to 0}\left[\operatorname{cotg}(x)\left(1 - \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)\right] = \boxed{\infty \cdot 0}$ $\left(\text{essendo: } \lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}\right) = 1\right)$; allora

poniamo: $\cot g(x) = \dfrac{1}{1/\cot g(x)}$; avremo:

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \frac{1/x}{\cot g(x)}}{1/\cot g(x)} \right) = \frac{0}{0}$$

essendo:

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \frac{\operatorname{tang}(x)}{(x)}}{tg(x)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \operatorname{tang}(x)}{x \operatorname{tang}(x)} \right) = \rightarrow$$

$$= \lim_{x \to 0}{}^{H} \left(\frac{1 - \frac{1}{\cos^2(x)}}{tg(x) + \frac{x}{\cos^2(x)}} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x) \cos x + x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x) + \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} \right)} \right)$$

$$= \left(\frac{-\operatorname{sen}(0)}{\cos(0) + \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} \right)} \right) = \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = \left(\frac{0}{2} \right) = \boxed{0}$$

Artifizi per poter applicare i teoremi di De l'Hospital nelle varie forme indeterminate

Abbiamo già visto le applicazioni per le forme indeterminate: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

1) Supponiamo che le funzioni si presentino sotto forma di prodotto: $(f_{(x)}) \cdot (\varphi_{(x)})$ ove sostituendo il limite si abbia la forma indeterminata: $\boxed{0 \cdot \infty}$.

In questi casi basta porre: $f_{(x)} \cdot \varphi_{(x)} = \dfrac{f_{(x)}}{1/\varphi_{(x)}}$.

Esempio:

$$\lim_{x \to 0} \left(x \cdot \ln|x|\right) = (0)(-\infty) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln|x|}{1/x}\right) = \lim_{x \to 0}{}^{H} \left(\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-1/x^2}\right) = -x = 0$$

---

2) Se abbiamo $\lim \left(f_{(x)} - \varphi_{(x)}\right) = \boxed{\infty - \infty}$

si può sostituire:

$$\left(f_{(x)} - \varphi_{(x)}\right) = \left(\frac{\frac{1}{\varphi_{(x)}} - \frac{1}{f_{(x)}}}{\frac{1}{f_{(x)} \cdot \varphi_{(x)}}}\right)$$

Tal volta si può raggiungere lo stesso risultato applicando particolari artifizi.

[illegible]

Esempio:

$$\lim_{x \to \infty} \left(x - (x+1) e^{\frac{1}{(x+1)}} \right) = \infty - \infty =$$

aggiungo e tolgo 1:

$$\lim_{x \to \infty} \left(-1 + (x+1) - (x+1) e^{\frac{1}{(x+1)}} \right) = -1 + \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1 - e^{\frac{1}{(x+1)}}}{(x+1)^{-1}} \right) = -1 + \frac{0}{0} =$$

$$= -1 + \lim_{x \to \infty}^{*} \left(\frac{\frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{(x+1)}}}{\frac{-1}{(x+1)^2}} \right) = -1 + \lim_{x \to \infty} \left(- e^{\frac{1}{(x+1)}} \right) = -1 - e^0 = \boxed{-2}$$

In questo caso l'applicazione della formula sostitutiva avrebbe portato a calcoli laboriosi.

Teoremi di De L'Hospital

I due teoremi di De L'Hospital esprimono:

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{f_{(x)}}{\varphi_{(x)}}\right) = \lim_{x \to a}\left(\frac{f'_{(x)}}{\varphi'_{(x)}}\right) = \lim_{x \to a}\left(\frac{f''_{(x)}}{\varphi''_{(x)}}\right) = \dots \lim_{x \to a}\left(\frac{f^{n}_{(x)}}{\varphi^{n}_{(x)}}\right).$$

"Il limite del rapporto di due funzioni, se esiste, è uguale al limite del rapporto delle rispettive derivate"

Il primo teorema si riferisce al $\lim_{x \to a}\left(\frac{f_{(x)}}{\varphi_{(x)}}\right) = \frac{0}{0}$.

Il secondo teorema si riferisce al $\lim_{x \to a}\left(\frac{f_{(x)}}{\varphi_{(x)}}\right) = \frac{\infty}{\infty}$.

I due teoremi trovano utile applicazione nel calcolo dei limiti quando si cade in forme indeterminate (ed è una notevole applicazione delle derivate).

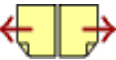
Esempi:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) = \frac{0}{0} \to = \lim_{x \to 0}{}^{H}\left(\frac{\cos(x)}{1}\right) = \left(\frac{\cos(0)}{1}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{(1-\cos x)}{x^2}\right) = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0}{}^{H}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{2x}\right) = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} H'\left(\frac{\cos(x)}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)-x\cos(x)}{x^2\operatorname{sen}(x)}\right)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}{}^{H}\left(\frac{\cos(x)-(\cos x-x\operatorname{sen}x)}{2x\operatorname{sen}(x)+x^2\cos(x)}\right)=\lim_{x\to 0}{}^{H}\left(\frac{x\operatorname{sen}(x)}{x(2\operatorname{sen}x+x\cos x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2+\left(\frac{x}{\operatorname{sen}x}\right)\cos(x)}\right)=\frac{1}{3}$$

Il teorema di l'Hospital vale in tutti i casi di forme indeterminate. Vediamo ora alcuni artifizi per poter applicare i due teoremi di L'Hospital anche in forme indeterminate che non si presentano come rapporto.

Generalizzazione delle formule di Cauchy e di Lagrange

Nella formula di Cauchy poniamo: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ essa diventa:

$$\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{\varphi'(x_0+\theta h)}; \quad (\text{con } 0<\theta\leq 1)$$

Consideriamo derivabili le funzioni fino alle derivate di ordine n, e poniamo θ in relazione al grado della derivata. Cioè poiché una derivata successiva è funzione della precedente possiamo scrivere:

$$\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+\theta_1 h)}{\varphi'(x_0+\theta_1 h)} = \frac{f''(x_0+\theta_2 h)}{\varphi''(x_0+\theta_2 h)} = \dots = \frac{f^n(x_0+\theta_n h)}{\varphi^n(x_0+\theta_n h)}$$

$$\boxed{\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f^n(x_0+\theta_n h)}{\varphi^n(x_0+\theta_n h)}}$$ formula generalizzata di Cauchy

se poniamo: $\varphi(x) = (x-x_0)^n$, si ha: $\varphi'(x) = n(x-x_0)^{n-1}$;

$\varphi''(x) = n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$ .... $\boxed{\varphi^n(x) = n!}$

$\varphi(x) = (x-x_0)^n$; $\varphi(x_0+h) = (x_0+h-x_0)^n = h^n$

sostituendo nella generalizzata di Cauchy abbiamo:

sostituendo nella generalizzata di Cauchy abbiamo:

$$\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} = \frac{f(x_0+h)}{h^n} = \frac{f^n(x_0+\theta_n h)}{n!}$$

da cui:

$$\boxed{f(x_0+h) = \frac{h^n}{n!} f^n(x_0+\theta_n h)}$$

formula generalizzata di Lagrange

Formule importanti per lo sviluppo accorciato di Taylor.

Rolle dovrà azzerarsi anche la sua derivata in punto intermedio dell'intervallo A,B. Se "C" è tale punto dovrà essere: $\frac{dF_{(x_c)}}{dx} = 0$ cioè derivando l'espressione:

$$\frac{dF_{(x)}}{dx} = f'_{(x_c)} - K\,\varphi'_{(x_c)} = 0$$

e posto: $x_c = (x_0 + \theta h)$ avremo:

$$\boxed{\frac{f'_{(x_0+\theta h)}}{\varphi'_{(x_0+\theta h)}} = K = \frac{f_{(x_0+h)} - f_{(x_0)}}{\varphi_{(x_0+h)} - \varphi_{(x_0)}}}$$

e resta dimostrato il teorema.

Facciamo un esempio:

Sia: $f_{(x)} = sen(x)$; $\varphi_{(x)} = cos(x)$; $f'_{(x)} = cos(x)$; $\varphi'_{(x)} = -sen(x)$.

$$\frac{sen(x_B) - sen(x_A)}{cos(x_B) - cos(x_A)} = (\text{per le prostaferesi}) = \frac{2\cos\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right) sen\left(\frac{x_B-x_A}{2}\right)}{-2\, sen\left(\frac{x_B+x_A}{2}\right) sen\left(\frac{x_B-x_A}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x_B+x_A}{2}\right)}{-sen\left(\frac{x_B+x_A}{2}\right)} = \frac{f'_{(x)}}{\varphi'_{(x)}} \quad \text{per } x = x_c = \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) = (x_0 + \theta h)$$

cioè: $= (x_A + \theta(x_B - x_A))$; per $\left(\theta = \frac{1}{2}\right)$; $= \left(x_A + \frac{x_B}{2} - \frac{x_A}{2}\right) = \left(\frac{x_B + x_A}{2}\right)$

$= (X_A + \theta(X_B - X_A))$, per $\theta = \frac{1}{2}$: $= (X_A + \frac{X_B}{2} - \frac{X_A}{2}) = \frac{X_A + X_B}{2}$

In questo caso è stato possibile individuare anche il valore di θ. Se $f_{(x)} = x^n$; $\varphi_{(x)} = \ln|x|$ si ha:

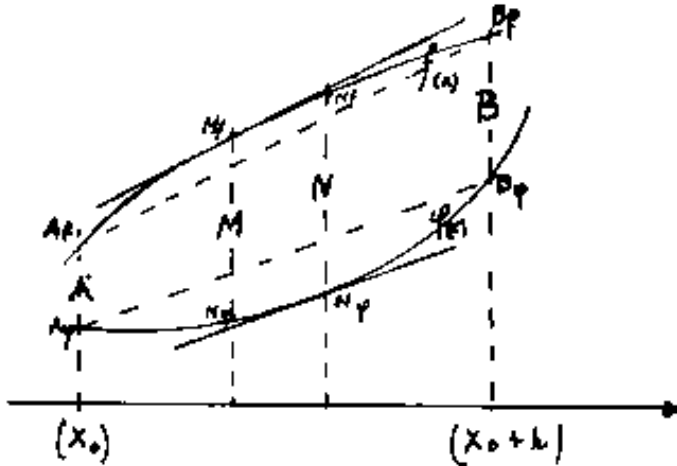
$$\frac{X_B^n - X_A^n}{\ln|X_B| - \ln|X_A|} = \frac{n X_c^{n-1}}{1/X_c} = n X_c^n = n\left(X_A + \theta(X_B - X_A)\right)^n$$ da cui:

$$\frac{(X_B^n - X_A^n)^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln\left|\left(\frac{X_B}{X_A}\right)^n\right|\right)^{\frac{1}{n}}} = X_A + \theta(X_B - X_A)$$ da cui θ, ma non il suo valore numerico se non fissiamo numericamente XA e XB.

Le pendenze medie, costanti in A, B, cioè:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\Delta f}{h} \quad ; \quad \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=\frac{\Delta\varphi}{h}$$

implicano che anche il loro rapporto è costante.

$$\text{cioè: } \frac{\Delta f}{\Delta\varphi}=\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}=K}=\text{costante}.$$

Dalla figura notiamo:

in A, M: $f'(x) > \frac{\Delta f}{h}$; $\varphi'(x) < \frac{\Delta\varphi}{h}$

per cui: $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} > \left(\frac{\Delta f}{\Delta\varphi}=K\right)$

in N, B: $f'(x) < \frac{\Delta f}{h}$; $\varphi'(x)$ $\frac{\Delta\varphi}{h}$

per cui: $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} < \left(\frac{\Delta f}{\Delta\varphi}=K\right)$

Per la continuità delle funzioni e quindi del loro rapporto e del rapporto delle loro derivate: $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. che, per passare da: $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}>K$ (tratto A, M) a $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}<K$ (nel tratto N, B) necessariamente dovrà passare per un punto ove $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=K$, (nel caso in figura tale punto C è nel tratto M, N)

La dimostrazione del teorema di Cauchy, in

generale considera la funzione:

$$F_{(x)} = \left(f_{(x)} - f_{(x_0)}\right) - K\left(\varphi_{(x)} - \varphi_{(x_0)}\right)$$

Che dovrà azzerarsi. Si nota che $F = 0$ sia per $(x = x_0)$ (si annullano i termini in parentesi), sia per $(x = (x_0 + h))$ per la: $(\Delta f = K \Delta \varphi)$. Ma se agli estremi dell'intervallo AB la $F_{(x)}$ assume lo stesso valore, Per il teorema di

Questo si verifica in una molteplicità di fatti ordinari: per esempio: Qualunque sia la strada per salire (o scendere) dal paese A al paese B, posti a quota diversa, in almeno un punto intermedio, la pendenza della strada corrisponde alla pendenza media. – La portata di un fiume è variabile durante l'anno, ma vi è almeno un istante, di quell'anno, in cui la portata corrisponde con quella media. – Con ciò si giustificano le denominazioni date alla formula.

Teorema di Cauchy

«Date due funzioni: $f_{(x)}$ e $\varphi_{(x)}$, finite e continue in un intervallo A,B di ampiezza $\Delta x = h = (x_B - x_A)$, ed in tale intervallo le derivate di $f_{(x)}$, e $\varphi_{(x)}$ non si annullino mai contemporaneamente, posto $(x_A = x_0)$ ed $(x_B = x_0 + h)$, in almeno un punto interno all'intervallo AB si ha:

$$\frac{(f_{(x_0+h)} - f_{(x_0)})}{(\varphi_{(x_0+h)} - \varphi_{(x_0)})} = \frac{f'_{(x_0+\theta h)}}{\varphi'_{(x_0+\theta h)}}$$

Cioè: Il rapporto degli incrementi delle funzio-

Cioè: Il rapporto degli incrementi delle funzioni equivale al rapporto delle derivate in almeno un punto C ($x_c = x_0 + \theta h$) intermedio ad AB."

Cerchiamo di capire il teorema facendo una dimostrazione con due particolari funzioni, notando che al primo membro si hanno valori finiti.

La formula:

$$\Delta y = \Delta x \left[f'(x_A + \theta \Delta x) \right]$$

è detta

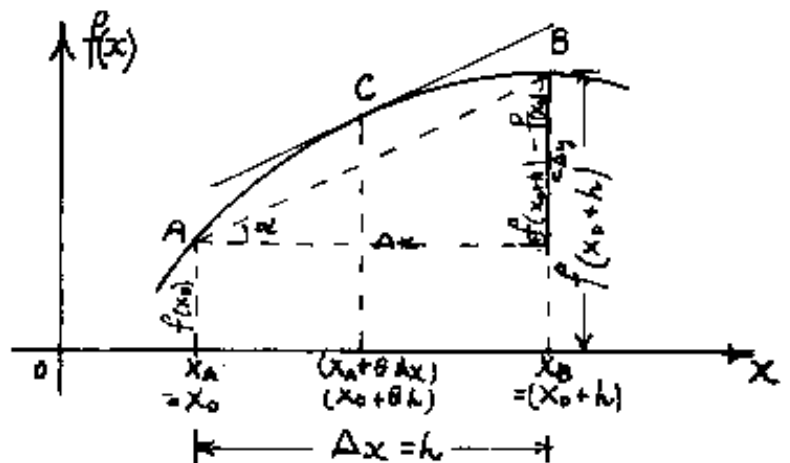
Formula del valor medio

od anche:

Formula degli accrescimenti finiti

Si noti che l'accrescimento finito Δy della funzione, per passare da A a B è dato dall'accrescimento finito $\Delta x = (x_B - x_A)$ per la derivata in un punto intermedio dell'intervallo A, B.

$(\Delta y = \Delta x \, \text{tang}(\alpha))$.

I testi di matematica che ordinariamente indicano con "h" l'incremento: $\Delta x = (x_B - x_A)$ scrivono la formula suddetta nella forma:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h[f'(x_0 + \theta h)]$$

in analogia col rapporto incrementale, ove impiccolen

in analogia col rapporto incrementale, ove impiccolendo la figura fino a renderla quasi puntiforme, e per: $h \to 0$; $x_0 \to (x_0+\theta h) \leftarrow x_0$, la tangente in C può rimanere invariata mantenendosi parallela ad $\overline{AB} \to \overline{C}$.

Si può anche dire che la <u>"pendenza" media</u> in $\overline{A,B}$ corrisponde alla <u>"pendenza"</u> della $y=f(x)$ <u>in almeno un punto intermedio ad A,B.</u>

deve "recuperare" per arrivare a B; il che implica che fra pendenza maggiore, e pendenza minore, intermedia vi sia la stessa pendenza di $\overline{AB}$.

Le dimostrazioni che abbiamo esposte sono "rigorose", però sono formulate in modo tutt'altro che conforme al linguaggio dei testi di matematica. La nostra dimostrazione si basa sul fatto che per passare da valori positivi a valori negativi, con continuità in campo finito, si deve necessariamente passare per zero. (Anche attraverso infinito si può passare da valori positivi a negativi o viceversa).

Il teorema di Lagrange che noi abbiamo espresso nella forma:

$$\boxed{\frac{(y_B - y_A)}{(X_B - X_A)} = y'_{(c)} = tg(\alpha).}$$

può scriversi:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_{(C)}} = f'(x_c)$$

Poiche "C" è intermedio ad A, B (e la funzione è continua) se indichiamo con "θ" un numero minore di uno il prodotto: $\theta\Delta x$ sarà un segmento minore di Δx; perciò:

$$x_C = x_A + \theta\Delta x$$

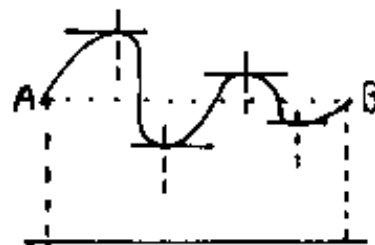
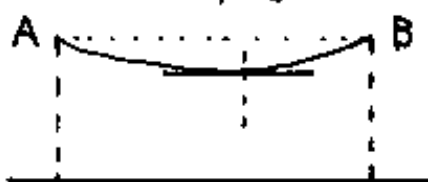
cioè:

$$\Delta y = \Delta x \left[f'(x_A + \theta\Delta x) \right]$$

I teoremi di Rolle, di Lagrange, di Cauchy.

Teorema di Rolle:

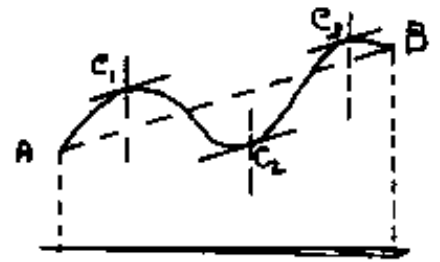
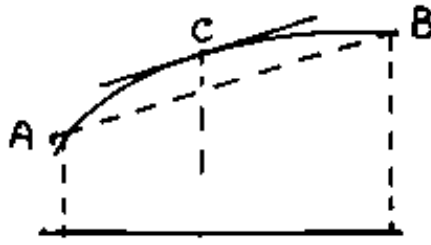
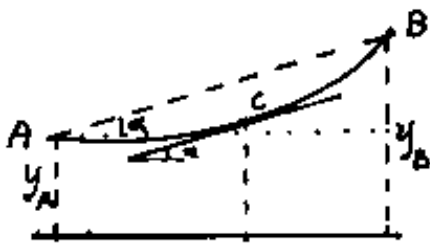
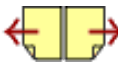
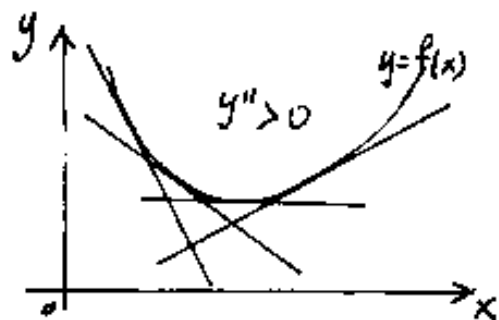
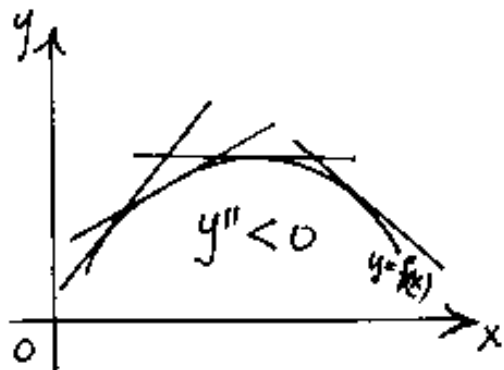
"Se in un intervallo A, B, di una $y=f(x)$, si ha che: $y_A = y_B$, e la funzione è continua nell'intervallo; allora, in almeno un punto interno, si ha: $y'=0$ (cioè tangente orizzontale".

Le figure evidenziano il teorema:

Se partendo da A, $y'<0$ (decresce la $y=f(x)$) per arrivare a B deve risalire ($y'>0$); ma, se $y=f(x)$ è continua in A,B; la y' per passare da $y'<0$ a $y'>0$ deve attraversare: $y'=0$.

Analogamente le altre.

Teorema di Lagrange:

"Se in un intervallo A,B di una $y=f(x)$, continua in A,B si ha che: $y_A \neq y_B$, allora, in almeno un punto C, interno

ma che: $y_A \neq y_B$, allora, in almeno un punto C, interno ad A,B, si ha: $y'_{(c)} = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}$ (cioè si ha una tangente parallela alla congiungente $\overline{AB}$.)".

Se partendo da A verso B si "scosta" dalla pendenza di $\overline{AB}$,

ne infinitesima "dx" ciò perchè "y" è una ordinata.
Ma: $d(y') = y'' d(x)$; mentre il segno di "$d(y')$" corrisponde al segno di: "y''"; $d(y')$ non è una variazione di ascissa, ma una variazione di "pendenza" avremo quindi che se: $y''>0$ una iniziale pendenza negativa, si attenuerà per diventare pendenza positiva, avremo per $y'=0$ e $y''>0$ un minimo della f(x) che volgerà la concavità verso l'alto per $y''>0$

Analogamente, se $y''<0$ la pendenza diminuirà, e se inizialmente positiva passando per zero ove: $f'(x)=0$ è un massimo della f(x) che volgerà la concavità verso il basso

per $y''<0$. Nelle figure abbiamo disegnato alcune rette tangenti alla $y=f(x)$ per evidenziare il variare con x

della pendenza.

Se la $y=f(x)$ è un polinomio di grado "n" ogni derivata diminuisce di uno il grado fino ad arrivare ad una costante la cui derivata è zero e non esistono derivate ulteriori: $y=x^n$; $y'=nx^{n-1}$; $y''=n(n-1)x^{n-2}$; ... $y^{n-1}=n!\,x$; $y^n=n!$; $y^{n+1}=0$. ($y=x^4$; $y'=4x^3$; $y''=12x^2$; $y'''=24x$; $y^{IV}=24$; $y^{V}=0$) (ove: $24=4!$). Mentre in altre funzioni (per es $y=\operatorname{sen}(x)$) l'ordine arriva all'oo

Flessi

I disegni delle $y, y', y'' \dots y^n$ sono "arrangiati" in modo che i punti zero, i punti di max e min, nonché i punti di flesso ricadano nel campo del grafico, in modo, che appaia come ad un max di una $f^n_{(x)}$ corrisponda $f^{n+1}_{(x)} = 0$ ed $f^{n+2}_{(x)} < 0$; un min di $f^n_{(x)}$ avrà $f^{n+1}_{(x)} = 0$ ed $f^{n+2}_{(x)} > 0$. Un flesso orizzontale di $f^n_{(x)}$ avrà $f^{n+1}_{(x)} = 0; f^{n+2}_{(x)} = 0$; un flesso ascendente di $f^n_{(x)}$ avrà $f^{n+1}_{(x)} > 0; f^{n+2}_{(x)} = 0$; un flesso discendente di $f^n_{(x)}$ avrà $f^{n+1}_{(x)} < 0; f^{n+2}_{(x)} = 0$.

Quindi l'essere: $f^{n+2}_{(x)} = 0$ significa punto di flesso.

Si hanno tre tipi di flesso:

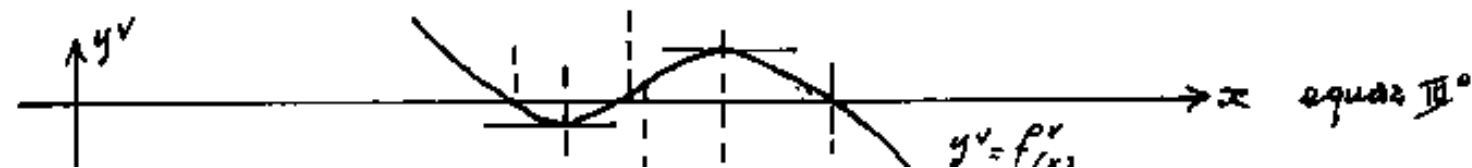
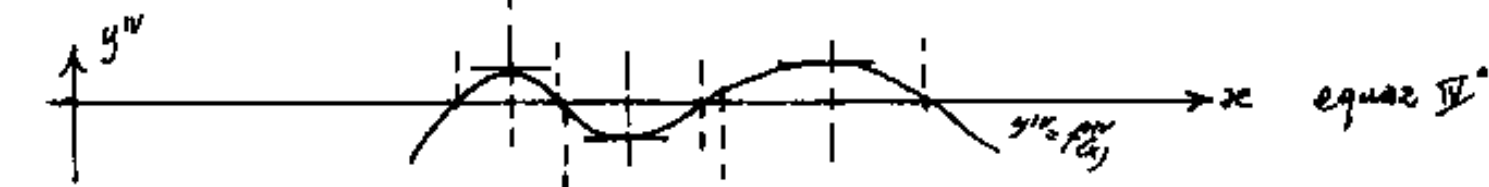
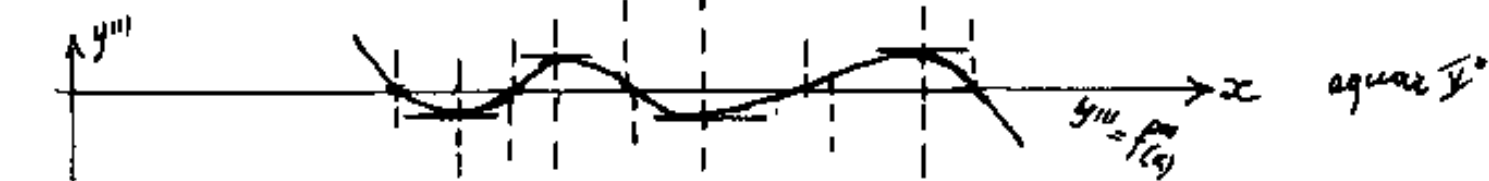
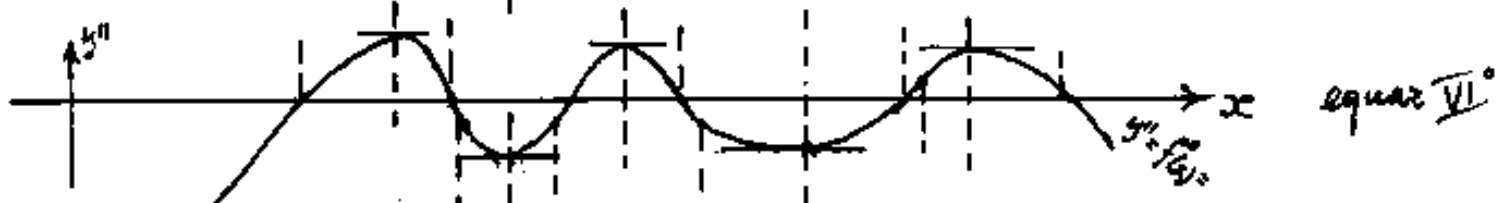
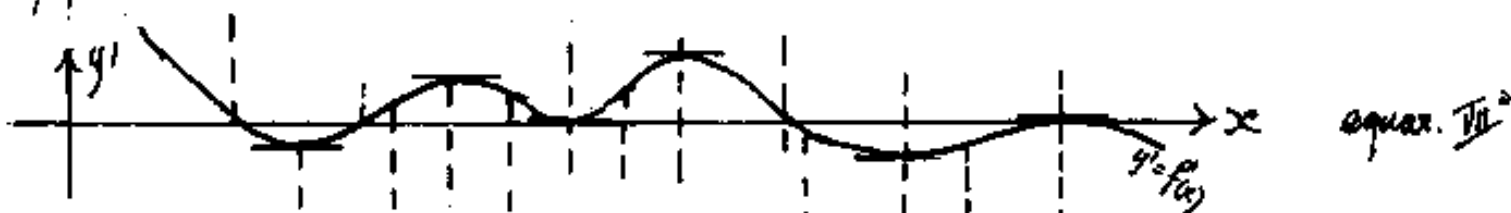
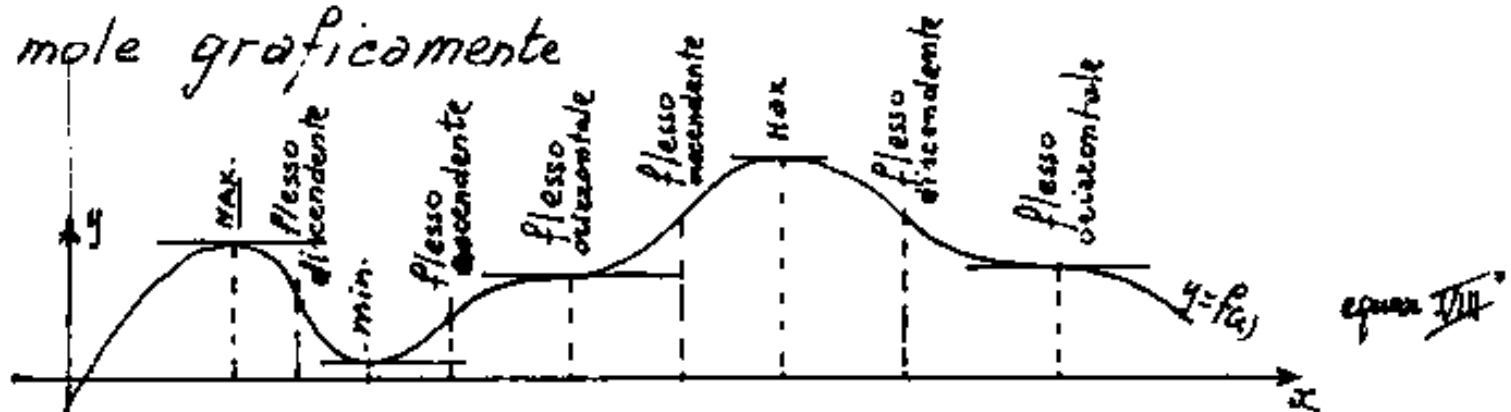
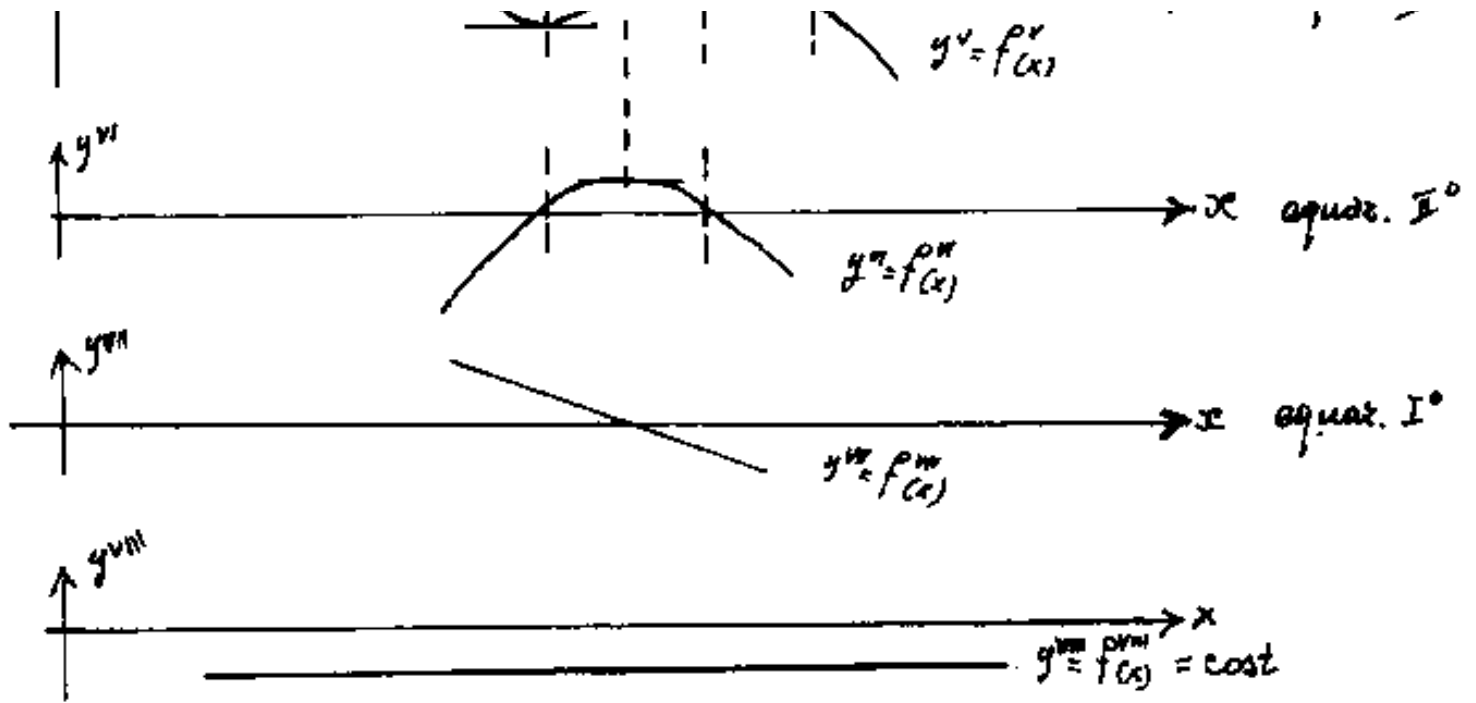
1) ascendente $f'_{(x)} > 0$; $f''_{(x)} = 0$ < crescente → $f'''_{(x)} > 0$; decrescente → $f'''_{(x)} < 0$

2) orizzontale $f'_{(x)} = 0$; $f''_{(x)} = 0$ < crescente → $f'''_{(x)} > 0$; decrescente → $f'''_{(x)} < 0$

3) discendente $f'_{(x)} < 0$; $f''_{(x)} = 0$ < crescente → $f'''_{(x)} > 0$; decrescente → $f'''_{x} < 0$

Questa "crescenza" o "decrescenza" della $f''_{(x)}$ è meglio chiarirla partendo da altri punti di vista. Dobbiamo, fin da adesso, familiarizzare

vista. Dobbiamo, fin da adesso, familiarizzare con i differenziali: la $y' = dy/dx$, dobbiamo riguardarla come: $dy = y' \cdot dx$ ove essendo $dx = |dx|$ cioè essenzialmente positivo, il segno di "dy" dipende dal segno di y'; infatti $y' > 0 \rightarrow dy > 0 \rightarrow y =$ crescente; $y' < 0 \rightarrow dy < 0 \rightarrow y =$ decrescente ; ove il "dy" è il segmentino infinitesimo di variazione di ordinata, causato dalla variazione

Vogliamo però vedere meglio queste derivate successive, partendo da una generica: $y = f(x)$, rappresentiamole graficamente

Le derivate di ordine n.

Continuando il discorso precedente, ci doman=diamo: "Com'é possibile distinguere, quando $y' = f'(x) = 0$, se trattasi di un Max., o un min., o un flesso orizzontale?" Noi possiamo, una volta trovata $f'(x)$, uguagliarla a zero e ricavare per quali valori di x la $f'(x) = 0$. Se in questi punti

la $f'(x)$ passa da >0 a <0 $\rightarrow$ $f'(x)$ = decrescente (Max)

la $f'(x)$ passa da <0 a >0 $\rightarrow$ $f'(x)$ = crescente. (Min)

la $f'(x)$ già >0 resta >0 o viceversa, si ha un flesso.

Per vedere tuttoció senza calcolare punti dell'in=torno, si puó considerare la $f'(x)$ come una nuova funzione e farne la derivata che sará detta: "Derivata seconda" e si indicherá con: $y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$.

quindi:

se: $y'' < 0 \rightarrow f'(x)$ = decrescente; $\rightarrow f(x)$ = max

$y'' > 0 \rightarrow f'(x) =$ crescente ; $\rightarrow f(x) =$ min

$$y'' = 0 \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & \rightarrow f(x) = \text{flesso orizzontale} \\ f'(x) \neq 0 & \rightarrow f(x) = \text{flesso inclinato} \end{cases}$$

Abbiamo introdotto il concetto di derivata seconda e quindi ripetendo ancora il processo di derivazione, abbiamo il concetto di derivata di ordine "n".

Il calcolo dei massimi e dei minimi relativi di una funzione

Abbiamo visto che la derivata di una funzione in un punto, rappresenta la "pendenza" della grafica della funzione in quel punto.

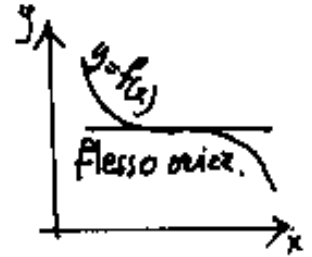
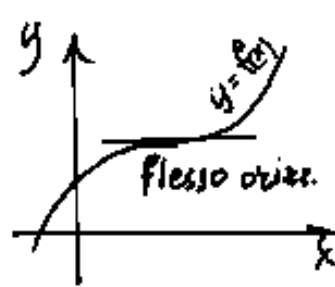
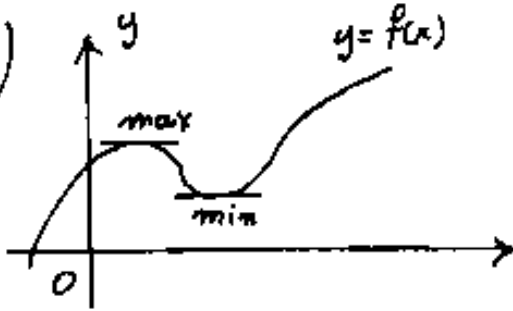
Ciò vuol dire che:

se la derivata $y' > 0$ allora $y = f(x)$ è crescente

" $y' < 0$ " $y = f(x)$ è decrescente

E per $[y' = 0]$ cosa vuol dire? "Che non è né crescente, né decrescente; è quel punto ove la $f(x)$ cessa di essere crescente per diventare decrescente, (Punto di massimo relativo); oppure è quel punto ove la $f(x)$ cessa di essere decrescente per diventare crescente, (Punto di minimo relativo). Ma possono verificarsi anche altri due casi e cioè quando appare

che la $f(x)$ ha cessato di crescere, anziché decre=scere riprende di nuovo a crescere. Viceversa quando appare aver cessato di decrescere, inizia di nuovo a decrescere. (Sono due punti di flesso oriz=zontale.)

y
y = f(x)
max
min
O
y
y = f(x)
flesso oriz.
x
y
y = f(x)
flesso oriz.
x

$$\boxed{y = \ln(x)} \quad ; \quad x = e^y \quad ; \quad \frac{dx}{dy} = e^y = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{y' = \frac{1}{x}}$$

Risultato che avevamo già trovato facendo il limite del rapporto incrementale.

$$\boxed{y = a^x} \qquad x = \log_a(y)$$ od anche, per il cambio di base logaritmica, oppure prendendo i logaritmi naturali della espressione iniziale:

$$\ln(y) = \ln(a^x) = x\ln(a) \Rightarrow x = \frac{\ln|y|}{\ln|a|} ;$$

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{1}{\ln|a|}\right)\left(\frac{1}{y}\right) = \left(\frac{1}{\ln|a|}\right)\left(\frac{1}{a^x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{y' = \ln|a| \cdot a^x}$$

$$\boxed{y = \operatorname{argsenh}(x)} \qquad x = \operatorname{senh}(y) \qquad \frac{dx}{dy} = \cosh(y)$$

$$\cosh(y) = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(y)} = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}$$

sia: $y = \arg f(x)$ poniamo subito: $x = f(y)$

derivando:

$$x' = \frac{dx}{dy} = f'(y) = f'(\arg f(x))$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(\arg f(x))}$$

cioè: "la derivata di una funzione inversa è il reciproco della deriva della funzione diretta sostituendo alla y l'espressione in x."

Esempi di derivate di funzioni inverse

$y = \arcsen(x)$; $x = \sen(y)$; $\frac{dx}{dy} = \cos(y)$

$\cos(y) = \sqrt{1 - \sen^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}$ sostituendo:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{y = \arccos(x)} \quad ; \quad x = \cos(y) \quad ; \quad \frac{dx}{dy} = -\operatorname{sen}(y) = -\sqrt{1-\cos^2(y)} =$$

$$\frac{dx}{dy} = -\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad \underline{\frac{dy}{dx} =} \quad \boxed{y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{y = \operatorname{arctg}(x)} \quad ; \quad x = \operatorname{tg}(y) \quad ; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2(y)} = 1 + \operatorname{tg}^2(y) = (1+x^2)$$

$$\underline{\frac{dy}{dx} =} \quad \boxed{y' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Derivata di funzioni inverse

Data una espressione matematica in cui sia esplicitata la y, che risulta uguagliata ad una espressione in x, si suol dire che la y è funzione della x e si scrive: $y = f(x)$.
Se con opportuni passaggi riusciamo in quella espressione ad esplicitare la x, (che risulterà uguagliata ad una espressione in y), abbiamo che la x è funzione della y: $(x = \varphi(y))$ e questa funzione è detta: <u>funzione inversa</u> della $y = f(x)$.
Alcuni testi simboleggiano: $x = f^{-1}(y)$ la funzione inversa, ma è improprio perché: $f^{-1}(y) = \frac{1}{f(y)}$ e può portare ad ambiguità. Una notazione migliore è: $\boxed{x = \arg f[y]}$ che si legge: "x è l'argomento che nella funzione f dà y". (Argomento = variabile indipendente).

Esempi di funzioni inverse:

$$y = x^n \longrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$

$$y = e^x = \exp(x) \longrightarrow x = \ln|y|$$

$$y = \ln|x| \longrightarrow x = \exp(y) = e^y$$

$y = \ln|x| \longrightarrow x = \exp(y) = e^y$

$y = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow x = \operatorname{arcsen}(y)$

$y = \operatorname{senh}(x) \longrightarrow x = \operatorname{argsenh}(y)$.

Si noti che per le funzioni circolari si usa "arc" e si legge: "arco (cioè angolo in radianti) il cui seno è y" mentre per le funzioni iperboliche si usa "arg" e si legge: "argomento il cui seno iperbolico è y".

Derivata esponenziale

Sia $y = (u)^v$ con u e v funzioni della x

Si noti diverse modalità di funzioni in esponente:

$$y = \varphi(x)^{\psi(x)} \quad ; \quad y = \varphi(x^{\psi(x)}) \quad ; \quad y = (\varphi(x))^{\psi(x)}$$

ad evitare confusione consideriamo:

$$y = (u)^v$$

prendendo i logaritmi:

$$\ln|y| = v \ln|u|$$

derivando:

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln|u| + v \frac{1}{u} u'$$

cioè:

$$y' = y\left(v' \ln|u| + \frac{v}{u} u'\right)$$

$$(3) \quad y' = (u)^v \left\{ v' \ln|u| + \frac{v u'}{u} \right\}$$

(questa espressione viene chiamata derivata logaritmica)

esempio: $y = (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{sen}(x)}$

$$y' = (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{sen}(x)} \left\{ \cos(x) \ln|\operatorname{sen}(x)| + \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} \right\}$$

$$y' = (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{sen}(x)} \left\{ \cos(x) \left(\ln|\operatorname{sen}(x)| + 1 \right) \right\}$$

"La derivata di una funzione esponenziale è data dal prodotto della funzione stessa che moltiplica la somma dei prodotti: della derivata dell'esponente per il logaritmo naturale della base, più la derivata della base per il rapporto fra esponente e base."

Derivata logaritmica

Ordinariamente i testi di matematica chiamano derivata logaritmica quella che noi chiameremo derivata esponenziale, che è una conseguenza della derivata logaritmica.

Consideriamo la funzione:

$$y = \ln|f(x)|$$

Per la derivata di funzione di funzione si ha:

$$y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Cosa vuol dire tuttociò?:

se: $y = f(x)$ anche: $\ln|y| = \ln|f(x)|$

derivando: (funzione di funzione)

$$\frac{1}{y} y' = \left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{d\left(\ln|f(x)|\right)}{dx}$$

da cui:

$$y' = y\left(\ln|f(x)|\right)'$$

ed anche:

$$y' = f(x)\left(\ln|f(x)|\right)' \quad (1)$$

$$y' = f(x)(\ln|f(x)|)' \quad (1)$$

"La derivata di una funzione è data dal prodotto della funzione per la derivata del logaritmo naturale della funzione stessa" esempio: $y = e^{f(x)}$ sappiamo che, per la derivata di funzione di funzione, $y' = f'(x)\, e^{f(x)}$ allo stesso risultato si giunge applicando la (1) infatti: $\ln|e^{f(x)}| = f(x)$, e $(\ln|f(x)|)' = f'(x)$ per cui $y' = (e^{f(x)})(f'(x))$.

(Noi chiamiamo la (1) derivata logaritmica)

Il procedimento può essere esteso a più operatori consecutivi ed è utilissimo ricordarlo in forma differenziale perché di grande ausilio nel procedimento inverso della differenziazione che è l'integrazione ove il simbolo $\int$ elide il simbolo d.

$\int dy = y$ ma: $dy = y'dx$ per cui: $y = \int y'dx$.

esempio: ($\log = \ln$)

$$\frac{d(\ln|tg^2(5x^3)|)}{d(tg^2(5x^3))} = \frac{1}{tg^2(5x^3)}$$

$$\frac{d(tg^2(5x^3))}{d(tg(5x^3))} = 2\,tg(5x^3)$$

$$\frac{d(tg(5x^3))}{d(5x^3)} = \frac{1}{\cos^2(5x^3)}$$

$$\frac{d(5x^3)}{dx} = 15\,x^2$$

moltiplicando membro a membro i primi termini ed i secondi

moltiplicando membro a membro i primi termini ed i secondi termini si ha:

$$\frac{d\left(\ln|tg^2(5x^3)|\right)}{d(x)} = \frac{2\,tg(5x^3)}{tg^2(5x^3)}\,\frac{15x^2}{\cos^2(5x^3)} = \frac{30x^2}{sen(5x^3)\cos(5x^3)}$$

$$= \frac{60x^2}{sen(10x^3)}$$ cioè se: $y = \ln|tg^2(5x^3)|$ $y' = \frac{60x^2}{sen(10x^3)}$

Il procedimento inverso: $\int d(5x^3) = 5x^3 = \int (15x^2)\,dx$

cioè: $\int 15x^2 dx = \int d(5x^3)$ è portare sotto segno differenziale.

L'espressione differenziale sarà:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

può scriversi:

$$\frac{d(u)}{(v)} = d\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{u}{v^2}dv$$

come esempio applicativo del quoziente di funzioni consideriamo:

$$y = tang(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

$$y' = \frac{(cos(x))(cos(x)) - (-sen(x))(sen\,x)}{(cos(x))^2}$$

$$y' = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \left(\frac{1}{cos^2(x)}\right) = \left(1 + tg^2(x)\right)$$

4) Funzione di funzione

$$y = f(\varphi_{(x)})$$

$$y' = \frac{d(f(\varphi_{(x)}))}{dx} \cdot \frac{d(\varphi_{(x)})}{d(\varphi_{(x)})}$$

$$y' = \left(\frac{d(f(\varphi(x)))}{d(\varphi(x))}\right)\left(\frac{d(\varphi(x))}{d(x)}\right)$$

Quindi la derivata di funzione di funzione è data dal prodotto delle derivate eseguite rispetto all'operatore più prossimo. Facciamo un esempio:

$$y = \ln|\mathrm{sen}(x)| \rightarrow \left(\frac{d(\ln|\mathrm{sen}(x)|)}{d(\mathrm{sen}(x))}\right)\cdot\left(\frac{d(\mathrm{sen}(x))}{d(x)}\right) = \left(\frac{1}{\mathrm{sen}(x)}\right)(\cos x) = \mathrm{ctg}(x).$$

$$y' = \mathrm{ctg}(x)$$

ricordando che:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad ; \quad u' = \frac{du}{dx} \quad ; \quad v' = \frac{dv}{dx}$$

sostituendo ed eliminando dx: $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} \right)$

si ha:

$$\boxed{d(uv) = u\,dv + v\,du}$$

importantissima espressione differenziale

---

3) Quoziente di funzioni

$$\boxed{y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{f(x_0+h)}{\varphi(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} \right) \right]$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\varphi(x_0) \cdot f(x_0+h) - \varphi(x_0+h) \cdot f(x_0)}{\varphi(x_0) \cdot \varphi(x_0+h) \cdot h} \right)$$

aggiungendo e togliendo: $(f(x_0)) \cdot (\varphi(x_0))$ si ha: (essendo: $\lim_{h \to 0} (\varphi(x_0+h)) = \varphi(x_0)$)

$$y' = \lim \left[\varphi(x_0) \left(f(x_0+h) - f(x_0) \right) - f(x_0) \left(\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) \right) \right] \frac{1}{\quad}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\varphi(x_0)\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) - f(x_0)\left(\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)\right)}{h} \right] \frac{1}{\varphi^2(x_0)}$$

$$\boxed{y' = \left(\frac{f'(x_0)\,\varphi(x_0) - \varphi'(x_0)\,f(x_0)}{\varphi^2(x_0)} \right)}$$

ponendo: $f(x) = u$; $\varphi(x) = v$

$$\boxed{y = \frac{u}{v}} \rightarrow \boxed{y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$$

Le regole di derivazione di funzioni

1) Somma e differenza di funzioni

se: $$y = f_{(x)} \pm \varphi_{(x)} \pm g_{(x)} \dots$$

$$y' = f'_{(x)} \pm \varphi'_{(x)} \pm g'_{(x)}$$

cioè si deriva termine a termine.

---

2) Prodotto di funzioni

se: $$y = \left(f_{(x)}\right)\left(\varphi_{(x)}\right)$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\left(f_{(x_0+h)}\right)\left(\varphi_{(x_0+h)}\right) - \left(f_{(x_0)}\right)\left(\varphi_{(x_0)}\right)}{h} \right)$$

aggiungendo e togliendo $\left(f_{(x_0)}\right)\left(\varphi_{(x_0+h)}\right)$ si ha:

$$y' = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\left(\varphi_{(x_0+h)}\right)\left(f_{(x_0+h)} - f_{(x_0)}\right) + \left(f_{(x_0)}\right)\left(\varphi_{(x_0+h)} - \varphi_{(x_0)}\right)}{h} \right)$$

poiché: $\lim_{h \to 0} \left(\varphi_{(x_0+h)}\right) = \varphi_{(x_0)}$;

$$y' = \varphi_{(x_0)} \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{f_{(x_0+h)} - f_{(x_0)}}{h} \right) + f_{(x_0)} \lim_{h \to 0} \left(\frac{\varphi_{(x_0+h)} - \varphi_{(x_0)}}{h} \right)$$

$$y' = \left(\varphi_{x_0}\right)\left(f'_{x_0}\right) + \left(f_{(x_0)}\right)\left(\varphi'_{(x_0)}\right)$$

Si suol porre: $f_{(x)} = u$; $\varphi_{(x)} = v$ per cui:

se: $y = u \cdot v$

$$y' = u'v + v'u$$

$$y = \log_a |x|$$

ricordando il cambio di base logaritmica $y = (\ln|x|)(\log_a|e|)$

ed essendo costante il fattore: $(\log_a|e|)$

$$y' = (\log_a|e|)\,\frac{1}{x}$$

essendo: $\log_a|e| = 1/\ln|a|$

$$y' = \frac{1}{x\ln|a|}$$

Se avessimo fatto il rapporto incrementale:

$$y' = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\log_a|x_0+h| - \log_a|x_0|}{h}\right)$$

saremmo arrivati:

$$y' = \lim_{(h/x_0)\to 0}\left(\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{(h/x_0)}\right)\frac{1}{x_0}$$

ove ricordando che: $\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\theta}{a^\theta-1}\right) = 1/\ln|a|$

avremo:

avremo:

$$\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\log_a |(1+\theta)|}{(\theta)} \right) = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\theta}{a^\theta - 1} \right) = 1/\ln|a|$$

Cioè mentre per calcolare le derivate ci avvaliamo di limiti noti; inversamente avvalendoci di derivate note possiamo calcolare altri limiti.

È evidente che per fare ciò dobbiamo sapere quando le espressioni sotto segno di valore assoluto sono >0 e quindi il valore assoluto può essere tolto; e quando le espessioni sotto segno di valore assoluto sono <0 e quindi occorre moltiplicarle per (-1) per poter togliere il simbolo di valore assoluto. Per decidere ciò basta porre = zero le espressioni entro valore assoluto e calcolare per quali valori di x si azzerano, oppure calcolare se vi sono asintoti verticali per le espressioni entro valore assoluto; perché il cambio di segno avviene attraverso lo zero o attraverso infinito, (per $f(x)$ continue). I punti di ascissa in cui le espressioni sotto abs. cambiano segno dividono i campi in cui non opera abs da quelli in cui opera. Questi campi possono a loro volta dividersi in campi di esistenza.

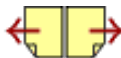
Per esempio l'espressione:

$\sqrt{|2x^2-10x+12|}$ [illegible]

$$\sqrt{\frac{|2x^2-10x+12|}{(x^2+4x-21)}} = \sqrt{\frac{2|(x-3)(x-2)|}{(x-3)(x+7)}}$$

non possiamo semplificarla finché non abbiamo tolto il valore assoluto al numeratore; esso si azzera per $(x = 2)$ e per $(x = 3)$ ed è > 0 per $x < 2$ ed $x > 3$, mentre è < 0 per: $2 < x < 3$ ed in questo campo dobbiamo cambiare segno per togliere il valore assoluto.

nei tre campi abbiamo quindi:

$-\infty < x < 2$ vale $\sqrt{\frac{2(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+7)}} = \sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$.

per $x=2$ non è semplificabile il denominatore $\sqrt{\frac{|0|}{(x-3)(x+7)}}$

$2 < x < 3$ vale $\sqrt{\frac{2(2-x)}{(x+7)}}$ (immaginaria)

per $x=3$ (forma indeterminata) al limite immaginaria

$3 < x < \infty$ vale $\sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$

---

3) Campi di esistenza

Una funzione non esiste se è immaginaria (radicali ad indice di radice pari, con radicandi negativi.)

non esiste se è il logaritmo di un numero negativo

non esiste se il suo valore è infinito (∞) cioè: $\left(\frac{1}{0}\right)$

non esiste se funzione inversa impossibile (per esempio: $y = \arcsen(2)$ → poiché il seno ha come massimo valore 1, non esiste nessun angolo (arc) il cui seno sia 2).

non esiste nessuna funzione $y = f(x)$ tale che: $e^{f(x)} < 0$, cioè che "e" elevata ad $f(x)$ dia luogo ad un numero negativo

L'esempio di cui sopra ci fa' subito vedere nel

campo: $-\infty < x < 2$ per $x \leq -7$ il denominatore < 0

perciò: $-\infty < x \leq 7$ la funzione esiste: $y = \sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$

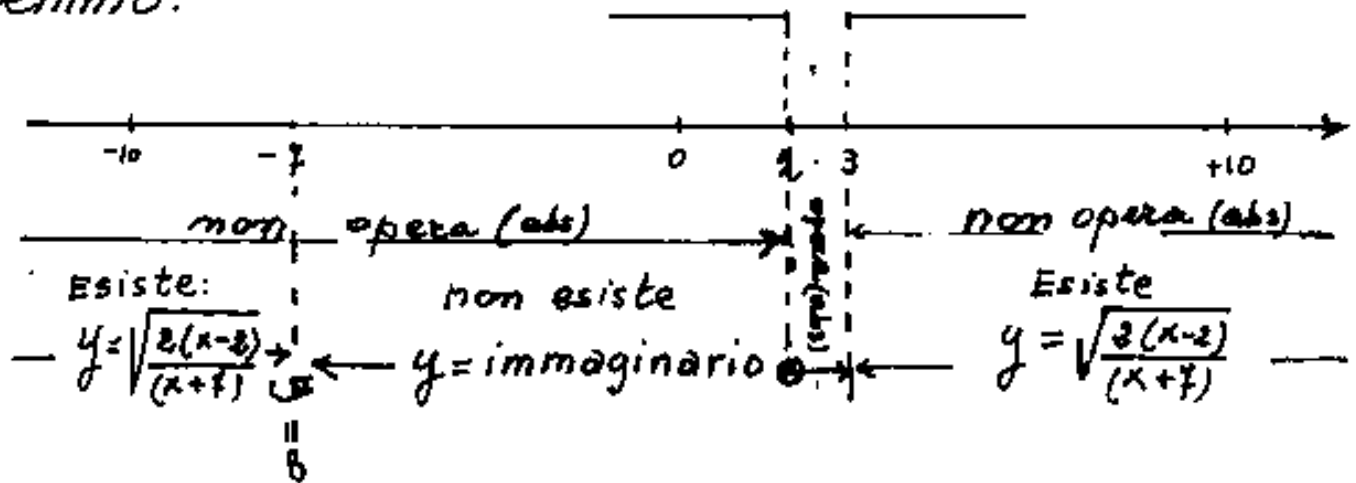
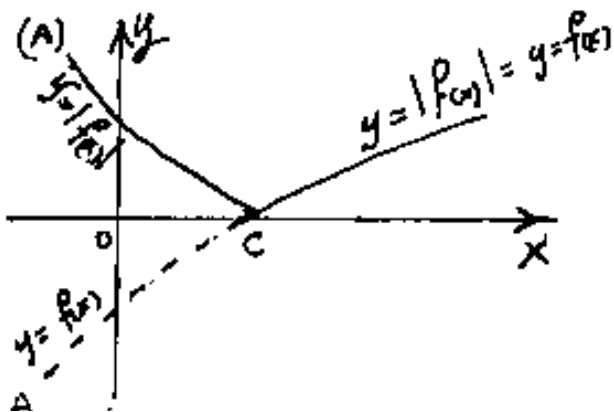
per $x = -7$ " " diverge all'infinito

$-7 < x < 2$ la funzione non esiste (immaginaria)

$x = 2$ $y = \frac{0}{i}$ (punto isolato?) (implicherebbe discontinuità)

$2 < x \leq 3$ la funzione non esiste (immaginaria)

$3 \leq x < \infty$ la funzione esiste $y = \sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$

Le suddivisioni delle ascisse in campi di esistenza è opportuno siano graficizzate. Per l'esempio fatto avremmo:

occorre fare molta attenzione ai punti di separazione ove opera ed ove non opera il valore assoluto perché il limite a destra ed a sinistra delle derivate sono in genere diversi, perché il valore assoluto ribalta a positive le ordinate negative; per es.

nella figura a fianco produce una cuspide nel punto C della curva sulle ascisse, avendo ribaltato il tratto AC.

[illegible]

Molto importante il punto $x=2$ della funzione soprascritta:

$$y = \sqrt{\frac{|(x-3)(x-2)|}{(x-3)(x+7)}}$$

Per effetto di (abs) il numeratore è sempre >0, mentre il denominatore per $x<3$ è <0; per cui y = immaginaria. Nel punto $x=2$, si ha uno: 0^- (zero nel campo negativo); e quindi è dubbio se 2 possa considerarsi <u>un punto isolato</u>: $y=0$.

Poiché (secondo i matematici) per la continuità di una funzione nel punto "a" basta che $\lim_{x \to a^-} (f(x)) = \lim_{x \to a^+} (f(x))$; nel nostro caso non solo i limiti a destra ed a sinistra sono uguali per la $f(x)$, ma lo sono anche per la $f'(x)$ (Per noi una $f(x)$ è continua in un punto quando, non solo i limiti destro e sinistro della funzione in quel punto sono uguali, ma lo sono anche i limiti delle derivate di ordine n qualsiasi da 1 a n). Nel punto $x=2$ la nostra funzione già immaginaria per $x<2$, permane immaginaria per $x>2$ e per $x=2$ è zero immaginario è da vedere se lo zero immaginario coincide con lo zero reale. La questione è interessante per chi non crede dogmaticamente di possedere la Verità. Noi crediamo che a seconda di quali principi accettiamo per veri, accetteremo, l'una o l'altra impostazione. "Scusi, ma lo zero è un numero?" ... (ne abbiamo già parlato).

---

4) Operazioni preparatorie all'esposizione dati

[illegible]

Le suddivisioni del campo, danno già un'idea dell'entità della funzione, per cui fatto uno schema grafico come quello sopra detto, sarà bene approntare una tabella la cui prima colonna (o prime due colonne, se vogliamo tener

evidenziate le divisioni dipendenti dal valore assoluto, da quelle dipendenti dai campi di esistenza)..
Quindi affiancata la colonna delle x, che partendo da "$-\infty$" passa per "zero" ed arriva a "$+\infty$".
Fissati questi tre punti, occorrerà, per ogni divisione di campo, scrivere due volte la (x) ove divide: una volta per il campo precedente, una volta per il campo susseguente; perché i valori di y, y', y'' possono essere diversi per i due campi. Ancora adiacenti le colonne delle: y; y'; y''; infine una colonna NOTE, ove potremo segnarsi elementi da evidenziare.
Per esempio, la funzione di cui abbiamo trattato ci porterebbe alla seguente tabella:

campi		x	y	y'	y"	NOTE
(abs)	esistenza					
	Reale	$-\infty$	$\sqrt{2}$	0		(asintoto orizzontale)
	[illegible]					

	$y=\sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$	-7	∞	∞		(asintoto verticale)
$y=\sqrt{\frac{2(x-2)}{3(x+7)}}$	(immaginaria)	-7	i			
		0	i			
		2	i			
		2	$0/i$	∞		(punto singolare ?)
$\sqrt{\frac{\Delta>0}{\Delta<0}}$	(immaginaria)	2	i			
		3	i			
$y=\sqrt{\frac{2(x-2)}{(x+7)}}$	Reale	3	$\sqrt{1/5}$			
		$+\infty$	$\sqrt{2}$	0		(asintoto orizzontale)

una volta impiantata la tabella, lasciando spazi nei campi, conviene studiare separatamente campo per campo, poiché possono avere espressioni diverse.

5) Calcolo di altri punti caratteristici

Se è possibile calcoliamo per quali valori di x si ha: $y=0$.
Si fa la derivata prima della funzione e si uguaglia a zero, per trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo; quindi si fa la derivata seconda di $f(x)$ e vi si riporta l'ascissa per cui si ha $f'(x)=0$, ciò consente di distinguere i max ($y''<0$) dai min ($y''>0$); mentre uguagliando a zero $f''(x)=0$ possiamo trovare per quali x si verificano i punti di flesso cioè quei punti ove cambia la curvatura da verso l'alto a verso il basso o viceversa.

Notare che, per il teorema di Rolle, se in uno stesso campo vi sono due diverse x per cui $y=0$, necessariamente intermedio vi è una x per cui $y'=0$ (oppure $y'=\infty$).

mente intermedio vi è una x per cui $y'=0$ (oppure $y'=\infty$).
analogamente, se in uno stesso campo vi sono due $y'=0$ intermedio vi è $y''=0$.

Tutte queste x caratteristiche, ed i conseguenti valori di y, y', y'' si riportano ordinatamente in tabella. (Campo per campo).

Può capitare che uguagliando a zero la y', si

trovi una x che è fuori del campo di validità della ($y=f(x)$) trattata è chiaro che tale valore non si riporta in tabella, ed a fianco ad esso si scrive: "Fuori campo" per indicare che non deve essere considerato.

Può anche capitare che per risolvere una espressione, sia stato necessario elevarla a quadrato; poiché ciò facendo abbiamo introdotto una radice, occorre fare la verifica SEMPRE!! di tutti i risultati per vederne la validità, sia come espressione, sia come appartenenza al campo. La verifica si effettua semplicemente sostituendo.

6) Calcolo di asintoti

Un asintoto non è altro che una retta tangente la curva $y=f(x)$ all'infinito. Perciò la sua equazione è del tipo:

$$y = mx + q$$

ove: $\boxed{m = f'_{(x_\infty)}}$ quindi per prima cosa dobbiamo accertare se esiste il limite: $\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(f'_{(x)} \right)}$

1) Se non esiste il limite, non esistono asintoti. (la formula in questi casi può portare ad assurdi)

2) $f'_{(\infty)} = \infty$ l'asintoto è verticale e all'∞ (non esistono asintoti in campo finito)

3) $f'_{(\infty)} = 0 = m$ esiste un asintoto orizzontale (parallelo all'asse delle x)

4) $f'_{(\infty)} \neq 0 = m$: <u>esiste un asintoto inclinato di $\alpha = \mathrm{arctg}(m) = \mathrm{arctg}(f'_{\infty})$</u>

5) <u>Per gli eventuali asintoti verticali in campo finito, per essi si verificherà</u> $y'_{(x_0)} = \infty$; $y_{(x_0)} = \infty$.

Torniamo ai nostri asintoti reali inclinati od orizzontali per i quali: $m = f'_{(x \to \infty)}$. La loro equazione sarà:

$$y = f'_{(\infty)} X + q$$

equazione però comune a tutte le rette parallele inclinate dell'angolo: $\alpha = \mathrm{arctg}(f'_{(\infty)})$; ove q = coefficiente di traslazione lineare per ora indeterminato. Il nostro asintoto però è tale che la $(f(x))$ ed: $(f'_{(\infty)}(x) + q)$ all'infinito debbono avere la stessa ordinata per cui il:

$$\lim_{x \to \infty} (f(x)) = \lim_{x \to \infty} ((f'_{(\infty)})x + q)$$

cioè essendo q = costante:

$$q = \lim_{x \to \infty} (f(x)) - \lim_{x \to \infty} (f'_{(\infty)}).$$

$$q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - f'_{(\infty)}x)$$

noto "q" l'intera equazione dell'asintoto è nota.

Quindi le equazioni degli asintoti possono essere:

$y = q$ — asintoto orizzontale $(f'_{(\infty)} = 0)$

$x = p$ — asintoto verticale $f_{(p)} = f'_{(p)} = \infty$

$y = mX + q$ — asintoto inclinato $m = f'_{(\infty)}$; $q = \lim_{x \to \infty} (f_{(x)} - f'_{(\infty)} x)$

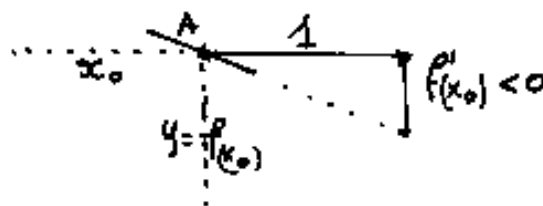
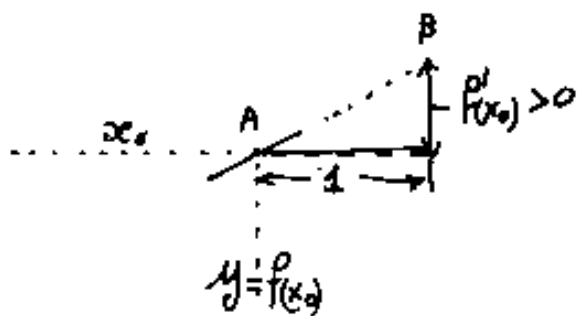
$y = mx$ — asintoto inclinato per l'origine assi $m = f'_{(\infty)}$; $q = 0$

Il grafico della funzione

Completata la tabella, con tutti i punti caratteristici compresi, max, min, flessi, punti zero, asintoti, curvature siamo in grado di fare un grafico in scala.

Consideriamo un generico punto di ascissa x_0 per esso è stato calcolato y che riportiamo in ordinate su x_0; è stato calcolato y' che riportiamo in ordinate a distanza: $(x_0 + \text{uno})$ in $(y \pm y'_{(\text{uno})})$ questo nuovo punto che indichiamo qui con B, mentre indichiamo con $A \equiv (x_0, f(x_0))$ non va segnato, ma serve per fare un trattino su A (direzione AB) che indica la direzione della tangente in A alla $f(x)$.

x_0, A, B, $f'_{(x_0)} > 0$, 1, $y = f(x_0)$

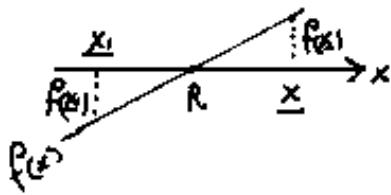
A, 1, x_0, $f'_{(x_0)} < 0$, $y = f(x_0)$

È evidente che $f'_{(x_0)}$ può essere $f'_{(x_0)} \gtrless 0$ per $f'_{(x_0)} = 0$ il

è evidente che $f'(x_0)$ può anche $f'(x_0) < 0$ per $f'(x_0) = 0$ il trattino sarà orizzontale ed indicherà un max, oppure un min, oppure un flesso orizzontale. Attenzione: il segmento $= 1$ può essere preso in qualsiasi scala anche diversa da quella del grafico purché $f'(x_0)$ sia riportato in questa nuova scala, (Per il teorema di Talete l'inclinazione o pendenza della tangente in A non varia se il segmento "uno" ed il segmento $f'(x_0)$ sono doppi, tripli od n volte.

Abbiamo così una tratteggiata nei punti caratteristici, Qualora il grafico che tratteggia la curva presenti spazi troppo grandi fra un punto e l'altro per essere raccordati è bene infittire i punti calcolando qualche punto intermedio – riportando gli elementi in tabella – I punti intermedi da scegliere sono quelli di facile calcolo per $x = 0$; $x = 1$; qualora non siano essi punti notevoli già calcolati.

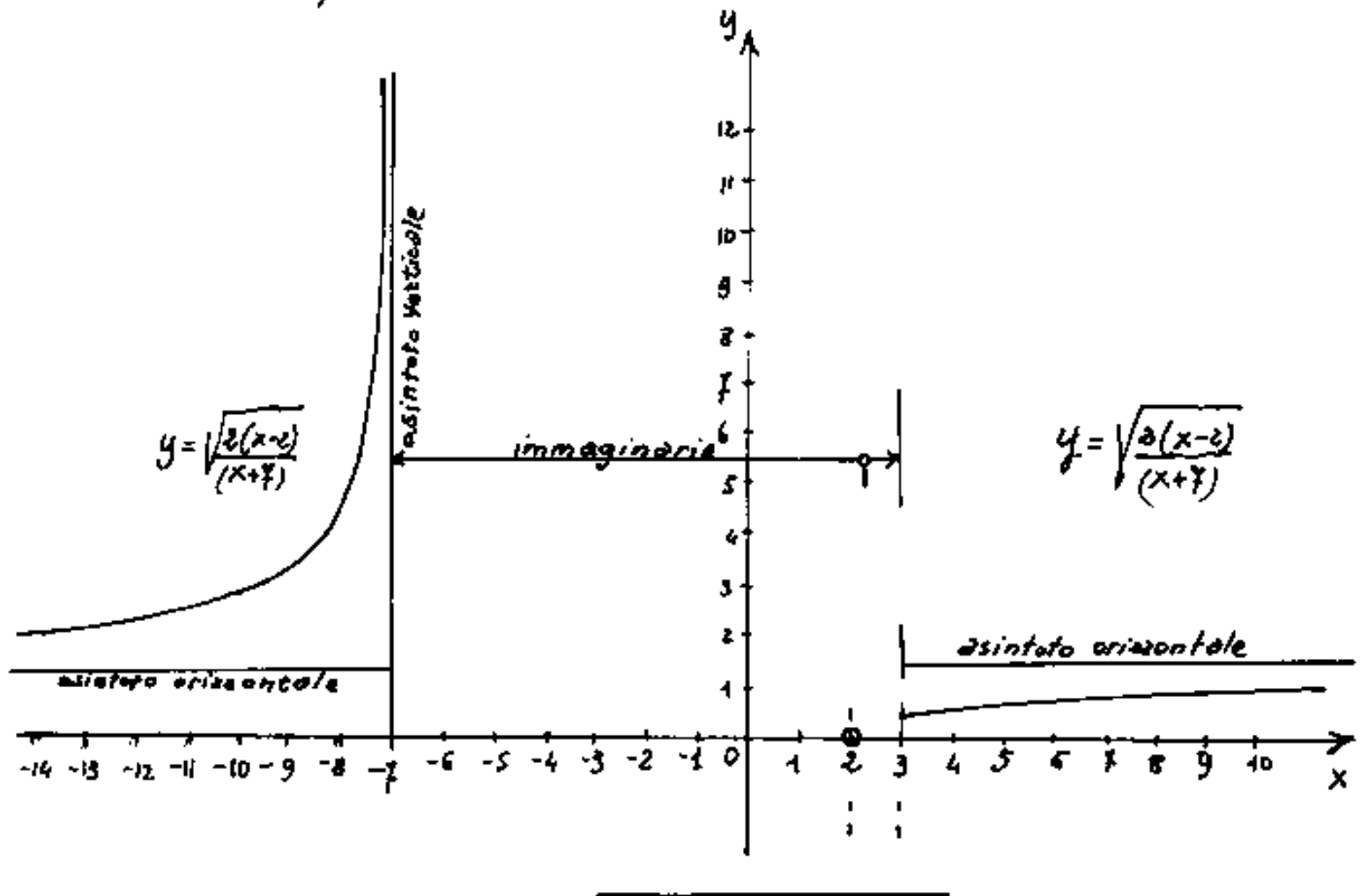
Tracciati quindi gli asintoti si raccorda la curva. Se è stato impossibile calcolare le ascisse x dai punti ove si azzera la funzione (cioè $f(x) = 0$) il grafico indicherà approssimativamente (se esistono) i punti in cui $f(x) = 0$. Volendo un più preciso valore numerico di tali radici, si legge, dal grafico il valore approssimato della radice "$\underline{x}$" e si sostituisce nella $y = f(x)$: avremo tre casi: $f(\underline{x}) > 0$; $f(\underline{x}) = 0$ (in questo caso il valore era esatto); $f(\underline{x}) < 0$. Opereremo come segue:

ω) ; $f(\underline{x}) < 0$. Opereremo come segue:

se $f(\underline{x}) > 0$ ed $f'(\underline{x}) > 0$ ci troviamo nella condizione:

del grafico a fianco, prenderemo un $\underline{x}_1$ più piccolo di $\underline{x}$ finché: $f(\underline{x}_1) < 0$ quindi riportando graficamente questi elementi si può costruire che ci dia un R più approssimato. Avremmo potuto anche approssimarsi ad R con: $R = (\underline{X})\left(1 - \frac{1}{f'(\underline{x})}\right)$. e ripeterla.

Il grafico della funzione che abbiamo portato ad esempio:

$$y = \sqrt{\frac{|2x^2 - 10x + 12|}{(x^2 + 4x - 21)}}$$

per valori positivi della radice:

Facciamo ora un'altro esempio di studio di

Facciamo ora un altro esempio di studio di funzione per evidenziare come siano indispensabili le verifiche.

ESERCIZIO

Studiare la funzione:

$$y = (x+1) - \sqrt{|(x+3)(x-5)|}$$

Osservazione: interpretiamo il segno "meno" davanti alla radice come fosse: $-|\sqrt{\ }|$.

Studio dei campi di esistenza.

Il radicando si annulla per $(x=-3)$ ed $(x=+5)$ esternamente alle radici il radicando è positivo e quindi possiamo togliere il valore assoluto; internamente alle radici moltiplichiamo per (-1) e togliamo il valore assoluto.

Quindi: Caso A) : $-\infty < x \leq -3$ e $5 \leq x < +\infty$ vale la formula:

$$y = (x+1) - \sqrt{(x+3)(x-5)}$$

caso B) : $-3 < x < 5$ vale la formula:

$$y = (x+1) - \sqrt{(x+3)(5-x)} \ .$$

Caso A)

Caso A)

calcolo delle $f(x)$ ai limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} \left((x+1) - \sqrt{(x+3)(x-5)}\right) = (-\infty + 1) - \sqrt{(\infty+3)(\infty-5)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left((x+1) - \sqrt{(x+3)(x-5)}\right) = -\infty - \infty = -2\infty = -\infty$$

per $x = -\infty \rightarrow y = -\infty$

$x = -3 \rightarrow y = -2$

$(-3 < x < +5)$ (caso B)

$x = +5 \rightarrow y = +6$

$$x = +\infty \rightarrow y = \lim_{x \to +\infty} \left[(x+1) - \sqrt{(x+3)(x-5)} \right] = \infty - \infty$$

forma indeterminata; (aggiungo e tolgo 2)

$$y = \lim_{x \to +\infty} \left[(x+3) - \sqrt{(x+3)(x-5)} - 2 \right] = -2 + \lim_{x \to \infty} (x+3) \left[1 - \sqrt{\frac{x-5}{x+3}} \right] =$$

forma indeterminata: $(-2 + \infty \cdot 0) = -2 + \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\left(1 - \sqrt{\frac{x-5}{x+3}}\right)}{\frac{1}{(x+3)}} \right) = -2 + \frac{0}{0}$

$$= -2 + \lim_{x \to \infty}^{H} \left(\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+3}{x-5}} \; \left(\frac{(x+3)-(x-5)}{(x+3)^2} \right)}{\frac{-1}{(x+3)^2}} \right) = -2 + \lim_{x \to \infty} \left(4\sqrt{\frac{x+3}{x-5}} \right) = -2 + 4 = +2$$

Il fatto che per $x \to +\infty$ la $y \to +2$ fa già prevedere la esistenza di un asintoto orizzontale.

Vediamo se esistono in questi campi $y = 0$

elevando a quadrato la $y = f(x) = 0$, si ha:

$$(x+1)^2 = (x+3)(x-5)$$

$$(\cancel{x^2} + 2x + 1) = (\cancel{x^2} - 2x - 15) \Rightarrow x = \frac{-16}{4} = -4$$

Il valore $(x=-4)$ rientra nel caso A) però avendo elevato a quadrato abbiamo introdotto una radice per cui occorre verificare (ciò si fa semplicemente sostituendo)

$$y=\left[(-4+1)-\sqrt{(-1)(-9)}\right]=(-3-3)=-6\neq 0$$

Il valore $(x=-4)$ non azzera $f(x)$. Poiché si è elevato a quadrato la radice ha perso il segno $(-)$ ed ha dato una radice che soddisfa $y=0$ se la radice è positiva $(+3-3=0)$.

Ciò vuol dire che nei campi del caso A) la f(x) non è mai zero.

Derivando si ha:

$$y' = 1 - \frac{(x-5)+(x+3)}{2\sqrt{(x+3)(x-5)}} = \left(1 - \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x+3)(x-5)}}\right)$$

nei punti limite:

$$x = -3 \rightarrow y' = +\infty \quad ; \quad x = +5 \rightarrow y' = -\infty$$

la curva arriva con tangente verticale.

Calcolo dei massimi o minimi

poniamo: $y' = 0$, elevando a quadrato ne consegue:

$$(x-3)(x-5) = (x-1)^2$$

$$x^2 - 2x - 15 = x^2 - 2x + 1$$

assurdo: $\boxed{-15 = +1}$ che indica che nei due campi del caso A) la y' non si annulla, cioè non vi sono nè massimi, nè minimi.

calcolo degli asintoti: (cerchiamo $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (y')$)

dividiamo ambo i termine della frazione per x

dividiamo ambo i termine della frazione per x

$$y' = 1 - \left(\frac{(x-1)}{\sqrt{(x+3)(x-5)}} \right) \begin{matrix} (1/x) \\ (1/x) \end{matrix} = \left(y' = 1 - \frac{1 - \left(\frac{1}{x}\right)}{\pm\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{15}{x^2}}} \right)$$

sostituendo ad $x: \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ abbiamo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (y') = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{+\sqrt{1}} = 0 = \text{asintoto orizzontale} \\ 1 - \dfrac{1}{-\sqrt{1}} = +2 = \text{asintoto inclinato: } (\text{tg}\alpha = 2) \end{cases}$$

Completiamo il calcolo degli asintoti, determinando il coefficiente di traslazione lineare "q"

Per l'asintoto orizzontale l'equazione è del tipo: $y = q$ che uguagliamo alla $y = f(x)$

$$q = x + 1 - \sqrt{(x+3)(x-5)}$$

separando ed elevando a quadrato:

$$[x + (1-q)]^2 = x^2 - 2x - 15$$

$$x^2 + (1-q)^2 + 2x(1-q) = x^2 - 2x - 15$$

dividendo per 2x:

$$\frac{(1-q)^2}{(2x)} + (1-q) = -1 - \frac{15}{2x}$$

sostituendo:

$$(x = \infty) \rightarrow (1-q) = -1 \quad \text{cioè:} \quad \boxed{q = 2}$$

valore che già conoscevamo come $\lim_{x \to +\infty} (f(x))$

L'equazione dell'asintoto è quindi: $y = 2$ e vale nel campo: $\boxed{5 < x < +\infty}$

Per l'altro asintoto l'equazione è $\boxed{y = 2x + q}$

per l'altro asintoto l'equazione è $\boxed{y = 2x + q}$

ove "q" è da determinarsi uguagliando con $f(x)$.

$$(2X+q) = (X+1) - \sqrt{(x+3)(x-5)}$$

elevando a quadrato dopo aver separato la radice:

$$(1-q-x)^2 = x^2-2x-15$$

$$\cancel{x^2} - 2x(1-q) + (1-q)^2 = \cancel{x^2} - 2x - 15$$

dividendo per $(2x)$ $\rightarrow$ $-(1-q) + \frac{(1-q)^2}{(2x)} = -1 - \frac{15}{(2x)}$; e per $x = \infty$

$$\cancel{-1} + q = \cancel{-1} \quad \rightarrow \quad \boxed{q = 0}$$

l'equazione dell'asintoto è quindi: $y = 2x$ e vale nel campo: $-\infty < x < -3$ se prolungassimo tale retta nel campo del caso B, noteremmo che passa per l'origine degli assi. (ma vale solo per il caso A).

caso B) vale nel campo: $-3 < x < 5$

$$y = (x+1) - \sqrt{(x+3)(5-x)}$$

ai limiti: per $(x = -3) \rightarrow (y = -2)$; $(x = +5) \rightarrow (y = +6)$

per $(x = 0) \rightarrow (y = 1 - \sqrt{15} = -2{,}87298\ldots)$

vediamo se esiste in questo campo una $y = f(x) = 0$

separando la radice ed elevando a quadrato si ha:

$$(x^2 + 2x + 1) = (-x^2 + 2x + 15)$$

da cui: $x = \pm\sqrt{7}$ al solito facciamo la verifica

sostituendo:

$$x = +\sqrt{7} \rightarrow y = (\sqrt{7}+1) - \sqrt{-7 + 2\sqrt{7} + 15} =$$

$$x = -\sqrt{7} \rightarrow y = (-\sqrt{7}+1) - \sqrt{-7 - 2\sqrt{7} + 15} =$$

$$x = \begin{cases} +\sqrt{7} \rightarrow y = (+\sqrt{7}+1) - \left(\sqrt{\frac{8+6}{2}} + \sqrt{\frac{8-6}{2}}\right) = \sqrt{7}+1 - \sqrt{7}-1 = 0 \\ -\sqrt{7} \rightarrow y = (-\sqrt{7}+1) - \left(\sqrt{\frac{8+6}{2}} - \sqrt{\frac{8-6}{2}}\right) = -\sqrt{7}+1 - \sqrt{7}+1 = -3{,}29 \end{cases}$$

Cioè solo: $\boxed{x = +\sqrt{7} = +2{,}64575}$ verifica: $y = f(x) = 0$

cioè: per $x = 2{,}64575 \rightarrow y = 0$

Derivando si ha:

$$y' = 1 - \frac{(5-x)-(x+3)}{2\sqrt{(x+3)(5-x)}} = 1 - \frac{-2x+2}{2\sqrt{(x+3)(5-x)}} =$$

$$\boxed{y' = 1 + \frac{(x-1)}{\sqrt{(x+3)(5-x)}}}$$

per: $(x = -3) \rightarrow y' = -\infty$; $(x = +5) \rightarrow y' = \infty$;

per: $(x = 0) \rightarrow y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{15}} = (+0{,}74180)$

Calcolo dei massimi e minimi (ponendo $y' = 0$

separando ed elevando a quadrato:

$$(x+3)(5-x) = (1-x)^2$$

$$(x^2 - 2x + 1) = (-x^2 + 2x + 15)$$

$$2x^2 - 4x - 14 = 0$$

$$x^2 - 2x - 7 = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+7}$$

$$x_1 = (1 + 2\sqrt{2}) = 3{,}828$$

$$x_2 = 1 - 2\sqrt{2} = -1{,}828$$

verifichiamo sostituendo:

per $x_1 = +3{,}82843 \rightarrow y' = 2$

per $x_1 = +3,82843 \rightarrow y' = 2$

per $x_2 = -1,82843 \rightarrow y' = 0$

per cui è valida solo $x_2 = -1,82843 \rightarrow y = -3,65685$

dalla tabella notiamo, (non avendo calcolato y'') che il punto è un minimo

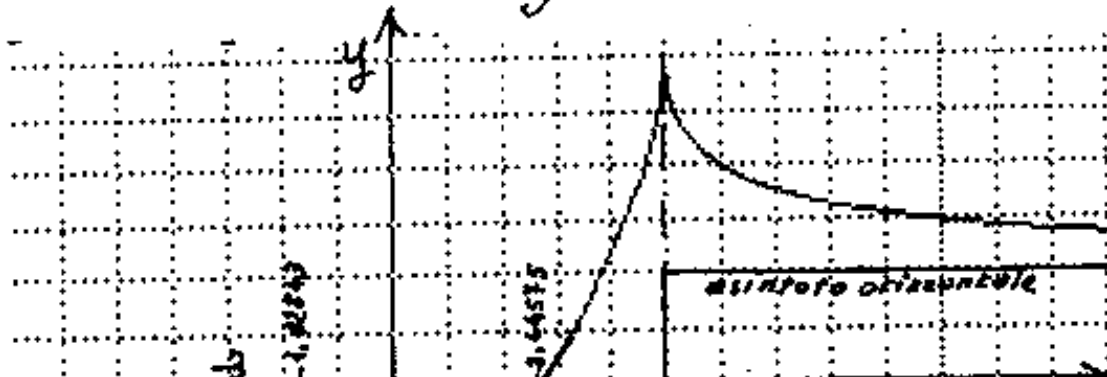
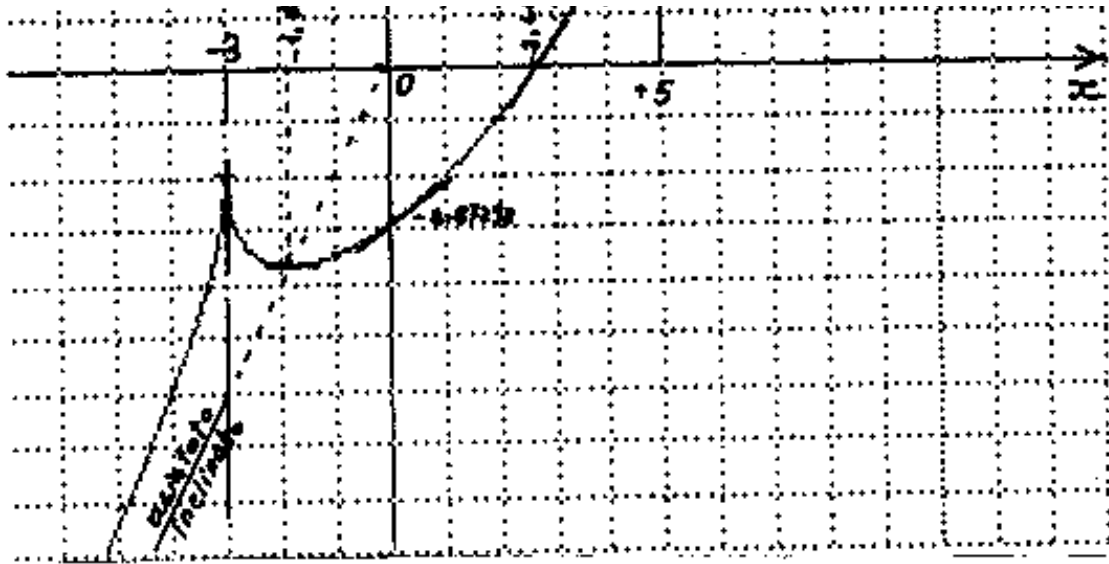
---

non calcoliamo asintoti perché il campo del caso B) non si estende all'infinito.

Riportiamo la tabella:

caso	x	y	y'	y''	NOTE
A	$-\infty$	$-\infty$	$+2$		asintoto inclinato
				>0	
	-3	-2	$+\infty$		
B	-3	-2	$-\infty$		
	$-1,82843$	$-3,65685$	0		minimo relativo
	0	$-2,87298$	$+0,74180$	>0	
	$+2,64575$	0	$+1,45142$		
	$+5$	$+6$	$+\infty$		
A	$+5$	$+6$	$-\infty$		
				>0	
	$+\infty$	$+2$	0		asintoto orizzontale

Abbiamo potuto porre $y''>0$ perché dalla tabella si nota y' crescente.

Il grafico

IL Calcolo integrale

Alla parola "integrare" associamo la parola "ripristinare". Integrare una funzione significa infatti trovare un'altra funzione "primitiva" la cui derivata è la funzione integranda. Ma dire: "derivata" non è detto bene; meglio dire: "il cui differenziale è la funzione integranda".

Il simbolo di "integrale" è una "esse allungata": "$\int$" e significa: "somma di differenziali."

quindi se integriamo: $\int d(f(x)) = \int (f'(x)\, dx) = (f(x) + c)$

Ricordiamo: è importantissimo riguardare il rapporto di differenziali: $\frac{d f(x)}{d(x)} = f'(x)$ scritto nella forma:

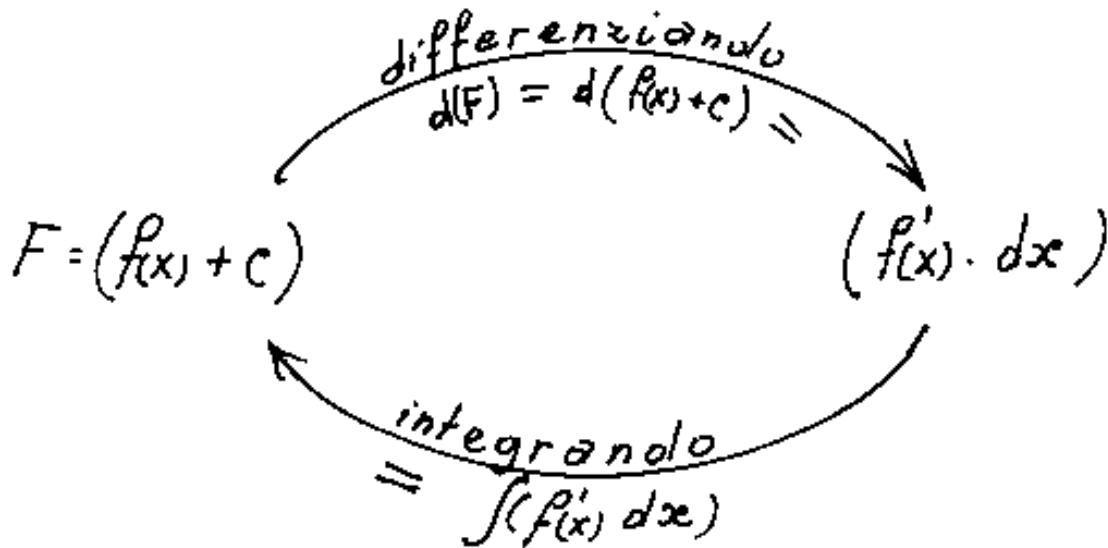
$$\boxed{d(f(x) + c) = f'(x)\, d(x)}$$

ove abbiamo evidenziato una costante c "arbitraria" che sparisce derivando (differenziando).

Il processo diretto di differenziazione ed inverso di integrazione può schematizzarsi:

differenziando

$d(F) = d(f(x) + c) =$

$F = (f(x) + c)$ $\quad\quad$ $(f'(x) \cdot dx)$

integrando

$= \int (f'(x)\, dx)$

Integrando i termini delle uguaglianze

$$\int d(F) = \int d(f(x)+c) = \int f'(x)\,dx$$

nei primi due termini i segni di integrale "$\int$" e di differenziale mutuamente si elidono per cui:

$$F = (f(x)+c) = \int f'(x)\,dx$$

Cioè se una espressione riuscissimo a portarla tutta sotto segno di differenziale l'integrazione sarebbe immediata. Per esempio ricordando che $d(\text{sen}(x)+c) = (\cos(x)\cdot dx)$ dovendo integrare:

$$\int \cos(x)\,d(x) = \int d(\text{sen}(x)+c) = \text{sen}(x)+c$$

Si notino le seguenti regole:

1) aggiungere o togliere una costante ad una espressione sotto segno di differenziale, il valore del differenziale non cambia (perchè la costante additiva sparisce per derivazione).

esempio: ricordando che: $d(\ln(x)+c) = \left(\frac{1}{x}\,dx\right)$; e che $d(\ln(x+a)+c) = \frac{1}{(x+a)}\,d(x+a) = \frac{1}{(x+a)}\,dx$; avremo:

che $d(\ln(x+a)+C) = \frac{1}{(x+a)} d(x+a) = \frac{1}{(x+a)} dx$; avremo:

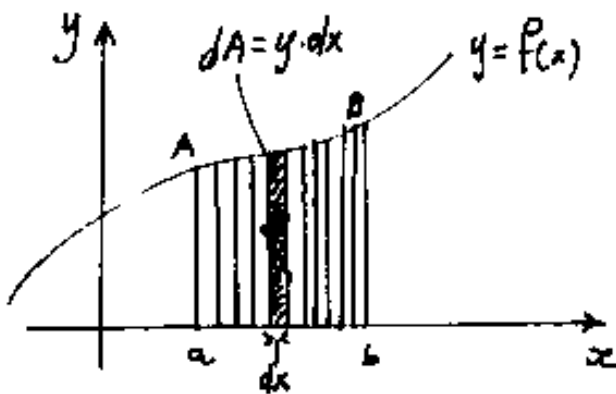
$$\int \frac{dx}{(x+a)} = \int \frac{d(x+a)}{(x+a)} = \int d(\ln(x+a)+C) = \ln(x+a)+C$$

$$\ln(x+a)+C = \underline{\ln(x+a)+\ln(C_1)} = \ln|C_1(x+a)|$$

La derivata è in genere un numero finito ($tg(\alpha)$) per cui l'integrale si distingue in parti:

$$\int (\underline{\text{fattore finito}})\, d(\underline{\text{fattore differenziale}})$$

cioè il "fattore finito" è quella parte di espressione in x, una $\varphi(x)$ da riguardarsi come una $f'(x)$, che rimane fra il simbolo di integrale ed il simbolo di differenziale. Il "fattore differenziale" è quella espressione in x, che può ridursi alla semplice x, ma può anche essere una $\psi(x)$ abbastanza notevole e che si trova dopo il simbolo "d" di differenziale.

Consideriamo una: $y = f(x)$ rappresentata in assi cartesiani, supponiamo di voler integrare:

$$\int (y)\, d(x) = \int (f(x))\, d(x)$$

Il fattore finito è rappresentato dai segmenti di ordinata $y = f(x)$. Mentre il fattore differenziale in (x) cioè $d(x)$ è (come abbiamo già detto) il più piccolo possibile segmento in x, lo dobbiamo riguardare come lo spessore infinitesimo delle ordinate, la

quali, una accanto all'altra generano la superficie rigata compresa fra l'asse x e la linea della $y=f(x)$

Se le ordinate le consideriamo prive di spessore, esse si sovrammetterebbero senza generare superfici. <u>L'area elementare infinitesima</u> (differenziale) di una di esse sarà:

$$dA = (y \cdot dx) = (f(x) \cdot dx)$$ (rettangolino elementare)

per cui integrando avremo:

$$\mathcal{A}(A) = \int f(x)\,dx$$

cioè integrare una: $y = f(x)$ in $d(x)$ significa calcolare l'area "indefinita" compresa fra l'asse x e la curva. Perciò scriviamo:

$$\int f(x)\,dx = A + C$$

ove C è la costante arbitraria di integrazione.

Un tale integrale è detto: Integrale indefinito

Supponiamo invece di volere l'area delimitata anche dalle ordinate $y_{(A)} = f(a)$; ed $y_B = f(b)$ cioè per $x = a$ ed $x = b$. "a" e "b" sono detti: "limiti di integrazione" e si pongono dal basso verso l'alto (in ordine al verso delle x) agli estremi del simbolo di integrale; cioè in modo che il limite in basso, o limite inferiore corrisponda al valore minore della x, ed il limite in alto o limite superiore al valore maggiore dalla x.

Perciò:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$/_a$

è detto: <u>integrale definito</u>.

Se sappiamo che: $d\varphi_{(x)} = \varphi'_{(x)}dx = f_{(x)}d(x)$

avremo:

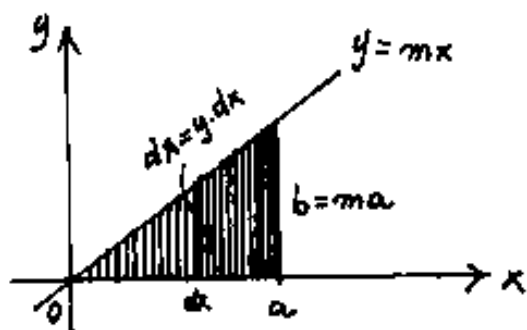
$$A = \int_a^b f_{(x)}dx = \int_a^b d(\varphi_{(x)}) = \left[\varphi_{(x)}\right]_a^b = \boxed{(\varphi_{(b)} - \varphi_{(a)}) = A}$$

Nell'integrale definito non si riporta la costante c che si elide.

- Se nell'integrale definito si scambiano i limiti di integrazione, l'integrale cambia segno.
- Se c è un punto intermedio dell'intervallo a,b si può scindere l'integrale: $\int_a^b f(x)\,d(x) = \int_a^c f(x)\,d(x) + \int_c^b f(x)\,d(x)$.

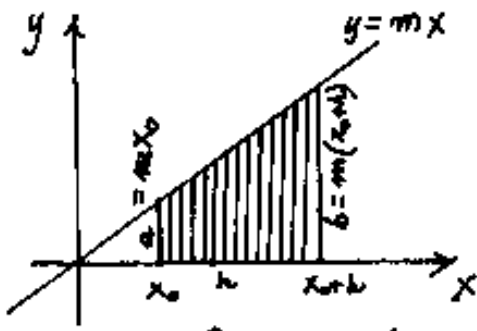
Consideriamo ora un integrale che ricorrerà spessissimo nei calcoli; cioè: $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + c}$

infatti: $d\left(\frac{1}{(n+1)}x^{(n+1)} + c\right) = \frac{n+1}{n+1}(x^{n+1-1})dx = (x^n dx)$.

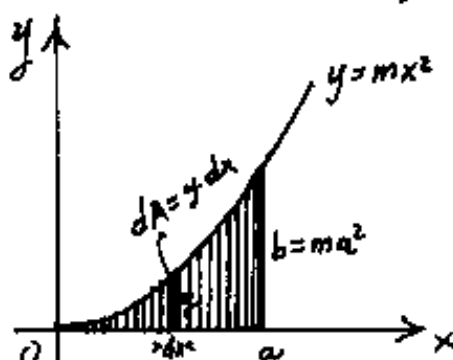
Facciamo qualche applicazione:

La retta $y = mx$ delimita l'area del triangolo rettangolo di cateti a e $b = ma$. Il contributo di area infinitesima dovuto ad una generica ordinata y per lo spessore infinitesimo dx sarà: $\boxed{dA = y \cdot dx}$

e sostituendo $y = mx$; $dA = (mx)dx$; ed integrando nei limiti da "0" ad "a" avremo: $A = \int_0^a (mx)\,dx = m\int_0^a x^1 dx =$

$$= \left[\frac{mx^2}{2}\right]_0^a = \left[\left(\frac{ma^2}{2}\right) - 0\right] = \frac{ma \cdot a}{2} = \boxed{\frac{ba}{2} = A}$$

nota formula dell'area del triangolo rettangolo (semiprodotto dei cateti). ———

Se (vedi figura) i limiti fossero stati: (x_0) ed $(x_0 + h)$ avremmo

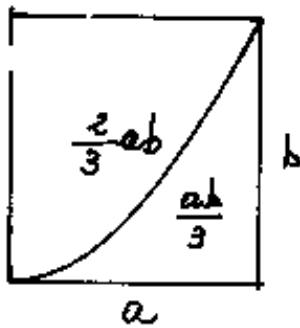
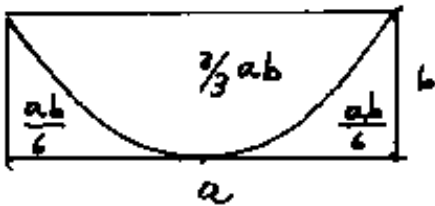
$$\left[\frac{mx^2}{2}\right]_{x_0}^{x_0+h} = \left[\frac{m}{2}\right]\left[(x_0+h)^2 - x_0^2\right] = \left(\frac{m}{2}\right)\left(2hx_0 + h^2\right) = \frac{h}{2}\left(x_0 m + (x_0+h)m\right) = \boxed{h\left(\frac{a+b}{2}\right) = A}$$

nota formula dell'area del trapezio.

Per il triangolo parabolico avremo: $A = \int_0^a y\,dx =$

$$= A = \int_0^a (mx^2)\,d(x) = m\int_0^a (x^2)\,dx = m\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a =$$

$$= A = m\left[\frac{a^3}{3} - 0\right] = \frac{ma^2}{3}\cdot a =$$

$$\boxed{A = \frac{ab}{3}}$$

L'area del triangolo rettangolo a bisettrice parabolica è un terzo del prodotto dei cateti; (se la parabola ha il vertice tangente un cateto. Cioè una diagonale parabolica (con vertice tangente un lato in uno spigolo) divide il rettangolo in due parti una doppia dell'altra.

Se la parabola è circoscritta da un rettangolo avente due lati paralleli alle corde di cui uno tangente nel vertice della parabola, l'area compresa dalla parabola e dalla sua corda è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo.

parabola [illegible] è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo.

La conoscenza di queste formule può risparmiare calcoli tal volta laboriosi.

Ricordando che: $d f(x) = f'(x) \cdot dx$, sulla base delle derivate che abbiamo già calcolato, facciamo una tabella delle derivate e integrali di $y = f(x)$.

Si omette di scrivere la costante di integrazione per semplicità.

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$\int y\,dx$	corrispondenza di differenziali
$y = c$ = (cost)	0	$= cx$	$dx = d(x \pm c)$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$\frac{1}{(n+1)} \cdot x^{n+1}$	$dx^n = (n\,x^{n-1})\,dx$
e^x	e^x	e^x	$e^x \cdot dx = d(e^x)$
a^x	$(\ln\lvert a\rvert)\,a^x$	$\frac{1}{(\ln\lvert a\rvert)}\,a^x$	$(\ln\lvert a\rvert)\,a^x \cdot dx = d(a^x)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$x(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\frac{dx}{x} = d(\ln\lvert x\rvert)$
$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln\lvert a\rvert}$	$\left(\frac{1}{\ln\lvert a\rvert}\right)(\ln\lvert x\rvert - 1)\cdot x$	$\frac{1}{\ln\lvert a\rvert}\left(\frac{dx}{x}\right) = d(\log_a\lvert x\rvert)$
$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\cos x \cdot dx = d(\text{sen}(x))$
$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$	$\text{sen}(x)$	$-\text{sen}\,x \cdot dx = d(\cos(x))$
$\text{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\frac{dx}{\cos^2(x)} = d(\text{tang}\,x)$
$\text{ctg}(x)$	$\frac{-1}{\text{sen}^2(x)}$	$\ln\lvert\text{sen}(x)\rvert$	$\frac{-dx}{\text{sen}^2(x)} = d(\text{cotg}(x))$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	$\text{arcsen}(x)$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\text{arcsen}(x))$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	$\text{arccos}(x)$	$\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\text{arccos}\,x)$

$\frac{1}{(1+x^2)}$	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$	$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{dx}{(1+x^2)} = d\,\operatorname{arctg}(x)$
$\operatorname{senh}(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{senh}(x)\,dx = d(\cosh(x))$
$\cosh(x)$	$\operatorname{senh}(x)$	$\operatorname{senh}(x)$	$\cosh(x)\cdot dx = d(\operatorname{senh}(x))$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\ln\lvert\cosh(x)\rvert$	$\frac{dx}{\cosh^2(x)} = d(\tanh(x))$

E' bene chiarire che non ha nessun significato dire: "La derivata o l'integrale di una funzione" se non si specifica rispetto a cosa si deriva o si integra. Cioè: rispetto a quale fattore differenziale. Questo concetto è stato ampliamente esemplificato alle derivate di funzione di funzione., ove derivavamo, via rispetto all'espressione su cui agiva l'operatore iniziando dal più esterno, l'espressione era: $y = \ln|tg^2(5x^3)|$, ed abbiamo iniziato con $\frac{d(y)}{d(tg^2(5x^3))}$; la derivata era come una $y = \ln|X|$ ove: $\frac{dy}{d(X)} = \frac{1}{(X)}$ ove la "grande X sotto l'operatore: "ln" può essere una espressione comunque grande. Analogamente per gli altri operatori:

$$\frac{d\left(tg^2(5x^3)\right)}{d(tg(5x^3))} = \frac{d\left(tg(5x^3)\right)^2}{d(tg(5x^3))} = 2\,tg(5x^3).$$

Per dare l'idea di una espressione comunque grande ma identificabile, la chiameremo "Carlotta"

si ha così:

$$\frac{d(carlotta)^n}{\ldots} = n(carlotta)^{n-1}$$

$$\frac{d(\text{carlotta})^n}{d(\text{carlotta})} = n(\text{carlotta})^{n-1}$$

$$\frac{d(\ln|\text{carlotta}|)}{d(\text{carlotta})} = \frac{1}{(\text{carlotta})}$$

$$\frac{d(\text{sen}(\text{carlotta}))}{d(\text{carlotta})} = \cos(\text{carlotta})$$

Analogamente l'integrazione: $\int \frac{d(\text{carlotta})}{\cos^2(\text{carlotta})} = tg(\text{carlotta}) + C.$

Saper portare sotto segno di differenziale.

E' il metodo più elegante e più veloce per risolvere un integrale.

E' il metodo che noi abbiamo chiamato "Carlotta", però la nostra "carlotta" dobbiamo sapercela costruire; a tal fine nella tabella delle derivate e integrali principali abbiamo fatta una colonna di corrispondenze di differenziali, perchè sia subito evidente che all'espressione: $\cos(x)\,d(x)$ posso sostituire $d(\operatorname{sen}(x))$, oppure che all'espressione: $\operatorname{sen}(x)\,d(x)$ posso sostituire $-d(\cos(x))$.

Facciamo un esempio.

$$\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \int \operatorname{sen}(x)(\cos(x)\,dx) = \int(\operatorname{sen}(x))\,d(\operatorname{sen}(x)) = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2} + C_1$$

$$\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \int \cos(x)(\operatorname{sen}(x)\,d(x)) = -\int \cos(x)\,d(\cos(x)) = \frac{-\cos^2(x)}{2} + C_2$$

$$\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \int \frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{2}\,d\frac{2x}{2} = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}(2x)\,d(2x) = -\frac{\cos(2x)}{4} + C_3$$

Nell'esempio di cui sopra la nostra "carlotta" di volta

Nell'esempio di cui sopra la nostra "carota" di volta in volta era: "sen(x)" ; "cos(x)" ; "2x".

I tre risultati sono solo apparentemente diversi, infatti: $\left(-\frac{\cos^2 x}{2}+C_2\right)=\left(-\frac{(1-\text{sen}^2 x)}{2}+C_2\right)=\frac{\text{sen}^2(x)}{2}+\left(C_2-\frac{1}{2}\right)$ cioè

$$C_1=\left(C_2-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{\cos(2x)}{4}+C_3\right)=-\left(\frac{\cos^2 x-\text{sen}^2 x}{4}+C_3\right)=\left(\frac{-1+2\,\text{sen}^2 x}{4}+C_3\right)=\frac{\text{sen}^2(x)}{2}+\left(C_3-\frac{1}{4}\right)$$

$\left(C_1=C_3-\frac{1}{4}\right)$ Resta evidente che diversi procedimenti di integrazione possono portare a risultati apparentemente diversi in quanto accumulano una parte nella costante arbitraria di integrazione.

facciamo altri esempi:

$$\int \frac{dx}{sen(x)\cos(x)} = \int \frac{dx}{(sen(x)\cos(x))\left(\frac{\cos(x)}{\cos(x)}\right)} = \int \frac{dx}{\left(\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right)\cos^2(x)} =$$

essendo: $\left(\frac{dx}{\cos^2(x)}\right) = d(tg(x))$ ed essendo: $\frac{sen(x)}{\cos(x)} = tg(x)$

avremo:

$$\int \frac{dx}{sen(x)\cos(x)} = \int \frac{d(tg x)}{(tg(x))} = \ln|tg(x)| + C_1$$

se poniamo $C_1 = \ln|K|$; $\ln|tg(x)| + \ln|K| = \ln|K \cdot tg(x)|$.

$$\boxed{\int \frac{d(x)}{sen(x)\cos(x)} = \ln|K \cdot tg(x)|}$$

Potevamo moltiplicare e dividere per 2

$$\int \frac{d(x)}{sen(x)\cos(x)} = \int \frac{d(2x)}{2\,sen(x)\cos(x)} = \int \frac{d(2x)}{sen(2x)} \frac{(sen(2x))}{(sen(2x))} = \int \frac{-d(\cos(2x))}{sen^2(2x)} =$$

$$= -\int \frac{d(\cos(2x))}{1-\cos^2(2x)} = -\int \frac{d(\cos(2x))}{(1-\cos(2x))(1+\cos(2x))} = \frac{-2}{2}\int \frac{d(\cos(2x))}{\frac{(1+\cos(2x))}{(1-\cos(2x))}(1-\cos(2x))^2} =$$

essendo: $d\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}dx = \frac{2\,dx}{(1-x)^2}$ avremo:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}\right)}{\left(\frac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}\right)} = \boxed{-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}\right| + C_1} \left(\begin{matrix}\text{appare}\\ \text{diverso}\\ \text{da: } \ln|\pm tg(x)|\end{matrix}\right) =$$

$$= \ln\left|\sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{1-\cos(2x)}{sen(2x)}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{1-(\cos^2 x - sen^2 x)}{2\,sen(x)\cos(x)}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{1-(2\cos^2(x)-1)}{2\,sen(x)\cos(x)}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{2(1-\cos^2(x))}{2\,sen(x)\cos(x)}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{sen\,x}{\cos x}\right| + C_1 = \ln|tg(x)| + C_1$$

questa volta la costante è rimasta invariata.

Regola dei segni di Cartesio

Vediamo ora l'influenza dei segni sull'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dato che l'equazione è uguagliata a zero, possiamo sempre fare in modo che "a" sia positivo. In tal caso, poiché per grandi valori di $|\pm x|$, $x^2 > 0$ prevarrà su: $(bx + c)$ e la parabola crescerà al crescere delle $|\pm x|$.

La regola dei segni di Cartesio dice:

"<u>Tante radici positive quante sono le variazioni, Tante radici negative quante sono le permanenze. In valore assoluto maggiore la radice positiva se precede la variazione; maggiore la radice negativa se precede la permanenza.</u>"

Si intende: "permanenza" quando due segni consecutivi sono uguali. Si intende "variazione" quando due segni consecutivi sono opposti.

segni consecutivi sono opposti.

Si hanno radici reali se il discriminante della equazione: $\Delta = b^2 - 4ac$ è maggiore di zero.

Se $\Delta = 0$, si hanno due radici reali coincidenti

Se $\Delta < 0$, si hanno due radici immaginarie coniugate.

Riepiloghiamo in una tabella riportando anche la posizione della parabola.

Poiché le radici x_1 ed x_2 sono simmetriche rispetto all'asse: $\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\rangle = x_v \pm \sqrt{\Delta^*}$ avremo che almeno una radice è positiva, l'altra può essere: positiva, nulla, o negativa a seconda che: $\sqrt{\Delta^*} \lesseqgtr x_v$.

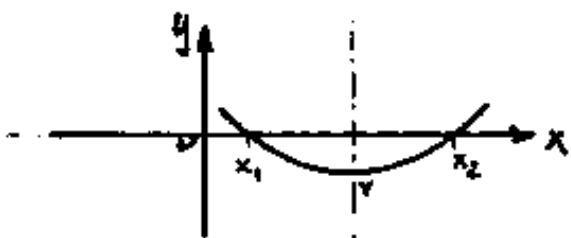
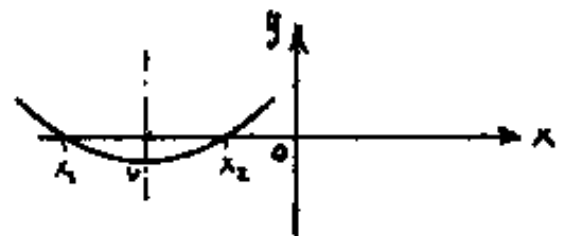
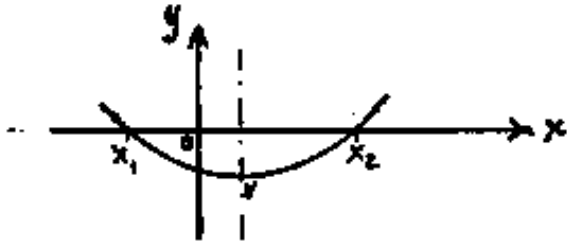
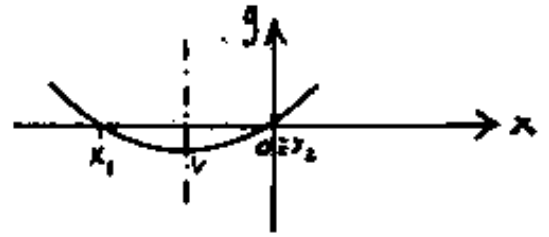
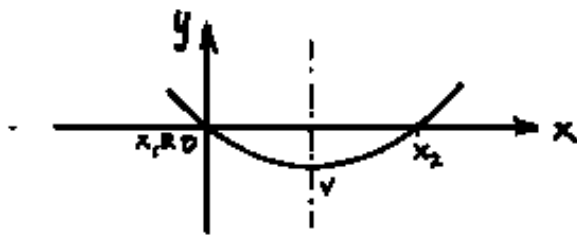
Se invece l'asse passa per il secondo e terzo (II e III) quadrante, cioè taglia il semiasse negativo delle ascisse avremo che almeno una radice è negativa, l'altra può essere: negativa, nulla, o, positiva, a seconda che

$$\left|\sqrt{\Delta}\right| \lesseqgtr \left|x_v\right|.$$

Queste osservazioni, che graficizziamo:

y x 0 x_1 V x_2

y x 0 x_1 V x_2

y y

portarono alla regola dei segni di Cartesio.

dalle formule:

$$a = m$$

$$-b = 2m x_v$$

$$c = m x_v^2 + y_v$$

possiamo ricavare le coordinate del vertice $V \equiv (x_v ; y_v)$ della parabola e quindi la posizione del suo asse, che per equazioni del tipo: $ax^2 + bx + c = y$, sarà sempre verticale.

$$x_v = -b/2m \quad ; \quad \boxed{x_v = -\frac{b}{2a}} \quad ; \quad \left(x_v = S/2\right)$$

$$y_v = c - m x_v^2 = c - a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 = \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

ma: $(b^2 - 4ac) = \Delta$; $\boxed{y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$; $\left(y_v = P - (S/2)^2\right)$

Facciamo alcune considerazioni:

1) <u>Nel caso: $a > 0$</u>

La posizione dell'asse della parabola, avente per equazione: $\boxed{x = x_v}$ cioè $\boxed{x = -b/2a}$

per equazione: $\boxed{x = x_v}$ cioè $\boxed{x = -b/2a}$

dipende dal segno di b. L'asse passerà

per il I e IV quadrante se: $b < 0$

per il II e III quadrante se $b > 0$

Si possono fare le seguenti osservazioni:

Se l'asse passa per il I e IV quadrante, cioè

taglia il semiasse positivo delle ascisse,

avremo:

$$(2X_v) = S \quad ; \quad (X_v^2 + y_v/m) = P$$

sostituendo nella formula ridotta per il calcolo delle radici di una equazione di 2° grado, si ha:

$$\left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}\ ; \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\Big\rangle = X_v \pm \sqrt{(X_v)^2 - (X_v^2 + y_v/m)}$$

cioè:

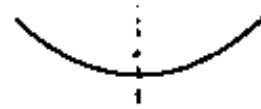
$$\boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\Big\rangle = X_v \pm \sqrt{\frac{-y_v}{m}}}$$

Ciò conferma che, per radici reali, occorre: $\underline{y_v < 0}$. (essendo m sempre maggiore di zero). Cioè il vertice V della parabola deve stare al disotto dell'asse x quando il coefficiente di x^2 è positivo.

Mentre nelle equazioni di 2° grado, essendo uguagliate a zero, si può sempre rendere posito il coefficiente delle x^2; (basta, eventualmente, moltiplicare per -1) Quando l'espressione è uguagliata ad y, cioè quando l'espressione è l'equazione di una para=

quindi l'espressione e l'equazione di una parabola:

$$ax^2 + bx + c = y$$

per $a > 0$, la parabola volge la concavità verso l'alto.

per $a < 0$, la parabola volge la concavità verso il basso.

nella forma:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (2)$$

ove se poniamo $y = 0$ (zero) otteniamo l'espressione classica delle equazioni di secondo grado, di cui già sappiamo calcolare le radici. Le radici reali saranno le ascisse dei punti comuni alla parabola e all'asse x, $(y=0)$. Se la parabola ha il vertice nel campo delle $y>0$ non avremo radici reali.

Il confronto fra le due espressioni: (1) e (2) porta: $a = m$; $-b = 2mX_V$; $c = mX_V^2 + y_V$

Si noti che col simbolo "a" vengono indicate due cose molto diverse fra loro: $a = m$ è il coefficiente delle x^2 nelle equazioni di secondo grado. $a = \frac{1}{4m}$ è il segmento di equidistanza del vertice della parabola dal fuoco "F" e dalla direttrice "dd". E' quindi opportuno non confondere

ce dd". E' quindi opportuno non confondere.

Scriviamo l'espressione (1) nella forma:

$$y = m\left[x^2 - (2x_v)x + \left(x_v^2 + y_v/m\right)\right]$$

l'espressione in parentesi quadre può essere confrontata con:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

forma ridotta delle equazioni di 2° grado.

sviluppando i quadrati e semplificando:

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

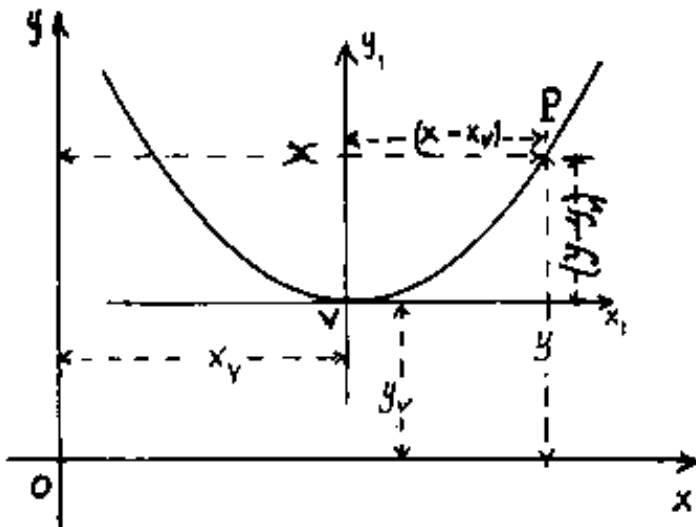
$$x^2 = 4ay$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4a} x^2}$$

ove ponendo: $m = 1/4a$

$$\boxed{y = m x^2}$$

<u>è questa l'equazione della parabola al centro assi</u>

Facciamo ora la solita traslazione di assi ove il vertice "V" non sia più coincidente con l'origine "O" degli assi, ma abbia coordinate: $V \equiv (x_V ; y_V)$.

Sostituendo nella: $y = mx^2$ abbiamo:

$$(y - y_V) = m(x - x_V)^2$$

equazione generica di <u>parabola ad asse verticale</u> espressa in funzione delle

espressa in funzione delle

coordinate del vertice $V \equiv (x_V ; y_V)$ e del parametro $\left(m = \frac{1}{4a}\right)$.

Sviluppando il quadrato otteniamo:

$$y - y_V = m\left(x^2 - 2x_V x + x_V^2\right)$$

$$\boxed{y = (m)x^2 - (2mx_V)\,x + \left(x_V^2 + y_V\right)} \quad (1)$$

espressione che ordinariamente viene scritta

Rileviamo che questo luogo geometrico è simmetrico rispetto alla retta HF e che ammette un vertice "V" di minimo distanza quando $\overline{HP}=\overline{HV}=\frac{1}{2}\overline{HF}=a$. data "a" è identificabile il luogo geometrico.

Vogliamo ora vedere come si può esprimere matematicamente questo luogo geometrico in funzione di un sistema di riferimento cartesiano costituito dagli assi: x, y, di centro O.

Fra tutti i possibili assi x; y, scegliamo quelli che hanno l'asse y coincidente con l'asse di simmetria per $\overline{HF}$, ed x passante per "V" quindi con origine degli assi in "V", (cioè: $O \equiv V$) (o coincidente con V).

— Supponiamo di aver tracciato il nostro luogo

– Supponiamo di aver tracciato il nostro luogo geometrico "parabola" (che, in questo caso, sarà detta al centro assi). Per l'enunciato deve essere:

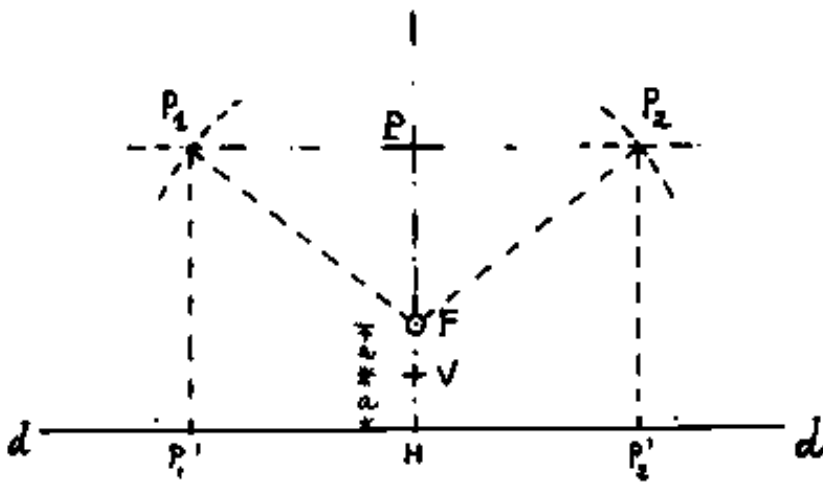
$$\overline{P_2F} = \overline{P_2'P_2} \quad \text{ed anche: } (\overline{P_2F})^2 = (\overline{P_2P_2'})^2$$

sostituendo in funzione di x, y, a (vedi figura) ed applicando Pitagora otteniamo:

$$\boxed{x^2 + (y-a)^2 = (y+a)^2}$$

La Parabola

(un importantissimo luogo geometrico)

"Luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da un punto "F" detto fuoco e da una retta "d" detta direttrice"

Sia "F" il fuoco e "dd" la direttrice. Se da F tracciamo la perpendicolare alla "dd", abbiamo che il punto "V" medio del segmento $\overline{FH} = 2a$, è un punto del nostro luogo geometrico perchè: $\overline{VF} = \overline{VH} = a$

Prendiamo sulla retta passante per $\overline{HF}$ un segmento: $\overline{HP} > a$, ("a" è il segmento di minima equidistanza da F e da "dd") e tracciamo per P la parallela a "dd" quindi con raggio pari ad $\overline{HP}$ e centro in F trac=

ciamo gli archi che intercettano la parallela alla "dd'" per P_1 nei punti P_1 e P_2. Anche i punti P_1 e P_2 fanno parte del luogo geometrico perchè:

$\overline{PH} = (\overline{P_2P_2'} = \overline{P_2F}) = (\overline{P_1F} = \overline{P_1P_1'})$. Variando a piacimento il segmento: $\overline{PH} \geq a$, si può costruire per punti, il nostro luogo geometrico.

ed è "l'equazione della circonferenza in funzione del raggio R e delle coordinate x_c, y_c del suo centro C"

Sviluppiamo ora i quadrati in parentesi ed otteniamo:

$$x^2 + y^2 - (2x_c)x - (2y_c)y + [x_c^2 + y_c^2 - R^2] = 0$$

questa equazione, che è l'equazione generale del cerchio, ordinariamente si presenta:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

(Talvolta anche x^2 ed y^2 presentano uno stesso coefficiente diverso da 1, ma dividendo per tale coefficiente abbiamo la forma di cui sopra) ove:

$a = -2x_c$ da cui: $x_c = -a/2$

$b = -2y_c$ " " : $y_c = -b/2$

$c = x_c^2 + y_c^2 - R^2$ " " $R = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 - c}$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

Come si vede, i coefficienti a, b, c della equazione generale del cerchio, hanno precisi significati che consentono di calcolare facilmente le coordinate del centro ed il raggio del cerchio.

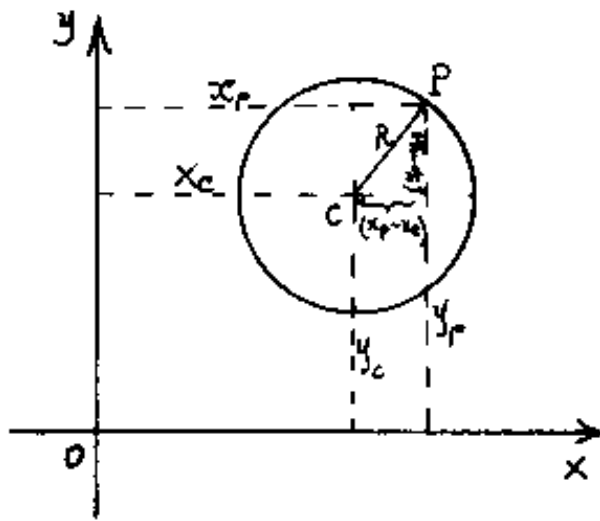
II) Quando x supera, in valore assoluto, il valore di R, cioè quando $|X| > |R|$, il radicando diventa minore di zero, cioè negativo, e non esiste nessun valore reale di y. Infatti il cerchio al centro assi, ha per <u>Campo di esistenza</u> i valori:

$$\boxed{-R \leq X \leq +R}$$

e non esiste per $\underline{X < -R}$ e per $\underline{X > +R}$.

Si noti che la distanza di un punto C da una retta è anche il raggio del cerchio di centro C tangente alla retta nel punto T, cioè $\overline{CT} = R$; ciò perché la distanza di un punto da una retta si misura sulla normale alla retta tracciata per C.

<u>Facciamo ora una traslazione di assi</u>, cioè supponiamo che il centro C del cerchio sia un punto qualsiasi del piano: $C \equiv (x_c, y_c)$

un punto qualsiasi del piano: $C = (x_c, y_c)$

e cerchiamo l'equazione generale del cerchio. Data la genericità di P poniamo $x = x_p$; $y = y_p$ e per Pitagora abbiamo:

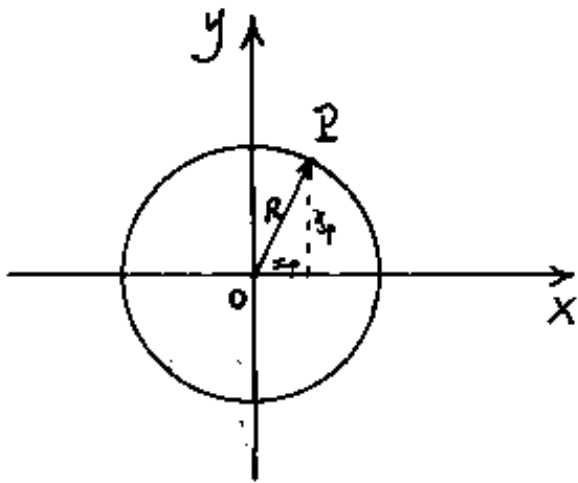
$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Il cerchio

Tornando ai luoghi geometrici si vuol rappresentare:

"Il luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da un punto detto centro"

(è la definizione della circonferenza)

Sia R il raggio (o equidistanza), e poniamo il centro del cerchio nel centro degli assi.

Preso un qualsiasi punto P sulla circonferenza, avremo per il teorema di Pitagora:

$$x_P^2 + y_P^2 = R^2$$

e per la generalità di P:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

È questa l'equazione della circonferenza con centro al centro assi, ordinariamente chiamata "equazione del cerchio", mentre, per quest'ultima sarebbe

zione del cerchio, mentre, per quest'ultimo sarebbe

più proprio scrivere: $x^2 + y^2 \leq R^2$

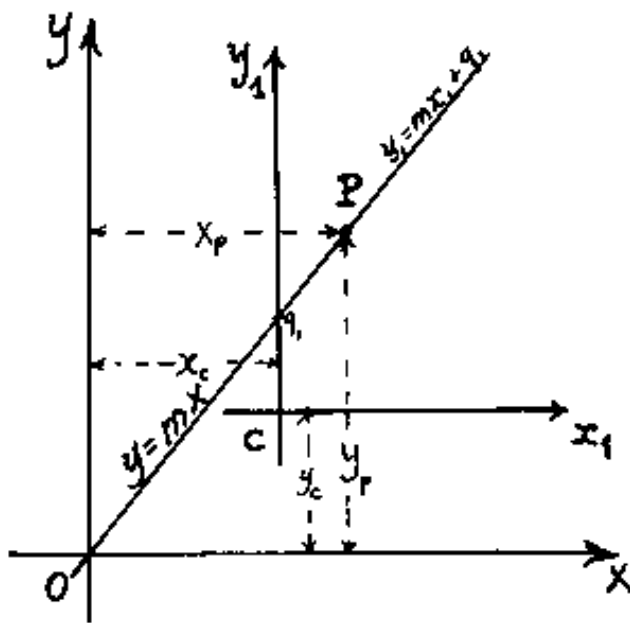
Esplicitando la y si ha:

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$$

Si notano due fatti:

I) Le radici sono due, una positiva, una negativa; cioè

vi sono due valori simmetrici di y per ogni valore di x

Notiamo che preso un punto P sulla retta le sue coordinate rispetto al sistema x_1, y_1 sono date da: $x_{1p} = (x_p - x_c)$; $y_{1p} = (y_p - y_c)$ ove x_c ed y_c sono le coordinate di C rispetto al primitivo sistema 0,x,y.

Essendo P qualsiasi poniamo: $x = x_p$; $y = y_p$; $x_{1p} = x_1$; $y_{1p} = y_1$, avremo:

$$x = x_1 + x_c \quad ; \quad y = y_1 + y_c$$

sostituendo nell'espressione: $y = mx$ si ha:

$$(y_1 + y_c) = m(x_1 + x_c)$$

ed esplicitando y_1:

$$y_1 = mx_1 + [mx_c - y_c]$$

ove la parte in parentesi quadra: $mx_c - y_c = q_1$ è il coefficiente di traslazione lineare rispetto ai nuovi assi. Il coefficiente angolare "m" è rimasto in=

vi assi. Il coefficiente angolare m è rimasto invariato trattandosi di sistemi paralleli di assi.

In generale per passare da un sistema: $O,x,y,$ ad un sistema di assi paralleli: C,x_1,y_1 le formule per la <u>traslazione degli assi</u> sono:

$$\boxed{y_1 = y - y_c} \; ; \; \boxed{x_1 = x - x_c}$$

data l'espressione: $y_1 = f_{(x_1)}$ avremo: $\boxed{(y - y_c) = f_{(x - x_c)}}$

le riportiamo nella espressione ora scritta, essa ci fornisce il coefficiente angolare della retta passante per A e per B, perciò l'equazione della retta passante per due punti sarà:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

mentre l'equazione della stella di rette passanti per un solo punto A sarà:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = m$$

ove "m" è un parametro (ad ogni valore di m corrisponde una retta della stella passante per A)

Si noti che la distanza $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

e la distanza generica da A; $t_A = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$

La traslazione di assi

La traslazione di assi

Data l'equazione di una retta per l'origine O degli assi x, y, e sia: $y = mx$; consideriamo, sullo stesso piano, un'altro sistema di assi parallelo al primo, e sia x_1, y_1 di centro C.

Consideriamo la forma esplicita: $y = mx + q$, "Luogo dei punti la cui ordinata è data dalla somma di un valore proporzionale all'ascissa e di una costante q". Questa espressione è un po' farraginosa, se invece scriviamo gli stessi simboli correlati nella forma: $\frac{(y-q)}{m} = x$; oppure: $(y-q) = mx$; oppure: $\frac{y-q}{x} = m$; oppure: $q = y - mx$; a ciascuna di esse corrisponde una dizione di "luogo geometrico" Lo stesso può farsi con la <u>forma segmentaria</u> o con la <u>forma implicita</u>, e le apparenti diverse formule e diverse dizioni di "luogo geometrico" corrispondono <u>ad una stessa retta</u> quando i simboli m, q, p, a, b, c siano correlati.

Ma oltre queste ve ne sono altre, per esempio: "luogo geometrico di tutti i punti ove è costante il rapporto fra l'incremento delle ordinate e quello delle ascisse per passare da un qual=

siasi punto A ad un qualsiasi punto B"

si scrive:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m}$$

(con m = costante di proporzionalità.)

Se, date le coordinate di due punti:

$A \equiv (x_A, y_A)$; $B \equiv (x_B, y_B)$,

indichiamo con "q" l'ordinata costante, comune a tutti i punti appartenenti a tale retta, questa sarà rappresentata da: $y = q$.

Analogamente una retta parallela all'asse y sarà rappresentata da: $x = p$ ove "p" è l'ascissa costante, comune a tutti i punti della retta.

Torniamo alla formula: $y = mx$ (con m = costante), possiamo dire che $y = mx$ rappresenta il "luogo geometrico dei punti aventi coordinate direttamente proporzionali con m = coeff. di proporzionalità"

Se scriviamo la stessa formula nella forma: $y/x = m$, potremmo dire che: $\frac{y}{x} = m$ rappresenta il "luogo geometrico di tutti i punti aventi il rapporto delle coordinate costante e pari ad m."

Si noti come una stessa correlazione matematica, scritta in forma diversa, corrisponda allo stesso concetto espresso con parole diverse.

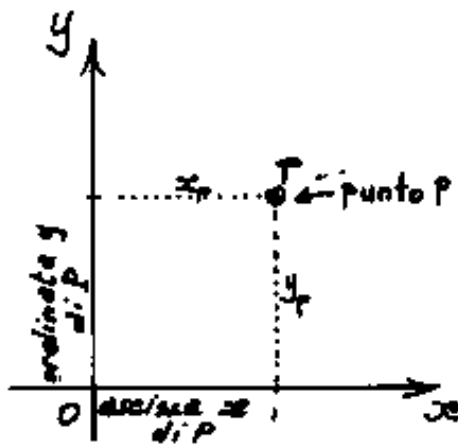
Abbiamo già visto, al capitolo "Le equazioni", l'equazione della retta:

$$y = mx + q \quad \text{(in forma esplicita)}$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad \text{(in forma segmentaria)}$$

$$ax + by + c = 0 \quad \text{(in forma implicita)}$$

Luoghi geometrici

Ricordando che ogni coppia di valori $(x;y)$, nella sequenza esposta, rappresenta le coordinate: (ascissa; ordinata) di un punto e permette di rappresentarlo.

L'insieme di tutti i punti del piano sarà anche l'insieme di tutte le coppie ordinate: (x,y), per ogni x appartenente ad X, ed ogni y appartenente ad Y: tale insieme è detto prodotto cartesiano.

Ogni linea del piano sarà un sottoinsieme del prodotto cartesiano. Se riusciamo a definire tali linee come "luoghi geometrici" ne possiamo scrivere l'espressione, (o leggendo la formula matematica "vederne mentalmente" la rappresentazione grafica). Per esempio: l'asse x come

tazione grafica). Per esempio: l'asse x come luogo geometrico dei punti ad ordinata nulla è rappresentabile con: $y = 0$; mentre l'asse y come luogo geometrico dei punti ad ascissa nulla è rappresentabile con $x = 0$.

Una retta parallela all'asse X, sarà il luogo geometrico dei punti aventi ordinata costante. Se

Se per esempio "t" indica il tempo decorso a partire da un certo istante, in una espressione algebrica in cui figura "t" si può vedere cosa succede al crescere di "t". Gli altri simboli che rappresentano "grandezze dimensionali" del fenomeno che ci interessa, potranno essere riguardate come costanti e come variabili, ed <u>avremo dalla formula la visione del fenomeno</u>.

Tal volta conviene, <u>la stessa formula</u> scriverla in forma diversa, per avere una visione più specifica di ciò che ci interessa.

Per esempio: <u>$y = mx$</u>, può essere scritta:

$y = mx$; ($S = Vt$) ; la y cresce con m e con x

$x = \frac{1}{m} y$; ($t = S/V$) ; la x cresce con y ma decresce con m,

$m = \frac{y}{x}$; ($V = S/t$) ; m è il rapporto.

Se, "t" è il tempo ; "S" lo spazio ; "V" la velocità, cercate di tradurre in parole cosa dicono le

Cercate di tradurre in parole cosa dicono le tre formule. Ogniuno di noi può leggerle secondo il proprio problema. Può scrivere: $a = bc$; $b = a/c$; $c = a/b$ ed attribuire ad "a", "b", "c", le grandezze che interessano.

Sui vari modi di considerare una espressione algebrica.

Ogni espressione algebrica rappresenta: SEMPRE! un certo fenomeno che può essere: "fisico", "economico", "statistico", ecc. Anzi spessissimo esprime una: "Legge" che regola una molteplicità di fenomeni. (Abbiamo già visto come una espressione del tipo: $y=mx$, sia comune ad una molteplicità di fenomeni della fisica classica. "Legge della linearizzazione").

La sintesi espressiva delle "formule algebriche" è di gran lungo più efficiente di qualunque altro linguaggio, perciò è necessario: SAPER "LEGGERE" LE FORMULE ALGEBRICHE.

Una espressione algebrica è generalmente composta di numeri (coefficienti, addendi, esponenti,

[illegible]
indici, ecc); di lettere indicanti quantità costanti, di lettere indicanti quantità variabili. Le variabili potranno essere dipendenti o indipendenti. Se consideriamo mutevoli anche certe costanti, al fine di ottenere certi risultati, queste le diremo parametri.

Equazioni di 4° grado biquadratiche

Sono del tipo:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

ove posto: $(x^2 = y)$ avremo:

$$ay^2 + by + c = 0$$

equazione di 2° grado che sappiamo risolvere.

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\rangle = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\rangle = \pm\sqrt{y_1}$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\rangle = \pm\sqrt{y_2}$$

Si hanno i seguenti casi:

Si hanno i seguenti casi.

y_1 ; y_2 reali > 0 → quattro radici reali

y_1 ; y_2 reali < 0 → " " immaginarie

y_1 reale > 0 ; y_2 reale < 0 → due radici reali, due immaginarie

y_1 ed y_2 immaginarie → quattro radici immaginarie

Equazioni reciproche di 4° grado

di seconda specie :

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$$

si annulla per : $(x = -1)$ e per : $(x = +1)$ cioè il polinomio è divisibile per : $(x^2 - 1)$:

$$(x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0$$

$$x_1, x_2 = \pm 1$$

$$x_3, x_4 = -\left(\frac{b}{2a}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - 1}$$

{vedi reciproche di 2° grado}

Si noti che se : $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 < 1$, cioè : $(b < 2a)$, si hanno radici immaginarie. Poiché le radici immaginarie sono sempre a coppie, (immaginarie coniugate : $(H + iK)$; $(H - iK)$) <u>avremo che, per equazioni di ordine dispari almeno una radice è</u>

reale. Ciò vale in generale. Nelle equazioni di ordine dispari, se il termine noto è >0, si ha almeno una radice reale <0, inversamente, se il termine noto <0, si ha almeno una radice reale >0.

Equazioni reciproche di 4° grado

di prima specie:

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + b x + a = 0$$

dividendo per x^2 si ha:

$$a x^2 + b x + c + b \frac{1}{x} + a \frac{1}{x^2} = 0$$

cioè:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

se poniamo:

$$y = \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

elevando a quadrato possiamo scrivere:

$$\left(y^2 - 2\right) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

e sostituendo:

$$a y^2 + b y + (c - 2a) = 0$$

equazione ausiliaria di 2° grado

ove:

$$y_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} + 2}$$

$$x_{1,2} = +\left(\frac{y_1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 - 1}$$

$$x_{3,4} = +\left(\frac{y_2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{y_2}{2}\right)^2 - 1}$$

Equazioni reciproche di 3° grado di prima specie :

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

Poiché: $(x = -1)$ annulla il primo membro, e ciò avverrà sempre per le reciproche di prima specie di ordine dispari ; il polinomio può scomporsi:

$$(x+1)\left(ax^2 + (b-a)x + a\right) = 0$$

cioè si ha :

$$x_1 = -1$$

$$x_{2,3} = -\frac{(b-a)}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{2a}\right)^2 - 1}$$

Equazioni reciproche di 3° grado di seconda specie

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

poiché: $(x = +1)$ annulla il primo membro, e ciò avverrà sempre per le reciproche di seconda specie di ordine dispari; il polinomio può scomporsi:

$$(x-1)\left(ax^2+(b+a)x+a\right)=0$$; avremo:

$$\boxed{x_1 = +1}$$

$$\boxed{x_{2,3} = -\left(\frac{a+b}{2a}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2a}\right)^2 - 1}}$$

Se $b>0$; oppure $b<0$ abbiamo:

$\frac{b}{a}<0 \rightarrow x_1=\frac{1}{x_2}>0$; $\frac{b}{a}>0 \rightarrow x_1=\frac{1}{x_2}<0$

esempio: $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$; $x^2+\frac{5}{2}x+1=0$

$x_{1,2}=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-1}=\begin{cases}+2\\+\frac{1}{2}\end{cases}$; $x_{1,2}=-\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-1}=\begin{cases}-\frac{1}{2}\\-2\end{cases}$

Equazioni reciproche di 2° grado

di seconda specie:

$$ax^2-a=0$$

$$x=\pm 1$$

Vedremo l'utilità dell'espressione: $(x+\frac{1}{x})=-\frac{b}{a}$ ricavata per le equazioni reciproche di 2° grado di prima specie.

Elevando a quadrato si ha: $x^2+2+\frac{1}{x^2}=b^2/a^2$

che può scriversi: $(x^2+\frac{1}{...})=(\frac{b^2}{...}-2)$

che può scriversi: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)$,

cioè: $\boxed{a^2x^4+(2a^2-b^2)x^2+a^2=0}$

Elevando al cubo si ha:

$$x^3+3x+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=-b^3/a^3$$

cioè: $\boxed{a^3x^6+3a^3x^4+b^3x^3+3a^3x^2+a^3=0}$,

simmetrica di 6° grado, (x^5 ed x hanno coeff. zero).

Equazioni reciproche di 2° grado

Di prima specie:

$$ax^2+bx+a=0$$

può scriversi:

$$x+\frac{b}{a}+\frac{1}{x}=0 \quad ; \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)=-\frac{b}{a}$$

Dalle equazioni di 2° grado sappiamo che: $-\frac{b}{a}=S=$ = somma delle radici, perciò $x=x_1$ ed $\frac{1}{x}=x_2$ sono le due radici.

Posto: $\left(\frac{-b}{2a}\right)=M=\frac{S}{2}$ avremo:

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\rangle = M\pm\sqrt{M^2-1}$$

ove: $x_1=M+\sqrt{M^2-1}$; $x_2=M-\sqrt{M^2+1}$ se moltiplichiamo e dividiamo il valore di x_2 per: $(M+\sqrt{M^2-1})$ otteniamo:

$$(M-\sqrt{M^2-1})\cdot\frac{M+\sqrt{M^2-1}}{M+\sqrt{M^2-1}}=\frac{M^2-M^2+1}{M+\sqrt{M^2+1}}=\frac{1}{M+\sqrt{M^2-1}}=\frac{1}{x_1}$$

ciò dimostra: $x_2=\frac{1}{x_1}$ (radici reciproche)

Notiamo che: $x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}=S=-b/a$.

Cioè S è riducibile ad una frazione che ha per

Cioè S è riducibile ad una frazione che ha per numeratore il quadrato del denominatore maggiorato di 1. Per esempio: $-34/8 = -17/4 = -\left(\frac{16+1}{4}\right) \langle \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{1}{4} \end{matrix}$

Quindi, riducendo ai minimi termini la frazione può e non può avvenimire che x_1 sia intero e $x_2 = 1/x_1$ o viceversa però: $\frac{x^2+1}{x} = S$ vale anche per numeri decimali.

Equazioni Reciproche

Le equazioni reciproche, sono una particolare classe di equazioni di grado superiore al primo, che consentono particolari forme risolutive. Esse si distinguono in due specie:

Di prima specie

Una equazione si dice: "Reciproca di prima specie", quando i coefficienti equidistanti dagli estremi sono reali ed uguali. (Le equazioni si intendono ordinate secondo le potenze decrescenti della x ed uguagliate a zero)

esempi:

$$ax^2 + bx + a = 0 \quad (2° \text{ grado})$$

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (3° \text{ grado})$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (4° \text{ grado})$$

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (5° \text{ grado}) \text{ ecc.}$$

Di seconda specie

Una equazione si dice: "Reciproca di seconda specie", quando

[illegible]

i coefficienti equidistanti dagli estremi sono reali, uguali in valore assoluto, ma di segno opposto. Per le equazioni di grado pari manca il termine medio (è zero)

Esempi:

$$ax^2 - a = 0 \quad (2^\circ \text{ grado})$$

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0 \quad (3^\circ \text{ grado})$$

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0 \quad (4^\circ \text{ grado})$$

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0 \quad (5^\circ \text{ grado}) \text{ ecc.}$$

Si può anche dire: Data la somma e il prodotto di due numeri essi si scosteranno dalla loro media aritmetica $S/2$ di un valore che è dato dalla radice della differenza fra il quadrato della media aritmetica $(S/2)^2$ e il quadrato della media geometrica $(\sqrt{P})^2$. Se i due numeri sono: $(\alpha$ e $\beta)$; $\frac{S}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$; $\sqrt{P} = \sqrt{\alpha\beta}$;

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\rangle = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \alpha\beta}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\rangle = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta}{4}}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\rangle = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{4}}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\rangle = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha+\cancel{\beta}+\alpha-\cancel{\beta}}{2} \quad ; \quad \beta = \frac{\cancel{\alpha}+\beta-\cancel{\alpha}+\beta}{2}$$

Il discriminante dell'equazione di 2° grado: $\Delta = (b^2-4ac)$

Il discriminante dell'equazione di 2° grado: $\Delta=(b-4ac)$ che nella ridotta figura come: $\left(\left(\frac{S}{2}\right)^2-P\right)$ può essere: $\Delta \gtrless 0$. Se maggiore di zero si hanno due radici reali, se uguale a zero le due radici assumono lo stesso valore: $S/2$, se minore di zero si hanno due radici immaginarie coniugate. Torneremo sulla discussione delle equazioni di 2° grado.

La formula generale può scriversi:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

cioè:

$$x = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$$

formula risolutiva in forma ridotta dell'equazione di 2° grado.

Consideriamo il seguente problema:

"Di un triangolo rettangolo conosciamo l'ipotenusa S e l'altezza relativa all'ipotenusa $h = \sqrt{P}$, trovare una formula che esprima i valori delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa"

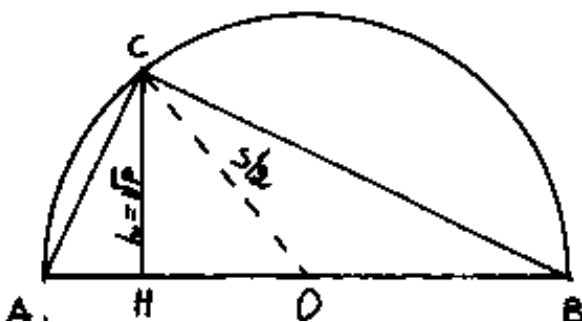
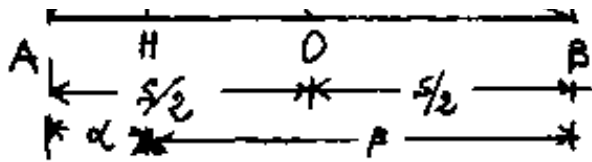
Risoluzione

Tracciata la semicirconferenza di centro "O" e raggio $S/2$, luogo geometrico di tutti i vertici retti dei triangoli ret=

C
h
S/2
A
H
O
B

A H O B

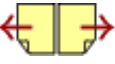
$\leftarrow S/2 \rightarrow \leftarrow S/2 \rightarrow$

$\leftarrow \alpha \rightarrow \leftarrow \beta \rightarrow$

tangoli aventi per ipotenusa $\overline{AB} = S$, si individua il vertice distante $h = \sqrt{P}$ da $\overline{AB}$

avremo: $\overline{CH} = h = \sqrt{P}$; $\overline{OH} = \sqrt{(S/2)^2 - (\sqrt{P})^2}$; $\overline{AH} = S/2 - \overline{OH} = \alpha$

$\overline{BH} = S/2 + \overline{OH} = \beta$ cioè:

$$\left.\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right\rangle = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$$

che è la formula risolutiva delle equazioni di 2° grado in forma ridotta.

Equazioni di 2° grado

Siano α e β le radici reali o immaginarie di una equazione di secondo grado, avremo:

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

cioè

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\cdot\beta = 0$$

posto: S = somma delle radici = $(\alpha+\beta)$

P = prodotto delle radici = $\alpha\cdot\beta$

sostituendo:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

(è la forma ridotta dell'equazione di 2° grado)

La forma classica dell'equazione di 2° grado è:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

ove: $\boxed{S = -b/a\ ;}$ $\boxed{P = c/a}$

Cerchiamo di trasformare l'equazione: $ax^2 + bx + c = 0$ in un quadrato perfetto.

Moltiplicando per $4a$ abbiamo: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

aggiungiamo e togliamo b^2: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$

che può scriversi: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

cioè: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ da cui:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Formula risolutiva generale delle equazioni di 2° grado. Ove: $(b^2 - 4ac) = \Delta$ è detto discriminante dell'equazione.

Equazioni di grado superiore al primo

Premesso che la risoluzione di una equazione di grado superiore al primo comporta tante radici (o valori risolutivi dell'incognita) quant'e' il grado dell'equazione.

Infatti se poniamo:

$x = \alpha_1 \;; \quad x = \alpha_2 \;; \quad x = \alpha_3 \;; \quad \ldots\ldots\ldots x = \alpha_n$

possiamo scrivere:

$(x-\alpha_1) = 0 \;; \quad (x-\alpha_2) = 0; \quad (x-\alpha_3) = 0 \;; \ldots (x-\alpha_n) = 0$

ed anche:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots\ldots(x-\alpha_n) = 0$$

e sviluppando i prodotti avremo:

$$x^n - (\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n)x^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots\alpha_i\alpha_j+\cdots)x^{n-2} - \cdots \pm(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) = 0$$

equazione di grado "n" a segni alterni ove i coefficienti della x^{n-k}, con: $k = 0, 1, 2, \ldots n$ sono la somma dei prodotti delle radici prese in tutte le possibili combinazioni di k fattori.

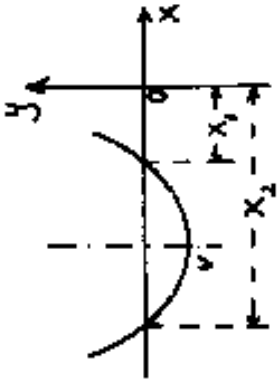
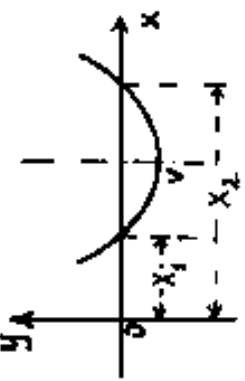
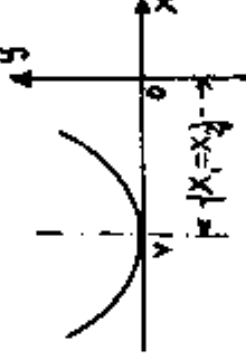
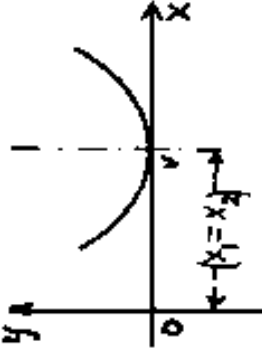
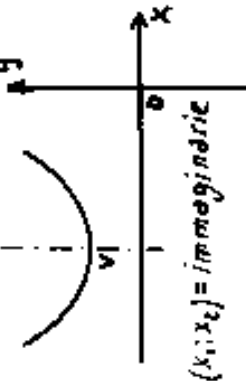
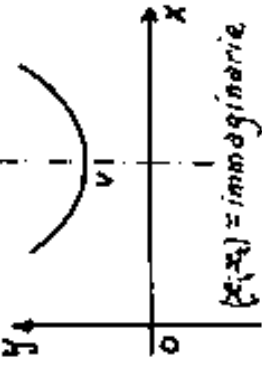
in tutte le possibili combinazioni di n fattori.

Ciò premesso, se il polinomio al primo membro dell'equazione riusciamo a scomporlo nel prodotto di monomi $(x-\alpha_i)$ abbiamo risolto l'equazione.

Ovviamente la matrice completa non può avere caratteristica inferiore della incompleta, avendosi "m" equazioni in "n" incognite, la matrice completa sarà: $[(n+1) \times m]$, mentre l'incompleta sarà $[n \times m]$. Si hanno i tre casi esaminati:

$(n = m)$; sistema possibile per equazioni indipendenti

$n > m$; (autovalori) " "

$n < m$; < impossibile per equazioni contraddittorie
possibile se le equazioni eccedenti sono combinazione lineare.

Qualora le equazioni presentino parametri "K" cercheremo i valori di K che soddisfano il Teorema di Rouché-Capelli e discuteremo il sistema al variare di K.

Comunque, ammesso di aver trovato radici, se questi valori soddisfano tutte le equazioni si possono sopprimere $(m-n)$ equazioni e qualunque

si possono sopprimere $(m-n)$ equazioni e qualunque siano il sistema (e le radici) resta invariato. Se invece queste radici non soddisfano tutte le equazioni, il sistema è impossibile, vi sono cioè equazioni incompatibili, la caratteristica della matrice completa è diversa (maggiore) di quella della matrice incompleta.

...ativa della regola dei segni di Cartesio

...r E	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
...: (2 radici < 0) ...egative)	x_1, x_2, V, O, x, y	$(x_1 = x_2)$, V, O, x, y	$(x_1; x_2)$ = immaginarie, V, O, x, y
...'2 radici > 0) ...ositive)	x_1, x_2, V, O, x, y	$(x_1 = x_2)$, V, O, x, y	$(x_1; x_2)$ = immaginarie, V, O, x, y
... ed una va= ...: la permanen ...segno opposto, ...ativa	x_1, x_2, V, O, x, y	Per c<o il discriminante $\Delta > 0$ per cui non possono aversi radici coincidenti o immaginarie.	
...d una perma= ...ione precede ...due radici di ...ggiore la ra=	x_1, x_2, V, x, y		

...decide la posizione dell'asse della parabola : $(x = -b/2a) = S/2$

TAVOLA riepilogat

nº	a	b	c	NOTE
1	+	+	+	due permanenze (2 (asse sulle x nega
2	+	−	+	due variazioni (2 (asse sulle X posi
3	+	+	−	Una permanenza ziazione, precede za, due radici diseg maggiore la negat
4	+	−	−	Una variazione ed u nenza, la variazion la permanenza, du segno opposto, magg. dice positiva

Si noti che il segno di "b" dec

I passaggi algebrici e l'assurdo

Occorre fare molta attenzione ai passaggi algebrici e verificarne sempre il risultato. Infatti se per risolvere una equazione eleviamo a quadrato ambo i membri, introduciamo una radice che può non verificare il nostro problema. Se due numeri diversi sono moltiplicati per zero o per infinito, il prodotto risulta uguale, ma i numeri sono diversi; esempio: $a = 0$ oppure $a = \infty$, avremo che: $50 \cdot \cancel{a} = 85 \cdot \cancel{a}$ semplificando: $50 = 85$ si ha un assurdo. Questo può avvenire in certe equazioni che ammettono un valore nullo della x per cui in una espressione $x\left(f(x, a, b \ldots)\right) = x\left(\varphi(x, a, b \ldots)\right)$ non è lecito semplificare: $f(x, a, b \ldots) = \varphi(x, a, b \ldots)$ perché il valore nullo della x porta all'assurdo.

Facciamo un giuoco.

Siano: $a \neq b$ vogliamo dimostrare che $(a = b)$.

Siano: $a \neq b$ vogliamo dimostrare che $(a = b)$.

Indichiamo con $c = \frac{a+b}{2}$, la semisomma; qualunque siano i due numeri "a" e "b" vale l'uguaglianza:

$$\boxed{a^2 - 2ac = b^2 - 2bc}$$

infatti sostituendo "c" si ha:

$$a^2 - 2a(a+b)/2 = b^2 - 2b(a+b)/2$$

$$-ab = -ab$$

a tale uguaglianza possiamo aggiungere c^2 ad ambo i membri; avremo:

$$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$$

$$(a-c)^2 = (b-c)^2$$

$$\sqrt{(a-c)^2} = \sqrt{(b-c)^2}$$

$$(a-c) = (b-c)$$

$$\underline{a = b}$$ (come volevasi dimostrare)

Chiariamo l'assurdo con un esempio numerico: $\underline{7 \neq 3}$ cioè $\underline{a = 7}$; $\underline{b = 3}$

avremo: $c = \frac{7+3}{2} = 5$; $2ac = 70$; $2bc = 30$

$$7^2 - 70 = 3^2 - 30$$ infatti $= -21$ entrambi.

$$7^2 - 70 + 5^2 = 3^2 - 30 + 5^2$$

$$(7-5)^2 = (3-5)^2$$ (qui è il trucco perché $(3-5)^2 = (5-3)^2$

$$\sqrt{(7-5)^2} = \sqrt{(3-5)^2}$$ qui l'errore di un radicale negativo

$$(7-5) = (3-5)$$ non era lecita la semplificazione

$$7 = 3$$

$$Y = 3$$

Per fare il gioco ad amici (poco accorti) conviene scegliere due numeri dispari diversi in tal modo C risulta intero. ed i calcoli sono più semplici.

Si noti che: $\sqrt{x^2} = \pm x$ e che: $\left(\sqrt{x}\right)^2 = |x|$

$$\left(\sqrt{-x}\right)^2 = \left(i\sqrt{|x|}\right)^2 = (-1)|x| = -x.$$

Si noti l'importanza della sequenza operativa: $\sqrt{x^2}$; $\left(\sqrt{x}\right)^2$.

Le disequazioni

Questo nostro studio permette ora di affronta=
re le disequazioni.

"Una disequazione è una espressione algebrica che anzichè essere posta uguale a zero, (o ad un'altra espressione) le viene richiesto di essere maggiore o minore di zero, (o di un'altra espressione). Cioè al posto di: (=) figura: (>) oppure: (<)"

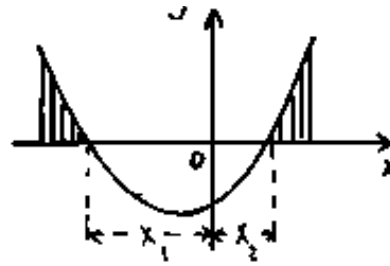
Si tratta di decidere per quali valori della x risulta soddisfatta.

Abbiamo già visto che l'equazione della circon=
ferenza al centro: $x^2+y^2=R^2$; per diventare equazio=
ne di tutti i punti del cerchio si deve scrivere:

$$x^2+y^2 \leq R^2$$

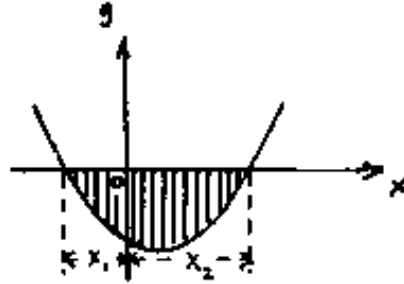
Se trattasi di una disequazione di 2° grado rappresentabile quindi mediante una parabola avremo: $(a>0)$:

avremo: $(a > 0)$:

$$y = ax^2 + bx + c \geq 0$$

(vale per x esterno alle radici)

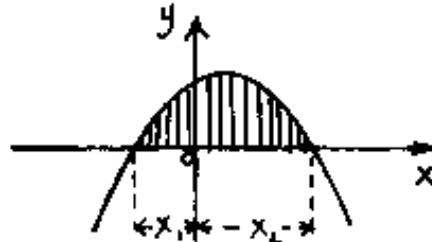
$(-\infty < x < x_1)$

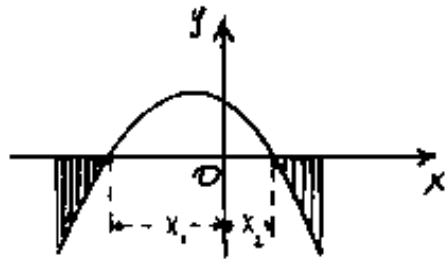
$(x_2 < x < +\infty)$

$$y = ax^2 + bx + c < 0$$

(vale per x interno alle radici)

$(x_1 < x < x_2)$

Se invece il primo coefficiente: $a < 0$

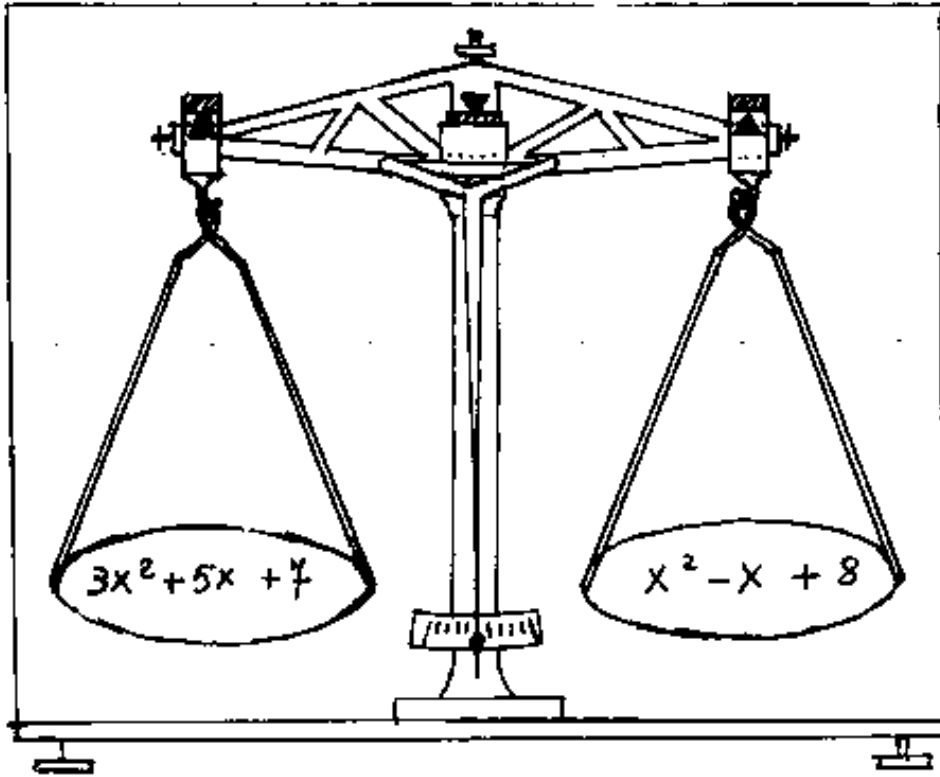
$y = ax^2 + bx + c > 0$

(vale per x interno alle radici
$(x_1 < x < x_2)$

$y = ax^2 + bx + c < 0$

(vale per x esterno alle radici)
$(-\infty < x < x_1)$
$(x_2 < x < +\infty)$

Poiché, in funzioni continue, il passaggio da positive a negative e viceversa, avviene nei punti zero; la prima cosa da fare nelle disequazioni, dopo averle semplificate, è di trovare i punti zero, cioè uguagliarle a zero e trovare le radici che le soddisfano. (Gli schemi grafici, di cui sopra, sono utilissimi anche per la discussione delle equazioni di 2° grado).

Come un'uguaglianza fra due espressioni

Come un'uguaglianza fra due espressioni algebriche è equiparabile ad una bilancia a due piatti che sia in equilibrio, una disequazione può ancora riguardarsi come una bilancia a due piatti che pieghi sempre dalla stessa parte.

Consideriamo l'uguaglianza di due espressioni algebriche, disposte sui piatti di una bilancia. Affinché permanga l'equilibrio, tutto ciò che facciamo su un piatto, deve essere fatto anche sull'altro.

$2x^2+5x+7$	$=$	$-x+8$	(Tolgo un x^2)
$2x^2+6x+7$	$=$	8	(aggiungo un x)
$2x^2+6x$	$=$	1	(Tolgo 7)
$4x^2+12x$	$=$	2	(raddoppio)
$4x^2+12x+9$	$=$	11	(aggiungo 9)
$(2x+3)^2$	$=$	11	(noto il quadrato perfetto)
$2x+3$	$=$	$\pm\sqrt{11}$	(estraggo la radice)
$2x$	$=$	$-3\pm\sqrt{11}$	(tolgo 3)

$2x = -3 \pm \sqrt{11}$ (tolgo 3)

(divido per 2)

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}$

Riusciamo così a pesare, stimare, valutare la x. Questi passaggi algebrici che consentono di esplicitare un'incognita o ridurre a zero un membro, sono perfettamente leciti nelle disequazioni.

(Si noti che nell'esempio si è risolta una equazione di 2° grado senza utilizzare la formula)

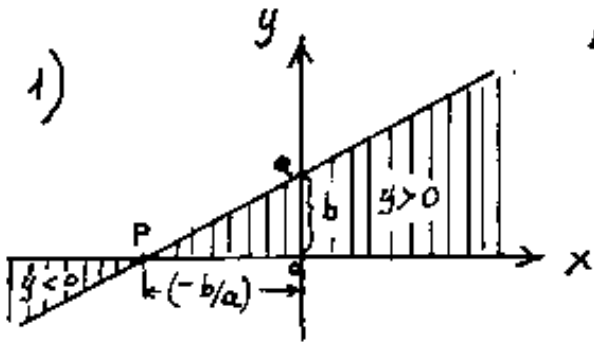
Disequazioni di primo grado

Sono del tipo: $\boxed{ax+b>0}$, oppure $\boxed{ax+b<0}$

con $a \neq 0$ sono dette normali.

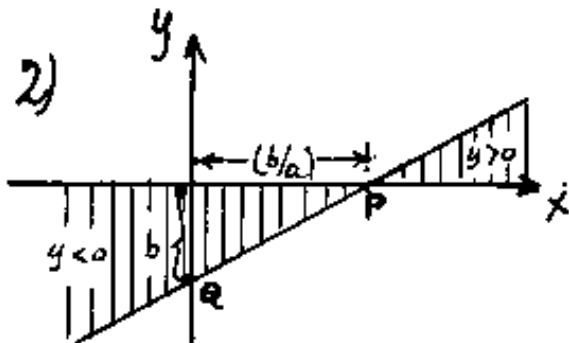
Se poniamo: $\boxed{y = ax+b}$ notiamo che è l'equazione di una retta ove "a" = coeffic. angolare e "b" coeffic. di traslazione lineare. $y = 0$ per $\boxed{x = -b/a}$

Si hanno i seguenti casi:

1)

1) $(a>0)$; $(b>0)$; $y=0$ per $(x=-b/a)$

$\boxed{ax+b>0}$ si ha per $(x>-b/a)$

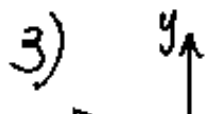
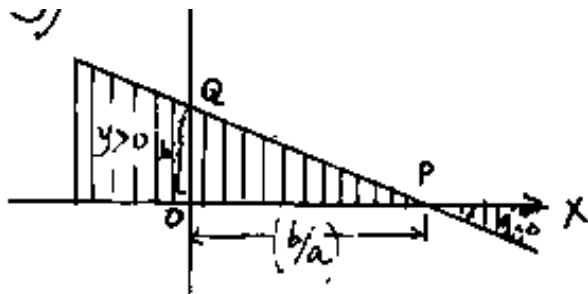
$\boxed{ax+b<0}$ si ha per $(x<-b/a)$

2)

2) $(a>0)$; $(b<0)$ $y=0$ per $(x=+b/a)$

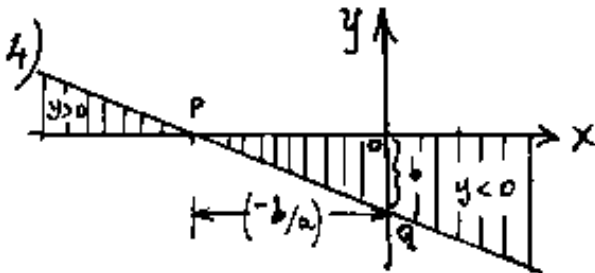
$\boxed{ax+b>0}$ si ha per $(x>b/a)$

$\boxed{ax+b<0}$ si ha per $(x<b/a)$

si noti le semirette che delimitano la disuguaglianza.

3)

3) $(a<0)$; $(b>0)$; $y=0$ per $(x=+b/a)$

3) $(a<0)$; $(b>0)$; $y=0$ per $(x=+b/a)$

$ax+b>0$ si ha per $(x<b/a)$

$ax+b<0$ si ha per $(x>b/a)$

4) $(a<0)$; $(b<0)$; $y=0$ per $(x=-b/a)$

$ax+b>0$ si ha per $(x<-b/a)$

$ax+b<0$ si ha per $(x>-b/a)$

Si noti l'importanza di porre $y=0$ e ricavare ($x=-b/a$) punto di passaggio fra le $y<0$ e le $y>0$.

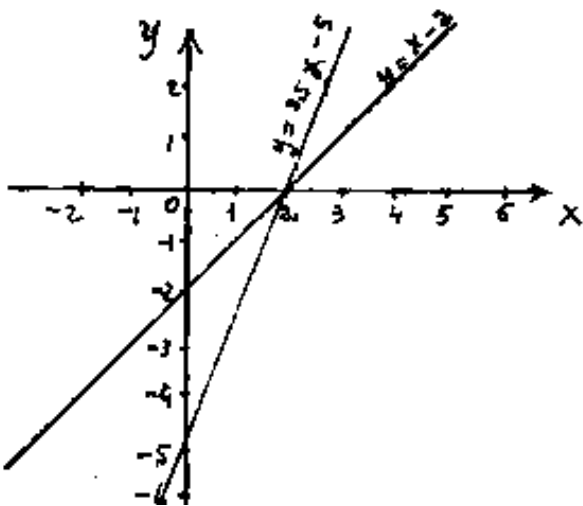
Dire: (−), negativo o minore di zero (<0) è la stessa cosa; dire (+), positivo o maggiore di zero (>0) è la stessa cosa.

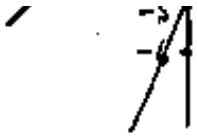
Si noti che, tracciata la retta, non vi sono dubbi in quale campo la disequazione risulta soddisfatta.

<u>Facciamo un esempio numerico.</u>

$$\frac{1}{2}x + 3x - 2 < x + 3$$

$\frac{1}{2}x + 2x < 5$ da cui $2{,}5x < 5$; $\boxed{x < 2}$

avremmo potuto scrivere: $\boxed{2{,}5x - 5 < 0}$; oppure: $\boxed{x - 2 < 0}$ se poniamo $y = 2{,}5x - 5$ ed $y = x - 2$ si hanno due rette diverse; ma, $y=0$ per $x=2$ per entrambe le rette e la disuguaglianza risulta soddisfatta per $x<2$

(per esempio per $x=1$ si ha:

$$\frac{1}{2}(1) + 3(1) - 2 < (1) + 3$$

$\frac{1}{2}(1) + 3(1) - 2 < (1) + 3$

$1,5 < 4$

La verifica più semplice per $x=0$: $-2 < 3$

Per $x=2$ si ha: $\frac{1}{2}(2) + 3(2) - 2 = 2+3$; $5=5$, la disuguaglianza non è sodisfatta.

Si noti che la: $y = x - 2$ resta valida se viene moltiplicata per un qualsiasi "m": $y = mx - 2m$ e sarà

ancora una retta passante per il punto: $(x=2; y=0)$, cioè verificherà la disequazione per: $\underline{x<2}$.

Per capire bene il concetto di "disequazione" consideriamo la disuguaglianza: $\boxed{a>b}$

si può dire: $\boxed{(a-b)>0}$ (cioè è positiva la differenza $(a-b)$)

oppure: $\boxed{\frac{a}{b}>1}$ (cioè il rapporto fra il maggiore e il minore è maggiore di 1)

Se ad ambo i membri della disuguaglianza: $\boxed{a>b}$ aggiungiamo (o togliamo) una costante K, la differenza $(a-b)$ non varia, varia invece il rapporto: $\boxed{\frac{a+K}{b+K}>1}$ pur restando maggiore di 1.

Invece se moltiplichiamo (o dividiamo) ambo i membri della disuguaglianza: $\boxed{a>b}$ per un coefficiente "m" positivo, il rapporto: (a/b) non varia, varia invece la differenza: $\boxed{(ma-mb)=m(a-b)>0}$ cioè la validità della disuguaglianza è condizionata dall'essere: $\boxed{m>0}$; perché, per $\underline{m<0}$ si invertirebbe

ta dall'essere: $|m>0|$; perché, per $m<0$ si invertirebbe e si avrebbe: $(b<a)$. Esempio: $7>5$; $7-5>0$;

$7|m|>5|m|$; ma: $7\cdot(-2) \not> 5(-2)$ perché $(-14)<(-10)$

Sarebbe errato: $(-14)<(-10)$ dividerlo per (-2).

Vi sono casi particolari per i quali è bene aver chiaro il concetto di infinitamente piccolo,

ed infinitamente grande; il primo tende a zero, (0) il secondo tende ad infinito (∞). Non è lecito in generale usare questi simboli come grandezze reali, si debbono pensare come limiti o grandezze vicinissime o tendenti al limite. (Torneremo sul calcolo dei limiti). Sia N un numero finito, e vediamo le correlazioni con zero (0) e con infinito (∞).

$N \pm 0 = N$;	$N \pm \infty = \pm\infty$;	$0 \pm \infty = \pm\infty$
$\frac{N}{0} = \infty$	$\frac{N}{\infty} = 0$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$N^0 = 1$	$N^\infty = \infty$	$\frac{1}{0} = \infty$
$(N)(0) = 0$	$(N)(\infty) = \infty$	$(0)(\infty) = N$ (indefinito)

Possiamo ora tornare alla nostra disuguaglianza:

$(a > b)$; $(a+K) > (b+K)$; $|m| a > |m| \cdot b$.

Quando K tende a diventare infinitamente grande perde di rilevanza il segno > che tende a ($\simeq$) circa

perde di rilevanza il segno > che tende a ($\simeq$) circa uguale. Esempio $a = 2$; $b = 1$. $2 > 1$ sia: $K = (10^9 - 1)$

$1000000001 > 1000000000$; $\frac{a+K}{b+K} > 1 = \left(1 + \frac{1}{10^9}\right) \simeq 1$

Analogamente per "m" tendente a zero, oppure tendente ad infinito; la disuguaglianza nel caso di m tendente a zero, tende ad azzerare ambo i termini e la loro differenza. $(0)(a-b) > 0$ non è vera; mentre $\infty(a-b) > 0$ è vera.

Facciamo un altro esempio di disequazione:

$$(a-b)x > ab$$

cioè: $x > \frac{ab}{a-b}$ Siano: $a>0$; $b>0$

vi sono tre casi:

1) se: $a > b$ allora: $(a-b)>0$ $x > \frac{ab}{(a-b)}$

2) " $a < b$ " $(a-b)<0$ $x < \frac{ab}{a-b}$

3) " $a = b$ " $(a-b)=0$ $x = \infty^*$

numericamente:

1) $a=6$; $b=2$; $(a-b)=+4$ $x > \frac{12}{4}$; $x>3$

2) $a=2$; $b=6$; $(a-b)=-4$ $x < \frac{12}{-4}$; $x<-3$

3) $(a=b)$ $(a-b)=0$ $x^* = \frac{12}{0}$; $x=\infty^*$

verifichiamo nell'espressione data: $(ab=12)$

$$(6-2)(>3) > 12$$

$$(6-2)(<-3) > 12$$

$$(0)(\infty^*) > 12$$

nel terzo caso, la forma indeterminata $(0)(\infty^*)$ deve essere tale da dare un numero > 12. Se ciò è possibile potremo dirlo

tale da dare un numero > 12. Se ciò è possibile potremo dirlo dopo aver fatto i limiti e le forme indeterminate.

Nel 1°) caso facciamo crescere "b" fino a diventare uguale ad "a", ci si avvicina ad $(a-b)=0$ provenendo da valori positivi; $(x>+\infty^*)$. Nel 2° caso facciamo diminuire "b" fino a diventare uguale ad "a", ci si avvicina ad $(a-b)=0$ provenendo da valori negativi; $(x<-\infty)$

Come si vede i limiti a destra e a sinistra dello zero sono diversi.

E molto importante rilevare quali sono le condizioni di zero, cioè vedere per quali valori o condizioni si azzera (si annulla) una certa parte o tutta l'espressione in esame. Per vedere meglio ciò, conviene (quando è possibile) ridurre l'espressione a prodotto di binomi. Per esempio: $y = \sqrt{x^2 + 2x - 15} = \sqrt{(x-3)(x+5)}$, il radicando si azzera per $\boxed{x = +3}$ ad $\boxed{x = -5}$; conviene fare subito il grafico delle ascisse, i punti $x = +3$; ed $x = -5$ dividono il campo in tre zone. (Non essendoci altri valori o condizioni che azzerano il radicando. I punti $y = 0$ sono i punti di passaggio da positivo a negativo e viceversa del radicando, e poiché per $x = 0$; $y = \sqrt{-15}$ (immaginario) vuol dire che tutto il campo da $(x = -5)$ ad $(x = +3)$ il radicando è negativo, necessariamente i campi esterni sono con radicando posivivo, cioè:

$\boxed{-\infty < x \leq -5}$ y è reale

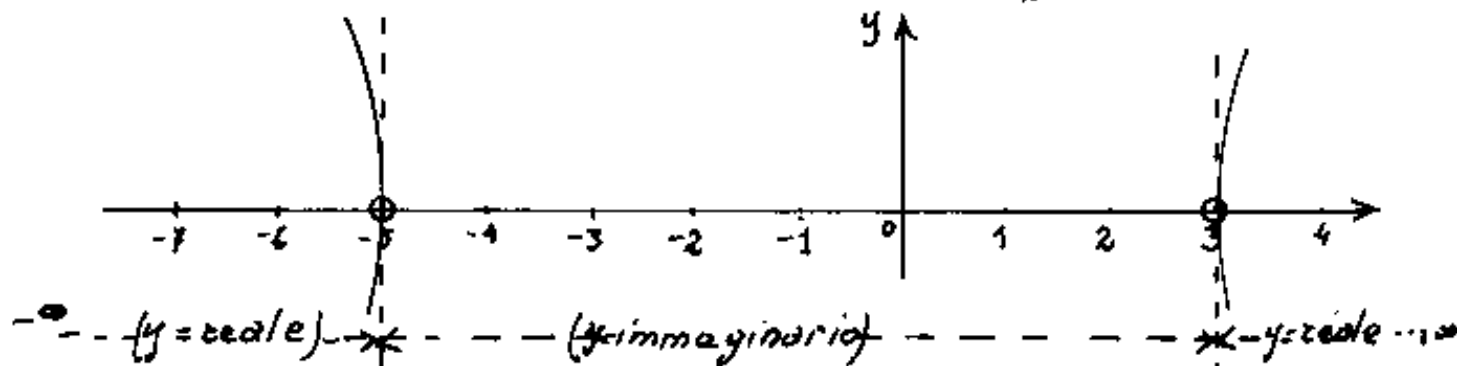
$\boxed{-5 < x < 3}$ y è immaginario

{si noti che la ricerca dei campi di esistenza di una ...

$-5 < x < 3$	y è immaginario
$3 \leq x < \infty$	y è reale

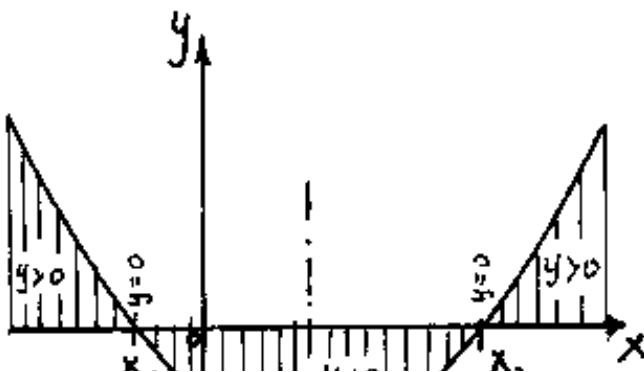
... funzione è ridotta al calcolo di una disequazione e viceversa.

-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

-∞ - - (y = reale) - - (y = immaginario) - - y = reale ... +∞

Disequazioni qualsiasi

Una espressione matematica $y = f(x)$ si dice: "funzione della variabile x". Se poniamo: $f(x) = 0$, l'espressione si chiama: "equazione in x". Infine se poniamo: $f(x) > 0$ oppure: $f(x) < 0$ queste forme si dicono "disequazioni in x".

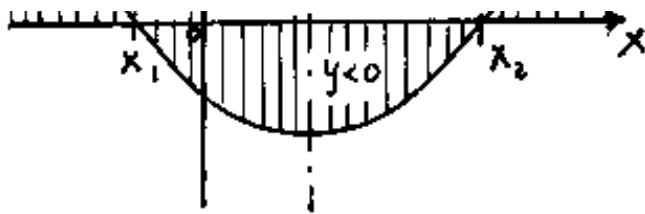
Abbiamo già posto in evidenza, nella: "$(a-b)x > ab$" come valori diversi ad "a" e "b" portino a condizioni diverse nella risoluzione delle x, che in generale debbano soddisfare ad espressioni del tipo: $f(x) > \varphi(x)$.

È abbastanza divertente rilevare come: $y = f(x)$ comprenda: $f(x) = 0$; $f(x) > 0$; $f(x) < 0$. Basta fare il grafico della funzione. Per esempio: (vedi fig.)

$$y = ax^2 + bx + c$$

per $y = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$

$$ax^2 + bx + c > 0$$ per:

$$-\infty < x < x_1$$. $$x_2 < x < +\infty$$

y, y>0, y=0, y=0, y>0, x_1, x_2, x

$$ax^2+bx+c<0 \quad \text{per:} \quad x_1 < x < x_2$$

Tal volta l'espressione: $y=f(x)$ oltre a valori numerici ed operatori in (x), contiene una o più lettere: (k, λ, ecc) dette "*parametri*". Poiché per k, λ, ... non viene specificato il valore

numerico, avremo una $y = f(x)$ ogni volta che sostituiamo ai parametri: $K, \lambda, \ldots$ ecc, dei valori numerici.

In altre parole una espressione matematica: $y=f(x)$ che contenga dei parametri, rappresenta: "una famiglia di funzioni" (Una funzione per ogni valore numerico assegnato ai parametri)

In questi casi occorre quindi rilevare "i capisaldi" determinati dai parametri, per esempio nella: $(a-b)x > ab$ è caposaldo il fatto che $b = a$, determina, (per valori crescenti di b) l'inversione della disuguaglianza. (Caposaldi sono quei punti, o quei valori particolari, che determinano le condizioni base per lo sviluppo del problema. La parola caposaldo deriva dalla topografia, ove caposaldo è un punto del terreno, e può essere caposaldo di orientamento o di riferimento planimetrico o altimetrico.)

Facciamo un esempio:

Studiare la disequazione parametrica:

Studiare la disequazione parametrica:

$$y = (K-2)x^2 - 2Kx + 9 > 0$$

Notiamo subito che: $K=2$ annulla il coefficiente di x^2, e per: $K>2$ la parabola è volta verso l'alto, mentre per $K<2$ la parabola è volta verso il basso. Quindi $K=2$ è un caposaldo della nostra disequazione.

Se poniamo la disequazione nella forma:

$$y = K(x^2-2x) - 2x^2 + 9 > 0$$

Si nota che per $(x^2-2x)=0$ sparisce il parametro K, cioè per $x=0 \rightarrow y=9>0$; e per $x=2 \rightarrow y=1>0$. La disequazione è certamente soddisfatta indipendente da K.

Poniamo ora: $(K-2)x^2 - 2Kx + 9 = 0$

e risolviamo la x:

$$x_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2-9K+18}}{(K-2)}$$

Vediamo per quali valori di K ammette radici reali:

$$K_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} = \begin{cases} +6 \\ +3 \end{cases}$$

Quindi $K=3$, e $K=6$ sono altri due capisaldi

Possiamo ora discutere la disequazione:

$\boxed{-\infty < K < 2}$ famiglia di parabole volte verso il basso passanti per $Q \equiv (0,9)$ ed $A \equiv (2,1)$; la disequazione risulta soddisfatta per $\boxed{x_1 < x < x_2}$

ne risulta soddisfatta per $\boxed{x_1 < x < x_2}$

(cioè valori interni alle radici)

$\boxed{k = 2}$ degenera in una retta $y = -4x + 9 > 0$

vale per $\boxed{x < 9/4}$

$\boxed{2 < k < 3}$ famiglia di parabole volte verso l'alto, $\Delta > 0$

che intersecano l'asse x; vale per $\boxed{x < x_1}$,

e per $\boxed{x > x_2}$ (cioè valori esterni alle radici)

Altro esempio numerico:

Trovare le equazioni dei piani tangenti la sfera:

$x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+8=0$; e passanti per la retta:

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}.$$

Ricaviamo gli elementi della sfera:

$$C\equiv(1,-3,-1)\;;\quad R=\sqrt{1+9+1-8}\;\rightarrow\;R=\sqrt{3}\;;$$

l'equazione della sfera può scriversi:

$$\boxed{(x-1)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=3}$$

I piani della retta:

$$\left.\begin{aligned}3x-12&=4y-4\\(x-4)&=4z-4\\y-1&=3z-3\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\rightarrow\quad y=\tfrac{3}{4}x-2 &&(\text{parallelo a } z)\\&\rightarrow\quad z=\tfrac{1}{4}x &&(\text{passante per } y)\\&\rightarrow\quad z=\tfrac{y}{3}+\tfrac{2}{3} &&(\text{parallelo ad } x)\end{aligned}$$

Quindi la retta incontra l'asse y nel punto $A\equiv(0,-2,0)$

e la sua traccia sul piano xz sarà $B\equiv\left(\frac{8}{3},0,\frac{2}{3}\right)$.

I coseni direttori della retta, essendo: $\sqrt{4^2+3^2+1^2}=\sqrt{26}$

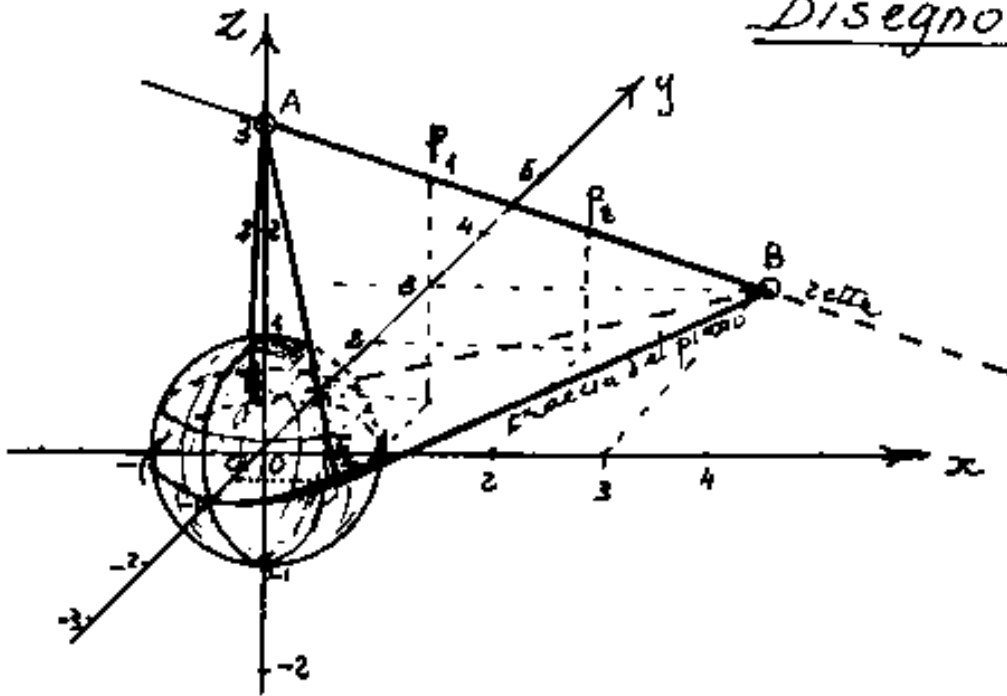
$\cos\alpha=\frac{4}{\,}$; $\cos\beta=\frac{3}{\,}$; $\cos\gamma=\frac{1}{\,}$;

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{26}} \;;\quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{26}} \;;\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{26}} \;;$$

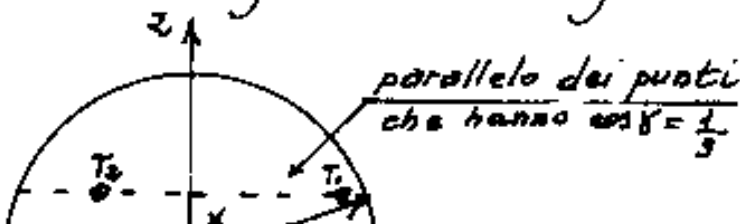
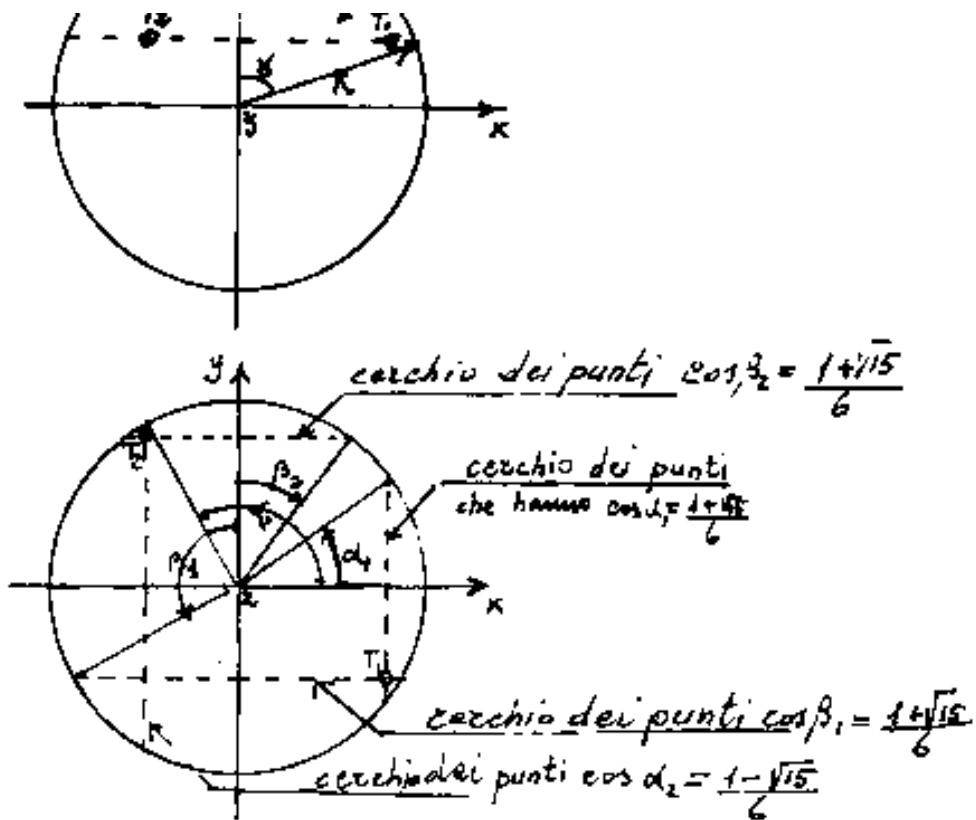
I piani perpendicolari alla retta distanti δ dall'origine degli assi avranno per equazione: (δ = parametro)

$$\boxed{4x + 3y + z - \delta\sqrt{26} = 0}$$

e fra essi, quello che passa per il centro della sfera, conterrà i punti di tangenza. Perciò sostituendovi le coordinate di C possiamo ricavare δ e quindi

Disegno prospettico

Nel disegno prospettico si vedono i due piani tagliati dalle rette passanti per i punti di tangenza T_1, T_2, e per A, in modo da "vedere" la sfera e notare che le dimensioni tornano coi calcoli.

Si noti che $\cos\gamma = \frac{1}{3} \Rightarrow \gamma = 70° 31' 44''$ comune ai due punti di tangenza che giacciono quindi sullo stesso parallelo

parallelo dei punti che hanno $\cos\gamma = \frac{1}{3}$

L'equazione del piano:

$$4(1)+(3)(-3)+(1)(-1)=\delta\sqrt{26} \quad \rightarrow \delta=\frac{-6}{\sqrt{26}}$$

sostituendo δ:

$$\boxed{4x+3y+z+6=0}$$

equazione del piano normale alla retta, passante per C e contenente i punti di tangenza con la sfera.

Facciamo sistema con le equazioni della retta per calcolare T_2. (È più comodo sostituire le equazioni della retta: $(x=4z)$; $(y=3z-2)$ nell'equazione del piano normale per C, avremo: $(16z+9z-6+z+6=0) \rightarrow z=0;\ x=0;\ y=2;$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -3\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix} \begin{matrix}x\\=\\=\end{matrix} \begin{vmatrix}0\\ -2\\ -6\end{vmatrix}$$

comunque la risoluzione coi determinanti è una verifica)

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 4 & 3 & 17\end{vmatrix}=26 \quad \begin{vmatrix}0 & 0 & -4\\ -2 & 1 & -3\\ -6 & 3 & 1\end{vmatrix}=0 \ (x=0); \quad \begin{vmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & -2 & -3\\ 4 & -6 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -3\\ 0 & -6 & -17\end{vmatrix}=-52 \quad y=\frac{-52}{26}\ (y=-2); \quad \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 4 & 3 & -6\end{vmatrix}=0\ (z=0)$$

Cioè: $T_2 \equiv (0\ -2\ 0)$ notiamo che coincide con A

Calcoliamo la distanza $\overline{CT_2}=\overline{CA}=\sqrt{(1-0)^2+(-3+2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}$.

Calcoliamo la distanza $\overline{CT_t} = \overline{CA} = \sqrt{(1-0)^2+(-3+2)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{3}$.

Ma anche $R=\sqrt{3}$; ed essendo $\overline{CT_t}$ la distanza minima del centro C dalla retta; vuol dire che la retta è tangente la sfera; esiste quindi un unico piano per tale retta che sia tangente alla sfera e lo sarà in $T_t \equiv A$.

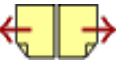
I coseni direttori della retta $\overrightarrow{T_t C} = \overrightarrow{AC} \equiv \left[\cos\alpha = \frac{1-0}{\sqrt{3}};\ \cos\beta = \frac{-3+2}{\sqrt{3}};\ \cos\gamma = \frac{-1-0}{\sqrt{3}}\right]$

$$\frac{x-0}{\sqrt{3}} + \frac{y+2}{\sqrt{3}} - \frac{z-0}{\sqrt{3}} = 0 \rightarrow \boxed{X - Y - Z - 2 = 0} : \text{(piano tangente)}.$$

T A B E L L A
di pentagonododecaedri a facce piane

α	β	δ	ε	φ	b/a	m/a	
108	74	164.8303261	94.777737	98.391937	1.614512	2.65832	← lim
108	76	158.4139993	96.598013	100.987988	1.489845	2.44845	
108	78	153.3827324	97.946234	102.671034	1.402810	2.28456	
108	80	149.0482114	99.055293	103.896495	1.335446	2.14581	
108	82	145.1472363	100.014857	104.837907	1.280736	2.02368	
108	84	141.5466712	100.870726	105.582602	1.235058	1.91362	
108	86	138.1686229	101.650046	106.181331	1.196254	1.81281	
108	88	134.9632021	102.370487	106.666311	1.162917	1.71937	
108	90	131.8964290	103.044331	107.059240	1.134067	1.63192	
108	92	128.9441231	103.680537	107.375340	1.108999	1.54946	
108	94	126.0885200	104.285892	107.625588	1.087180	1.47119	
108	96	123.3162666	104.865694	107.818039	1.068204	1.39650	
108	98	120.6171684	105.424182	107.958650	1.051750	1.32486	
108	100	117.9833749	105.964816	108.051809	1.037567	1.25587	
108	102	115.4088327	106.490469	108.100698	1.025449	1.18916	
108	104	112.8889094	107.003561	108.107530	1.015234	1.12445	
108	106	110.4201316	107.506149	108.073720	1.006787	1.06147	
108	108	108.0000000	108.000000	108.000000	1.000000	1.00000	(dodecaedro regolare)
108	110	105.6268599	108.486637	107.886503	0.994787	0.93986	
108	112	103.2998121	108.967372	107.732816	0.991078	0.88087	
108	114	101.0186526	109.443333	107.538014	0.988819	0.82290	
108	116	98.7838360	109.915476	107.300688	0.987968	0.76581	
108	118	96.5964547	110.384592	107.018953	0.988496	0.70951	
108	120	94.4582309	110.851313	106.690457	0.990383	0.65391	
108	122	92.3715171	111.316101	106.312382	0.993620	0.59893	
108	124	90.3392997	111.779245	105.881455	0.998204	0.54452	
108	126	88.3652030	112.240845	105.393952	1.004141	0.49065	
108	128	86.4534860	112.700793	104.845721	1.011446	0.43728	
108	130	84.6090271	113.158759	104.232213	1.020138	0.38441	
108	132	82.8372884	113.614170	103.548541	1.030245	0.33207	
108	134	81.1442531	114.066192	102.789555	1.041800	0.28027	
108	136	79.5363254	114.513722	101.949953	1.054842	0.22907	
108	138	78.0201903	114.955381	101.024429	1.069418	0.17854	
108	140	76.6026253	115.389530	100.007845	1.085580	0.12874	
108	142	75.2902700	115.814294	98.895436	1.103387	0.07978	
108	144	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

108	142	75.2902700	115.814294	98.895436	1.103387	0.07978	
108	144	74.0893583	116.227607	97.683035	1.122909	0.03176	← lim. m/a = 0
108	146	73.0054316	116.627277	96.367292	1.144220	-0.01524	
108	148	72.0430556	117.011067	94.945878	1.167409	-0.06109	
108	150	71.2055693	117.376786	93.417645	1.192575	-0.10572	
108	152	70.4948933	117.722382	91.782725	1.219835	-0.14904	

che oltre i limiti di β anche b/a ammette un minimo per β intorno a 116°, e che vi sono limiti su m/a.

D'altra parte:

$$\frac{m}{a} = \frac{2\,\text{sen}(\varepsilon/2)\,\text{sen}(\delta + \varepsilon/2 + \gamma/2)}{\cos(\beta + \delta/2)}$$

Con ciò restano definiti i rapporti fra i lati delle facce pentagonali.

Per avere il caso 9) basterà calcolare la condizione: $(m/a = 1)$

Per avere il caso 10) porremo: $(b/a = 1)$

Per avere il caso 11): $(m/a = b/a = 1)$

Occorre notare che dati gli angoli α e β, per tentativi si risolve il sistema che fornisce gli angoli $\delta, \varepsilon, \gamma$, tali da avere solidi con facce piane.

Però oltre le limitazioni sui valori degli angoli di cui abbiamo già trattato, occorre considerare altre limitazioni: Se fissiamo un valore di α per es. $\alpha = 108°$ (Per tenersi nel

campo del dodecaedro regolare), avremo che β deve essere $\beta > 73{,}^{\circ}5233$ affinché esistano diedri convessi; e deve essere: $\beta < 145{,}^{\circ}3464714152567$. affinché $m > 0$ cioè la figura pentagonale non degeneri prima in un quadrilatero. cioè:

$$73^{\circ}\,31'\,23''{,}8 < \beta < 145^{\circ}\,20'\,47''{,}3\,.$$

si riporta una tabella con $\alpha = 108^{\circ}$, ove si può notare

Il valore di b/a per $\alpha = 108°$ e $\beta = 116°,2285$ è 0,98795 8923; come si vede spingendo i calcoli ad una maggiore precisione, non si ottiene una notevole differenza. Per il limite di m/a, i valori negativi in tabella, ci avvertono che per valori intermedi di β fra 144° e 146° v'è il valore esatto di m = zero. —
Abbiamo esposto una tabella ad $\alpha = 108° =$ cost. e β variabile, condizionato solo dall'uguaglianza dei diedri calcolati agli estremi opposti di uno stesso spigolo, Imponiamo ora anche la condizione: $m > 0$ cioè che il pentagono non si riduca a quadrilatero $(m=0)$ od a poligono intrecciato $(m<0)$. Dalle tabelle che esporremo figura fissata α e per ogni α tutti i possibili valori di β in quel campo esposti con salto di 5° in 5° gradi.
Se pensiamo di rovesciare il disegno della faccia

[illegible]

β diventa α, ε diventa γ, fermo il valore di δ,

mentre b/a diventa: a/b ed m/a diventa m/b.

Figurano in tabella anche i casi limite ove $\delta = 180°$

$\varepsilon = \gamma = 90°$. Dalla tabella è rilevabile il caso 10) quando

$b/a = 1$; oppure il caso 9 (che si può vedere per $\alpha = 100$, per

β fra 115° e 120°; oppure con $\alpha = 90°$ e β fra 125 e 130, ecc)

Il valore max di β si ha per $\alpha = 100°$ e $\beta = 150°$, il max $\alpha = 125$

supponendo $\alpha \leq \beta$ e ricordando che possono invertirsi.

T A B E L L A

di pentagonododecaedri a facce piane

angoli	delle	facce			rapporto lati		angoli diedri	
α	β	δ	ε	φ	b/a	m/a	DB	DC
75	105	180.000001	90.000000	89.999999	0.577350	1.63299	90.000000	90.000001
75	110	155.829005	102.192263	96.978733	0.658083	1.61901	105.529644	97.949782
80	100	180.000001	90.000000	89.999999	0.700208	1.72644	90.000000	90.000001
80	105	155.730732	101.474191	97.795077	0.746684	1.66843	104.378412	99.027736
80	110	145.216676	105.185941	99.597384	0.750000	1.56518	110.788916	101.541764
80	115	136.907835	107.782139	100.310026	0.754705	1.46135	116.083105	102.590933
85	95	180.000001	90.000000	90.000000	0.839100	1.84612	90.000000	90.000000
85	100	155.667610	100.761150	98.571241	0.841390	1.73358	103.272440	100.086923
85	105	145.063092	104.313911	100.622997	0.828132	1.60633	109.173788	103.062267
85	110	136.629929	106.824613	101.545458	0.821066	1.48485	114.038265	104.490953
85	115	129.335977	108.835957	101.828066	0.820428	1.36811	118.476540	104.940920
85	120	122.818441	110.547936	101.633623	0.826089	1.25494	122.738830	104.630695
85	125	116.924981	112.056523	101.018496	0.838043	1.14445	126.965577	103.667458
90	90	180.000001	90.000000	90.000000	1.000000	2.00000	90.000000	90.000000
90	95	155.636743	100.045168	99.318089	0.944451	1.81747	102.197153	101.139412
90	100	144.973370	103.430903	101.595727	0.910863	1.66140	107.610560	104.570560
90	105	136.450281	105.847191	102.702528	0.889759	1.51948	112.064698	106.371800
90	110	129.030491	107.799932	103.169577	0.878184	1.38686	116.122226	107.161023
90	115	122.344612	109.477470	103.177918	0.874721	1.26071	120.015311	107.175282
90	120	116.232122	110.971717	102.796161	0.878667	1.13917	123.876660	106.528588
90	125	110.627311	112.332802	102.039887	0.889751	1.02101	127.797040	105.282100
90	130	105.519050	113.588140	100.892810	0.908008	0.90554	131.844356	103.473959
95	85	180.000001	90.000000	90.000000	1.191754	2.20013	90.000000	90.000000
95	90	155.636743	99.318089	100.045168	1.058816	1.92437	101.139412	102.197153
95	95	144.943859	102.528071	102.528071	1.000000	1.73283	106.081553	106.081553
95	100	136.362104	104.841175	103.796721	0.962046	1.56668	110.141505	108.249739
95	105	128.851360	106.725752	104.422888	0.937675	1.41585	113.833627	109.371631
95	110	122.037017	108.357995	104.604988	0.923761	1.27528	117.371268	109.704731
95	115	115.751441	109.825346	104.423213	0.918706	1.14185	120.878023	109.372224
95	120	109.920120	111.176945	103.902935	0.921688	1.01353	124.440924	108.437533
95	125	104.522016	112.441242	103.036742	0.932367	0.88898	128.128808	106.934724
95	130	99.573070	113.633111	101.793819	0.950742	0.76745	131.998458	104.886076
95	135	95.117578	114.756840	100.125582	0.977087	0.64876	136.094440	102.316221
95	140	91.220676	115.807583	97.971741	1.011926	0.53322	140.444616	99.265814
100	80	180.000001	89.999999	90.000000	1.478148	2.46561	90.000001	90.000000

95	140	91.220676	115.807583	97.971741	1.011926	0.53322	140.444616	99.265814
100	80	160.000001	89.999999	90.000000	1.428148	2.46561	90.000001	90.000000
100	85	155.667610	98.571241	100.761150	1.188509	2.06037	100.086923	103.272440
100	90	144.973370	101.595727	103.430903	1.097860	1.82399	104.570560	107.610560
100	95	136.362104	103.796721	104.841175	1.039452	1.62849	108.249739	110.141505
100	100	128.792333	105.603834	105.603834	1.000000	1.45631	111.589836	111.589836
100	105	121.885664	107.180462	105.933874	0.974073	1.29934	114.784676	112.235384
100	110	115.468628	108.609062	105.922309	0.958095	1.15282	117.947629	112.212565
100	115	109.458871	109.937343	105.603787	0.952944	1.01369	121.160218	111.589745
100	120	103.825684	111.194480	104.979836	0.955412	0.87988	124.489551	110.400464
100	125	98.574203	112.397648	104.028149	0.965961	0.75002	127.995058	108.660220
100	130	93.738496	113.554544	102.706960	0.984597	0.62338	131.729682	106.379206
100	135	89.377278	114.664071	100.958651	1.011611	0.49983	135.736783	103.575185
100	140	85.568039	115.716460	98.715502	1.047546	0.37978	140.043147	100.287620
100	145	82.396181	116.694076	95.909743	1.093212	0.26419	144.649585	96.590912
100	150	79.937942	117.574089	92.487969	1.149743	0.15432	149.523144	92.600948

TABELLA

di pentagonododecaedri a facce piane

angoli delle facce					rapporto lati		angoli diedri	
α	β	δ	ε	φ	b/a	m/a	DE	DC
105	75	180.000001	89.999999	90.000000	1.732051	2.82843	90.000001	90.000000
105	80	155.730732	97.795077	101.474191	1.339254	2.23445	99.027736	104.378412
105	85	145.063092	100.622997	104.313911	1.207537	1.93970	103.062267	109.173788
105	90	136.450281	102.702528	105.847191	1.123900	1.70774	106.371800	112.064698
105	95	128.851360	104.422888	106.725752	1.066468	1.50996	109.371631	113.833527
105	100	121.885664	105.933874	107.180462	1.026618	1.33392	112.235384	114.784676
105	105	115.375280	107.312360	107.312360	1.000000	1.17265	115.065328	115.065328
105	110	109.231282	108.604066	107.164651	0.984179	1.02175	117.936070	114.751180
105	115	103.414187	109.838384	106.747429	0.977759	0.87822	120.910762	113.878397
105	120	97.918293	111.034427	106.047280	0.979986	0.74003	124.048137	112.459931
105	125	92.765570	112.203361	105.031069	0.990556	0.60582	127.405056	110.496627
105	130	88.003479	113.348767	103.647754	1.009507	0.47491	131.035477	107.988042
105	135	83.703121	114.465917	101.830962	1.037158	0.34724	134.985437	104.945561
105	140	79.954091	115.540877	99.505032	1.074083	0.22339	139.283620	101.408183
105	145	76.852412	116.550780	96.596808	1.121120	0.10447	143.929017	97.457609
110	75	155.829005	96.978733	102.192263	1.519566	2.46019	97.949782	105.529644
110	80	145.216676	99.597384	105.185941	1.333333	2.08690	101.541764	110.788916
110	85	136.629929	101.545458	106.824613	1.217928	1.80844	104.490953	114.038265
110	90	129.030491	103.169577	107.799932	1.138713	1.57924	107.161023	116.122226
110	95	122.037017	104.604988	108.357995	1.082531	1.38053	109.704731	117.371268
110	100	115.468628	105.922309	108.609062	1.042867	1.20224	112.212565	117.947629
110	105	109.231282	107.164651	108.604066	1.016075	1.03817	114.751180	117.936070
110	110	103.278068	108.360966	108.360966	1.000000	0.88419	117.378034	117.378034
110	115	97.593337	109.531659	107.875004	0.993375	0.73742	120.148347	116.287752
110	120	92.186661	110.690880	107.122458	0.995519	0.59584	123.118614	114.661946
110	125	87.091536	111.846951	106.061513	1.006176	0.45816	126.347614	112.488212
110	130	82.366103	113.001442	104.632456	1.025425	0.32372	129.894343	109.755249
110	135	78.093130	114.147297	102.759573	1.053624	0.19259	133.811459	106.467237
110	140	74.375303	115.266834	100.357862	1.091384	0.06552	138.133051	102.662548
115	80	136.907835	100.310026	107.782139	1.325021	1.93632	102.590933	116.083105
115	85	129.335977	101.828066	108.835957	1.218876	1.66756	104.940920	118.476540
115	90	122.344612	103.177918	109.477470	1.143222	1.44128	107.175282	120.015311
115	95	115.751441	104.423213	109.825346	1.088488	1.24289	109.372224	120.878023
115	100	109.458871	105.603787	109.937343	1.049379	1.06375	111.589745	121.160218

		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
115	100	109.458871	105.603787	109.937343	1.049379	1.06375	111.589745	121.160218
115	105	103.414187	106.747429	109.838384	1.022747	0.89820	113.878397	120.910762
115	110	97.593337	107.875004	109.531659	1.006669	0.74234	116.287752	120.148347
115	115	91.994498	109.002751	109.002751	1.000000	0.59338	118.870353	118.870353
115	120	86.636686	110.142979	108.220335	1.002134	0.44934	121.684177	117.059115
115	125	81.561367	111.303504	107.135129	1.012871	0.30896	124.793377	114.688720
115	130	76.835525	112.485777	105.678698	1.032341	0.17165	128.265966	111.735245
115	135	72.553598	113.681781	103.764620	1.060949	0.03758	132.166015	108.193181
120	85	122.818441	101.633623	110.547936	1.210523	1.51914	104.630695	122.738830
120	90	116.232122	102.796161	110.971717	1.138088	1.29647	106.528588	123.876660
120	95	109.920120	103.902935	111.176945	1.084966	1.09964	108.437533	124.440924
120	100	103.825684	104.979836	111.194480	1.046668	0.92094	110.400464	124.489551
120	105	97.918293	106.047280	111.034427	1.020423	0.75514	112.459931	124.048137
120	110	92.186661	107.122458	110.690880	1.004501	0.59853	114.661946	123.118614
120	115	86.636686	108.220335	110.142979	0.997871	0.44839	117.059115	121.684177
120	120	81.292639	109.353681	109.353681	1.000000	0.30278	119.713229	119.713229
120	125	76.200921	110.531980	108.267099	1.010750	0.16042	122.696684	117.164854
120	130	71.435511	111.758781	106.805707	1.030304	0.02078	126.090805	113.999040

T A B E L L A

di pentagonododecaedri a facce piane

angoli delle facce					rapporto lati		angoli diedri	
α	β	δ	ε	γ	b/a	m/a	DE	DC
125	85	116.924981	101.018496	112.056523	1.193257	1.36562	103.667458	126.965577
125	90	110.627311	102.039887	112.332802	1.123910	1.14752	105.282100	127.797040
125	95	104.522016	103.036742	112.441242	1.072539	0.95346	106.934724	128.128808
125	100	98.574203	104.028149	112.397648	1.035239	0.77645	108.660220	127.995058
125	105	92.765570	105.031069	112.203361	1.009534	0.61160	110.496627	127.405056
125	110	87.091536	106.061513	111.846951	0.993862	0.45535	112.488212	126.347614
125	115	81.561367	107.135129	111.303504	0.987292	0.30504	114.688720	124.793377
125	120	76.200921	108.267099	110.531980	0.989365	0.15871	117.164854	122.696684
125	125	71.058134	109.470933	109.470933	1.000000	0.01508	119.999295	119.999295

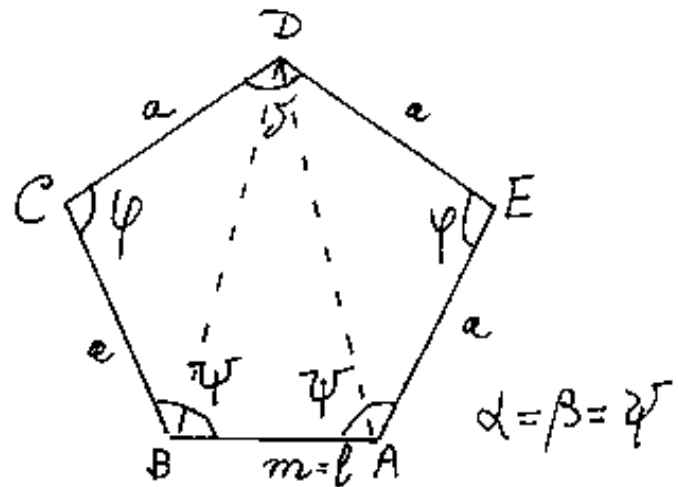
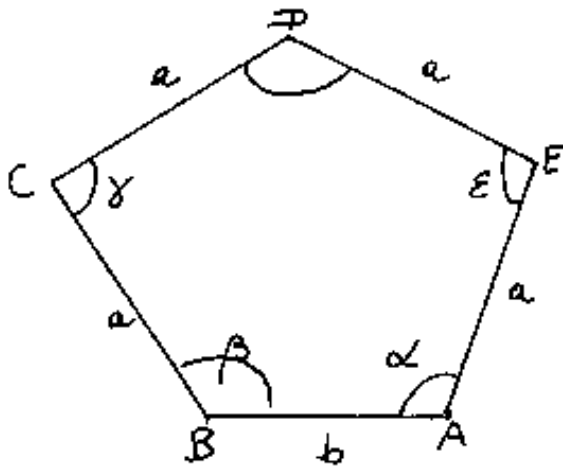
L'esame della tabella porta a considerare non rilevante il caso 9), mentre evidenzia le simmetrie del caso 10) cioè 4 lati uguali, quindi: $b/a = 1$. Si nota che: $b/a = 1$ si ha quando $\alpha = \beta$; ed anche: $\varepsilon = \gamma$; e $\hat{D}_E = \hat{D}_C$.

È il caso che abbiamo considerato all'inizio del capitolo sui pentagono dodecaedri. Dove abbiamo rilevato che la stessa configurazione pentagonale ci faceva passare dal cubo al dodecaedro al rombododecaedro con notevole attinenza alle cristallizzazioni della pirite

all'Elba e a Gavorrano. Si pensi anche alla condizione matematica "facce uguali", pur non riferita ad un modulo; meglio sarebbe dire: "facce simili". Ma un solido a "facce uguali" sfaldando una faccia sola, le altre facce diventano "apparentemente diverse". Si avverte il nocciolo centrale del costituirsi della materia.

II caso 10) Quattro lati uguali ed uno diverso

Per angoli tutti diversi si opera con le formule di compatibilità dei diedri, come abbiamo visto al caso 7*), ove per $\varepsilon = \gamma = \varphi$, il triangolo ADB è isoscele, per cui $\alpha = \beta$ ed anche $a = b$, cioè il caso 7) è connesso al caso 10).

$\alpha = \beta = \psi$

Si noti che fissati φ e δ resta univocamente determinata la classe di figure simili: $\psi = \alpha = \beta = \left(\frac{540 - \delta - 2\varphi}{2}\right)$

le formule di compatibilità dei diedri diventano:

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha - \cos\alpha\cos\delta}{\cos(\alpha-\delta) - \cos\alpha} = \boxed{\cos\varphi = \frac{(1-\cos\delta)\cos\alpha}{\cos(\alpha-\delta) - \cos\alpha}}$$

$$\cos\varphi\,(\cos(\alpha-\delta)) - \cos\varphi\,(\cos\alpha) = \cos\alpha - \cos\alpha\cos\delta$$

$$\cos\varphi\left(\cos(\alpha-\delta)-\cos\varphi(\cos\alpha\right)= \cos\alpha - \cos\alpha\cos\delta$$

$$\cos\varphi\left(\cos\alpha\cos\delta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\delta\right)-\cos\varphi(\cos\alpha) = (1-\cos\delta)\cos\alpha$$

$$\cos\varphi\cos\delta + \operatorname{tg}\alpha\cos\varphi\operatorname{sen}\delta = 1+\cos\varphi-\cos\delta$$

$$\boxed{\operatorname{tang}\alpha = \frac{1+\cos\varphi-\cos\delta-\cos\varphi\cos\delta}{\cos\varphi\operatorname{sen}\delta}} \;;\ \text{ma,}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(270-(\varphi+\delta/2)\right) = -\cos(\varphi+\delta/2)$$

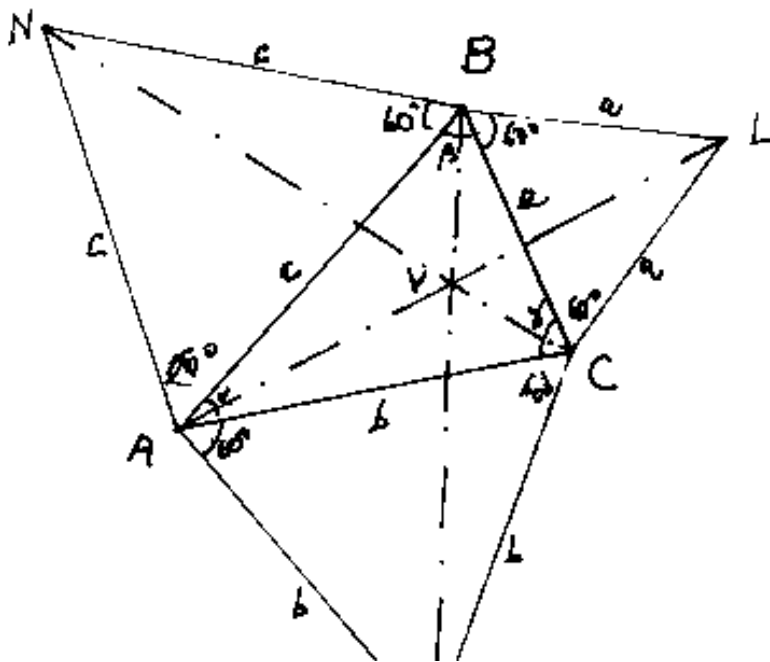
$$\cos\alpha = \cos\left(270-(\varphi+\delta/2)\right) = -\operatorname{sen}(\varphi+\delta/2$$

$$\boxed{\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi+\delta/2)}}$$

.

Centri isogonici; metapoli; punti isodinamici.

Dicesi centro isogonico quel punto che vede i segmenti sotto la stessa ampiezza angolare. Inversamente, luogo dei centri isogonici di un segmento sono gli archi di cerchio di cui il segmento è corda.

Particolarmente importanti i centri isogonici dei triangoli, ove il centro isogonico V, interno al triangolo ABC avrà $A\hat{V}B = B\hat{V}C = C\hat{V}A = \frac{2\pi}{3} = 120°$.

Per trovare V ci si avvale della costruzione a fianco detta figura di Torricelli, per eseguirla basta costruire esternamente al triangolo ABC

M

te al triangolo ABC, tre triangoli equi=laterì sui lati di ABC, ed avremo: BCL di lato a, ACM di lato b, ABN di lato c; uniti AL; BM; CN; il punto comune è il centro isogonico "V" ed è detto punto di Torricelli.

Il poliedro prismatoide ha un volume calcolabile con una formula semplice detta "formula dei tre livelli"

Siano:

A_1 ed A_2 = area delle basi

h = altezza del prismatoide = distanza dei piani paralleli

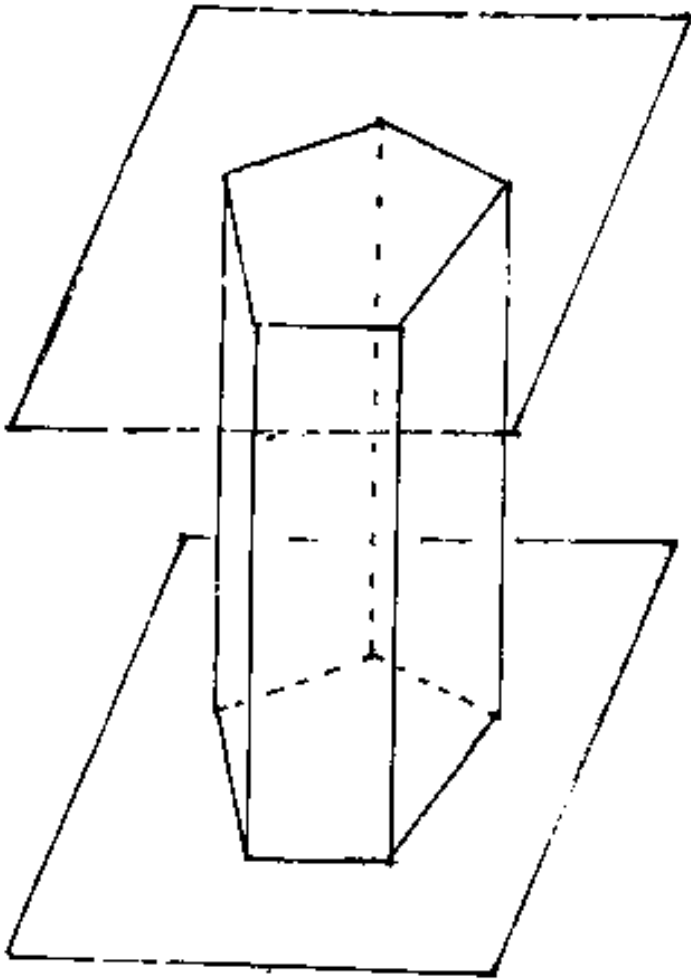
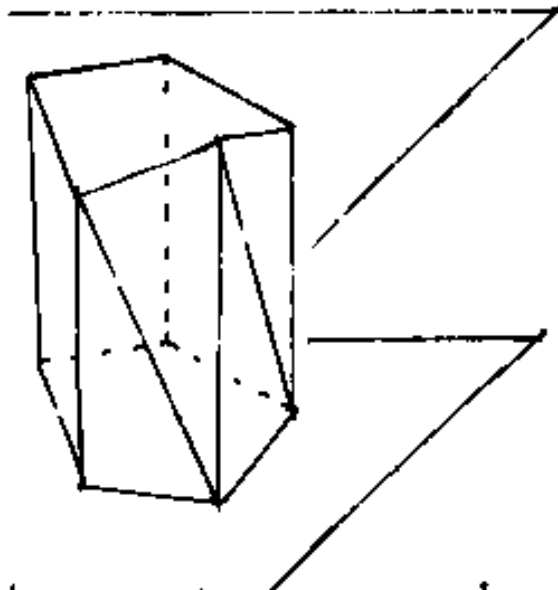
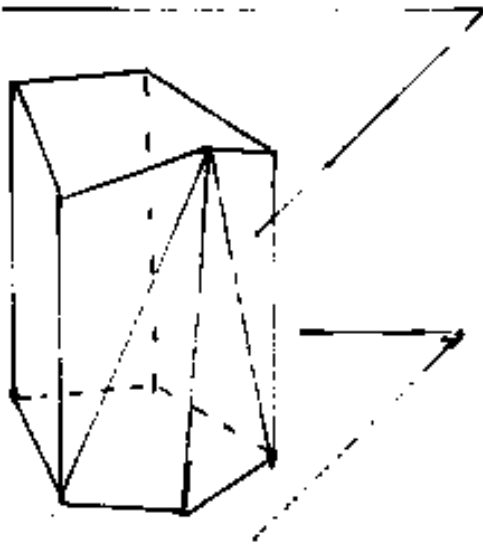
A_m = area della sezione mediana del solido

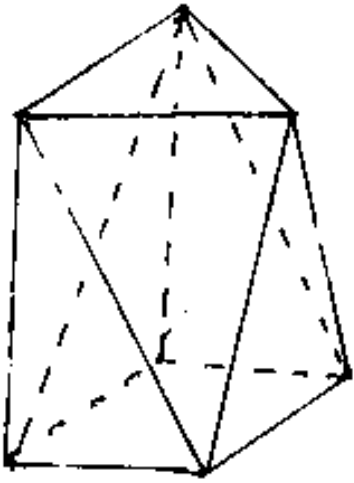
V = volume del solido:

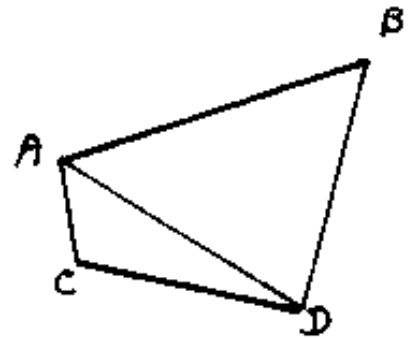
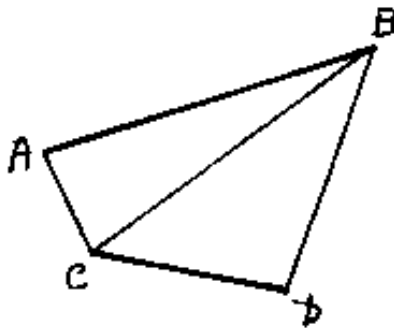
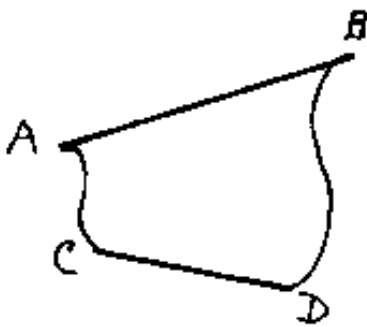
avremo:

$$V = \frac{h}{6}(A_1 + A_2 + 4A_m)$$

Si noti che se il solido è un prisma: $A_1 = A_2 = A_m = A$

avremo: $V = \frac{h}{6} \cdot (A + A + 4A) = \frac{h}{6} 6A = Ah$.

prisma retto

prismoidi con stesse basi diversamente collegate

<u>prismoidi</u> con stesse basi diversamente collegate

Prismatoide ove si notano possibilità diverse di colle= gamento fra le basi.

due lati paralleli, supponiamo di ruotare i due lati paralleli mantenendoli su piani paralleli, cioè le rette su cui giacciono, da parallele diventano sghembe mantenendo costante il segmento di minima distanza.

La superficie ABDC può diventare curvilinea, oppure il quadrilatero non piano può dividersi in due triangoli piani, e si hanno due possibilità a seconda di quale diagonale assumiamo come spigolo.

Diconsi "Prismatoidi" quei solidi che hanno i vertici su due piani paralleli.

Se il numero dei vertici è uguale sui due

Se il numero dei vertici è uguale su due piani il solido è detto "prismoide".

Se le due basi hanno lati corrispondenti paralleli, il quadrilatero è piano ed è la faccia laterale del prismatoide.

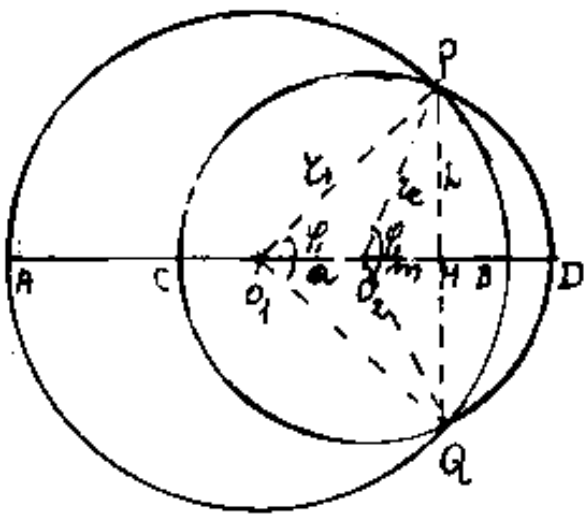
Le facce laterali piane del solido possono essere triangoli o quadrilateri.

Prisma Prismatoide Prismoide

Consideriamo i solidi che hanno i vertici su due piani paralleli.
I poligoni dei vertici di ciascun piano parallelo sono le due basi del solido.
Se le due basi sono uguali ed ugualmente orientate si ha il prisma.
Se i segmenti che uniscono i vertici corrispondenti delle due basi uguali (spigoli laterali) sono ortogonali alle basi il prisma è retto.
Se gli spigoli laterali sono inclinati sui piani base il prisma è obliquo.
Se le basi pur essendo uguali non sono ugualmente orientate, ovvero che i lati delle basi (che dovrebbero costituire le facce laterali, insieme agli spigoli laterali) si trovano su rette sghembe. Il problema

si trovano su rette sghembe. Il problema dei quadrilateri non piani, è già stato accennato (nel IV. Vol al capitolo: la misura degli angoli solidi). Anche: "solidi a facce non piane" sono stati trattati nel IV. Volume; qui vogliamo vederne la genesi.

Consideriamo un poliedro (trapezio) avente

Consideriamo ora le lunule generate dall'intersezione di due cerchi di raggi: r_1 ed r_2 ed i centri distanti: $(a = \overline{O_1O_2})$.

$$r_1^2 - (a+m)^2 = h^2 = r_2^2 - m^2$$

$$r_1^2 - a^2 - m^2 - 2am = r_2^2 - m^2$$

$$m = \frac{r_1^2 - r_2^2 - a^2}{2a}$$

area: $A_{O_1\hat{P}Q} = \frac{1}{2} r_1^2 \operatorname{sen} \varphi_1$;

area settore $A_{O_1PDQ} = \frac{1}{2} r_1^2 \varphi_1$

$$\frac{A_{O_1PQ}}{A_{O_1PDQ}} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi_1)}{\varphi_1}$$

area segmento $A_{PDQ} = \frac{r_1^2}{2}(\varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1) = \frac{r_1^2}{2}(\varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1)$

Area lunula $A_{PDQB} = \frac{1}{2}(r_1^2\varphi_1 - r_1^2 \operatorname{sen}\varphi_1 - r_2^2\varphi_2 + r_2^2 \operatorname{sen}\varphi_2)$

Area figura $A = \frac{1}{2}\left[r_1^2(2\pi - \varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1) + r_2^2(\operatorname{sen}\varphi_2 - \varphi_2)\right]$

Area lunula $A_{PAQC} = \frac{1}{2}\left[r_1^2(2\pi - \varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1) - r_2^2(2\pi - \varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_2)\right]$

essendo:

$A_{PO_1QO_2} = ah$

$$A_{lunula} = \frac{r_2^2\varphi_2}{2} - \frac{r_1^2\varphi_1}{2} + ah$$

Si nota che: $(r_1 - a) < r_2$ con a interno al cerchio 1

Si nota che: $(r_1 - a) < r_2$ con O_2 interno al cerchio 1

$(r_1 + a) > r_2 > (a - r_1)$ O_2 esterno " "

per avere soluzioni reali.

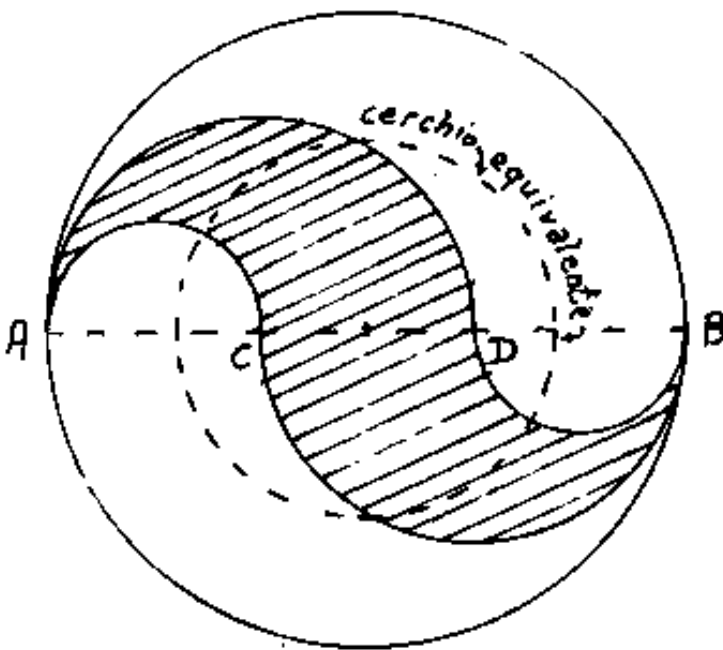
Quando $\varphi_1 = 90°$; $\varphi_2 = 180°$; $r_2 = r_1/\sqrt{2}$ si torna alle lunule di Ippocrate.

cioè le aree stanno tra loro come $\overline{CD}$ stá ad $\overline{AB}$
meglio dire come: $\overline{CD} \cdot \overline{AB}$ sta $\overline{AB}^2$.
se moltiplichiamo ambo i termini per π avremo che
le due aree stanno fra loro come le aree di due
rettangoli aventi per base la stessa base: $\overline{AB} \cdot \pi$ =
= lunghezza della circonferenza e per altezza
$\overline{CD} = a$ e $\overline{AB} = 2R$.

Anche per il pelecoide sono interessanti alcu-
ni casi particolari; il più comune si ha quando
$\overline{CD} = a = \frac{\overline{AB}}{3} = \frac{2R}{3}$; in questo caso l'area diventa

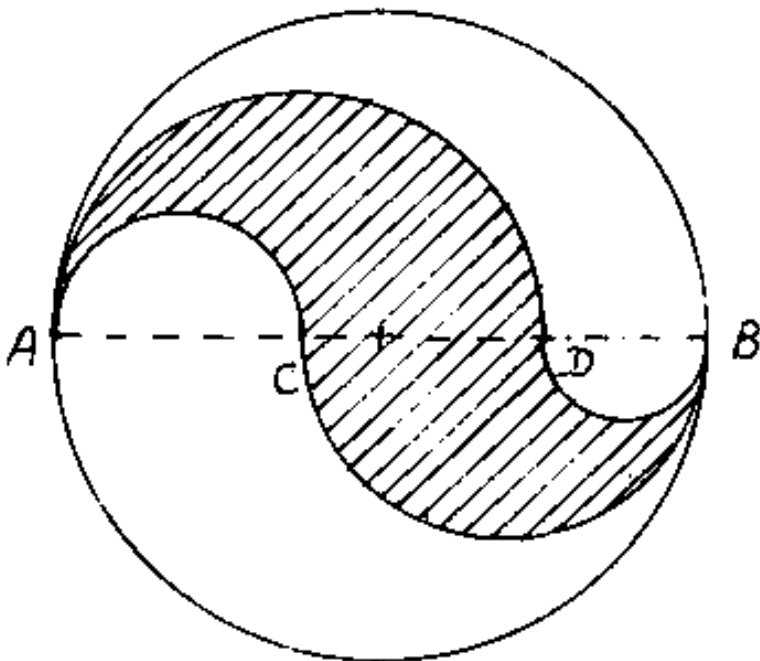
$$A = \frac{aR\pi}{2} \Rightarrow \frac{R^2\pi}{3}$$

Cioè l'area del pelecoide
diventa un terzo del cerchio
di diametro $\overline{AB}$, il cui rag-
gio è: $R/\sqrt{3}$.
Se generalizziamo e po-
niamo: $a = \frac{2}{m}R$, l'area
di questo pelecoide diventa $\frac{1}{\ }$ dell'area del cer-

di questo pelecoide diventa $\frac{1}{n}$ dell'area del cerchio di diametro $\overline{AB}$

Il pelecoide è stato studiato per dividere il cerchio e la circonferenza in un numero intero di parti uguali.

Il pelecoide

Anche il pelecoide è una figura geometrica piana a contorno costituito da archi di cerchio, la parola deriva dal greco: πέλεκυς = scure, ed εἶδος = forma.

Per disegnare il pelecoide si prendono arbitrariamente due punti C e D sul diametro $\overline{AB}$ di una circonferenza, e si raccordano con gli estremi A e B mediante semicirconferenze tali che quelle uscenti da A, stanno da banda opposta, rispetto al diametro $\overline{AB}$, di quelle uscenti da B.

I raggi saranno rispettivamente $r_1 = \overline{AC}/2$; $r_2 = \overline{AD}/2$

$r_3 = \overline{BC}/2$; $r_4 = \overline{BD}/2$. ove : $(r_1 + r_3) = (r_2 + r_4) = R = \overline{AB}/2$

quindi $2R\pi = (r_1 + r_3)\pi + (r_2 + r_4)\pi$ cioè il contorno del pelecoide equivale la circonferenza di diametro $\overline{AB}$.

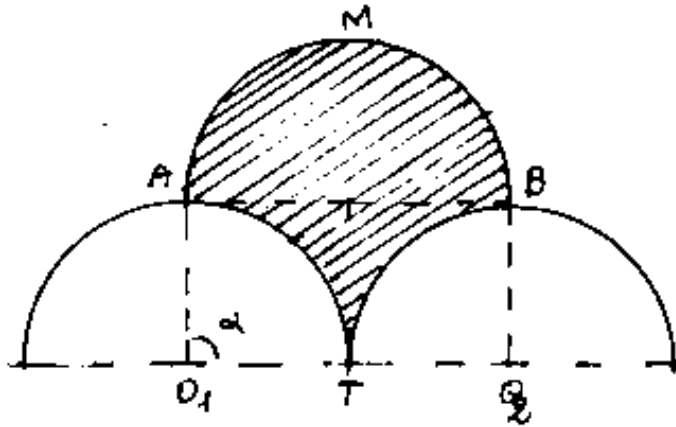
$\overline{CD} = a = (2R - 2r_1 - 2r_4) = (2r_2 - 2r_1) = (2r_3 - 2r_4)$

area del pelecoide $= (r_2^2 - r_1^2)\frac{\pi}{2} + (r_3^2 - r_4^2)\frac{\pi}{2} =$

$= \frac{\pi}{2}\left[(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) + (r_3 - r_4)(r_3 + r_4)\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{a}{2}(r_1 + r_3 + r_2 + r_4)\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{a}{2}(2R)\right]$

$$A = \frac{aR\pi}{2}$$

$/ R^2\pi \Rightarrow$. area pelecoide / area cerchio $= a / 2R$

Sul drepanoide vi sono alcuni casi particolari abbastanza interessanti: poiché l'area del parallelogramma può anche essere espressa da: $A_{ABO_2O_1} = 2r^2 \operatorname{sen}\alpha$; quando α assume valori tali per cui

sen(α) è un numero razionale, od anche non trascendente anche l'area del drepanoide è un numero non trascendente.

per $\alpha = \pi/2$ → area drepanoide $= 2r^2$

area Triangolo $A\hat{T}B = r^2(2-\pi)$

per $\alpha = \pi/6$ → area drepanoide $= r^2$

per $\alpha = 45° = \pi/4$ - " " $= r^2\sqrt{2}$

per $\alpha = 60° = \pi/3$ - " " $= r^2\sqrt{3}$

La lunula drepanoide deriva da studi abbastanza più recenti di quelli delle lunule di Ippocrate o di Archimede.

L'area del drepanoide è data dal semicerchio: $\frac{r^2\pi}{2}$ diminuito del segmento di corda $\overset{\frown}{CB}$, ed aumentato del triangolo curvilineo ACT.

L'area del segmento di corda $\overset{\frown}{CB}$ è data dall'area del settore: $\frac{r^2(\beta-\alpha)}{2}$ diminuita dell'area del triangolo $\overset{\triangle}{O_2BC}$.

Complessivamente l'area del drepanoide risulta quindi: $\frac{r^2\pi}{2} - \frac{r^2(\beta-\alpha)}{2} + O_2\overset{\triangle}{B}C + ACT =$

ed anche, essendo: $\beta = (\pi - \alpha)$

$$A = \frac{r^2\pi}{2} - \frac{r^2\pi}{2} + \frac{r^2(2\alpha)}{2} + O_2\overset{\triangle}{B}C + ACT$$

$$\boxed{A = r^2\alpha + O_2\overset{\triangle}{B}C + ACT.}$$

Equivalente l'area del parallelogramma: ABO_2O_1

costituito da due settori AO_1T ed CO_2T di area: $2\left(\frac{r^2\alpha}{2}\right)$, dal triangolo $O_2\hat{B}C$ e dal triangolo curvilineo ACT.

<u>Il perimetro del drepanoide</u> (perimetro curvilineo o contorno) <u>equivale alla lunghezza di una circonferenza</u>: infatti è costituito da:

$\overset{\frown}{AMB} = r\pi + \overset{\frown}{AT} = r\alpha + \overset{\frown}{TB} = r\beta$; contorno $= r\pi + (\alpha+\beta)r$

ma: $(\alpha+\beta) = \pi$ per cui : $\overset{\frown}{ATCBM} = 2r\pi$.

Drepanoide

M

A C B

O_3

α

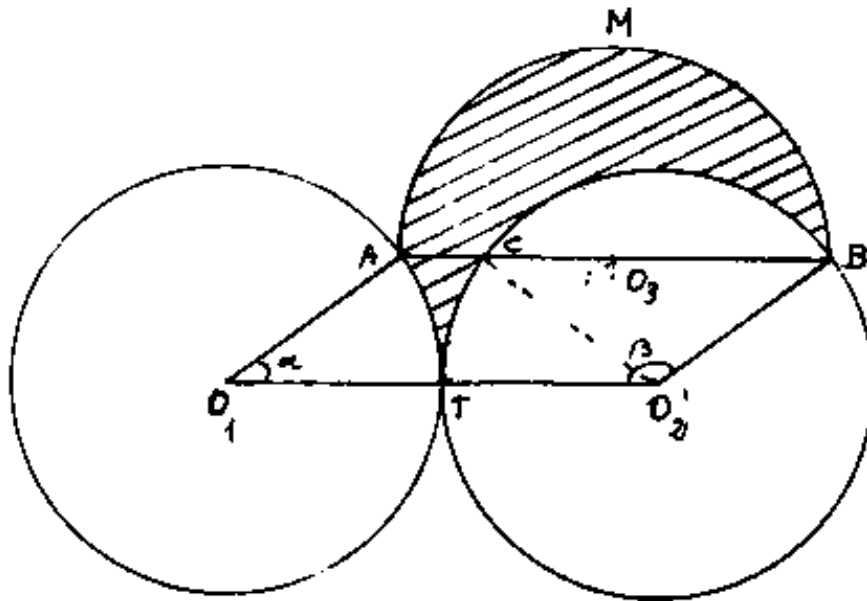
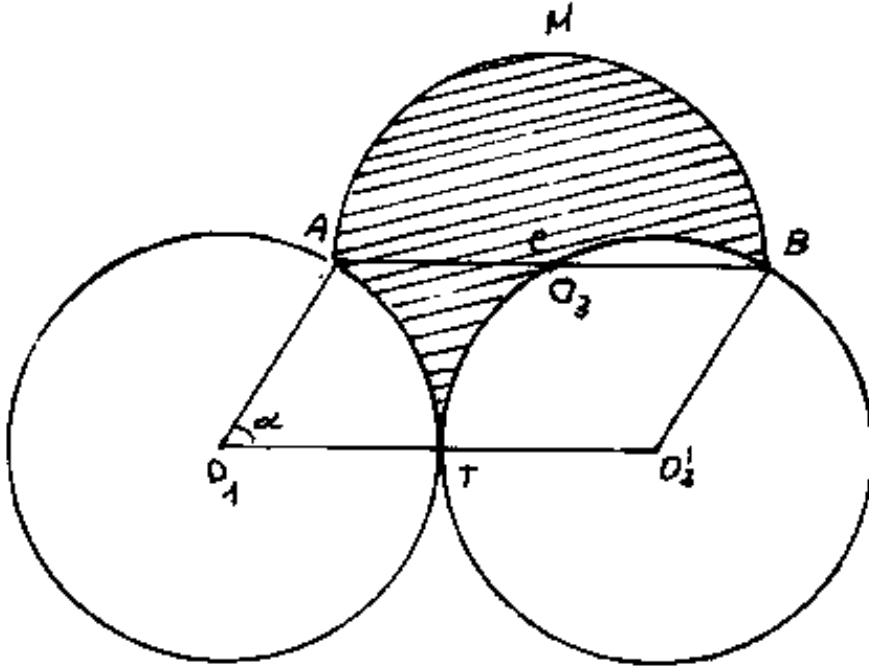
O_1 T O_2'

M

A C B

O_3

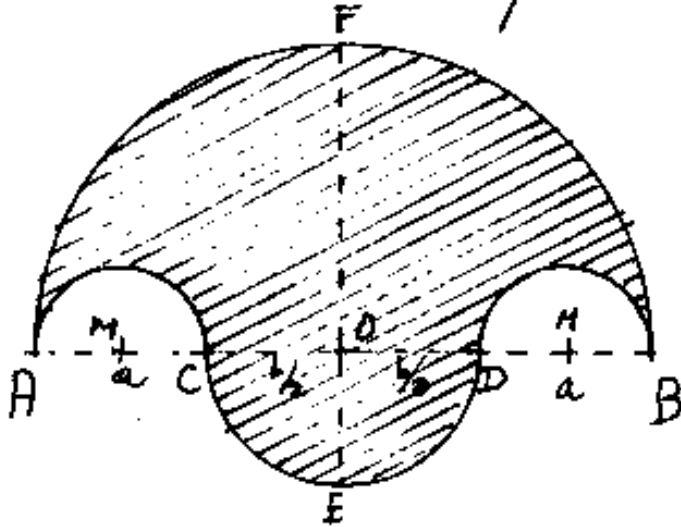
α β

O_1 T O_2'

Il drepanoide è delimitato da tre archi di cer-

chio aventi lo stesso raggio $r = \overline{OO'}/2 = \overline{AB}/2$, due cerchi sono tangenti ed il terzo cerchio ha il diametro parallelo all'unione dei centri dei cerchi tangenti ed è definito dall'angolo α del parallelogramma (OO'BA).

La parola drepanoide è composta dal greco: δρέπανον = falce ed εἶδος = forma.

Il Salinon

Anche il Salinon fu studiata da Archimede, è una lunula delimitata da una semicirconferenza maggiore e da tre semicirconferenze minori aventi il diametro sullo stesso diametro, le estreme sono uguali fra loro ($\overline{AC} = \overline{DB}$) e sono tangenti interne alla maggiore, mentre la centrale (che ha lo stesso centro della maggiore) è esterna e raccorda le due interne.

Questa lunula inizialmente fu studiata da Ippocrate e poi da Archimede, la parola Salinon deriverebbe dal greco σάλεη = = agitazione, oppure mare agitato, tempesta.

Siano: $\overline{AC} = \overline{BD} = a$; $\overline{CD} = b$; per cui $\overline{AB} = (2a+b)$

area del semicerchio maggiore $= \frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\pi = \left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{8}+\frac{ab}{2}\right)\pi$

area dei semicerchi laterali $= -\frac{2}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi = -\frac{a^2\pi}{4}$

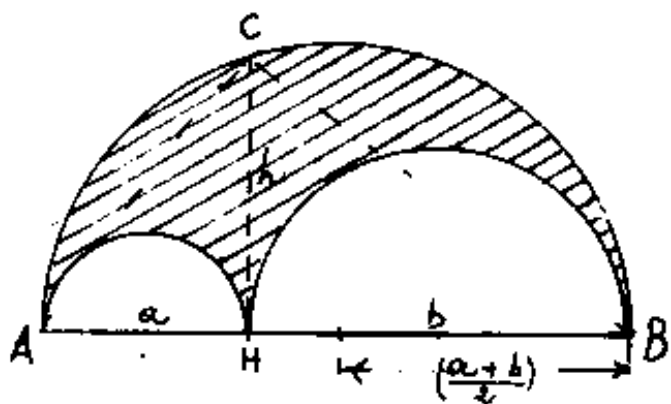
area del semicerchio mediano $= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi = +\frac{b^2\pi}{8}$

Complessivamente $= \left(\frac{a^2}{4}+\frac{2b}{8}+\frac{ab}{2}\right)\pi$

$\overline{FE} = FO + OE = a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = (a+b)$

$\left(\frac{FE}{2}\right)^2\pi = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\pi = \left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{ab}{2}\right)\pi$ Perciò l'area del Salinon equivale l'area del cerchio che ha per diametro la somma dei raggi delle circonferenze concentriche.

L'Arbelo

Anche Archimede si occupò di lunule, si attribuiscono ad Archimede due lunule speciali: l'Arbelo costituita da una figura geometrica triangolare a lati curvilinei costituiti da semicirconferenze, tutte tangenti fra loro ed aventi il diametro sul segmento $\overline{AB}$ che è anche il diametro maggiore.

Posto $\overline{AH} = a$; $\overline{HB} = b$; $\overline{AB} = (a+b)$ l'area dell'arbelo sarà:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\pi - \left(\frac{a}{2}\right)^2\pi - \left(\frac{b}{2}\right)^2\pi\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{a^2+b^2+2ab-a^2-b^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{2ab}{4}\right) = \pi\frac{ab}{4}.$$

Detto h il segmento $\overline{HC}$ innalzato perpendicolarmente ad $\overline{AB}$ fino ad incontrare la semicirconferenza maggiore in C; poiché per il teorema secondo di Euclide $ab = h^2$ avremo che

$$\boxed{\text{l'Area dell'Arbelo} = \left(\frac{h}{2}\right)^2\pi}$$

l'Area dell'Arbelo = $\left(\frac{r}{2}\right)\pi$

è equivalente all'area del cerchio di diametro

$r = \overline{HC}$.

La parola "Arbelo" deriva dal greco:

ἄρβηλος = "trincetto" (coltello da calzolaio) ma

era usata anche ἄρβηλος = figura geometrica.

Si ritrova anche come "zona" fra i Cerchi di Mohr.

avremo:

area del triangolo $\overline{ABC} = \frac{1}{2}ab$

area del semicerchio $\widehat{ACB} = \frac{1}{4}(a^2+b^2)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}(a^2+b^2)$

area del semicerchio $A\widehat{L_1}C = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{8}$

area del semicerchio $B\widehat{L_2}C = \frac{b^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{b^2\pi}{8}$

area dei due segmenti circolari $\widehat{CS_1}AL_1 + \widehat{CS_2}BL_2 = \left[\frac{\pi}{8}(a^2+b^2) - \left(\frac{1}{2}ab\right)\right]$

<u>area della somma delle due lunule</u> $= \left(\frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8}\right) - \left[\frac{\pi}{8}(a^2+b^2) - \frac{1}{2}ab\right] =$
$= \left(\frac{1}{2}ab\right)$ <u>equivalente l'area del triangolo ABC.</u>

Consideriamo ora i triangoli isosceli: $A\hat{H}C$ e BHC le cui altezze relative alle basi sono rispettivamente $b/2$ ed $a/2$ per cui le aree sono:

area $A\hat{H}C = \frac{1}{2}a\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{ab}{4}$; area $B\hat{H}C = \frac{1}{2}b\left(\frac{a}{2}\right) = ab/4$

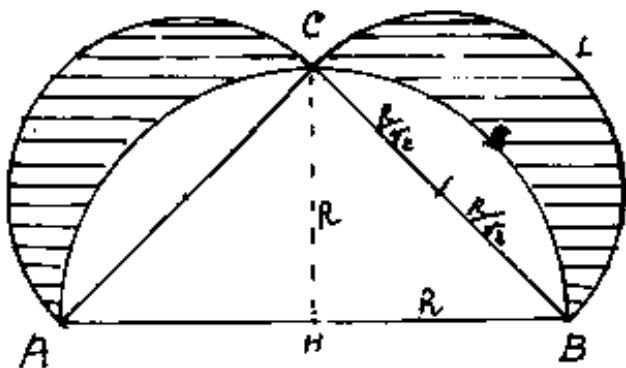
Il che vuol dire che: "<u>la mediana rispetto all'ipotenusa divide il triangolo rettangolo in due triangoli isosceli equivalenti</u>." (metà del triangolo rettangolo).

Però le aree delle singole lunule diventano

funzione degli angoli α e β del triangolo rettangolo e di π ove sommando: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ sparisce anche π e torna la relazione di cui sopra: (area settore $\widehat{BHC} = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)\pi$) − (area triangolo $\widehat{BHC} = \frac{ab}{4}$) = (area segmento); area semicerchio $BL_2C = \frac{b^2}{4}\pi$; area lunula $BS_2CL_2 = \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{4}\pi - \alpha\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)$

area lunula $AS_1CL_1 = \frac{ab}{4} + \frac{a^2}{4}\pi - \beta\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)$; sommando le aree delle due lunule: $2\left(\frac{ab}{4}\right) + \left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)\pi - (\alpha+\beta)\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right) = \frac{ab}{2}$

Le Lunule e le figure piane delimitate da archi di cerchio

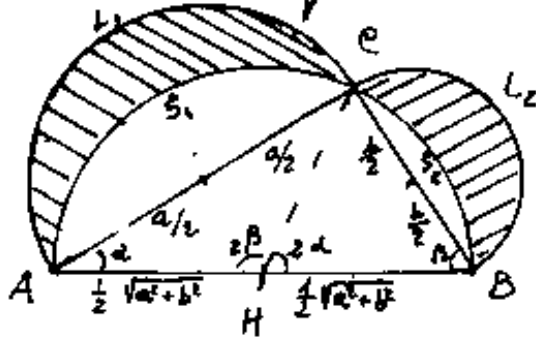
Alla parola "lunule" si associa in genere il nome del filosofo matematico greco Ippocrate di Chio, (da distinguersi dal medico Ippocrate di Cos (460-377 A.C.), ma lo studio di queste figure ha interessato, anche per motivi diversi, gli studiosi nel corso dei secoli. Abbiamo accennato alle lunule di Ippocrate nel II volume, e che riportiamo in figura, ed è facile dimostrare che l'area di ciascuna lunula equivale metà del triangolo ABC, cioè $\stackrel{\triangle}{AHC} = \stackrel{\triangle}{BHC}$.

Infatti: area settore $\widehat{BHC} = R^2\pi/4$;

area triangolo retto $\stackrel{\triangle}{BHC} = R^2/2$;

area segmento circolare $\widehat{BSC} = R^2\pi/4 - R^2/2$

area semicerchio $\widehat{BLC} = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{2}\pi = R^2\pi/4$

area lunula $\widehat{BSCLB} = (R^2\pi/4) - (R^2\pi/4 - R^2/2) = R^2/2$

Il concetto può estendersi alle lunule rappresentate a fianco ove detti "a" e "b" i cateti del triangolo rettangolo ABC,

Riprova per la divisione

Si usa poco perché la riprova della di= visione si effettua moltiplicando il quoziente per il divisore e aggiungendo il resto deve tor= nare il dividendo.

$$A = Bq + R$$

Volendo fare la prova del 9 si fa sulle due operazioni di questa formula, cioè per la moltiplicazione e per la somma, però non è assolutamente probante perché può esser= vi un errore multiplo di 9 e la riprova decade, e non viene rilevato l'errore.

I limiti della prova del 9 si possono evi= denziare dimostrando che la differenza fra un numero qualunque ed un altro composto dalle stesse cifre poste in diverso ordine è

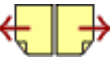
dalle stesse cifre poste in diverso ordine e sempre divisibile per 9. (è multipla di 9).

$A = 7473 \quad r_1 = 3$

$B = 3747 \quad r_2 = 3$

$(A-B) = 3726 \quad (r_1 - r_2) = 0$

$r = 0$

Se un numero non è divisibile per un altro, basta toglierli il resto, oppure aggiungervi la differenza fra divisore e resto per renderlo divisibile.

Sia $\widehat{BAC} = \alpha$; $\widehat{ABC} = \beta$; $\widehat{BCA} = \gamma$; si dimostra che $\overline{AL} = \overline{BM} = \overline{CN}$, infatti per Carnot applicato ai triangoli: ACL, ABL, BAM, BCM, CAN, CBN, si ha:

$$\overline{AL}^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\gamma + 60°)$$

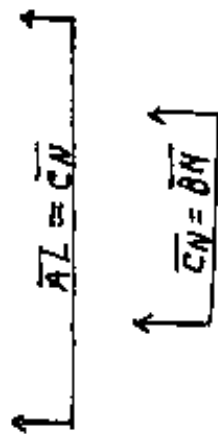
$$\overline{AL}^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\beta + 60°)$$

$$\overline{BM}^2 = b^2 + c^2 - 2ac.\cos(\alpha + 60°)$$

$$\overline{BM}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma + 60°)$$

$$\overline{CN}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + 60°)$$

$$\overline{CN}^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta + 60°)$$

$\overline{AL} = \overline{BM}$; $\overline{AL} = \overline{CN}$; $\overline{CN} = \overline{BM}$

c.v.d.

Abbiamo già trattata la condizione perché tre rette uscenti dai vertici di un triangolo si incontrino in un punto, (v. Vol I)

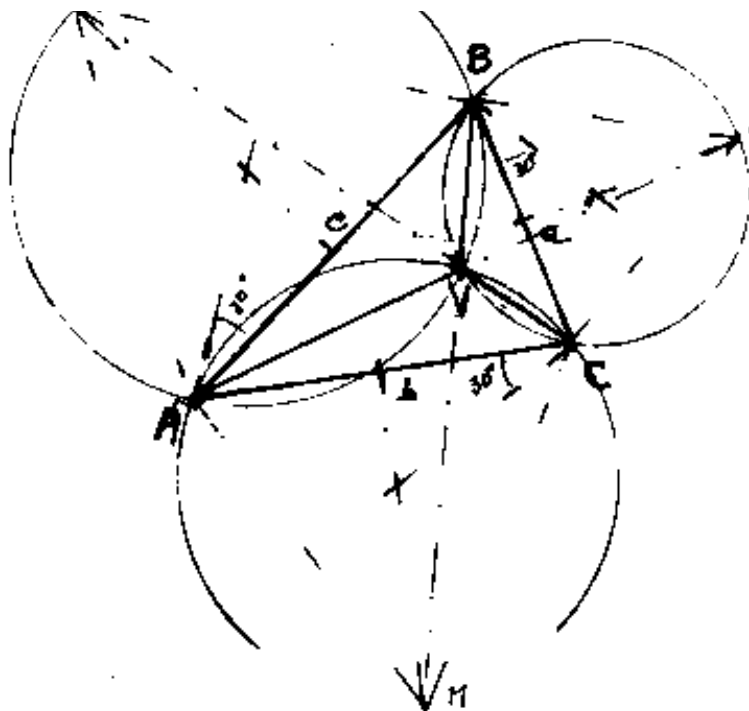
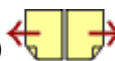
Si può dimostrare che "V" è quel punto che rende minima la somma delle distanze dai vertici del triangolo, cioè:

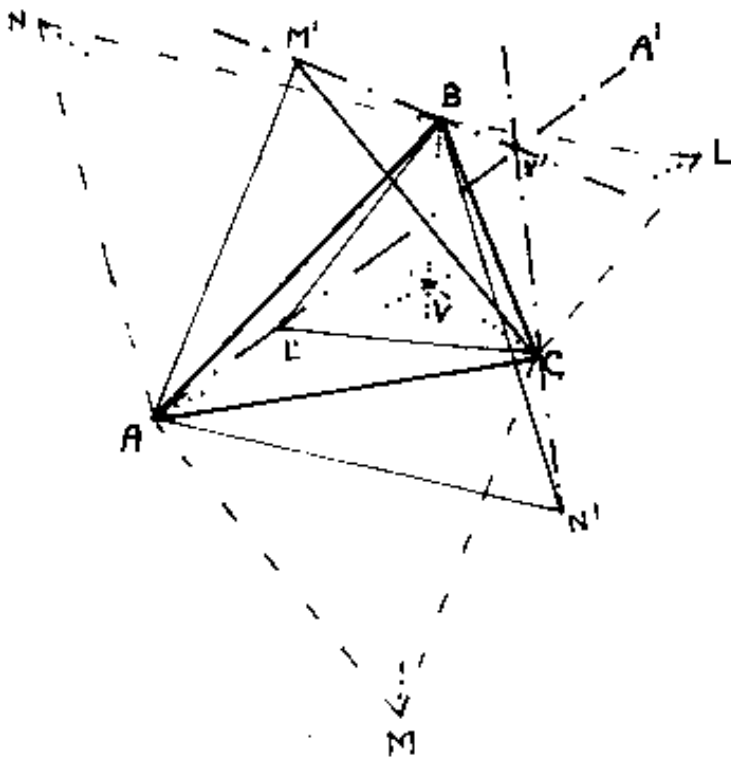
$$\overline{VA} + \overline{VB} + \overline{VC} = minimo$$

La costruzione di V può anche effettuarsi come

N

B

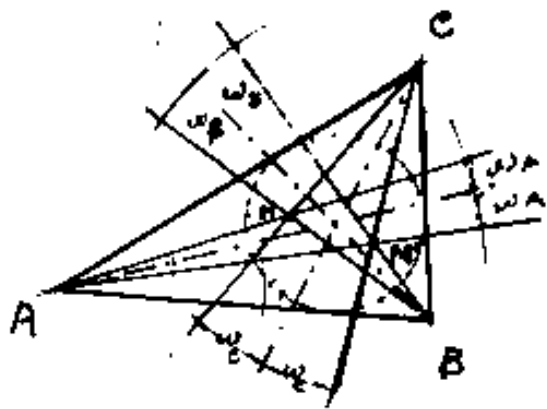
B
L
c
a
V
A
C
M

anche effettuarsi come il punto comune di tre archi di circonferenza aventi per corde i lati del triangolo, che impostano alla circonferenza angoli di 120°.

I centri delle circonferenze sono i centri dei triangoli equilateri.

Se i triangoli equilateri, sui lati del triangolo dato, anziché esternamente, li costruiamo internamente al triangolo dato, e ripetiamo la costruzione avremo: BCL', CAM', ed ABN', ove: $\overline{AL'}$; $\overline{BM'}$; $\overline{CN'}$ avranno il punto comune V'.

I punti V e V' sono detti <u>centri isogonici</u> od anche <u>punti gemelli</u> del triangolo ABC.

Anche V' può costruirsi come punto comune delle circonferenze che hanno per corde i lati del triangolo e per centri i centri dei triangoli equilateri interni per V', esterni per V.

equilateri interni per V, esterni per V.

Si noti però che V' è esterno al triangolo ABC ed è sui prolungamenti di AL', BM', CN', e $A\hat{V'}B = A\hat{V'}C$; ma $B\hat{V'}C = 120° = A\hat{V'}B + A\hat{V'}C$.

Preso però il punto A' (vedi figura) si ha: l'isogonicità : $A'\hat{V'}B = A'\hat{V'}C = B\hat{V'}C = 120°$.

Diconsi isogonali le rette simmetriche alla bisettrice in un triangolo, ed uscenti dallo stesso vertice

Se tre ceviane uscenti ciascuna da un vertice del triangolo hanno un punto comune M le loro isogonali si incontrano in M' ove M ed M' sono detti punti isogonali.

I punti isogonali dei punti o centri isogonici sono detti hessiani, o equianarmonici o <u>punti isodinamici</u> .

Se esternamente al triangolo ABC, i triangoli equilateri, costruiamo triangoli simili i punti comuni ad AL, BM, CN, sono detti <u>metapoli</u> perciò i punti o centri isogonici sono particolari metapoli.

Se chiamiamo asse radicale la retta sulla corda comune di due circonferenze e punto radicale di tre circonferenze il punto comune ai loro assi radicali, il centro isogonico è un particolare punto radicale.

$$\boxed{A\hat{P_2}Q_1} = (A\hat{P_2}V + V\hat{P_2}Q_1) = \boxed{81°\ 34'\ 44'',1908}$$

$$\boxed{P_2\hat{Q_1}V} = \text{arcsen}\left(\frac{\rho_1/2}{\ell_3}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{7}{2\sqrt{20-2\sqrt{2}}}\right) = \boxed{57°\ 37'\ 53'',7137}$$

$$\boxed{P_2Q_1P_1} = \boxed{115°\ 15'\ 47'',4275} \qquad \left(\underline{(360° - 3P_2\hat{Q_1}P_1) = 14°\ 12'\ 37'',718}\right)$$
serve per il modellino

$$\text{Area di una faccia} = \frac{(\overline{AQ_1})(\overline{P_1P_2})}{2} = \rho_1^2 \frac{1}{14}\sqrt{62-16\sqrt{2}} =$$

$$= \boxed{S_{AP_2Q_1P_1} = 0,448196972\ \rho_1^2}$$

$$\text{Area laterale del trapezoedro} = S_\ell = \frac{12}{7}\rho_1^2\sqrt{62-16\sqrt{2}} =$$

$$\boxed{S\ell = 10,75672732\ \rho_1^2}$$

Si noti che i poliedri piramidali che dal centro costituiscono il solido hanno per altezza $\overline{OV} = \rho_1\sqrt{3}/2$ per cui il volume del trapezoedro sarà:

$$V = \frac{1}{3}(\overline{OV})(S_{AP_2Q_1P_1})24 =$$

$$V = \frac{1}{3}\left(\rho_1\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\rho_1^2\frac{1}{14}\sqrt{62-16\sqrt{2}}\right)24 \quad ; \quad V = \rho_1^3\left(\frac{2}{7}\sqrt{186-48\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{V = 3,105199709\ \rho_1^3}$$

$$V = 3{,}105199709\,\rho_1$$

volume della sfera circoscritta all'ottaedro: $V_3 = \frac{4}{3}\pi\rho_1^3 = \underline{4{,}188790207}\,\rho_1^3$

(I punti Q_1 del trapezoedro non stanno sulla sfera)

Calcoliamo gli angoli diedri del trapezoedro.

L'angolo diedro fra le facce che hanno in comune $l_3 = \overline{QP}$ sia D_{l_3}. Il triangolo isoscele $P_2Q_1P_1$ che ha

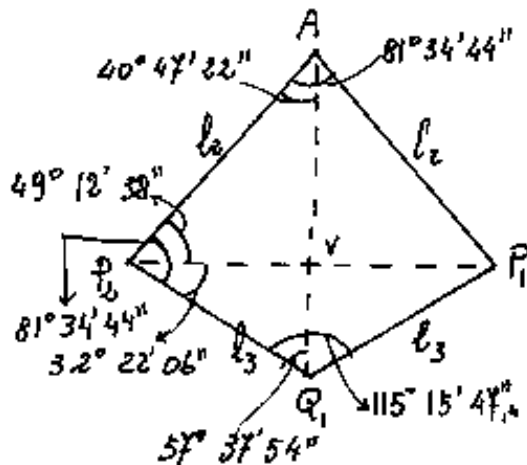
$$\boxed{O\widehat{P_3}Q_1 = 67° \ 30' \ 00''}$$

Notare che $O\widehat{P_3}Q_1$ è la metà dell'angolo 135° supplementare di 45°.

verifichiamo:

$$
\begin{array}{rcl}
O\widehat{P_3}Q_1 &=& 67° \ 30' \ 00'', \\
O\widehat{Q_1}P_3 &=& 77° \ 14' \ 08'', 19715 \\
Q_1\widehat{O}P_3 &=& 35° \ 15' \ 51, 80285 \\
\hline
 & & 180° \ 00' \ 00'', 00000
\end{array}
$$

Possiamo ora costruire il quadrilatero piano $AP_2Q_1P_1$ faccia del trapezoedro.

Poniamo $l_0 = 5$ cm.; da cui $\rho_1 = 3,535533906$ cm. $= \overline{P_1P_2}$

$\overline{AV} = 0,579470826\,\rho_1 = 2,048738753$ cm.

$\overline{VQ_1} = 0,316923118\,\rho_1 = 1,120492429$ cm.

$\overline{AQ_1} = 0,896393944\,\rho_1 = 3,169231182$ cm.

$l_2 = \overline{AP_i} = 0,765366865\,\rho_1 = 2,705980502$ cm.

$l_3 = \overline{Q_1P_i} = 0,591979951\,\rho_1 = 2,092965188$ cm.

Calcoliamo ora gli angoli di una faccia.

$$\boxed{P_2\widehat{A}V} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\overline{P_1P_2}/2}{\overline{AV}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho_1/2}{\overline{AV}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\rho_1/2}{\overline{AP_2}}\right)$$

$$\ldots (AV) \quad \ldots (AV) \quad \ldots \left(\sqrt{7-4\sqrt{2}}\right) \quad \ldots (AP_2)$$

$$= \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{2}}{8}}\right) = \boxed{40^\circ\, 47'\, 22'',09538}$$

$$\boxed{P_2\hat{A}P_1} = 2P_2\hat{A}V = \boxed{81^\circ\, 34'\, 44'',19076} \qquad \left(360^\circ - 4(P_2\hat{A}P_1)\right) = 33^\circ\, 41'\, 03'',237$$

(serve per il modello)

$$\boxed{A\hat{P_2}V} = \left(90^\circ - P_2\hat{A}V\right) = \boxed{49^\circ\, 12'\, 37'',90462}$$

$$\boxed{V\hat{P_2}Q_1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\overline{QV}}{\overline{VP_2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{31-8\sqrt{2}}/14}{1/2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{31-8\sqrt{2}}}{7}\right) =$$

$$= \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31-8\sqrt{2}}{20-2\sqrt{2}}}\right) = \arccos\left(\frac{7}{2\sqrt{20-2\sqrt{2}}}\right) = \boxed{32^\circ\, 22'\, 06'',2862}$$

Calcoliamo ora il triangolo Q_1OP_3 :

$\overline{OP_3} = \rho_1$; $\overline{OQ_1} = \rho_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1}\right)$; $Q_1\hat{O}P_3 = 35°\ 15'\ 52''$

$sen\left(Q_1\hat{O}P_3\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\cos\left(Q_1\hat{O}P_3\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $tg\left(Q_1\hat{O}P_3\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\overline{Q_1P_3} = l_3 = \sqrt{\overline{OQ_1}^2 + \overline{OP_3}^2 - 2(\overline{OQ_1})(\overline{OP_3})\cos(Q\hat{O}P_3)} = \overline{Q_1P_1} = \overline{Q_1P_2}$$

$$l_3 = \rho_1\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1}\right)^2 + 1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{(2\sqrt{2}-1)}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)} =$$

$$l_3 = \rho_1\sqrt{\frac{3}{(2\sqrt{2}-1)^2} - \frac{(2\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2}-1)^2}} = \rho_1\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{(2\sqrt{2}-1)}$$

$$\boxed{l_3 = \rho_1\left(\frac{\sqrt{20-2\sqrt{2}}}{7}\right)} = \left(0{,}591979951\right)\rho_1$$

$$\boxed{l_3 = l_0\left(\frac{\sqrt{10-\sqrt{2}}}{7}\right)} = \left(0{,}418593038\right)l_0$$

$$\boxed{sen\left(O\hat{Q}_1P_3\right)} = sen\left(Q_1\hat{O}P_3\right)\left(\frac{\overline{OP_3}}{\overline{Q_1P_3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{(1)}{\sqrt{20-2\sqrt{2}}/7}\right) = \boxed{\left(\frac{7}{\sqrt{60-6\sqrt{2}}}\right)}$$

$$\boxed{\cos\left(O\hat{Q}_1P_3\right)} = \sqrt{11-6\sqrt{2}} \quad \sqrt{\frac{11+7}{\cdot}} - \sqrt{\frac{11-7}{\cdot}} \quad \left(3 - \sqrt{2}\right)$$

$$\cos\left(O\hat{Q}_1P_3\right) = \sqrt{\frac{11-6\sqrt{2}}{60-6\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{11+7}{2}} - \sqrt{\frac{11-7}{2}}}{\sqrt{60-6\sqrt{2}}} = \frac{\left(3-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{60-6\sqrt{2}}}$$

$$\tan\left(O\hat{Q}_1P_3\right) = \left(\frac{7}{3-\sqrt{2}}\right) = \left(3+\sqrt{2}\right)$$

$$\left(O\hat{Q}_1P_3\right) = 77°\ 14'\ 8,''19715$$

$$\operatorname{sen}\left(O\hat{P}_3Q_1\right) = \operatorname{sen} Q_1\hat{O}P_3\left(\frac{\overline{OQ_1}}{Q_1P_3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1}\right)\left(\frac{7}{\sqrt{20-2\sqrt{2}}}\right) =$$

$$\operatorname{sen}\left(O\hat{P}_3Q_1\right) = \left(\frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{20-2\sqrt{2}}}\right); \quad \cos\left(O\hat{P}_3Q_1\right) = \left(\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{20-2\sqrt{2}}}\right) \quad \tan\left(O\hat{P}_3Q_1\right) = \left(\sqrt{2}+1\right)$$

per base $\overline{P_1P_1} = \rho_1$ e per altezza $\overline{Q_1V}$, ha per altezza relativa a $\overline{P_2Q_1}$: $a_3 = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \overline{VQ_1}}{\overline{P_2Q_1}} = \rho_1 \left(\frac{1 \cdot \sqrt{31 - 8\sqrt{2}}/14}{\sqrt{20 - 2\sqrt{2}}/7} \right) = \rho_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{31 - 8\sqrt{2}}{20 - 2\sqrt{2}}} \right)$

$$\hat{D}_{l_3} = 2 \arcsen \left(\frac{\overline{P_1P_2}/2}{a_3} \right) =$$

$$\hat{D}_{l_3} = 2 \arcsen \left(\sqrt{\frac{20 - 2\sqrt{2}}{31 - 8\sqrt{2}}} \right) = 2 \arcsen \left(\sqrt{\frac{12 + 2\sqrt{2}}{17}} \right) = 2 \left(69^\circ\ 03'\ 32'',3263 \right)$$

$$\boxed{\hat{D}_{l_3} = 138^\circ\ 07'\ 04'',6526}$$ (diedro su l_3)

L'angolo diedro fra le facce che hanno in comune $l_2 = \overline{AP}$ sia $\hat{D}_{l_2}$. Il triangolo isoscele: P_2AP_1 che ha per base $\overline{P_1P_2} = \rho_1$ e per altezza $\overline{VA}$, ha per altezza relativa a $\overline{P_2A}$: $a_2 = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \overline{VA}}{\overline{P_2A}} =$

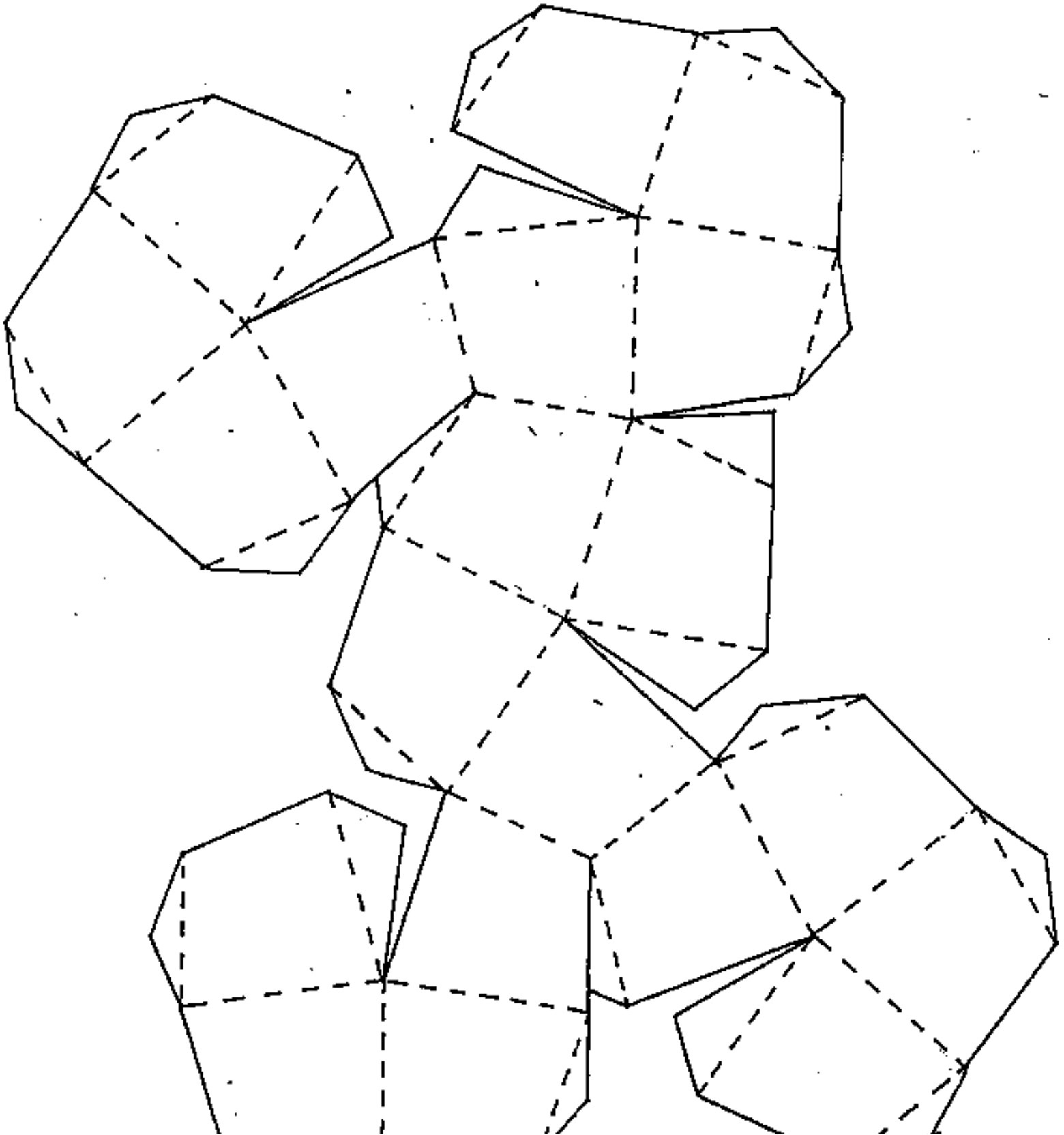
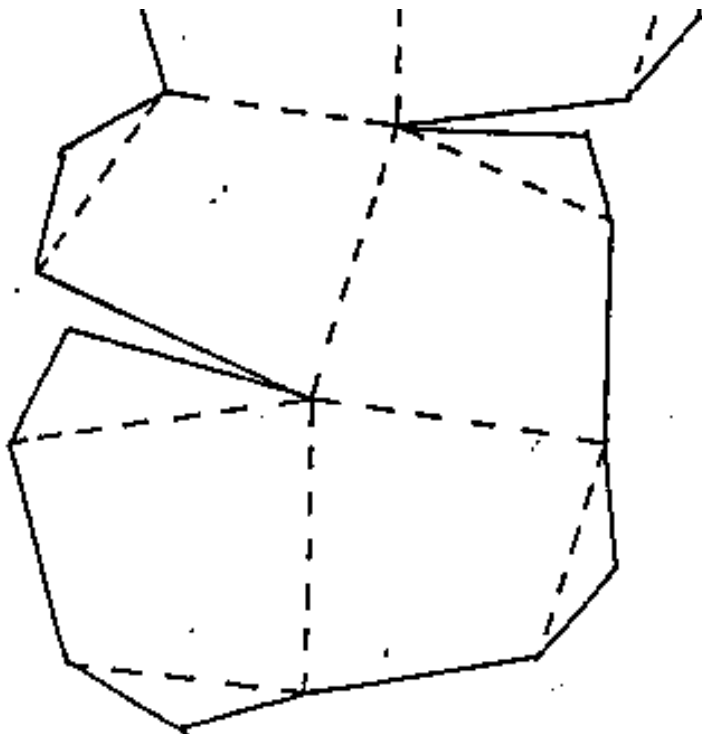
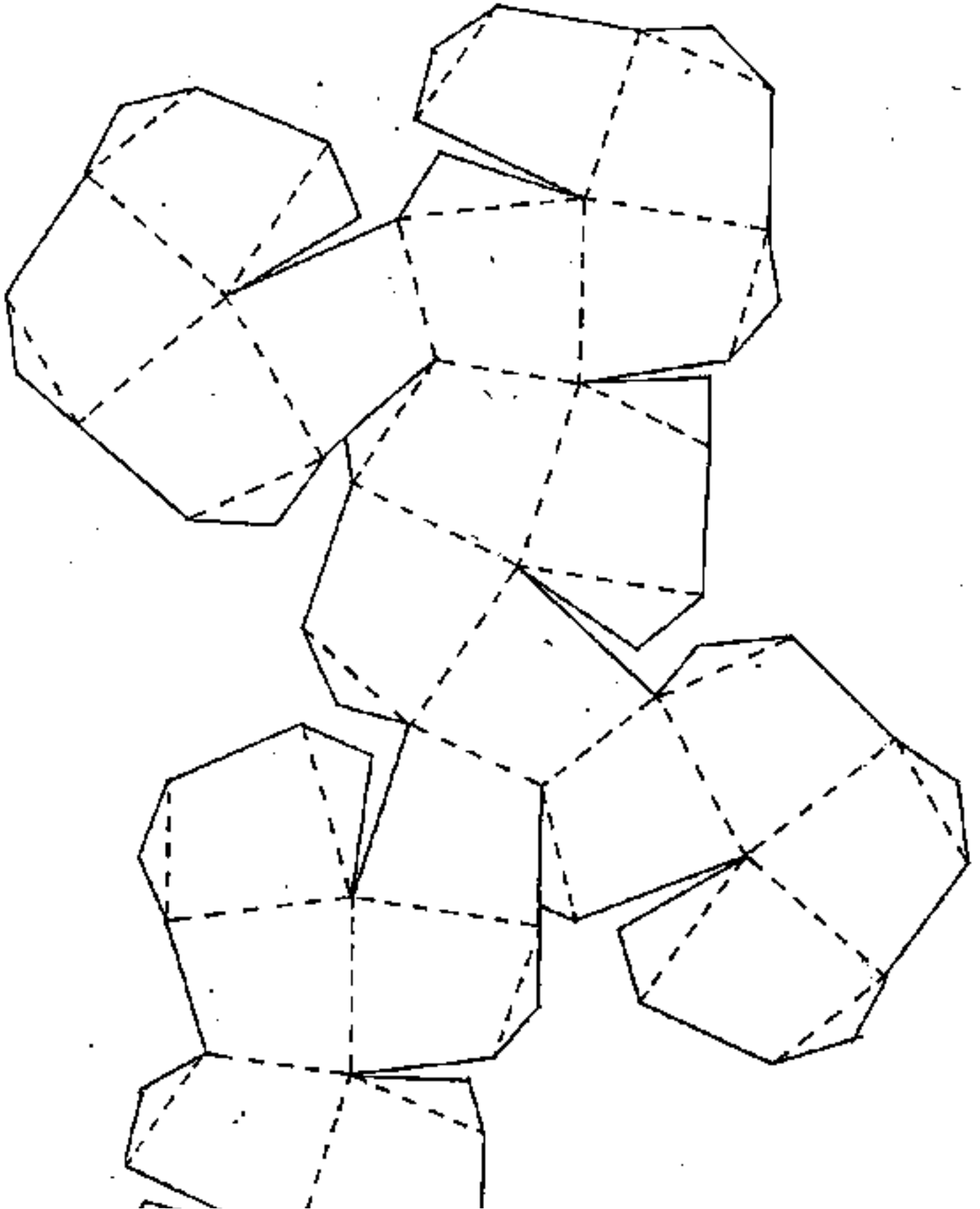
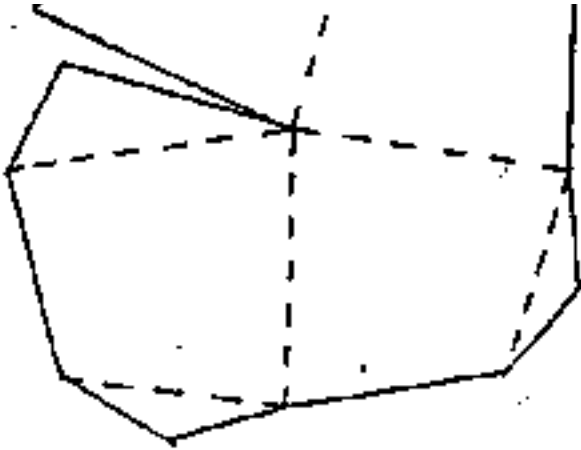
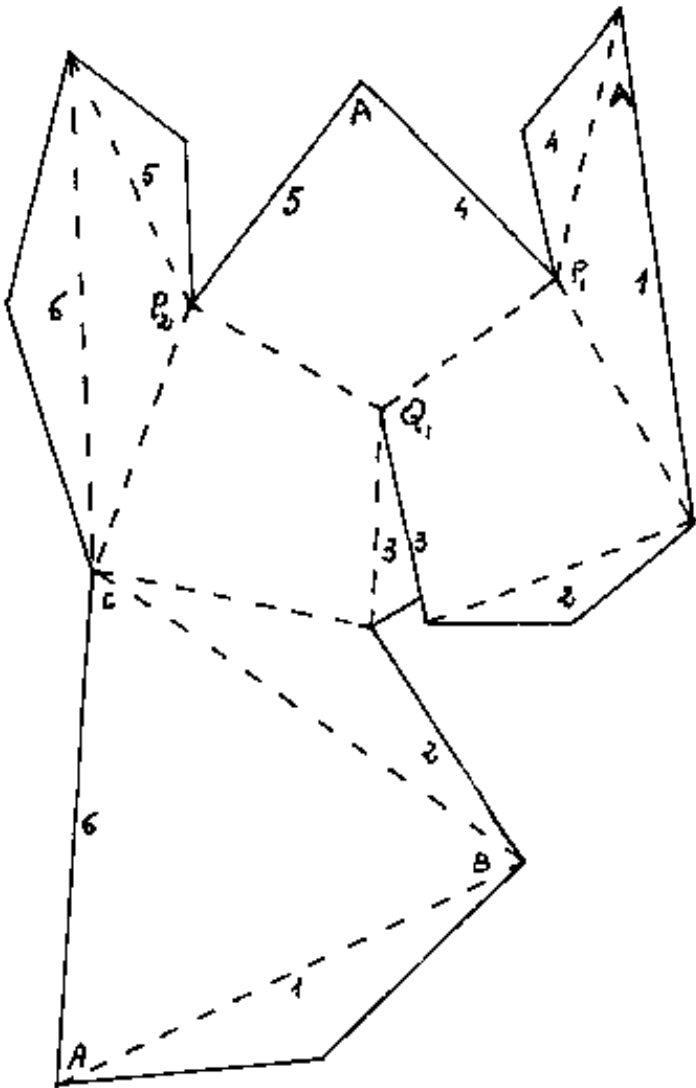
$$a_2 = \rho_1 \left(\frac{\sqrt{7 - 4\sqrt{2}}/2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \right) = \rho_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{6 - \sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$\hat{D}_{l_2} = 2 \arcsen \left(\frac{\sqrt{2}\,(\overline{P_1P_2})/2}{a^2} \right) = 2 \arcsen \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{6 - \sqrt{2}}} \right) =$$

$$= 2 \arcsen \left(\frac{2}{\sqrt{6 - \sqrt{2}}} \right) = 2 \left(69^\circ\ 03'\ 32'',3263 \right)$$

$$\boxed{\hat{D}_{l_2} = 138^\circ\ 07'\ 04'',6526}$$ (diedro su l_2)

Il trapezoedro ha angoli diedri uguali, non è inscrittibile in una sfera avendo facce piane non inscrittibili in circonferenze.

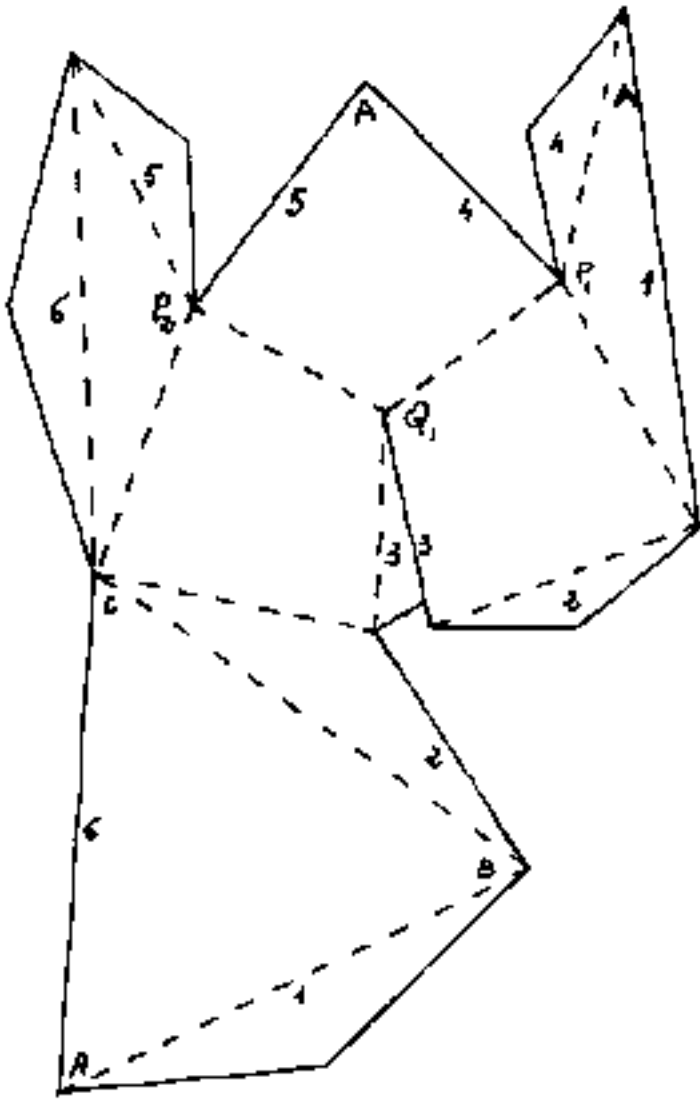
sviluppo del trapezoedro a diedri uguali

sviluppo del trapezoedro a diedri uguali

Disegnamo anche lo schema delle parti di tra= pezoedro da sovrapporre alle facce dell'ottaedro per ottenere il trapezoedro stes= so. (Occorrono otto di queste parti per ottenere il solido completo.

Si noti che il trapezoedro è il solido di passaggio fra esacisottaedri convessi ed esacisottaedri concavi.

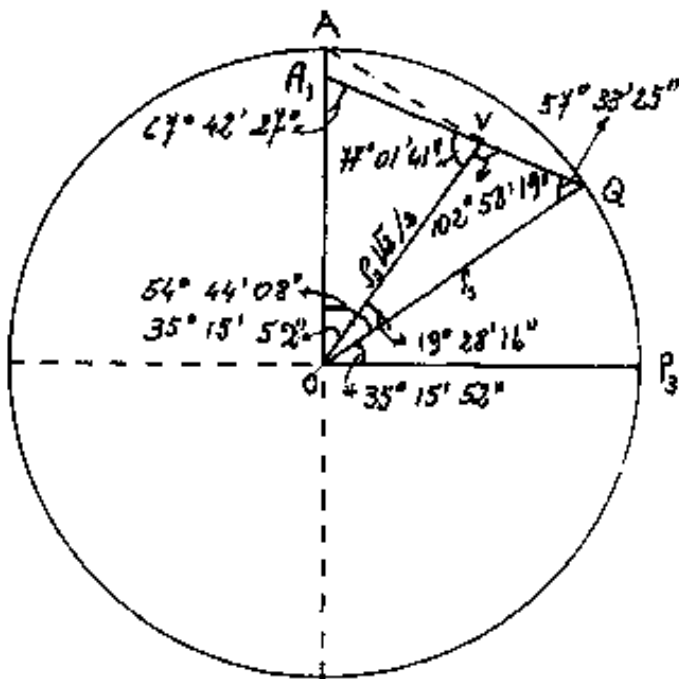
Si noti che è ancora il problema del quadrilatero: AP_2QP_1 da rendere piano.

Nel caso che abbiamo trattato (trapezoedro a diedri uguali) abbiamo accorciato il raggio $\overline{OQ}$ della sfera in $\overline{OQ_1}$, fino a rendere piano il quadrilatero AP_2QP_1 in $AP_2Q_1P_1$; però

a rendere piano il quadrilatero AP_2QP_1 in $AP_2Q_1P_1$; però il solido non è più inscrittibile in una sfera.

Ma il quadrilatero simmetrico AP_2QP_1 con due lati l_2 adiacenti e due lati l_3 adiacenti, fermo restando il triangolo P_2QP_1 poteva esser reso piano obbassando il vertice A ottenendo il trapezoedro 2° però si è modificato l'ottaedro. Oppure possiamo alzare la corda $\overline{P_1P_2}$ fuori della sfera ed otterremo il trapezoedro 3°.

Disegnamo anche lo schema delle parti di trapezoedro da sovrapporre alle facce dell'ottaedro per ottenere il trapezoedro stesso. (Occorrono otto di queste parti per ottenere il solido completo.

Trapezoedro 2°

Ripetiamo la sezione secondo il piano del cerchio massimo contenente i punti AQP_3F.

Analogamente a quanto si è fatto quando abbiamo abbassato Q in Q_1, spostiamo A in A_1 sul raggio $\overline{OA}$

Sappiamo che: (vedi esacisottaedro):

$$\overline{QV} = l_0\sqrt{\frac{21-8\sqrt{6}}{24}} = \rho_1\sqrt{\frac{21-8\sqrt{6}}{12}}$$

$$\boxed{\overline{QV} = 0,342062623\cdot\rho_1}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(O\hat{Q}V)} = \operatorname{sen}(V\hat{O}Q)\,\frac{\rho_1\sqrt{3}/2}{\overline{QV}} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\sqrt{3}/2\right)\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21-8\sqrt{6}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{21-8\sqrt{6}}}};$$

$$\boxed{\cos(O\hat{Q}V)} = \boxed{\left(\frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{21-8\sqrt{6}}}\right)} \quad ; \quad \boxed{tg\left(O\hat{Q}V\right)} = \boxed{\frac{1}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}}$$

$$\boxed{\left(O\hat{Q}V\right) = 57°\ 33'\ 24,''91424}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(O\hat{V}Q)} = \operatorname{sen}(V\hat{O}Q)\,\frac{\rho_1}{\overline{VQ}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21-8\sqrt{6}}}\,\frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{63-24\sqrt{6}}}} = \operatorname{sen}(O\hat{V}A)$$

$VQ \quad \sqrt{21-8\sqrt{6}} \quad \boxed{\sqrt{63-24\sqrt{6}}}$

$$\boxed{\cos O\hat{V}A_1} = \frac{\sqrt{59-24\sqrt{6}}}{\sqrt{63-24\sqrt{6}}} = \boxed{\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{\sqrt{63-24\sqrt{6}}}} \; ; \; \boxed{tg(O\hat{V}A) = \frac{2}{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{(O\hat{V}A_1) = 77° \; 01' \; 41'',30852}$$

$$\boxed{(O\hat{V}Q) = 102° \; 58' \; 18'',69140}$$

$$\boxed{O\hat{A}_1V} = \arcsin\left(\frac{(\sqrt{8}-\sqrt{3})}{\sqrt{21-8\sqrt{6}}}\right) = \boxed{67° \; 42' \; 26'',88854}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(A\hat{O}Q) = \sqrt{2/3}} \; ; \; \boxed{\cos(A\hat{O}Q) = \sqrt{1/3}} \; ; \; \boxed{\operatorname{tang}(A\hat{O}Q) = \sqrt{2}} \; ; \; \boxed{A\hat{O}Q = 54° \, 44' \, 08'',19714}$$

$$\overline{A_1Q} = \int_1 \frac{\operatorname{sen} A_1\hat{O}Q}{\operatorname{sen} O\hat{A_1}Q} = \int_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{39-4\sqrt{6}}}{5}\right) = \int_1 \frac{1}{15}\sqrt{6(39-4\sqrt{6})}$$

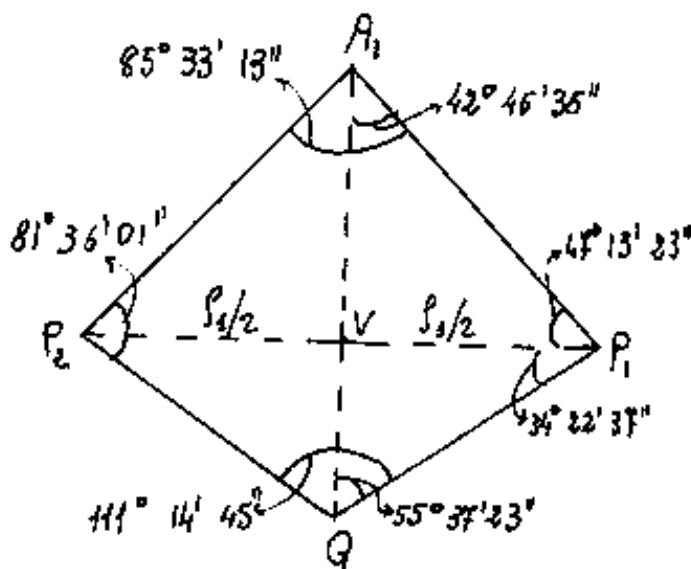
$$\boxed{\overline{A_1Q} = 0,882451752 \int_1}$$

$$\overline{A_1V} = \int_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\operatorname{sen}(A\hat{O}V)}{\operatorname{sen}(O\hat{A}_1Q)} = \left(\int \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{39-4\sqrt{6}}}{5}\right) = \int_1 \frac{1}{10}\sqrt{39-4\sqrt{6}}$$

$$\boxed{A_1V = 0,540389129 \int_1}$$

$$\overline{A_1O} = \int_1 \frac{\operatorname{sen}(A_1\hat{Q}O)}{\operatorname{sen}(O\hat{A}_1Q)} = \int_1 \left(\frac{1}{\sqrt{21-8\sqrt{6}}}\right)\left(\frac{\sqrt{21-8\sqrt{6}}}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}\right) = \int_1 \frac{1}{5}\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$

$$\overline{A_1O} = \frac{\int_1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} = \boxed{\overline{A_1O} = 0,912095586 \int_1}$$

Sapendo che $\overline{P_1P_2} = \int_1$ (vedi esacisottaedro), sulla base degli elementi calcolati possiamo disegnare la faccia del trapezoedro 2° e calcolarne i lati e gli angoli.

$$\overline{A_1P_1} = \overline{A_1P_2} = \sqrt{\overline{A_1V}^2 + (\int_1/2)^2} =$$

$$\overline{A_1P_1} = \int_1 \sqrt{\frac{39-4\sqrt{6}}{100} + \frac{25}{100}} = \frac{\int_1}{5}\sqrt{16-\sqrt{6}}$$

$$\boxed{\overline{A_1P_1} = 0,736220355 \int}$$

Q

$$\overline{A_1P_1} = 0{,}736220355\,\rho_1$$

$$\overline{QP_2} = \overline{QP_1} = \sqrt{\overline{QV}^2 + \left(\rho_1/2\right)^2} = \rho_1\sqrt{\frac{21-8\sqrt{6}}{12} + \frac{3}{12}} = \rho_1\sqrt{\frac{24-8\sqrt{6}}{12}} = \rho_1\sqrt{\frac{6-2\sqrt{6}}{3}}$$

$$\overline{QP_1} = \overline{QP_2} = 0{,}605810893\,\rho_1$$

$$V\widehat{A_1P_1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\overline{VP_1}}{\overline{A_1V}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho_1/2}{\frac{\rho_1}{10}\sqrt{39-4\sqrt{6}}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{\sqrt{39-4\sqrt{6}}}\right)$$

$$V\widehat{A_1P_1} = 42^\circ\ 46'\ 36'',57682$$

$$\boxed{P_2\hat{A}_1P_1 = 85^\circ\ 33'\ 13'',15365}$$

$$\boxed{V\hat{P}_1A_1 = 47^\circ\ 13'\ 23'',42318}$$

$$V\hat{P}_1Q = V\hat{P}_2Q = \text{arctg}\left(\frac{\overline{QV}}{\overline{VP_1}}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\rho_1\sqrt{(21-8\sqrt{6})/12}}{\rho_1/2}\right) = \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{21-8\sqrt{6}}{3}}\right)$$

$$\boxed{V\hat{P}_1Q = 34^\circ\ 22'\ 37'',25923}$$

$$\boxed{V\hat{Q}P_1 = 55^\circ\ 37'\ 22'',74077}$$

$$\boxed{P_2\hat{Q}P_1 = 111^\circ\ 14'\ 45'',48154}$$

Calcolo degli angoli diedri

Diedro sullo spigolo $\overline{QP}$ $= \hat{D}_{QP} = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{P_1P_2}{2h_1}\right) =$

$$\hat{D}_{QP} = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\overline{P_1P_2}}{2}\cdot\frac{(\overline{P_1Q})}{(\overline{P_1P_2})(\overline{VQ})}\right) = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\rho_1/2}{\rho_1/2}\sqrt{\frac{6-2\sqrt{6}}{21-8\sqrt{6}}}\right)$$

$$\hat{D}_{QP} = 2\,\text{arctg}\left(\sqrt{2+\sqrt{8/3}}\right) = 2\left(62^\circ\ 18'\ 58'',884433\right)$$

$$\boxed{\hat{D}_{QP} = 124^\circ\ 37'\ 57'',768866}$$

Diedro sullo spigolo $\overline{AP}$ $= \hat{D}_{A,P} = 2\,\text{arcsen}\left(\frac{\overline{Q3}}{2h_1}\right)$

diedro sullo spigolo AP $= \hat{D}_{A,P} = 2 \arcsin\left(\frac{a_2}{2h_2}\right)$

$$\hat{D}_{A,P} = 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{16-\sqrt{6}}{39-4\sqrt{6}}}\ \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right) = 2 \arcsin\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{16-\sqrt{6}}{39-4\sqrt{6}}}\right) =$$

$$\hat{D}_{A,P} = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{8+2\sqrt{6}}\right)$$

$$\boxed{\hat{D}_{A,P} = 148° \, 52' \, 55'', 110093}$$

Come si vede, per questo trapezoedro 2° non vale la costanza degli angoli diedri. Sono rimasti sulla superficie sferica i punti P e Q,

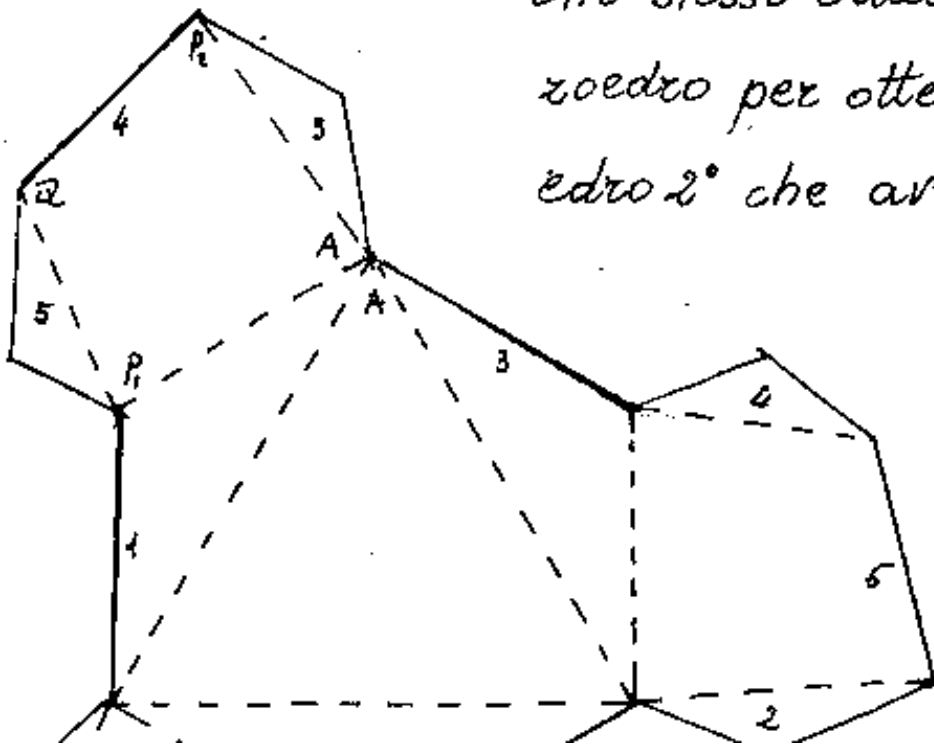
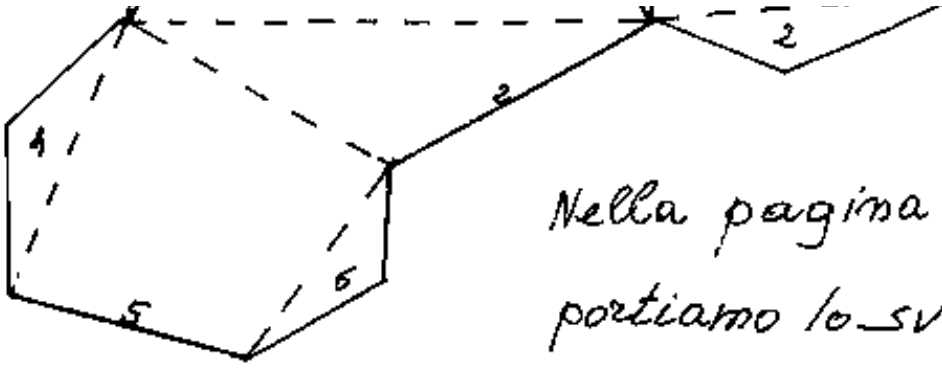
mentre i vertici dell'ottaedro si sono avvicinati al centro sfera: $\overline{AO} = \rho_1$ è divenuto $\overline{A_1O} = \rho_1(2\sqrt{2}+\sqrt{3})/5 =$

$\underline{\overline{A_1O} = 0,912095586\,\rho_1}$; $l_0 = \rho_1\sqrt{2}$, anche l_0 = spigolo dell'ottaedro è diminuito: $\underline{l_{0_1}} = \overline{A_1O}\sqrt{2} = \underline{l_0(0,912095586)}$;

ciò se manteniamo costante ρ_1, se invece volessimo mantenere costante l_0 avremmo che la superficie sferica per P e Q aumenterebbe: $\rho_{1_1} = \left(\dfrac{\rho_1}{0,912095586}\right)$.

$\rho_{1_1} = \rho_1(\sqrt{8}-\sqrt{3}) = (1,096376317)\,\rho_1$.

Riportiamo lo sviluppo della parte da aggiungere allo stesso ottaedro del trapezoedro per ottenere il trapezoedro 2° che avrà un $\rho_{1_1} > \rho_1$.

P2
4
5
Q
A
A
5
P1
3
4
1
5
2

Nella pagina seguente riportiamo lo sviluppo dell'intero trapezoedro 2 avente lo stesso S_1, cioè la stessa sfera, ma un ottaedro minore del primo trapezoedro.

Riportiamo lo sviluppo della parte da aggiungere allo stesso ottaedro del trapezoedro per ottenere il trapezoedro 2° che avrà un $\rho_{3_1} > \rho_3$.

Sviluppo del TRAPEZOEDRO 2°

Sviluppo del
TRAPEZOEDRO 8°

Trapezoide 3

Il quadrilatero AP_2QP_1 puó essere reso piano anche sollevando la corda $\overline{P_2P_1}$ fino a far coincidere V_1 sulla corda $\overline{AQ}$. Se manteniamo A e Q sulla sfera $\overline{P_1P_2}$ usciranno dalla sfera e $\overline{P_1P_2} > \rho_1$, in questo caso l'ottaedro base inscritto nella sfera non cambia. Se invece manteniamo $\overline{P_1P_2} = \rho_1$, l'ottaedro base sará piú piccolo e Q sará interno alla sfera.

Facciamo al solito una sezione secondo il cerchio massimo passante per $AVQP_3F$, spostiamo V in V_1 prolungando il raggio $\overline{OV}$ in $\overline{OV_1}$ con V_1 sulla corda $\overline{AQ}$; poiché AOQ é isoscele; $\widehat{OAQ} = \widehat{AQO} = (180° - 54° 44', 08'')\frac{1}{2} = 62° 37' 55'', 90143$

$$\widehat{OAQ} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1 + 1/\sqrt{3}}{2}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 - 1/\sqrt{3}}{2}}\right).$$

$\overline{OA} = \overline{OQ} = \rho_1$; $\overline{AQ} = 2\rho_1 \cos \widehat{OAQ} = \rho_1 \cdot 2\sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{2}} = \rho_1(0,919401686)$

$\overline{OA} = \overline{OQ} = \rho_1$; $\overline{AQ} = 2\rho_1 \cos O\hat{A}Q = \rho_1 \cdot 2\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} = \rho_1(0,919401686)$

$$\overline{AV_1} = \rho_1 \frac{\operatorname{sen}(A\hat{O}V_1)}{\operatorname{sen}(A\hat{V_1}O)} = \rho_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(9+5\sqrt{3})/18}}\right) = \rho_1 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9+5\sqrt{3}}} = \rho_1\sqrt{9-5\sqrt{3}}$$

$$\overline{AV_1} = \rho_1\sqrt{9-5\sqrt{3}} = \rho_1(0,582847313)$$

$$\overline{V_1Q} = \rho_1 \frac{\operatorname{sen}(V_1\hat{O}Q)}{\operatorname{sen}(O\hat{V_1}Q)} = \rho_1\left(\frac{(1/3)}{\sqrt{(9+5\sqrt{3})/18}}\right) = \rho_1\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9+5\sqrt{3}}}\right) = \rho_1\sqrt{\frac{9-5\sqrt{3}}{3}}$$

$$\overline{V_1Q} = \rho_1\sqrt{\frac{9-5\sqrt{3}}{3}} = \rho_1(0,336516243173)$$

$$\overline{OV_1} = \rho_1 \frac{\operatorname{sen}(O\hat{A}V_1)}{\operatorname{sen}(A\hat{V_1}O)} = \rho_1\left(\frac{\sqrt{(3+\sqrt{3})/6}}{\sqrt{(9+5\sqrt{3})/18}}\right) = \quad \overline{OV_1} = \rho_1\sqrt{6-3\sqrt{3}} = \rho_1(0,89615754172)$$

La discussione delle equazioni di secondo grado

Ogni disequazione di 2° grado ad una incognita può sempre ridursi ad una delle forme:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$

ove a, b, c possono essere funzioni di parametri, come abbiamo visto nell'esempio di disuguaglianza precedentemente trattato.
Indicando con y il trinomio ax^2+bx+c; e con x_1, x_2, le radici dell'equazione $y=0$; ove: $(x_1<x_2)$; con $\Delta = b^2-4ac$ il discriminante dell'equazione: $y=0$, e ricordando che: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$; cioè che un trinomio di 2° grado in x può scomporsi nel prodotto delle differenze fra la variabile x e le radici, moltiplicato per il primo coefficiente "a"; tenendo presente la regola dei segni di

tenendo presente la regola dei segni di Cartesio, possiamo riunire in un prospetto tutti i casi possibili di disequazioni di secondo grado. Cercando di visualizzare il grafico delle rispettive parabole.

quando K tende a 2 od a $-\infty$.

Inoltre dovendo tutte le linee parabole o rette, passare per i punti $Q \equiv (0;9)$ ed $A \equiv (2;1)$, e non avendosi quindi parabole volte verso il basso con vertice $y_V < 0$, (il vertice: $y_V \lesseqgtr 0$ si ha solo per le parabole volte verso l'alto), si ha che tutte le parabole hanno una radice compresa fra: $3/2$ e 3 o immaginaria, l'altra radice per $K \to -\infty$ (parabole verso il basso) tende a zero, e per $K \to (2-\varepsilon)$ (con: $\varepsilon \to$ zero) tende a $-\infty$. Invece per le parabole verso l'alto per $K \to +\infty$ l'altra radice tende a zero mentre per $K \to (2+\varepsilon)$; (con $\varepsilon \to$ zero) tende a $+\infty$.

$y = (K-2)x^2 - 2Kx + 9$

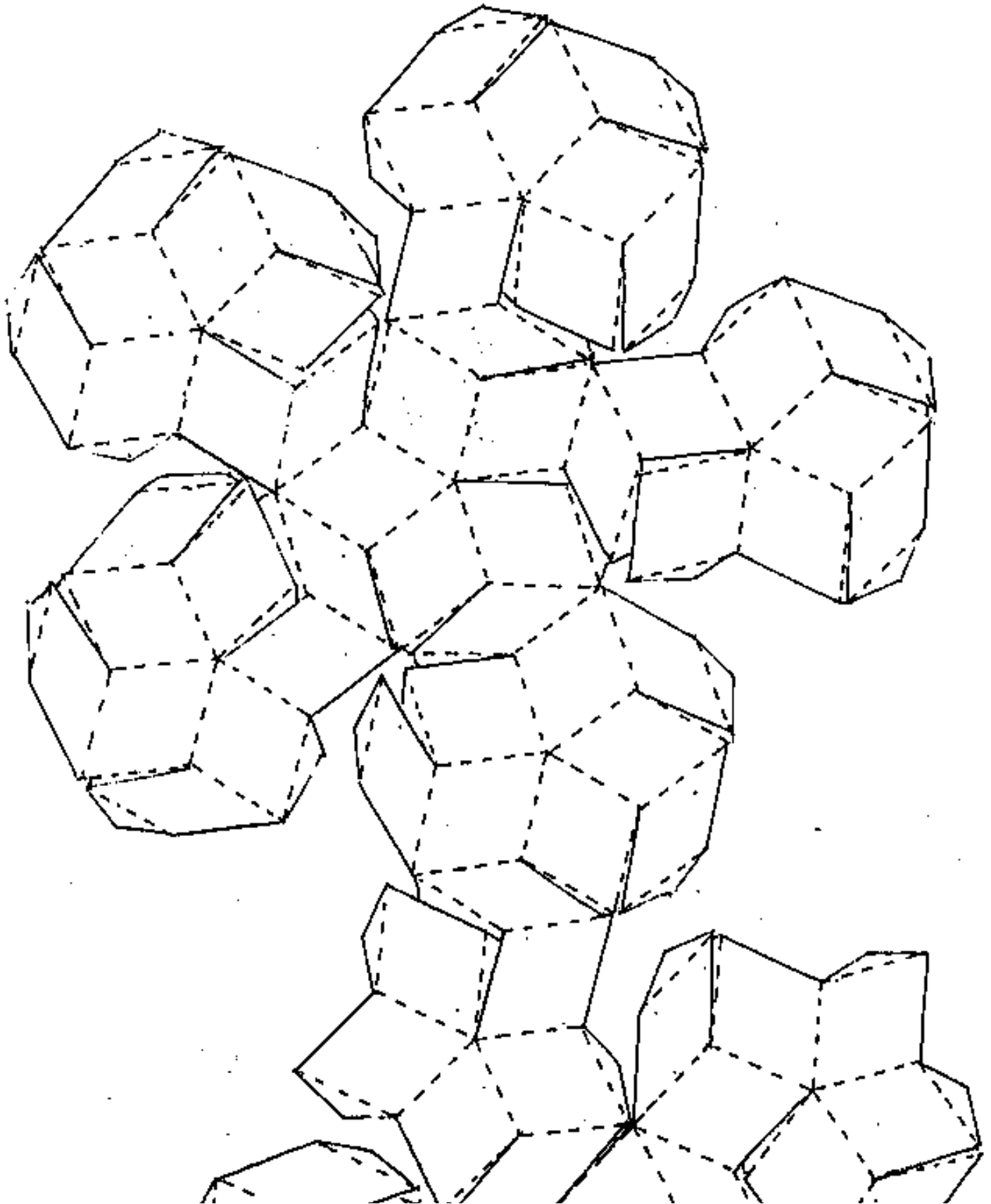
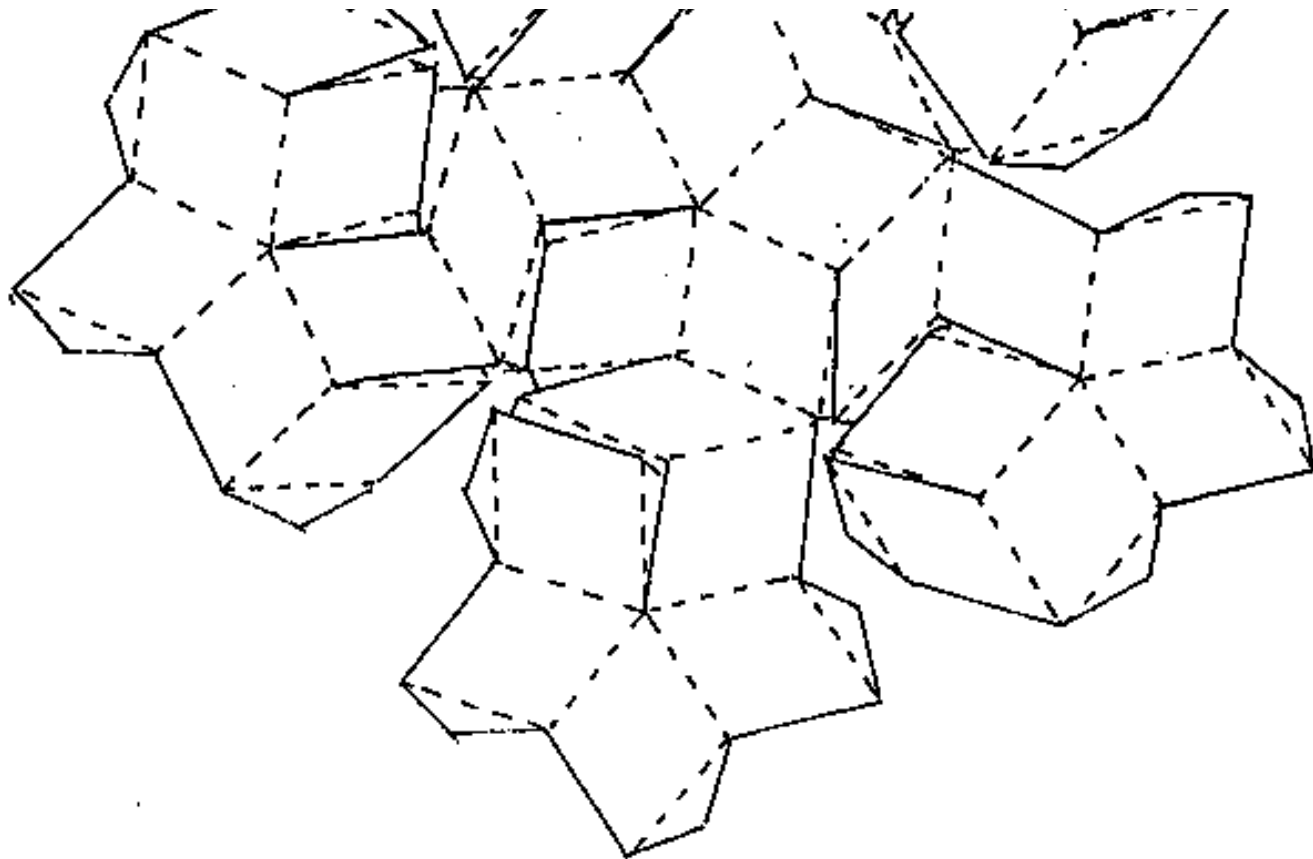
Indice Enciclopedico Indice Pag. 228

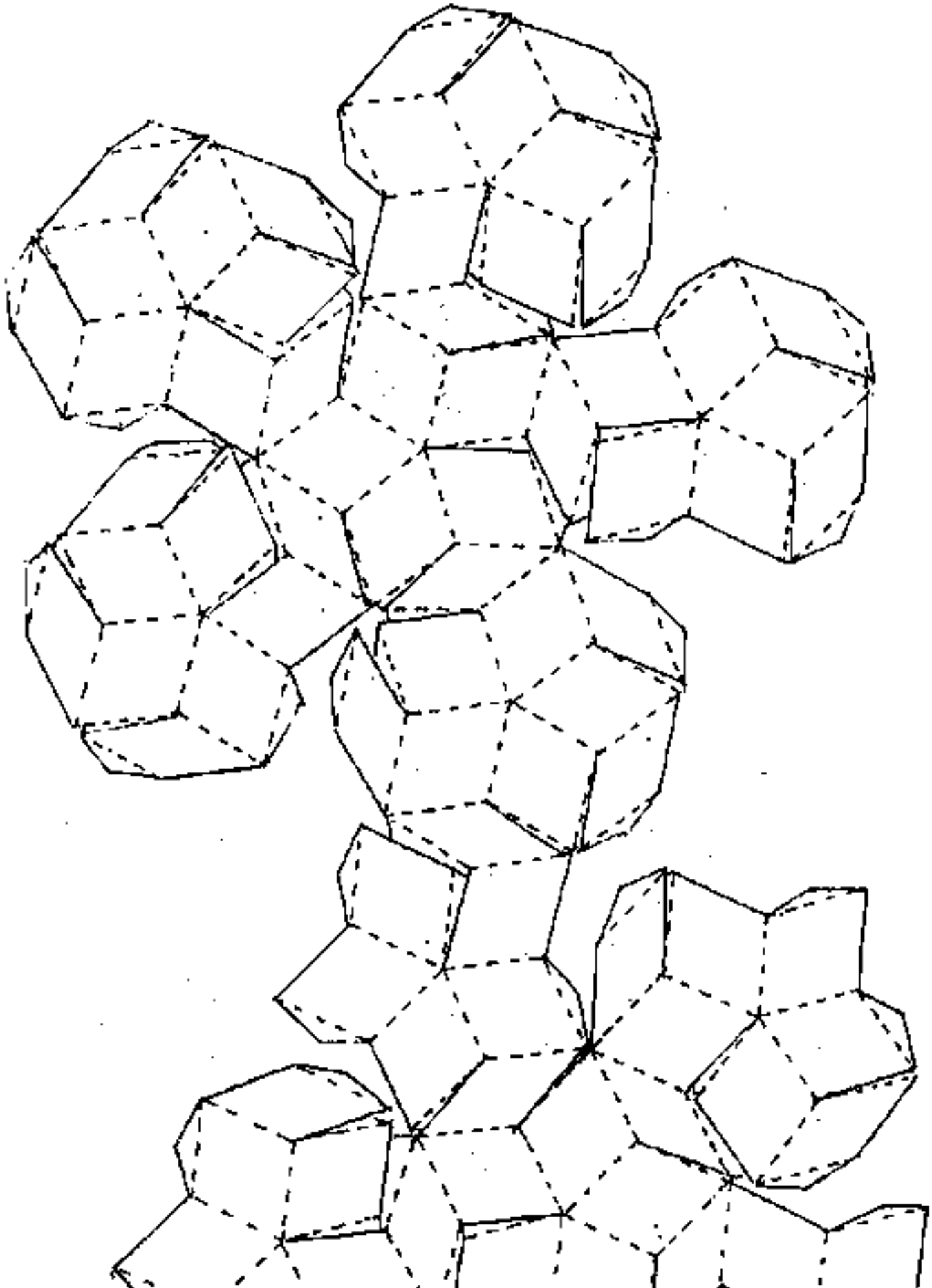
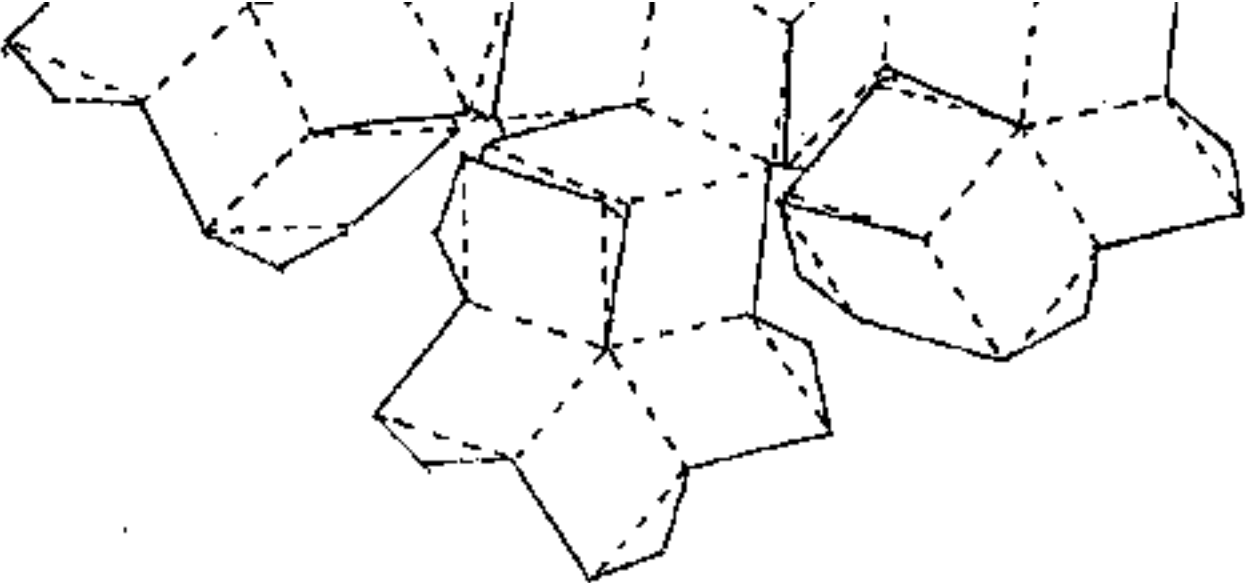
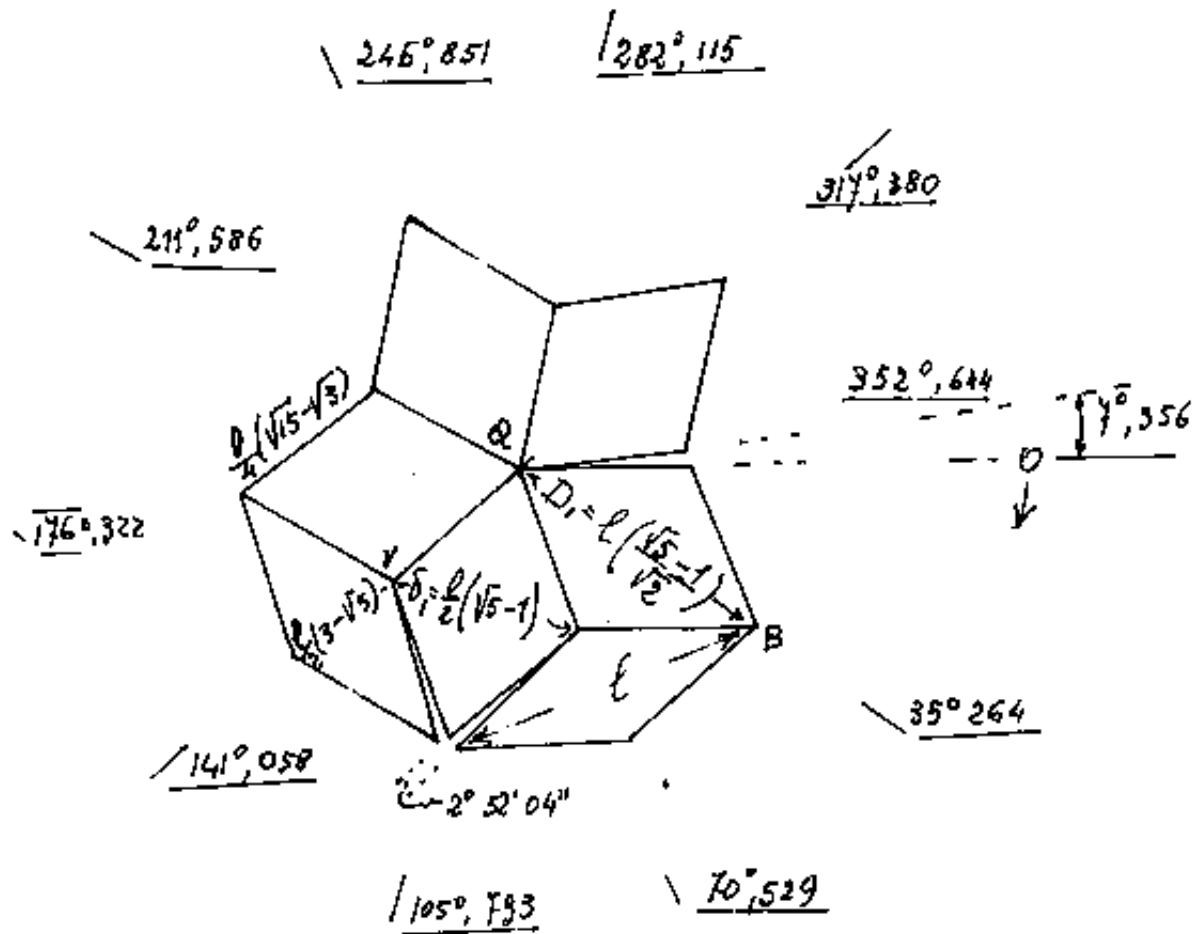
Disequazione			valori di x che la verificano	
$\Delta > 0$	$a > 0$	$y > 0$	$(x_1 > x > x_2)$	esterni alle radici
		$y < 0$	$(x_1 < x < x_2)$	interni alle radici
	$a < 0$	$y > 0$	$(x_1 < x < x_2)$	interni alle radici
		$y < 0$	$(x_1 > x > x_2)$	esterni alle radici
$\Delta = 0$	$a > 0$	$y > 0$	$(x > (x_1 = x_2) > x)$	escluso $(x = x_1 = x_2)$
		$y < 0$	—	nessun valore di x
	$a < 0$	$y > 0$	—	nessun valore di x
		$y < 0$	$(x > (x_1 = x_2) > x)$	escluso $(x = x_1 = x_2)$
$\Delta < 0$	$a > 0$	$y > 0$	$(-\infty < x < +\infty)$	per ogni valore di x
		$y < 0$	—	nessun valore di x
	$a < 0$	$y > 0$	—	nessun valore di x
		$y < 0$	$(-\infty < x < +\infty)$	per ogni valore di x

Consideriamo ora una equazione di secondo grado i cui coefficienti contengano dei

grado i cui coefficienti contengono dei parametri. (Per esempio l'equazione che abbiamo già studiato come disequazione, cioè:

$$(K-2)X^2 + 2KX + 9 = 0$$)

Conviene, anche in questo caso fare un prospetto:

Schema intero di enenecontaedro.

Schema intero di enenecontaedro.

Cerchiamo di riassumere i valori calcolati, a tal fine considerianmo lo sviluppo dei rombi che hanno in comune il vertice Q sulla normale alla faccia pentagonale del dodecaedro; ed avremo:

Se ℓ è il lato delle facce pentagonali del dodecaedro, si sono riportati, in funzione di ℓ, i valori delle diagonali e del lato dei rombi. Si è anche indicata la progressione angolare dello sviluppo, ciò consente una maggiore precisione nel disegno

ne nel disegno.

Si hanno così: $5 \times 12 = 60$ facce rombiche del tipo (1)

$\frac{5}{2} \times 12 = 30$ " " " " (2)

complessivamente 90 facce rombiche, da cui il nome: enenecontaedro

Si noti che, mentre i vertici: A, B, C, D, E, F, G, H, ... sono comuni al dodecaedro e all'enenecontaedro, i vertici Q_i sono comuni all'enenecontaedro ed all'icosaedro. (ad ogni faccia del dodecaedro corrisponde un vertice dell'icosaedro e viceversa).

Nei vertici del dodecaedro: A, ..., convergono sei vertici di rombi, tre con angolo al vertice di: 41° 48' 37",13 (rombo 2), e tre con angolo al vertice di: 70° 31' 44" (rombo 1).

Nei vertici dell'icosaedro: Qi convergono invece cinque vertici di rombo 1) con angolo di 70° 31' 44".

I vertici del dodecaedro ed i vertici dell'icosaedro non giacciono sullo stessa superficie sferica, cioè l'enenecontaedro non è inscrittibile in una sfera, infatti:

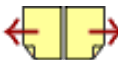
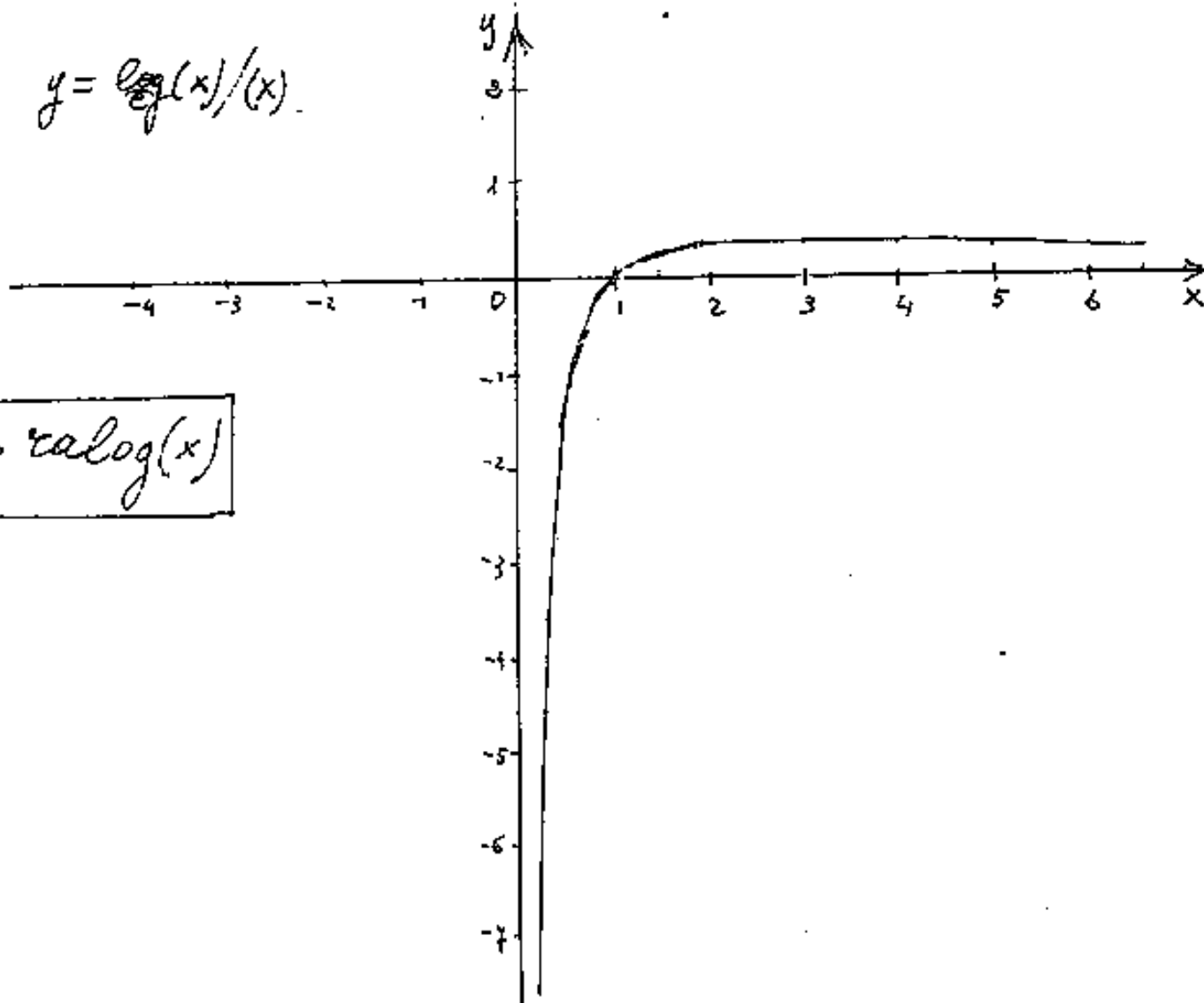
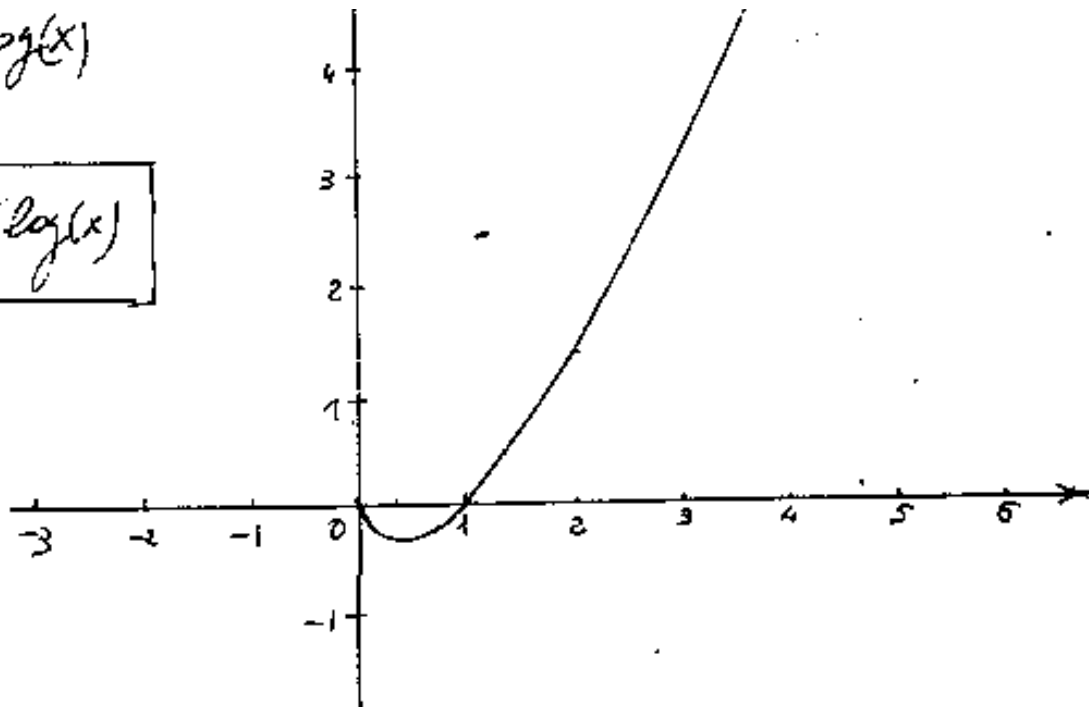
Detto ld lo spigolo del dodecaedro, coincidente con la diagonale maggiore del rombo 2, detto

ρ_{1d} = il raggio della sfera circoscritta al dodecaedro:

sappiamo: $\boxed{\rho_{1d} = l_d \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{5}+1)} = \underline{(1{,}401258538)\, l_d}$.

Detto: ρ_{1i} = raggio della sfera circoscritta all'icosaedro

avremo: $\rho_{1i} = \left(r_{id} + \overline{TQ}\right)$; ove: $r_{id} = \overline{OT}$ = raggio della sfe-

ra <u>inscritta</u> nel dodecaedro ed $\overline{TQ} = 2h_p$ = quota

$y = \log(x)/(x)$

y, x, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, −1, −2, −3, −4

$y = \text{ralog}(x)$

$y = (x) \cdot \log(x)$

$y = (x) \cdot \log(x)$

$y = P^{\log(x)}$

$y = e^x + x$

$y = exp(x) + (x)$

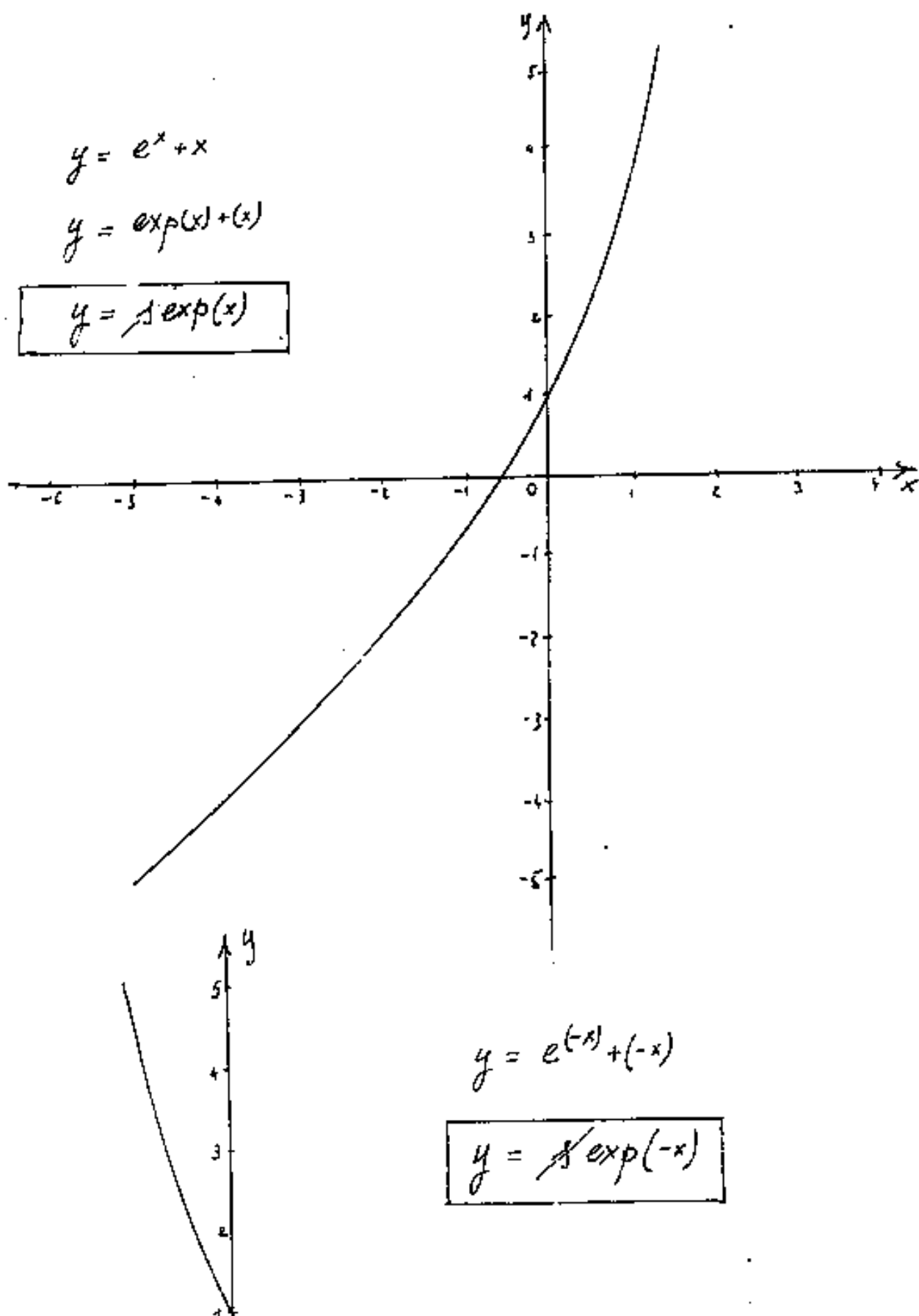
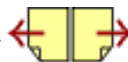
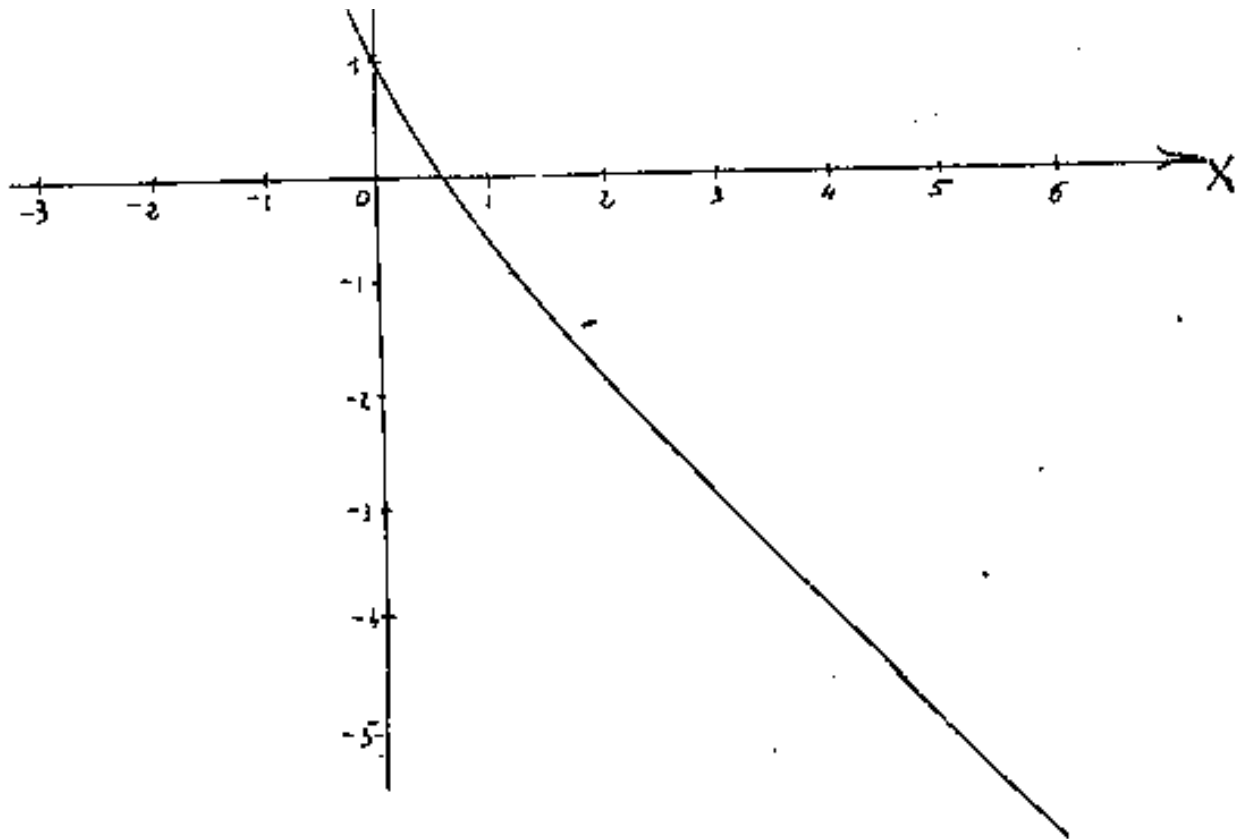
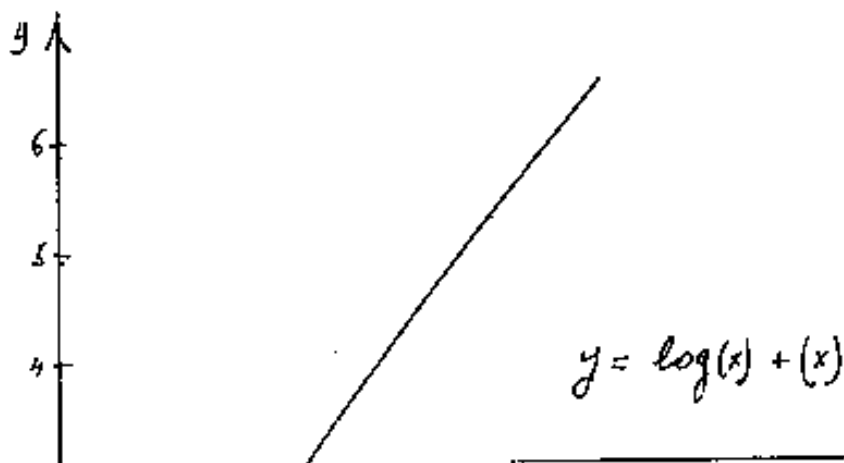
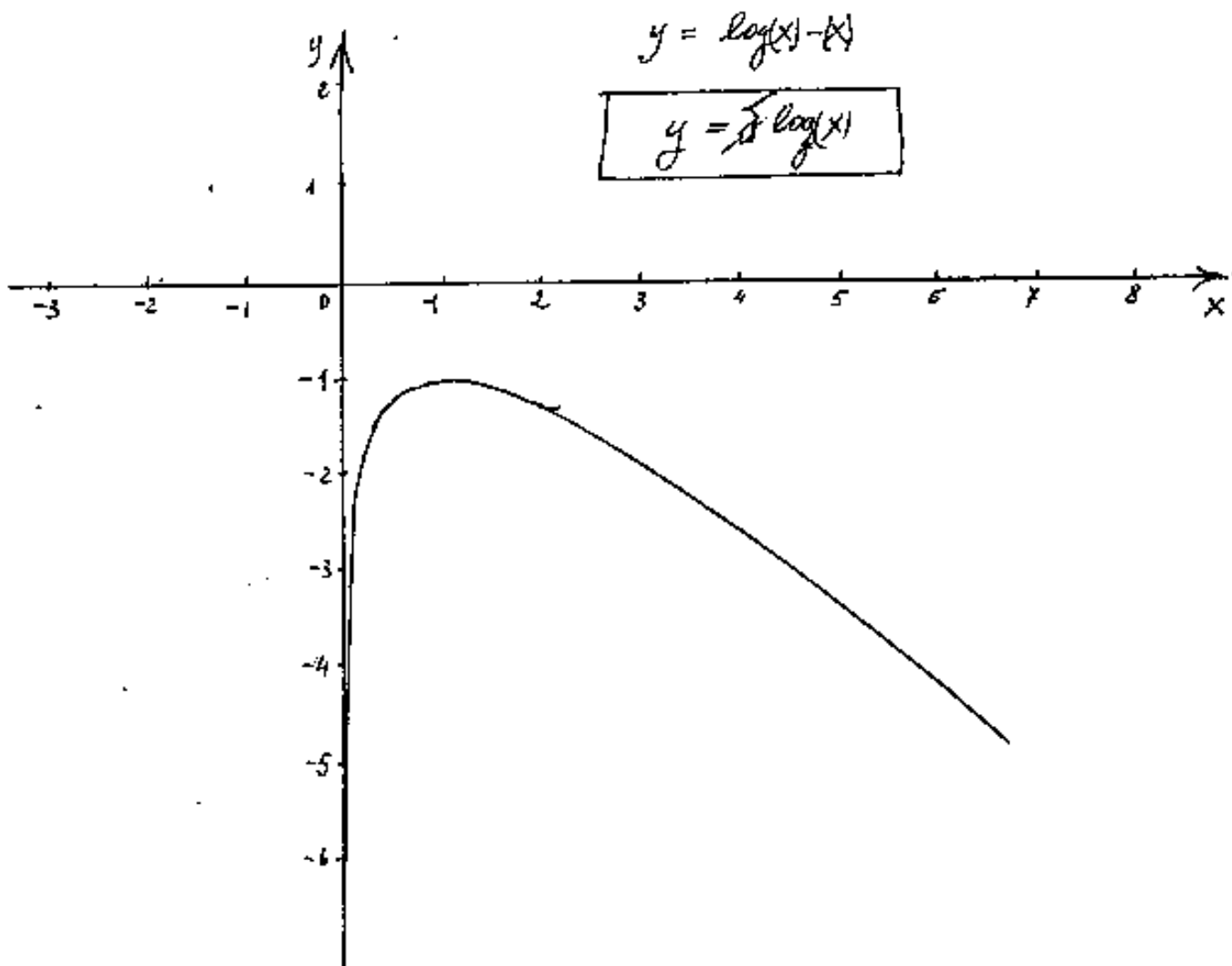
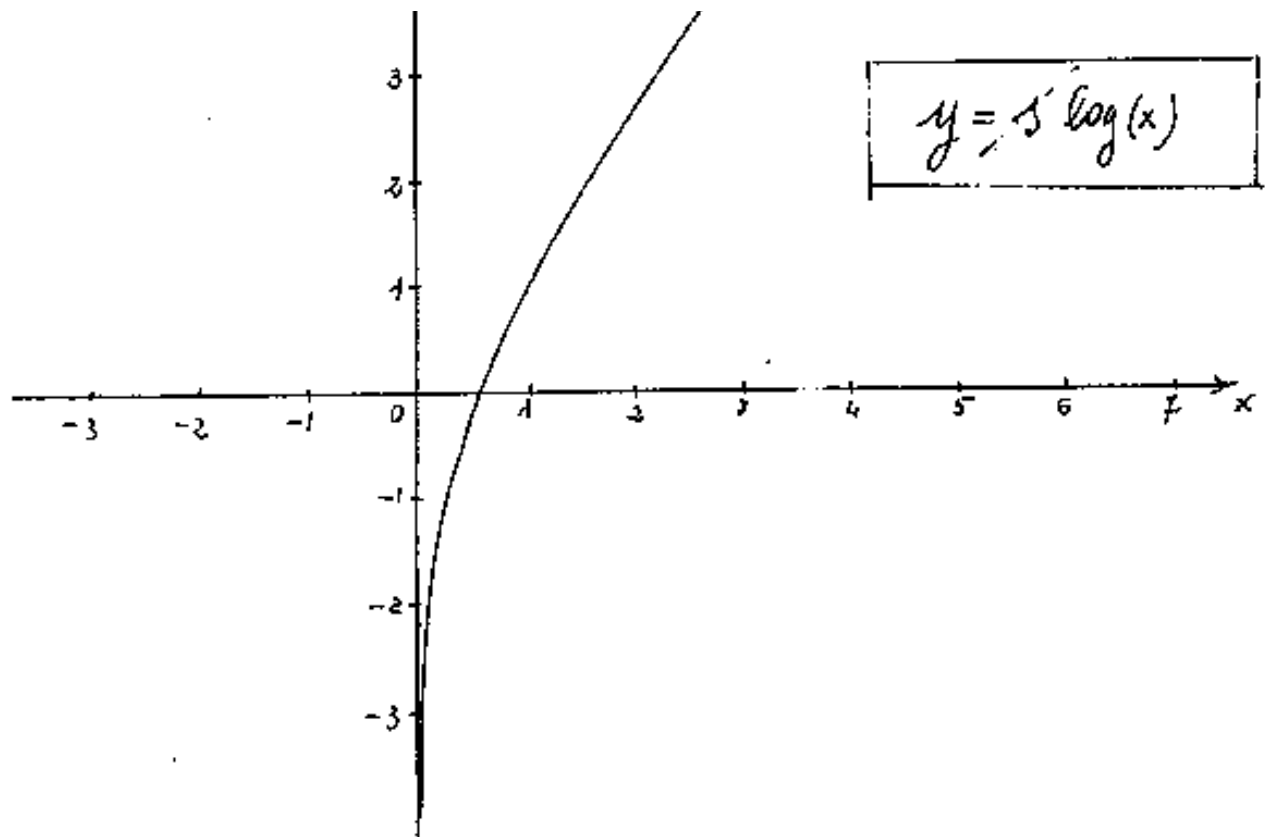
$y = exp(x)$

$y = e^{(-x)} + (-x)$

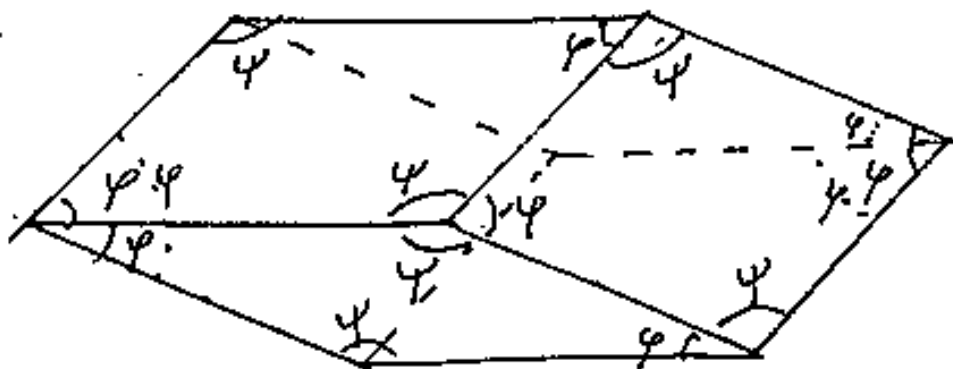
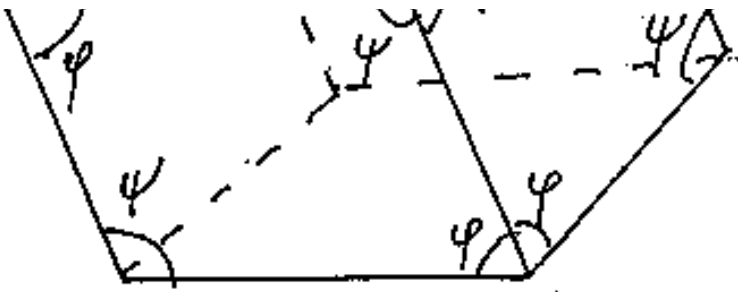
$y = exp(-x)$

$y = \log(x) - (x)$

$y = \int \log(x)$

$y = \log(x) + (x)$

Quindi nel caso del romboesaedro si ha (con $\varphi < \psi$)

1) 2 vertici con (3φ) e 6 vertici con $(\varphi + 2\psi)$; caso sempre valido con: $(0 < \varphi < \pi/2)$.

2) 2 vertici con (3ψ) e 6 vertici con $(\psi + 2\varphi)$ - caso valido solo per $\varphi > 60°$ (si hanno due tipi di romboesaedro a facce identiche)

3) 4 vertici con $(\varphi + 2\psi)$ e 4 vertici con $(2\varphi + \psi)$
<u>le facce non possono essere piane</u>

4) 2 vertici con 3φ, 3ψ ; $(1\varphi + 2\psi)$; $(1\psi + 2\varphi)$
<u>(impossibile)</u>

essere minore della somma degli altri due, e maggiore della loro differenza" (regola già nota per i lati del triangolo)

Se un angolo uguaglia la somma o la differenza degli altri due, la faccia con l'angolo maggiore si sovrappone alle altre due affiancate, (si ha un piano, non il vertice di un solido).

4) Sempre in un vertice, se due angoli delle facce sono uguali, allora il terzo angolo può essere maggiore di uno e minore di due; oppure è minore di uno e maggiore di zero: $\varphi < \psi < 2\varphi$; $0 < \varphi < \psi$; poiché: $2\varphi + \psi < 360°$.

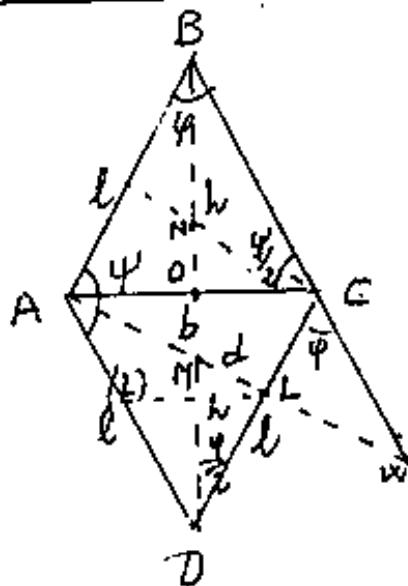
$$\boxed{0 < \varphi < \psi < 2\varphi} \; ; \; \frac{\varphi}{2} < \frac{\psi}{2} < \varphi ;$$

ed anche: $\frac{\psi}{2} < \varphi < \psi$;

$$\boxed{\left(\frac{\psi}{2} + 2\varphi\right) < 3\varphi < (2\varphi + \psi) < 360°}$$

$$\frac{5}{2}\psi < (2\psi + \varphi) < 3\varphi < 360°$$

Nel caso del rombo: $(\psi = 180° - \varphi)$ si ottiene: $\varphi > 60°$

Correlazioni fra gli elementi costitutivi dei romboesaedri

Siano: (per la faccia piana)

l = lato del triangolo isoscele (metà rombo) = spigolo del solido romboedro.

b = base del triangolo isoscele = = diagonale del rombo.

h = altezza del triangolo isoscele = metà diagonale del rombo:

φ = angolo fra i lati opposto a "b"

ψ = angolo fra i lati opposto a "$2h$"

d = distanza fra due lati paralleli = $\overline{AL}$

M = ortocentro del triangolo isoscele ACD

$\overline{DM}$ = distanza di M dal vertice φ. = $\overline{BN} = \overline{DM}$ = slittamento

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 = l^2 \; ; \quad \varphi = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{b}{2h}\right) = 2\arcsin\left(\frac{b}{2l}\right) = 2\arccos\left(\frac{h}{l}\right)$$

$$\psi = 180° - \varphi \quad ; \quad d = \frac{bh}{2l} = \overline{AL} = l \,\text{sen}\, \varphi$$

$$\overline{DL} = l \cos \varphi \qquad \overline{DH} = \overline{DL} / \cos \frac{\varphi}{2} = l \cos \varphi / \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$\overline{HL} = \overline{DL} \cdot \text{tang}(\varphi/2) = l \cos \varphi \cdot \text{tang}(\varphi/2) \qquad \overline{LW} = l(\text{tg}\,\varphi - \text{sen}\,\varphi)$$

$$\overline{CW} = l \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right)$$

In generale le sostituzioni in integrali contenenti radici con x^2 nel radicando possono ridursi alle seguenti: $\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ posto $\left(\frac{x}{a}\right) = sen(t)$ abbiamo $a\sqrt{1-sen^2(t)} = a\cos(t)$; e $d\left(\frac{x}{a}\right) = d(sen(t)) = \cos(t)\,dt$.

oppure: $\sqrt{x^2 \mp a^2}$ per le quali vale la sostituzione:
$t = \left(\sqrt{x^2 \mp a^2} + x\right)$ oppure sapendo che $\cosh^2(t) - senh^2(t) = 1$ le sostituzioni relative che elidono la radice.

Poiché alcune sostituzioni portano alla necessità di conoscere altri metodi di integrazione, continuiamo l'esposizione dei metodi.

Integrazione per parti

È uno dei metodi più importanti di integrazione. Quando abbiamo trattato la regola per la derivazione del prodotto di funzioni, siamo pervenuti all'importantissima espressione differenziale: [illegible]

renziale: $d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$ che può

essere scritta:

$$u\,dv = d(u \cdot v) - v\,du$$

integrando: $\int u\,dv = (u \cdot v) - \int v\,du$

che è la formula dell'integrazione per parti "L'integrale di una funzione è dato dal prodotto del fattor finito per il fattore differenziale diminuito dell'integrale che ha scambiato il fattor finito col fattor differenziale.

il motivo di tale sostituzione:

dalla: $t = \left(\sqrt{x^2 \mp a^2} + x\right)$ ricaviamo x:

$$(t - x)^2 = x^2 \mp a^2$$

$$\cancel{x^2} - 2tx + t^2 = \cancel{x^2} \mp a^2$$

$$\boxed{x = \left(\frac{t^2 \pm a^2}{2t}\right)}$$

calcoliamo il differenziale; "dx":

$$dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2t \cdot t - (t^2 \pm a^2)}{t^2}\right)dt \rightarrow \boxed{dx = \left(\frac{t^2 \mp a^2}{2t^2}\right)dt}$$

Poiché, dalla espressione: $t = \left(\sqrt{x^2 \mp a^2} + x\right)$ possiamo

ricavare: $\sqrt{x^2 \mp a^2} = (t - x) = t - \left(\frac{t^2 \pm a^2}{2t}\right) = \frac{2t^2 - t^2 \mp a^2}{2t}$

cioè: $\boxed{\left(\sqrt{x^2 \mp a^2}\right) = \left(\frac{t^2 \mp a^2}{2t}\right)}$

Sostituendo i valori trovati, nell'integrale si ha:

$$\int \frac{d(x)}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{\left(\frac{t^2 - a^2}{2t^2}\right)dt}{\left(\frac{t^2 - a^2}{2t}\right)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|\sqrt{x^2 - a^2} + x\right| + C}$$

Se poniamo $C = C_1 - \ln|a|$ abbiamo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \ln\left|\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} + \left(\frac{x}{a}\right)\right| + C_1$$

espressione che avevamo anticipato seguendo una diversa sostituzione. Questa sostituzione vale anche per:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right| + C$$

I metodi di integrazione

1) Somma o differenza di funzioni

Si integra per scomposizione integrando termine a termine le funzioni addendi.

$$\int (\varphi_{(x)} + f_{(x)} - g_{(x)})\, dx = \int \varphi_{(x)} dx + \int f_{(x)} \cdot dx - \int g_{(x)} \cdot dx$$

2) Sostituzione di variabile

Si usa per eliminare espressioni radicali:

Per esempio: (se ci siamo dimenticati che: $d(\arcsin(x)) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

poniamo: $x = \sin(t) \rightarrow t = \arcsin(x)$; $dx = \cos(t)\,dt$

sostituendo:

$$= \int \frac{\cos(t)\, d(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \int \frac{\cos(t)\, d(t)}{\cos(t)} = (t) + c = \arcsin(x) + c$$

altro esempio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

altro esempio:

$$\int \frac{d(x)}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$$

(qui la radice potrebbe essere eliminata ponendo: $\left(\frac{x}{a}\right) = \cosh(t)$ poiché $(\cosh^2(t) - 1) = \operatorname{senh}^2(t)$ e $d(\cosh(t)) = \operatorname{senh}(t)\,dt$. $\rightarrow t = \operatorname{arg}\cosh\left[\frac{x}{a}\right] = \ln\left|\frac{x}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right|$

ma, non avendo ancora trattato le funzioni iperboliche (vedi Vol. II e Vol V), facciamo la sostituzione classica:

poniamo: $\boxed{t = \sqrt{x^2 \mp a^2} + x}$ e cerchiamo di capire

Esempi:

$$\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \operatorname{sen}(ax+b)\,d(ax) = \frac{1}{a}\int \operatorname{sen}(ax+b)\,d(ax+b) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$$

più la costante arbitraria: $\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

La nostra "carlotta" questa volta era: "$ax+b$"

$$\int \frac{dx}{-4+x} = \int \frac{d(-4+x)}{(-4+x)} = \ln|(-4+x)| + C .$$

Facciamo l'integrale: $\int \frac{60x^2}{\operatorname{sen}(10x^3)}\,d(x)$ (è l'inverso dell'esempio fatto a derivata di funzione di funzione, noi supponiamo di non saperlo e ragioniamo come segue:)

1) Se portiamo x^2 sotto segno di differenziale $x^2 d(x) = \frac{1}{3} d(x^3)$ riusciamo ad uguagliare la potenza della variabile sotto l'operatore: "sen".

$$\int \frac{60x^2\,d(x)}{\operatorname{sen}(10x^3)} = \int \frac{20\,d(x^3)}{\operatorname{sen}(10x^3)} = 2\int \frac{d(10x^3)}{\operatorname{sen}(10x^3)} .$$

Noi non sappiamo ancora che: $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$ ....

e diciamo: "sotto segno di differenziale ci occorrerebbe un operatore trigonometrico; visto che il coeff. di x^3 è pari

operatore trigonometrico; visto che il coeff. di x^2 è pari proviamo a svilupparlo:

$$2\int \frac{d(5\cdot x^3)}{2\,\text{sen}(5x^3)\cos(5x^3)}\cdot\frac{\cos(5x^3)}{\cos 5x^3} = 2\int\frac{d(5x^3)}{\frac{\text{sen}(5x^3)}{\cos(5x^3)}\cdot\cos^2(5x^3)} = 2\int\frac{d(tg(5x^3))}{tg(5x^3)} =$$

$$2\ln|tg(5x^3)| = \boxed{\int\frac{60x^2\cdot dx}{\text{sen}(10x^3)} = \ln|tg^2(5x^3)| + C}$$

Ritorna l'esempio da dove eravamo partiti.

Esempio:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \text{posto } x = \operatorname{sen}(t) \rightarrow \int \cos(t)\, d(\operatorname{sen}(t))$$

$$= \int \cos^2(t)\,dt = \text{(che integriamo per parti}$$

$$= \int \cos(t)\, d(\operatorname{sen}(t)) = (\cos(t))(\operatorname{sen}(t)) - \int \operatorname{sen}(t)\, d\cos(t)$$

$$= \operatorname{sen}(t)\cos(t) + \int \operatorname{sen}^2(t)\,dt$$

$$+ \int (1 - \cos^2(t))\,dt$$

$$2\int \cos^2(t)\,dt = \operatorname{sen}(t)\cos(t) + t$$

$$\boxed{\int \cos^2(t)\,dt = \frac{\operatorname{sen}(t)\cos(t) + t}{2} + c}$$

$$\boxed{\int \left(\sqrt{1-x^2}\right)dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen}(x)}{2} + c}$$

altro esempio:

$$\int x\cos(x)\,d(x) = \begin{cases} = \displaystyle\int \frac{\cos(x)\,dx^2}{2} = \frac{1}{2}x^2\cos(x) - \frac{1}{2}\int x^2\, d\cos(x) \ldots \\ = \displaystyle\int x\, d(\operatorname{sen}(x)) \end{cases}$$

Nella prima uguaglianza il processo di integrazione per parti può ripetersi infinite volte dando per risultato una serie. Mentre nel secondo caso si ha:

$$\boxed{\int x\cdot\cos(x)\,dx} = \int x\, d(\operatorname{sen}(x)) = x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\,dx = \boxed{x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + c}$$

Il fatto di lasciare la x a fattore finito, facilita l'integrale che si detrae dal prodotto del fattor finito per il fattore differenziale.

altro esempio:

$$\int \ln|x| \cdot d(x) = x \cdot \ln|x| - \int x \, d(\ln|x|) = x \cdot \ln|x| - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\boxed{\int \ln|x| \, d(x) = x \ln|x| - x + c}$$

Artifizi di integrazione

Consideriamo il differenziale: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}$

$$d\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2}{(1-x)^2}dx$$

e l'integrale:

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)}=\int\frac{dx}{(1-x)(1+x)}\cdot\frac{(1-x)}{(1-x)}=\frac{2}{2}\int\frac{dx}{(1-x)^2\cdot\frac{(1+x)}{(1-x)}}$$

Sostituendo il differenziale:

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+x)}{(1-x)}\right|+C_1$$

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)}=\ln\left|c\sqrt{\frac{(1+x)}{(1-x)}}\right|$$

Sull'utilizzazione di questo differenziale ne abbiamo trattato per integrali del tipo:

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen}(x)}\quad\frac{(\operatorname{sen}(x))}{(\operatorname{sen}(x))}=-\int\frac{d(\cos(x))}{1-\cos^2(x)}=-\ln\left|c\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}\right|=$$

$$\int \frac{dx}{sen(x)} = ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx^2 \pm a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \left(\frac{a}{b}\right)}}$$ poniamo: $(-x + t) = \sqrt{x^2 \pm \left(\frac{a}{b}\right)}$

(vedi metodo di sostituzione) abbiamo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx^2 \pm a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} ln\left|\sqrt{x^2 \pm \left(\frac{a}{b}\right)} + (x)\right| + c$$

utilizzando la derivata logaritmica

$$\int x^x (\ln|x| + 1)\, d(x)$$

se poniamo: $e^y = x^x$; $y = x \ln|x|$; $x^x = e^{x \ln|x|}$

ma: $d(x \ln|x|) = (\ln|x| + 1)\, dx$

sostituendo:

$$\int e^{x \ln|x|}\, d(x \ln|x|) = e^{x \ln|x|} + c$$

$$\int x^x (\ln|x| + 1)\, d(x) = x^x + c$$

---

utilizzando le formule di prostaferesi

Servono per i seguenti tipi di integrali, a fianco dei quali riportiamo la formula interessata.

$I_a)$ $\int [\text{sen}(mx) \cos(nx)]\, dx$	$(\text{se}: n > m) \rightarrow$	$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}\{\text{sen}(p) - \text{sen}(q)\}$
$I_b)$ "	$(\text{se}: n < m) \rightarrow$	$\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}\{\text{sen}(p) + \text{sen}(q)\}$

II) $\int [\cos(nx)\cos(mx)]\,dx$ →	$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(p)+\cos(q)\right)$
III) $\int [\text{sen}(nx)\,\text{sen}(mx)]\,dx$ →	$\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(q)-\cos(p)\right)$

Facciamo degli esempi numerici dei quattro casi, per evidenziare la snellezza del procedimento.

Ia) $\int \sin(3x)\cos(5x)\cdot dx =$

$$\left.\begin{aligned}(5x) &= \frac{p+q}{2} \\ (3x) &= \frac{p-q}{2}\end{aligned}\right\}$$

sommando e sottraendo (prostaferesi) $\rightarrow \begin{cases}(8x) = p \\ (2x) = q\end{cases}$

$$\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx = \frac{1}{2}\int [\sin(8x) - \sin(2x)]\,dx$$

$$\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(8x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2}\right) + C$$

controlliamo derivando: $\frac{1}{2}\left(\frac{8}{8}\sin(8x) - \frac{2}{2}\sin(2x)\right) =$

$$\frac{1}{2}\begin{cases}\sin(8x) = \sin(5x+3x) = \sin(5x)\cos(3x) + \cos(5x)\sin(3x) \\ -\sin(2x) = -\sin(5x-3x) = -\sin(5x)\cos(3x) + \cos(5x)\sin(3x)\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\left(2\cos(5x)\sin(3x)\right)$$

torna!

Analogamente il caso (I_b).

II) $\int \cos(5x)\cos(3x)\,d(x)$: $p = (8x)$; $q = (2x)$

$$= \frac{1}{2}\int(\cos(p) + \cos(q))\,dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(8x)}{8} + \frac{\sin(2x)}{2}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos(p) + \cos(q))\,dx = \boxed{\frac{1}{2}\left\{\frac{\quad}{8} + \frac{\quad}{2}\right\} + C}$$

III)

$$\boxed{\int \operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(3x)\,dx} = \frac{1}{2}\int (\cos(2x) - \cos(8x))\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left\{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(8x)}{8}\right\} + C}$$

Si noti la snellezza dei calcoli.

calcoliamo ora il termine noto:

$$a_{44} = \left(x_V^2 a_{11} + y_V^2 a_{22} + z_V^2 a_{33} + 2a_{12} x_V y_V + 2a_{13} x_V z_V + 2a_{23} y_V z_V\right)$$

$$a_{44} = \left[9 \cdot (0{,}44) + 16(0{,}31) + 25(0{,}65) - (0{,}84)12 - (0{,}464758)15 - (0{,}542217668)20\right]$$

$$a_{44} = -2{,}72572336$$

Percio' l'equazione rappresentativa del cono sarà:

$$\Big[\underset{a_{11}}{(0{,}44)}x^2 + \underset{a_{22}}{(0{,}31)}y^2 + \underset{a_{33}}{(0{,}65)}z^2 - 2\underset{a_{12}}{(0{,}42)}xy - 2\underset{a_{13}}{(0{,}232379)}xz - 2\underset{a_{23}}{(0{,}27110834)}yz + 2\underset{a_{14}}{(1{,}521895)}x + 2\underset{a_{24}}{(1{,}37554171)}y + 2\underset{a_{34}}{(-1{,}468427661)}z - (2{,}72572336) = 0\Big]$$

Equazione che potrebbe essere moltiplicata per un K arbitrario,

---

<u>Problema inverso</u>: data l'equazione ora scritta trovare le caratteristiche del solido che rappresenta.

Supponiamo sia un cono; percio' dalla seconda terna di coefficienti abbiamo:

terna di coefficienti abbiamo:

$$\frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} = -K\cos^2\alpha = \frac{(0,42)(0,232379)}{-(0,271108834)} = -0,36$$

$$\frac{a_{12}\,a_{23}}{a_{13}} = -K\cos^2\beta = \frac{(0,42)(0,271108834)}{-(0,232379)} = -0,49$$

$$\frac{a_{13}\,a_{23}}{a_{12}} = -K\cos^2\gamma = \frac{(0,232379)(0,271108834)}{-0,42} = -0,15$$

sommando: $-K \quad = \qquad = -1 \quad ; \quad (K = +1)$

Oppure:

$$2a_{14} = -2\left(a_{11}x_V + a_{12}y_V + a_{13}z_V\right) = -2K\left[-(0,44)3 + (0,42)4 + (0,232379)5\right] = 2K(1,521895)$$

$$2a_{24} = -2\left(a_{12}x_V + a_{22}y_V + a_{23}z_V\right) = -2K\left[(0,42)3 - (0,31)4 + (0,27108834)5\right] = 2K(1,37554171)$$

$$2a_{34} = -2\left(a_{13}x_V + a_{23}y_V + a_{33}z_V\right) = -2K\left[(0,232379)3 + (0,27108834)4 - (0,65)5\right] = 2K(-1,468427661)$$

calcoliamo ora:

$$\overline{OV} = \sqrt{3^2+4^2+5^2} \quad ; \quad \overline{OV} = \sqrt{50} \quad ; \quad \boxed{\overline{OV} = 7,07106781 2}$$

$$\frac{(x_V - x_P)}{\overline{PV}} = \cos\alpha \quad \rightarrow \quad (x_V - x_P)\cos\alpha = (\cos^2\alpha)\,\overline{PV}$$ analogamente:

$$(y_V - y_P)\cos\beta = (\cos^2\beta)\,\overline{PV} \quad ; \quad (z_V - z_P)\cos\gamma = (\cos^2\gamma)\,\overline{PV} \quad ;$$

sommando membro a membro e ricordando che:

$$(\cos\alpha)x_P + (\cos\beta)y_P + (\cos\gamma)z_P = 0$$ (piano di P passante per O)

$$\boxed{\overline{PV}} = x_V\cos\alpha + y_V\cos\beta + z_V\cos\gamma = \left(3\cdot 0,6 + 4\cdot 0,7 + 5\sqrt{0,15}\right) = \boxed{6,536491673}$$

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OV}^2 - \overline{PV}^2} = \sqrt{50 - 42,72572339} = \sqrt{7,27427661}$$ = cioè:

$$\boxed{\overline{OP} = 2,697086689} \; ; \; x_P = x_V - \overline{OV}\cos\alpha \; ; \; y_P = y_V - \overline{OV}\cos\beta \; ; \; z_P = z_V - \overline{OV}\cos\gamma .$$

$$\boxed{x_P} = x_V \operatorname{sen}^2\varphi - a_{14}/K = \left(3(0,2) - 1,521895\right) = \boxed{-0,921895}$$

$$\boxed{y_P} = y_V \operatorname{sen}^2\varphi - a_{24}/K = \left(4(0,2) - 1,37554171\right) = \boxed{-0,57554171}$$

$$\boxed{z_P} = z_V \operatorname{sen}^2\varphi - a_{34}/4 = \left(5(0,2) + 1,468427661\right) = \boxed{+2,468427661}$$

da cui ritorna: $\overline{OP}^2 = x_p^2 + y_p^2 + z_p^2$

$$\cos(x\hat{O}P) = x_p/\overline{OP} = -0,921895/2,697086689 = -0,341811409$$

$$\cos(y\hat{O}P) = y_p/\overline{OP} = -0,575544171/2,697086689 = -0,213394762$$

$$\cos(zOP) = z_p/\overline{OP} = +2,468427661/2,697086689 = +0,915219993$$

$$x\hat{O}P = 109^\circ\ 59'\ 14'' \qquad \cos^2(x\hat{O}P) = 0,116835039$$

$$y\hat{O}P = 102^\circ\ 19'\ 17'' \qquad \cos^2(y\hat{O}P) = 0,045537324$$

$$z\hat{O}P = 23^\circ\ 45'\ 47'' \qquad \cos^2(z\hat{O}P) = 0,837627636$$

$$\left.\begin{matrix}\cos^2(x\hat{O}P)\\ \cos^2(y\hat{O}P)\\ \cos^2(z\hat{O}P)\end{matrix}\right\} = 1$$

In questa seconda terna di valori notiamo che:

$$\frac{a_{12}\cdot a_{13}}{a_{23}} = \frac{-K(\cos\alpha\cos\beta)(\cos\alpha\cos\gamma)K}{K(\cos\beta\cos\gamma)} = -K\cos^2\alpha$$

$$\frac{a_{12}\, a_{23}}{a_{13}} = \frac{-K(\cos\alpha\cos\beta)(\cos\beta\cos\gamma)K}{K(\cos\alpha\cos\gamma)} = -K\cos^2\beta$$

$$\frac{a_{13}\, a_{23}}{a_{12}} = \frac{-K(\cos\alpha\cos\gamma)(\cos\beta\cos\gamma)K}{K(\cos\alpha\cos\beta)} = -K\cos^2\gamma$$

sommando e ricordando che: $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 1$

si ha:

$$\boxed{\frac{a_{12}\, a_{13}}{a_{23}} + \frac{a_{12}\, a_{23}}{a_{13}} + \frac{a_{13}\, a_{23}}{a_{12}} = -K}$$

cioè da questa seconda terna è possibile calcolare K ed i coseni direttori. (Nell'equazione è bene tenere in evidenza il due: $2(a_{12})$; $2(a_{13})$; $2(a_{23})$)

Trovati: K, $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ è possibile con la prima terna di coefficienti calcolare φ con tre equazioni diverse, cioè verificare che la correlazione esistente per $\varphi \neq 0$ è quella di un cono.

Più delicata è la terza terna di coefficienti

11

che, come abbiamo visto, può rappresentarsi con modalità diverse, sempre in funzione delle coordinate del vertice: $V \equiv (3,4,5)$; Verifichiamo numericamente:

$$2(a_{14}) = 2K\left[\cos\alpha\left(\cos\alpha\, x_v + \cos\beta\, y_v + \cos\gamma\, z_v\right) - \cos^2\varphi\, x_v\right] = 2K\left[0,6\left(1,8+3,2+\sqrt{4,95}\right) - 3,4\right] = 2K(1,521895)$$

$$2(a_{24}) = 2K\left[\cos\beta\left(\cos\alpha\, x_v + \cos\beta\, y_v + \cos\gamma \cdot z_v\right) - \cos^2\varphi\, y_v\right] = 2K\left[0,8(6,53) - 3,2\right] = 2K(1,37654417)$$

$$2(a_{34}) = 2K\left[\cos\gamma\left(\cos\alpha\, x_v + \cos\beta\, y_v + \cos\gamma \cdot z_v\right) - \cos^2\varphi\, z_v\right] = 2K\left[\sqrt{0,15}(6,53) - 4,0\right] = 2K(-1,4684274)$$

Per sette incognite bastano sette equazioni, quin= di almeno tre equazioni debbono essere combina= zione lineare delle restanti.

Esempio numerico – studiare l'equazione di un cono che abbia il vertice $V \equiv (3, 4, 5)$, che abbia l'asse diretto dai coseni direttori:

$$\cos\alpha = 0,6 \quad ; \quad \cos\beta = 0,7 \quad ; \sqrt{1-(\cos^2\beta + \cos^2\alpha)} = \sqrt{0,15}$$

$\cos\gamma = \sqrt{0,15}$; ed abbia apertura: $2\varphi = 2(26^\circ 33' 54,2'')$

cioè: $\cos^2\varphi = 0,80$. $(\sin^2\varphi = 0,2)$

Dall'analisi dei coefficienti dell'equazione del cono abbiamo:

$$\frac{a_{11}}{K} = (\cos^2\varphi - \cos^2\alpha) = (0,80 - 0,36) \Rightarrow \qquad a_{11} = (0,44)K$$

$$\frac{a_{22}}{K} = (\cos^2\varphi - \cos^2\beta) = (0,80 - 0,49) \Rightarrow \qquad a_{22} = (0,31)K$$

$$\frac{a_{33}}{K} = (\cos^2\varphi - \cos^2\gamma) = (0,80 - 0,15) \Rightarrow \qquad a_{33} = (0,65)K$$

In queste tre equazioni figurano come incognite indipendenti:

$\alpha, \beta, K, \varphi$; cioè 4 valori. (manca una correlazione indipendente). Sommando le tre correlazioni si ha una nuova correlazione (combinazione lineare); (non indipendente)

$$(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = K(3\cos^2\varphi - 1) = (1,4)K$$

$$2(a_{12}) = 2K(-\cos\alpha\cos\beta) = -2K(0,6)(0,7) = -2K(0,42) = -K(0,84)$$

$$2(a_{13}) = 2K(-\cos\alpha\cos\gamma) = -2K(0,6)(\sqrt{0,15}) = -2K(0,232379) = -K(0,464758)$$

$$2(a_{23}) = 2K(-\cos\beta\cos\gamma) = -2K(0,7)(\sqrt{0,15}) = -2K(0,271108834) = -K(0,542217668)$$

$$x_V = \frac{\overline{PV}\cos\alpha - a_{14}/K}{\cos^2\varphi}$$

$$y_V = \frac{\overline{PV}\cos\beta - a_{24}/K}{\cos^2\varphi}$$

$$z_V = \frac{\overline{PV}\cos\gamma - a_{34}/K}{\cos^2\varphi}$$

possiamo verificare che:

$$x_V^2 + y_V^2 + z_V^2 = \overline{OV}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PV}^2$$

Il terzo gruppo di coefficienti nella forma precedente:

$$\begin{cases} x_P = -x_V \operatorname{sen}^2\varphi + a_{14}/K \\ y_P = -y_V \operatorname{sen}^2\varphi + a_{24}/K \\ z_P = -z_V \operatorname{sen}^2\varphi + a_{34}/4 \end{cases}$$

permette di verificare che

$\cos\alpha\, x_P + \cos\beta\, y_P + \cos\gamma \cdot z_P = 0$; (già giustificata)

e che: $(x_P^2 + y_P^2 + z_P^2) = \overline{OP}^2$.

e che: $(X_P + Y_P + Z_P) = OP^{\sim}$.

Vi è infine da osservare che i coefficienti della equazione sono dieci, mentre il significato di tali coefficienti è in funzione di: (K, φ, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, X_V, Y_V, Z_V;) cioè otto grandezze, di cui solo sette indipendenti essendo: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

$(K = 1)$

$\cos^2\alpha = +0,36$; $\cos\alpha = 0,6$; $\alpha = 53° 07' 48''$

$\cos^2\beta = +0,49$; $\cos\beta = 0,7$; $\beta = 45° 34' 23''$

$\cos^2\gamma = +0,15$; $\cos\gamma = \sqrt{0,15}$; $\gamma = 67° 12' 48''$

sommando ora i primi tre coefficienti si ha:

$$\left(\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{K}\right) = \left(3\cos^2\varphi - 1\right)K \rightarrow \cos^2\varphi = \frac{(0,44 + 0,31 + 0,65) + 1}{3} = 0,80$$

$\cos^2\varphi = 0,80$; $\cos\varphi = 0,894427191$; $\varphi = 26° 33' 54''$

verifichiamo:

$K(\cos^2\varphi - \cos^2\alpha) = a_{11} = (0,80 - 0,36) = (0,44)$

$K(\cos^2\varphi - \cos^2\beta) = a_{22} = (0,80 - 0,49) = (0,31)$

$K(\cos^2\varphi - \cos^2\gamma) = a_{33} = (0,80 - 0,15) = (0,65)$

Cio' conferma l'ipotesi che sia un cono, ma abbiamo ancora una verifica.

Calcoliamo le coordinate di "V" dalla terza terna di coefficienti:

[illegible] di coefficienti.

$$X_V = \left(\overline{PV}\cos\alpha - a_{14}/K\right)\frac{1}{\cos^2\varphi} = \left[(6,53649167 3)(0,6) - 1,521895\right]\frac{1}{0,8} = 3$$

$$y_V = \left(\overline{PV}\cos\beta - a_{24}/K\right)\frac{1}{\cos^2\varphi} = \left[(6,53649167 3)(0,7) - 1,37554171\right]\frac{1}{0,8} = 4$$

$$Z_V = \left(\overline{PV}\cos\gamma - a_{34}/K\right)\frac{1}{\cos^2\varphi} = \left[(6,53649167 3)(\sqrt{0,15}) + 1,46843766\right]\frac{1}{0,8} = 5$$

Vogliamo verificare applicando i determinanti alla equazione nella forma estesa.

Intersezione del cono col piano xy. $(z=0)$

L'equazione diventa:

$$(0{,}44)x^2+(0{,}31)y^2-2(0{,}42)xy+2(1.521895)x+2(1{,}375544171)y-(2{,}72572336)=0$$

$$\underset{a_{11}}{} \quad \underset{a_{22}}{} \quad \underset{2a_{12}}{} \quad \underset{2a_{13}}{} \quad \underset{2a_{23}}{} \quad \underset{a_{33}}{}$$

Il determinante delle coniche: $(A = a_{33}A_{33} - a_{23}A_{23} + a_{13}A_{13})$

$$\begin{vmatrix} 0{,}44 & -0{,}42 & +1{,}521895 \\ -0{,}42 & +0{,}31 & +1{,}375544171 \\ 1{,}521895 & +1{,}375544171 & -2{,}72572336 \end{vmatrix} = \begin{cases} -2{,}72572336\,(-0{,}04) & = +0{,}109028934 \\ -1{,}375544171\,(1{,}244435335) & = -1{,}711775771 \\ +1{,}521895\,(-1{,}049516003) & = -1{,}597253163 \end{cases}$$

$$A = -3{,}2000000$$

$A \neq 0 \rightarrow$ (conica non degenere)

$A_{33} = (-0{,}04) < 0 \rightarrow$ (caso iperbolico) (ad assi ruotati e traslati) ($a_{12} \neq 0,\ a_{13} \neq 0,\ a_{23} \neq 0$)

Coordinate del centro traslato "C":

$$x_C = \frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{-1{,}049516003}{-0{,}04} = \qquad \boxed{x_C = +26{,}23790}$$

$$y_C = \frac{-A_{32}}{A_{33}} = \frac{-1{,}244435335}{-0{,}04} = \qquad \boxed{y_C = +31{,}110883}$$

Angolo di rotazione degli assi "α_i"

$$\tan(2\alpha_i) = \frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})} = \frac{-2(0{,}42)}{(0{,}44-0{,}31)} = \frac{-0{,}84}{0{,}13} = \tan(2\alpha_i) = -6{,}46153846$$

$$\frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{-0{,}84}{0{,}13}\right) = \boxed{\alpha_i = 49°\ 23'\ 55'',34}$$

occorre ricordare che per trasformare la tangente in coseno, il radicale deve essere assunto col segno della tangente

$$\cos(2\alpha_i) = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2(2\alpha_i)}} = \frac{13}{-\sqrt{13^2+84^2}} = \boxed{\frac{-13}{85} = \cos(2\alpha_i)}$$

$$\cos(\alpha_i) = \sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha_i)}{2}} = \sqrt{\frac{85-13}{2\cdot 85}} = \sqrt{\frac{72}{2\cdot 85}} = \frac{6}{\sqrt{85}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha_i) = 6/\sqrt{85}}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha_i) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha_i)} = \sqrt{\frac{85-36}{85}} = 7/\sqrt{85}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha_i = 7/\sqrt{85}} \qquad \boxed{tg\,\alpha_i = 7/6}$$

Verifichiamo ora il termine noto a_{44}, che non è stato usato

$$a_{44} = \left[a_{11}x_v^2 + a_{22}y_v^2 + a_{33}z_v^2 + 2a_{12}x_v y_v + 2a_{13}x_v z_v + 2a_{23}y_v z_v\right]$$

$$a_{44} = \left[(0,44)\,3^2 + (0,31)\,4^2 + (0,65)\,5^2 - 2(0,42)\,3\cdot 4 - 2(0,232379)\,3\cdot 5 - 2(0,27108834)\,4\cdot 5\right]$$

$$a_{44} = \left[3,96 + 4,96 + 16,25 - 10,08 - 6,97137 - 10,84435336\right]$$

$a_{44} = -2,72572336$ conferma che il solido è un cono con vertice in $V \equiv (3,4,5)$, con apertura $2\varphi = 2(26°33'54'') = 53°07'48''$. ed avente per asse la retta:

$$\frac{x-3}{0,6} = \frac{y-4}{0,7} = \frac{z-5}{\sqrt{0,15}}$$

Questa retta incontra per $z=0$ il piano xy nel punto:

$$x_1 = \frac{-3}{\sqrt{0,15}} + 3 = -4,745966693 \quad ; \quad y_1 = \frac{-3,5}{\sqrt{0,15}} + 4 = -5,036961142$$

per $y=0$ incontra il piano xz nel punto:

$$x_2 = \frac{-2,4}{0,7} + 3 = -0,428571429 \quad ; \quad z_2 = \frac{-4\cdot\sqrt{0,15}}{0,7} + 5 = 2,786866660$$

$$x_2 = \frac{[illegible]}{0,7} + 3 = -0,428571429 \quad ; \quad z_2 = \frac{[illegible]}{0,7} + 5 = 2,786786660$$

per $x = 0$ incontra il piano yz nel punto:

$$y_3 = \frac{-2,1}{0,6} + 4 = 0,5 \quad ; \quad z_3 = \frac{-3\sqrt{0,15}}{0,6} + 5 = 3,063508327$$

Cerchiamo ora l'intersezione del cono con i piani xy, xz, yz.

calcoliamo i semiassi "a" e "b" dell'iperbole.

abbiamo ampliamente trattato (Vol II) i vari casi dell'iperbole coniugata, ed abbiamo evidenziato che, mentre nell'ellisse si assumeva come asse focale il maggiore fra s_1 ed s_2, nell'iperbole ciò non vale, perché i fuochi possono essere sia sui semiassi maggiori, sia sui semiassi minori e le due iperboli si dicono coniugate.

$$K = \left(\frac{A_{33}^2}{A}\right) = \frac{(-0,04)^2}{-(3,2)} = -\left(\frac{5}{10\,000}\right) = \left(\frac{-1}{2000}\right).$$

$$K s_1^2 s_2^2 = \frac{-A}{A_{33}} = \frac{3,2}{(-0,04)} = -80$$

$$s_1^2 s_2^2 = (-80)(-2000) = 16\,000$$

$$(a_{11} + a_{22}) = ((0,44)+(0,31)) = 0,75 = (s_1^2 - s_2^2)K$$

$$\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (2a_{12})^2} = \sqrt{(0,44 - 0,31)^2 + (0,84)^2} = (-0,85) = (s_1^2 + s_2^2)K$$

dividendo per K

$$(s_1^2 - s_2^2) = (0,75)(-2000) = -1500$$

$$(s_1^2 + s_2^2) = (-0{,}85)(-2000) = +1700$$

sommando: $2s_1^2 = 200$; $s_1^2 = 100 \rightarrow \boxed{s_1 = 10}$

sottraendo: $-2s_2 = -3200$; $s_2^2 = +1600 \rightarrow \boxed{s_2 = 40}$

Nell'iperbole ad assi ruotati e traslati non vi è ambiguità per $\alpha \neq 90°$ cioè $s_1 = b$; $s_2 = a$ ed a = asse focale.

Punti del cono sugli assi:

L'iperbole incontra l'asse X ; $(y=0)$ nei punti:

$$0{,}44\,x^2 + 2(1{,}521895)\,x - 2{,}72572336 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = -3{,}458852273 \pm 4{,}261277375 = \left\langle \begin{matrix} -7{,}720129648 \\ +0{,}802425102 \end{matrix}\right.$$

L'iperbole incontra l'asse y ; $(x=0)$ nei punti

$$0{,}31\,y^2 + 2(1{,}375544171)\,y - 2{,}72572336 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\rangle = -4{,}437239261 \pm 5{,}33682942 = \left\langle \begin{matrix} -9{,}774068681 \\ +0{,}899590159 \end{matrix}\right.$$

Il cono incontra l'asse z $(x=0\ ;\ y=0)$ nei punti:

$$0{,}65\,z^2 - 2(1{,}468427661) - 2{,}72572336 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\rangle = +2{,}259119478 \pm 3{,}049105011 = \left\langle \begin{matrix} +5{,}308224489 \\ -0{,}78998553 \end{matrix}\right.$$

Intersezione del cono col piano XZ $(y=0)$

L'equazione diventa:

$$\boxed{\underbrace{(0{,}44)}_{a_{11}}X^2 + \underbrace{(0{,}65)}_{a_{33}}Z^2 - \underbrace{2(0{,}232379)}_{2a_{13}}XZ + \underbrace{2(1{,}521895)}_{2a_{14}}X - \underbrace{2(1{,}468427661)}_{2a_{34}}Z \underbrace{-2{,}72572336}_{a_{44}} = 0}$$

Il determinante delle coniche: $A = a_{33}A_{33} - a_{13}A_{13} + a_{13}A_{13}$

$$\begin{vmatrix} 0{,}44 & -0{,}232379 & +1{,}521895 \end{vmatrix} \quad [-2{,}72572336(0{,}232) \qquad = -0{,}6323678.3$$

$$\begin{vmatrix} 0,44 & -0,232379 & +1,521895 \\ -0,232379 & +0,65 & -1,46842766 \\ +1,521895 & +1,46842766 & -2,72572336 \end{vmatrix} = \begin{cases} -2,72572336\,(0,232) & = -0,632367783 \\ +1,46842766\,(-0,292451733) & = -0,42944421 \\ +1,521895\,(-0,648) & = -0,98618796 \end{cases}$$

$A \neq 0$ (conica non degenere) $\quad A = -2,048$

$A_{33} = +0,232 > 0 \rightarrow$ (caso ellittico); $a_{11}A < 0$; $a_{22}A < 0 \rightarrow$ (ellisse reale)

$a_{12} \neq 0 \rightarrow$ (assi ruotati); $a_{23} \neq 0$; $a_{13} \neq 0 \rightarrow$ (assi traslati)

coordinate del centro traslato "c"

$$\frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{-0{,}648}{+0{,}232} = \boxed{-2{,}793103448 = X_c}$$

$$\frac{-A_{23}}{A_{33}} = \frac{+0{,}292451733}{+0{,}232} = \boxed{+1{,}260567815 = Z_e}$$

angolo di ruotazione degli assi: "(α_{e_1})"

$$\tan(2\alpha_e) = \frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})} = \frac{-2(0{,}232379)}{(0{,}44 - 0{,}65)} = \frac{-2(0{,}6)\sqrt{0{,}15}}{-(0{,}21)} = \left(\frac{40}{7}\sqrt{0{,}15}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{240}}{7}\right) = \qquad \boxed{\tan(2\alpha_e) = 2{,}21313334} \qquad \boxed{\alpha_{e_1} = 32^\circ\ 50'\ 31'',67}$$

$$\cos(2\alpha_{e_1}) = \left(\frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2(2\alpha_{e_1})}}\right) = \frac{1}{+\sqrt{1 + \frac{240}{49}}} = \frac{7}{\sqrt{49 + 240}} = \left(\frac{7}{17}\right)$$

$$\cos(2\alpha_{e_1}) = \left(\frac{7}{17}\right); \quad \cos(\alpha_{e_1}) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha_{e_1})}{2}} = \sqrt{\frac{17 + 7}{2 \cdot 17}} = \sqrt{\frac{24}{34}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha_{e_1}) = \sqrt{\frac{12}{17}}} \qquad \text{sen}(\alpha_{e_1}) = \sqrt{1 - \frac{12}{17}} = \boxed{\text{sen}(\alpha_{e_1}) = \sqrt{\frac{5}{17}}}$$

calcolo degli assi

$$K s_1^2 s_2^2 = a_{11} X_c^2 + a_{22} Z_c^2 + 2a_{12} X_c Z_c - a_{33} = \frac{-A}{A_{33}}$$

$$K s_1^2 s_2^2 = (0{,}44)(-2{,}793103448)^2 + (0{,}65)(1{,}260567815)^2 + (-0{,}464758)(-2{,}793103448)(\ldots$$

$$(1{,}260567815) + 2{,}795723\,36$$

$$\ldots (1{,}260567815) + 2{,}725772336$$

$$K s_1^2 s_2^2 = 3{,}432627823 + 1{,}032817029 + 1{,}636364727 + 2{,}725722336 =$$

$$K s_1^2 s_2^2 = 8{,}827586200 = \frac{2{,}048}{0{,}232}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1^2 = \\ s_2^2 = \end{array}\right\rangle = \frac{2\left(K s_1^2 s_2^2\right)}{(a_{11} + a_{22}) \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 2a_{12}^2}} = \frac{2\,(8{,}8275862)}{(0{,}44 + 0{,}65) \mp \sqrt{(0{,}44 - 0{,}65)^2 + (0{,}464758)^2}} =$$

$$= \frac{17{,}65517240}{1{,}09 \mp \sqrt{0{,}2601}} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{17{,}65517240}{1{,}09 - 0{,}51} = s_1^2 = 30{,}43995234 \\[2ex] \dfrac{17{,}65517240}{1{,}09 + 0{,}51} = s_2^2 = 11{,}03448276 \end{array}\right.$$

$$s_1 = a = \sqrt{30,43995234} = \boxed{a = 5,51724137}$$

$$s_2 = b = \sqrt{11,03448276} = \boxed{b = 3,32181919}$$

Intersezione del cono col piano yz (x=0)

L'equazione diventa:

$$\Big[(0,31)_{a_{11}}y^2 + (0,65)_{a_{22}}z^2 - 2(0,271108834)_{2a_{12}}yz + 2(1,375544171)_{2a_{13}}y - 2(1,468427661)_{2a_{23}}z - (2,725723336)_{a_{33}} = 0\Big]$$

Il determinante delle coniche: $A = a_{13}A_{31} - a_{23}A_{32} + a_{33}A_{33}$:

$$\begin{vmatrix} +0,31 & -0,271108834 & +1,375544171 \\ -0,271108834 & +0,65 & -1,468427661 \\ +1,375544171 & -1,468427661 & -2,725723336 \end{vmatrix} = \begin{cases} -2,725723336\,(0,128) & = -0,348892591 \\ +1,468427661\,(-0,0822904) & = -0,120837500 \\ +1,375544171\,(-0,496) & = -0,682269909 \end{cases}$$

$$A = -1,152000$$

$A \neq 0 \rightarrow$ (conica non degenere)

$A_{33} = +0,128 > 0 \rightarrow$ (caso ellittico); $(a_{11} \cdot A < 0 \; ; \; a_{22}A < 0) \rightarrow$ (ellisse reale)

equazione completa $\rightarrow$ ellisse ad assi ruotati e traslati.

$$\frac{A_{31}}{A_{33}} = \frac{-0,496}{+0,128} = \boxed{y_c = -3,875000}$$ } coordinate del centro

$$\frac{-A_{32}}{A_{33}} = \frac{+0{,}0822904}{+0{,}128} = \boxed{z_c = +0{,}642893750}$$ del centro "C"

argolo di rotazione assi:

$$\tan(2\alpha_c) = \frac{2a_{12}}{(a_{11} - a_{22})} = \frac{-0{,}542217668}{(0{,}31 - 0{,}65)} = +1{,}594757847 \quad (>0)$$

$$\boxed{\alpha_c = 28° \, 57' \, 18''}$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha_c}} = 0{,}53125 00 \; ; \; \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha_c}{2}} = 0{,}875 \; ;$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha_c} = 0{,}484122918 \; . \; — \quad \boxed{\cos\alpha_c = 0{,}875} \; :$$

<u>calcolo degli assi:</u>

$$Ks_1^2 s_2^2 = \frac{-A}{A_{33}} = \frac{1,152}{0,128} = 9, =$$

verifichiamo:

$$Ks_1^2 s_2^2 = a_{11} y_e^2 + a_{22} z_e^2 + 2a_{12} y_e z_e - a_{33}$$

$$= Ks_1^2 s_2^2 = 0,31(3,875)^2 + 0,65(0,64289375)^2 - 0,542217668(3,875)(0,64289375) + 2,72572336$$

$$Ks_1^2 s_2^2 = 4,65484 + 0,268653043 + 1,350779856 + 2,72572336 = 9$$

$$\left.\begin{matrix} s_1^2 = \\ s_2^2 = \end{matrix}\right\rangle = \frac{2(9)}{(0,31+0,65) \mp \sqrt{(0,31-0,65)^2 + (0,542217668)^2}} = \frac{18}{(0,96) \mp \sqrt{0,4096}}$$

$$\left.\begin{matrix} a^2 = \\ b^2 = \end{matrix}\right\rangle = \frac{18}{0,96 \mp 0,64} = \begin{cases} \frac{18}{0,32} = 5,625 \rightarrow \boxed{a = 7,5} \\ \frac{18}{1,6} = 1,125 \rightarrow \boxed{b = 3,354101968} \end{cases}$$

Gli elementi calcolati ci consentono di fare un disegno prospettico del cono assegnato.

Aggiungiamo al disegno anche l'intersezione del cono col piano: $0.6x + 0.7y + \sqrt{0.15}\,z = 0$ che passa

Cono col piano: $0,6x + 0,7y + \sqrt{0,15}\,z = 0$ che passa per P e per l'origine degli assi.

L'intersezione è un cerchio perchè il piano è normale all'asse del cono. Il cerchio di centro "P" e raggio $R = \overline{PV}\,tg\varphi = \frac{1}{2}\,\overline{PT} = \frac{1}{2}(6,536491673) = \overline{PR}$

=

$$R = 3,268245837$$